

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS, MATEMATIKOS IR E-STUDIJŲ
INSTITUTAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Kristina KUČIRIAVAITĖ

Netiesinių Dirako lygčių sprendiniai išsigimimo
taško aplinkoje

Bakalauro darbas

Darbo vadovas:
doc. dr. Mindaugas STAKVILEVIČIUS

Šiauliai, 2015

Turinys

Įvadas	3
1. Teorinė dalis	4
1.1. Išsigimusios diferencialinės lygtys	4
1.2. Netiesinių išsigimusių diferencialinių lygčių sprendinių tyrimas	4
2. Praktinė dalis	6
2.1. Konkrečios netiesinės Dirako lygtys nulinio taško aplinkoje	6
2.1.1 Lygčių transformavimas keitiniais	6
2.1.2 Lygčių sistemos sprendimas laipsninių eilučių pavidalu	8
2.1.3 Sprendinių eilutės koeficientų radimas priskyrus konkrečias pradinių parametrų reikšmes	11
2.1.4 Rekurentinės formulės įvedimas	13
2.1.5 Rezultatų patikrinimas	14
2.1.6 Sprendinių eilutės koeficientų radimas su nepriskirtomis pradinėmis parametrų reikšmėmis	19
2.1.7 Kompiuterinis eilučių koeficientų nustatymo būdas	20
Išvados	23
Literatūra	23
SUMMARY	25

ĮVADAS

Darbo tikslas. Rasti netiesinių Dirako lygčių sprendinius išsigimimo taško aplinkoje.

Darbo uždaviniai:

1. Apibūdinti išsigimusias diferencialines lygtis;
2. Apžvelgti išsigimusias tiesines diferencialines lygtis;
3. Ištirti konkrečias netiesines diferencialines lygtis;
4. Įvesti konkrečių Dirako lygčių keitinius;
5. Apžvelgti lygčių fizikinius reikalavimus;
6. Rasti Dirako lygčių sprendinius eilučiu pavidalu.

Darbo metodai. Darbo tikslui pasiekti ir suformuluotiems uždaviniams atlikti analizuojama Lietuvos ir užsienio autorių mokslinė literatūra, taikomi matematiniai skaičiavimai.

Darbo struktūra. Mokslinį darbą sudaro įvadas ir dvi dalys, suskirstytos į atskirus skyrius. Pirmoje dalyje aprašyta teorija, kurią panaudojome atskirų sprendinių radimui. Teorijoje apibūdinamos išsigimusios diferencialinės lygtys bei nurodomos konkrečios netiesinės išsigimusios diferencialinės lygtys. Antroje dalyje pateiktas šių lygčių sprendimas skirtingais metodais, gauti rezultatai pateikti skaitiškai ir grafiškai. Darbo pabaigoje pateikiamas literatūros sąrašas.

1. TEORINĖ DALIS

1.1. IŠSIGIMUSIOS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Diferencialinėmis lygtimis aprašomi realūs fizikos, mechanikos, technikos, chemijos, biologijos reiškiniai bei procesai. Tirdami gamtos, socialinius reiškinius, fizikos, technikos, biomedicinos uždavinius turime sudaryti matematinį modelį, kuris būtų išreiškiamas ieškomųjų funkcijų ir jų išvestinių lygtimis.

Paprastosios diferencialinės lygtys, kurių koeficientai prie aukščiausios išvestinės virsta nuli arba turi ypatingumą, vadinamos išsigimstančiomis.

Neišsigimstančių diferencialinių lygčių (Fukso klasės diferencialinės lygtys) sprendiniai yra tolydžiosios (analizinės) funkcijos. Išsigimstančių diferencialinių lygčių sprendinių struktūra priklauso nuo išsigimimo laipsnio, o tokių lygčių sprendiniai gali turėti ypatingumą. Dažniausiai diferencialines lygtis bandoma suintegruoti baigtiniu pavidalu, t.y. jų sprendinius užrašyti analizinė formule, kuri yra ir tik retais atvejais elementariųjų funkcijų kombinacija. Ši diferencialinių lygčių teorijos dalis vadinama analizinė diferencialinių lygčių teorija. Paprastųjų diferencialinių lygčių, kurių eilė stipriai išsigimsta tam tikros daugdaros taškuose, analizinis sprendimas – sunkus ir sudėtingas uždavinys. Analizinėje išsigimstančių dalinių išvestinių sistemų teorijoje svarbu rasti analizinius išsigimimo daugdarų taškų aplinkoje sprendinius.

1.2. NETIESINIŲ IŠSIGIMUSIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDINIŲ TYRIMAS

Šio darbo tikslas - išsiaiškinti, ar turi sprendinius diferencialinių lygčių sistema, aprašyta [4]. Ši sistema gauta iš netiesinių Dirako lygčių ir Maksvelo lygčių šešiamatčiame pasaulyje:

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r}\right)u = \phi u, \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r} + \phi\right)v = u, \quad (1.2)$$

$$\frac{dG}{dr} = uv, \quad (1.3)$$

$$\frac{d(r\phi)}{dr} = rG. \quad (1.4)$$

Sistema priskiriama prie išsigimusių, todėl kad (1.1) ir (1.2) lygtyje, kai r artėja į 0, yra narių, artėjančių į begalybę.

2. PRAKTINĖ DALIS

2.1. KONKREČIOS NETIESINĖS DIRAKO LYGTYS NULINIO TAŠKO APLINKOJE

2.1.1 LYGČIŲ TRANSFORMAVIMAS KEITINIAIS

Diferencialinėmis lygtimis aprašysime šešiamaciame pasaulyje masės neturinčias daleles. Šiuo atveju lygtys įgauna pavidalą

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r}\right)u &= \phi u, \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r} + \phi\right)v &= u, \\ \frac{dG}{dr} &= uv, \\ \frac{d(r\phi)}{dr} &= rG. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Kadangi 3 iš 4 lygčių yra su netiesiniais nariais, norint sumažinti netiesinių narių skaičių atliekame pertvarkymus. Lygtis (1.1), (1.2) pertvarkius gauname

$$\begin{aligned} u' - \frac{m}{r}u - \phi u &= 0, \\ v' + \frac{m+1}{r}v + \phi v &= u. \end{aligned}$$

Pirmą lygtį daugindami iš v , antrą iš u ir jas sudėję gauname, kad

$$(uv)' + \frac{1}{r}(uv) = u^2.$$

Viską padauginame iš r ir turime tokią lygtį

$$(uvr)' = ru^2.$$

Turėdami lygtį

$$u' - \frac{mu}{r} - \phi u = 0,$$

padauginame ją iš u ir turime

$$uu' - \frac{my}{r} - \phi u = 0.$$

Tuomet atlikus pertvarkymus gauname

$$\frac{1}{2}(y)' - \frac{my}{r} - \phi y = 0.$$

Gautą lygtį dauginame iš

$$2r^{-2m}$$

ir atlikus pertvarkymus gauname

$$(yr^{-2m})' = 2r^{-2m}\phi y.$$

Taigi turime keturias lygtis:

$$G' = uv, \tag{2.6}$$

$$(r\phi)' = rG, \tag{2.7}$$

$$(ruv)' = ru^2, \tag{2.8}$$

$$(r^{-2m}u^2)' = 2r^{-2m}u^2\phi. \tag{2.9}$$

Įvedus keitinius $uv = j$ ir $u^2 = y$, lieka tik viena lygtis (2.13) su netiesiniu nariu

$$G' = j, \tag{2.10}$$

$$(r\phi)' = rG, \tag{2.11}$$

$$(rj)' = ry, \quad (2.12)$$

$$(r^{-2m}u^2)' = 2r^{-2m}y\phi. \quad (2.13)$$

2.1.2 LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDIMAS LAIPSNINIŲ EILUČIŲ PAVIDALU

Sprendinių ieškome laipsninių eilučių pavidalu:

$$G = \sum_n g_n r^n, \quad (2.14)$$

$$\phi = \sum_n \phi_n r^n, \quad (2.15)$$

$$j = \sum_n j_n r^n, \quad (2.16)$$

$$y = \sum_n y_n r^n. \quad (2.17)$$

Tada (2.10) lygtis yra

$$G' = \sum_n g_n r^{n-1},$$

o tai reiškia, kad

$$j = \sum_n g_n r^{n-1}.$$

Iš (2.11) turime, kad

$$(r\phi)' = rG.$$

Į lygtį įrašome įsivestą pažymėjimą ir gauname

$$(r\phi)' = r \sum_n g_n r^n.$$

Tuomet

$$r\phi = \int \sum g_n r^{n+1} dr,$$

o suintegravus

$$r\phi = \sum_n \frac{1}{n+2} g_n r^{n+2} + f_0.$$

Abi lygties puses padaliname iš r ir gauname, kad

$$\phi = \sum_n \frac{1}{n+2} g_n r^{n+1} + \frac{f_0}{r}.$$

Iš (2.12) lygybės turime, kad

$$(rj)' = r \sum_n n g_n r^{n-1} = \sum_n n g_n r^n.$$

Ši lygybė gauta vietoj j išvestinės įrašius

$$j = \sum_n g_n r^{n-1}.$$

Skaičiuojame išvestinę

$$(rj)' = \sum_n n^2 g_n r^{n-1}$$

ir gauname

$$ry = \sum_n n^2 g_n r^{n-1}.$$

Padalijame abi puses iš r ir turime y išraišką

$$y = \sum_n n^2 g_n r^{n-2}.$$

Gautąją y išraišką panaudojame (2.9) lygtyje ir turime, kad

$$r^{-2m}y = \sum_n n^2 g_n r^{n-2-2m}.$$

Pasinaudodami (2.13) lygtimi įrašome ją ir sutraukę narius turime

$$(yr^{-2m})' = \sum_n n^2 g_n r^{n-2-2m}.$$

Gautąsias ϕ ir y išraiškas panaudojame lygtyje

$$2r^{-2m}y\phi = 2 \sum_n n^2 g_n r^{n-2-2m} * \sum_n \frac{1}{n+2} g_n r^{n+2} + f_0.$$

Lygtį dauginame iš r laipsnio $2n - 2m - 1$ ir atlikę pertvarkymus, gauname lygtį, siejančią parametrus g_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, su skirtingais r laipsniais

$$\sum_n g_n n^2 (n - 2 - 2m - 2f_0) r^n = 2 \sum_l \sum_k \frac{k^2}{l+2} g_k g_l r^{k+l+2}.$$

Žinome, kad G lyginė argumento r funkcija - tengaminis laukas. Jis yra simetriškas r atžvilgiu. Vadinasi, išraiškoje

$$G = \sum_n g_n r^n,$$

negali būti nelyginio laipsnio narių. Turime formulę

$$\sum_n g_n n^2 (n - 2 - 2m - 2f_0) r^n = 2 \sum_l \sum_k \frac{k^2}{l+2} g_k g_l r^{k+l+2}.$$

Tarkime, kad $2m - 2f_0$ nėra sveikas skaičius. Kai $n = 0$ turime, kad kairioji ir dešinioji lygties pusės su bet koku g_0 yra lygi 0. Taip pat, kai $n = 1$, turime, kad kairioji ir dešinioji lygties pusės su bet koku g_1 yra lygi 0. Kai $n = 2$ turime, kad dešinioji lygties pusė yra lygi 0, o kairioje pusėje yra sandauga $8g_2$, tai prieštarauja lygties simetriškumui r atžvilgiu. Vadinasi g_2 yra lygus 0. Visi kiti nariai g_n yra lygūs 0 Kai $2m - 2f_0$ yra sveikasis skaičius, atsiranda nelyginiai nariai, o tai prieštarauja mūsų

sąlygai, kad negali būti nelyginio laipsnio narių.

2.1.3 SPRENDINIŲ EILUTĖS KOEFICIENTŲ RADIMAS PRISKYRUS KONKREČIAS PRADINIŲ PARAMETRŲ REIKŠMES

2.1.3.1 ANALIZINIS METODAS

Skaičiavimus atliksime priskyre neapibrėžtiems parametrms g_0 ir g_2 konkrečias reikšmes. $g_0 = -10$, $g_1 = 0$ ir $g_2 = 2, 5$. Iš fizikinių reikalavimų seka, kad $2m - 2f_0 = 0$. Tuomet lygtis supaprastėja

$$\sum_n g_n n^2 (n-2) r^n = 2 \sum_l \sum_k \frac{k^2}{l+2} g_k g_l r^{k+l+2}.$$

Apskaičiuosime keletą narių.

$$\text{Kai } n = 3: 9g_3(1 - 2m - 2f) = 2\frac{1}{3}g_1g_0 \Rightarrow g_3 = 0.$$

$$n = 4: 16g_4(2 - 2m - 2f) = 2(\frac{1}{3}g_1^2 + \frac{4}{2}g_2g_0) \Rightarrow g_4 = -3.125.$$

$$n = 5: 25g_5(3 - 2m - 2f) = 2(\frac{1}{4}g_1g_2 + \frac{4}{3}g_2g_1 + \frac{9}{2}g_3g_0) \Rightarrow g_5 = 0.$$

$$n = 6: 36g_6(4 - 2m - 2f) = 2(\frac{1}{5}g_1g_3 + \frac{4}{4}g_2^2 + \frac{9}{3}g_3g_1 + \frac{16}{2}g_4g_0) \Rightarrow g_6 = 3.56.$$

$$n = 7: 49g_7(5 - 2m - 2f) = 2(\frac{1}{6}g_1g_4 + \frac{4}{5}g_2g_3 + \frac{9}{4}g_3g_2 + \frac{16}{3}g_4g_1 + \frac{25}{2}g_5g_0) \Rightarrow g_7 = 0.$$

$$n = 8: 64g_8(6 - 2m - 2f) = 2(\frac{1}{7}g_1g_5 + \frac{4}{6}g_2g_4 + \frac{9}{5}g_3^2 + \frac{16}{4}g_4g_2 + \frac{25}{3}g_5g_1 + \frac{36}{2}g_6g_0)$$

$$\Rightarrow g_8 = -3.53.$$

$$n = 9: 81g_9(7 - 2m - 2f) = 2(\frac{1}{8}g_1g_6 + \frac{4}{7}g_2g_5 + \frac{9}{6}g_5g_2 + \frac{16}{5}g_4g_3 + \frac{25}{4}g_5g_2 + \frac{36}{3}g_6g_1 + \frac{49}{2}g_7g_0) \Rightarrow g_9 = 0$$

$$n = 10: 100g_{10}(8 - 2m - 2f) = 2(\frac{1}{9}g_1g_7 + \frac{4}{8}g_2g_6 + \frac{9}{7}g_3g_5 + \frac{16}{6}g_4^2 + \frac{25}{5}g_5g_3 + \frac{36}{4}g_6g_2 + \frac{49}{3}g_7g_1 + \frac{64}{2}g_8g_0) \Rightarrow g_{10} = 3.1.$$

$$n = 11: 121g_{11}(9 - 2m - 2f) = 2(\frac{1}{10}g_1g_8 + \frac{4}{9}g_2g_7 + \frac{9}{8}g_3g_6 + \frac{16}{7}g_4g_5 + \frac{25}{6}g_5g_4 + \frac{36}{5}g_6g_3 + \frac{49}{4}g_7g_2 + \frac{64}{3}g_8g_1 + \frac{81}{2}g_9g_0) \Rightarrow g_{11} = 0.$$

$$n = 12: 144g_{12}(10 - 2m - 2f) = 2(\frac{1}{11}g_1g_9 + \frac{4}{10}g_2g_8 + \frac{9}{9}g_3g_7 + \frac{16}{8}g_4g_6 + \frac{25}{7}g_5^2 + \frac{36}{6}g_6g_4 + \frac{49}{5}g_7g_3 + \frac{64}{4}g_8g_2 + \frac{81}{3}g_9g_1) + \frac{100}{2}g_{10}g_0 \Rightarrow g_{12} = -2.48.$$

$$n = 13: 169g_{13}(11 - 2m - 2f) = 2(\frac{1}{12}g_1g_{10} + \frac{4}{11}g_2g_9 + \frac{9}{10}g_3g_8 + \frac{16}{9}g_4g_7 + \frac{25}{8}g_5g_6 + \frac{36}{7}g_6g_5 + \frac{49}{6}g_7g_4 + \frac{64}{5}g_8g_3 + \frac{81}{4}g_9g_2 + \frac{100}{3}g_{10}g_1 + \frac{121}{2}g_{11}g_0) \Rightarrow g_{13} = 0.$$

$$n = 14: 196g_{14}(12 - 2m - 2f) = 2\left(\frac{1}{13}g_1g_{11} + \frac{4}{12}g_2g_{10} + \frac{9}{11}g_3g_9 + \frac{16}{10}g_4g_8 + \frac{25}{9}g_5g_7 + \frac{36}{8}g_6^2 + \frac{49}{7}g_7g_5 + \frac{64}{6}g_8g_4 + \frac{81}{5}g_9g_5 + \frac{100}{4}g_{10}g_2 + \frac{121}{3}g_{11}g_1 + \frac{144}{2}g_{12}g_0\right) \Rightarrow g_{14} = 1.85.$$

$$n = 15: 225g_{15}(13 - 2m - 2f) = 2\left(\frac{1}{14}g_1g_{12} + \frac{4}{13}g_2g_{11} + \frac{9}{12}g_3g_{10} + \frac{16}{11}g_4g_9 + \frac{25}{10}g_5g_8 + \frac{36}{9}g_6g_7 + \frac{49}{8}g_7g_6 + \frac{64}{7}g_8g_5 + \frac{81}{6}g_9g_4 + \frac{100}{5}g_{10}g_3 + \frac{121}{4}g_{11}g_2 + \frac{144}{3}g_{12}g_1 + \frac{169}{2}g_{13}g_0\right) \Rightarrow g_{15} = 0.$$

Taip pat išreiškiame kitų eilučių koeficientus per eilutės g koeficientus g_n , kai $n = 0, 1, 2, \dots$, turime eilutę $\phi = \sum f_n r^n$. Iš čia matyti, kad koeficientai prie vienodų r laipsnių išreiškiami formule $\phi = \sum \frac{1}{n+2} g_n r^{n+1}$. Kai antroje sumoje laipsnio rodiklis vienetu mažesnis gauname, kad $f_n = \frac{1}{n-1+2} g_{n-1}$. Sutvarkius lygtį turime

$$f_n = \frac{1}{n+1} g_{n-1}.$$

Kai $n=0$, turime $f_0 = g_1 = 0$.

Kai $n=1$, $f_1 = \frac{1}{2}$, $g_0 = -5$.

Kai $n=2$, $f_2 = \frac{1}{3}$, $g_1 = 0$.

Kai $n=3$, $f_3 = \frac{1}{4}$, $g_2 = 0, 625$.

Kai $n=4$, $f_4 = \frac{1}{5}$, $g_3 = 0$.

Kai $n=5$, $f_5 = \frac{1}{6}$, $g_4 = -0, 52$.

Kai $n=6$, $f_6 = \frac{1}{7}$, $g_5 = 0$.

Kai $n=7$, $f_7 = \frac{1}{8}$, $g_6 = 0.44$.

Kai $n=8$, $f_8 = \frac{1}{9}$, $g_7 = 0$.

Kai $n=9$, $f_9 = \frac{1}{10}$, $g_8 = -0, 35$.

Kai $n=10$, $f_{10} = \frac{1}{11}$, $g_9 = 0$.

Taip pat analogiškai sugretinami ir kitų lygčių (eilučių pavidalu) koeficientai prie vienodų r laipsnių.

$$j_n = (n+1)g_{n+1}.$$

Kai $n=0$, turime $j_0 = g_1 = 0$.

Kai $n=1$, $j_1 = 2$, $g_2 = 5$.

Kai $n=2$, $j_2 = 3$, $g_3 = 0$.

Kai $n=3$, $j_3 = 4$, $g_4 = -12, 5$.

Kai $n=4$, $j_4 = 5$, $g_5 = 0$.

Kai $n=5$, $j_5 = 6$, $g_6 = 21, 35$.

Kai $n=6$, $j_6 = 7$, $g_7 = 0$,

Kai $n=7$, $j_7 = 8$, $g_8 = -28, 24$.

Kai $n=8$, $j_8 = 9$, $g_9 = 0$.

Kai $n=9$, $j_9 = 10$, $g_{10} = 31$.

Kai $n=10$, $j_{10} = 11$, $g_{11} = 0$.

$$y_n = (n + 2)^2 g_{n+2}.$$

Kai $n=0$, turime $y_0 = 4g_{10}$.

Kai $n=1$, $y_1 = 9$, $g_3 = 0$.

Kai $n=2$, $y_2 = 16$, $g_4 = -50$.

Kai $n=3$, $y_3 = 25$, $g_5 = 0$.

Kai $n=4$, $y_4 = 36$, $g_6 = 128, 16$.

Kai $n=5$, $y_5 = 49$, $g_7 = 0$,

Kai $n=6$, $y_6 = 64$, $g_8 = 225, 92$.

Kai $n=7$, $y_7 = 81$, $g_9 = 0$.

Kai $n=8$, $y_8 = 100$, $g_{10} = 310$.

Kai $n=9$, $y_9 = 121$, $g_{11} = 0$.

Kai $n=10$, $y_{10} = 144$, $g_{12} = -357$.

2.1.4 REKURENTINĖS FORMULĖS ĮVEDIMAS

Koeficientų skaičiavimas gali būti atliekamas rekurentine formule. Ją gauname, sulyginę koeficientus prie vienodų r laipsnių abiejose lygties

$$\sum_n g_n n^2 (n-2) r^n = 2 \sum_l \sum_k \frac{k^2}{l+2} g_k g_l r^{k+l+2} \quad (2.18)$$

pusėse. Kai kairėje pusėje r laipsnio rodiklis yra $m+3$, dešinėje pusėje m turi būti lygus $k+l+2$. Kiekvienam sumos nariui paėmę vieną kairiosios pusės narį ir dešinėje pusėje palikę vieną sumą pagal k gauname, kad

$$g_{m+3} = \frac{2 \sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{k^2}{m+3-k} g_k g_{m-k+1} \right)}{(m+1)(m+3)^2}. \quad (2.19)$$

Pradedame skaičiuoti nuo 4 nario, kadangi pirmieji trys jau yra nusakyti skyrelyje 2.1.3. Per šiuos du koeficientus g_0 ir g_2 išreiškiame visus aukštesnės eilės koeficientus. Tačiau naudodamiesi šia rekurentine formule apskaičiuojame koeficientus tik prieš tai priskyre konkrečias g_0 ir g_2 reikšmes.

2.1.5 REZULTATŲ PATIKRINIMAS

Netiesinių Dirako lygčių sprendinių radimas pakankamai ilgas ir sudėtingas procesas, nes jis neturi algoritmo, tačiau jį gerokai palengvina ir pagreitina kompiuterinės matematinės sistemos, akimirksniu apskaičiuojančios sudėtingų formulių reikšmes. Tai man pavyko rasti programos MATHCAD pagalba. Pirmiausia randame per rekurentinės formulės g_n , kai $n = 3, 4, 5, \dots$, narius, kai koeficientams g_0, g_1, g_2 priskirtos konkrečios reikšmės. Naudodamasi eilutėmis apskaičiuoju ieškomų funkcijų reikšmes su anksčiau priskirtomis pradinėmis sąlygomis $g_0 = -10, g_2 = 2, 5$.

$$g_{m+3} = \frac{2 \sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{k^2}{m+3-k} g_k g_{m-k+1} \right)}{(m+1)(m+3)^2} \quad (2.20)$$

$$j_m = (m+1)g_{m+1} \quad (2.21)$$

$$y_m = (m+2)^2 g_{m+2} \quad (2.22)$$

$$f_{m+1} = \frac{1}{m+2} g_m \quad (2.23)$$

Antrasis skaičiavimo būdas - skaitinis integravimas Rungės ir Kutos metodu, kai pradinės reikšmės g_0, g_1, g_2 tos pačios. Grafiškai pavaizduoti šie sprendiniai intervale nuo 0.00001 iki 1.05. Pastebima, kad rezultatai sutampa tik šiame intervale. Tai reiškia, kad sprendinių eilutės (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) konverguoja reliatyviai. Kito būdo iš netiesinių lygčių gautų eilučių konvergavimo patikrinimo mes nežinome.

Skaitinio integravimo Rungės ir Kuto metodu programa ir komentarai

Pasirenkame ieškomų funkcijų argumento intervalą:

$$r_0 := 0.000 \quad r_1 := 1.053$$

Grafiko taškų skaičius ir jų indeksai:

$$N := 10000 \quad n := 0..N$$

Skaičiavimo rekurentine formule paskutinio nario indeksas M:

$$M := 60 \quad m := 0..M$$

Pradinių parametrų g_0 ir g_2 priskirtos reikšmės:

$$a := -10 \quad b := 2.5$$

$$g_0 := a \quad g_1 := 0 \quad g_2 := b$$

Rekurentinė formulė:

$$g_{m+3} := \frac{2 \cdot \sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{k^2}{m+3-k} \cdot g_k \cdot g_{m-k+1} \right)}{(m+1) \cdot (m+3)^2}$$

Apskaičiuotos rekurentine formule koeficientų reikšmės:

$$j_m := (m+1) \cdot g_{m+1} \quad y_m := (m+2)^2 \cdot g_{m+2} \quad f_{m+1} := \frac{1}{m+2} \cdot g_m \quad f_0 := 0$$

	0		0		0		0
0	-10	0	0	0	10	0	0
1	0	1	5	1	0	1	-5
2	2.5	2	0	2	-50	2	0
3	0	3	-12.5	3	0	3	0.63
4	-3.13	4	0	4	128.13	4	0
5	0	5	21.35	5	0	5	-0.52
6	3.56	6	0	6	-225.69	6	0
7	0	7	-28.21	7	0	7	0.44
8	-3.53	8	0	8	309.76	8	0
9	0	9	30.98	9	0	9	-0.35
10	3.1	10	0	10	-356.47	10	0
11	0	11	-29.71	11	0	11	0.26
12	-2.48	12	0	12	361.79	12	0
13	0	13	25.84	13	0	13	-0.18
14	1.85	14	0	14	-336.19	14	0
15	0	15	-21.01	15	0	15	0.12
16	...	16	...	16	...	16	...

Sprendinių reikšmės argumento r reikšmėms:

$$u_0(r) := \sum_{m=0}^M (j_m \cdot r^m) \quad u_1(r) := \sum_{m=0}^M (y_m \cdot r^m)$$

Pradinės integravimo sąlygos:

$$u_3(r) := \sum_{m=0}^M (f_m \cdot r^m) \quad u_2(r) := \sum_{m=0}^M (g_m \cdot r^m) \quad U_0 := \begin{pmatrix} u_0(r_0) \\ u_1(r_0) \\ u_2(r_0) \\ u_3(r_0) \end{pmatrix}$$

Diferencialinių lygčių dešiniųjų pusių matrica:

$$D(r, u) := \begin{pmatrix} u_1 - \frac{u_0}{r} \\ 2 \cdot u_1 \cdot u_3 \\ u_0 \\ u_2 - \frac{u_3}{r} \end{pmatrix}$$

Integravimo komanda:

$$U := \text{rkfixed}(U_0, r_0, r_1, N, D)$$

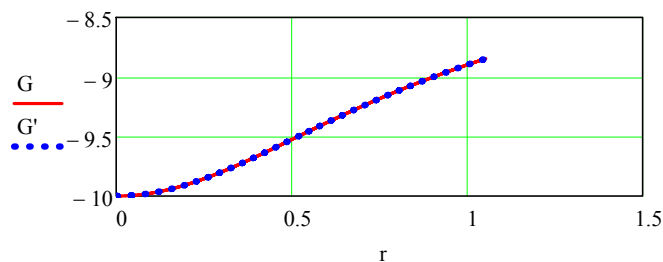
Sprendinių integruojant dešifravimas:

$$r := U^{(0)} \quad \underline{G} := U^{(3)} \quad \underline{J} := U^{(1)} \quad y_1 := U^{(2)} \quad \underline{\Phi} := U^{(4)}$$

Sprendinių, gautų eilutėmis, reikšmės:

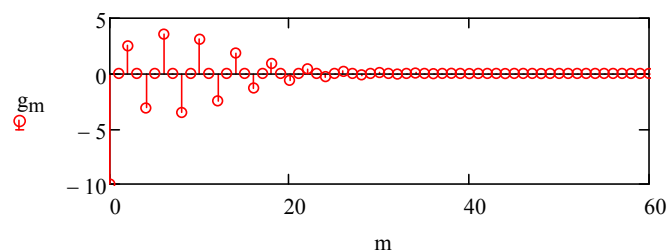
$$G'_n := u_2(r_n) \quad J'_n := u_0(r_n) \quad y'_n := u_1(r_n) \quad \Phi'_n := u_3(r_n)$$

Sprendinių G grafikai: G'- eilučių metodu, G- integruojant.

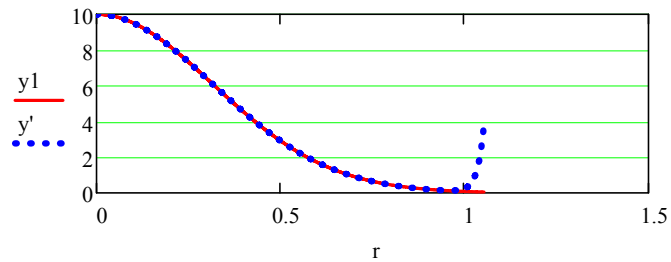


Sprendiniai sutampa visame intervale.

g koeficientų grafikas. Koeficientų, reikšmės artėja link 0, kai m neribotai didėja.

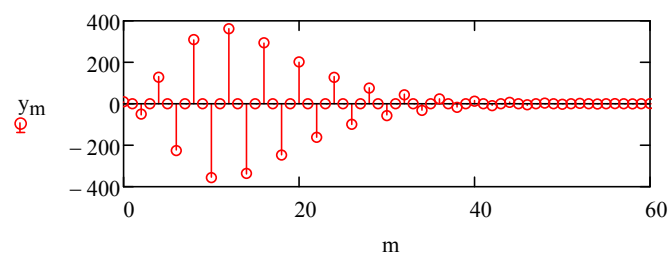


Sprendinių Y grafikai: Y'- eilučių metodu, Y - integruojant.

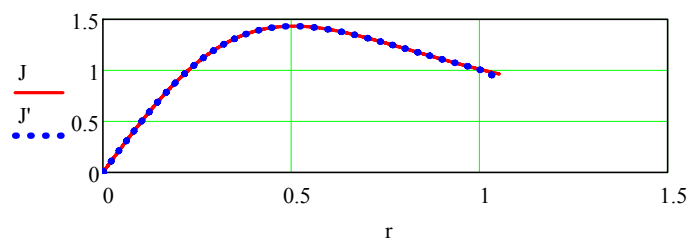


Funkcijos sutampa tik intervale $[0,00001;1,05]$.

y_m koeficientų grafikas. Koeficientų, reikšmės artėja link 0, kai m neribotai didėja.

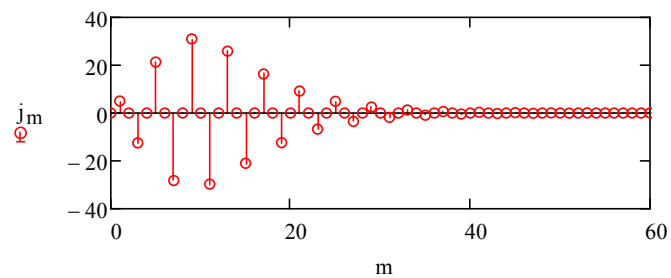


Sprendinių J grafikai: J'- eilučių metodu, J - integruojant.

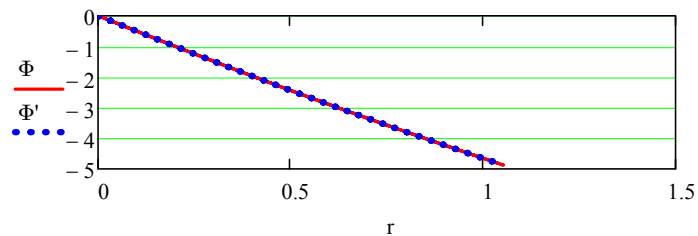


Funkcijos sutampa tik intervale $[0,00001;1,05]$.

j_m koeficientų grafikas. Koeficientų, reikšmės artėja link 0, kai m neribotai didėja.

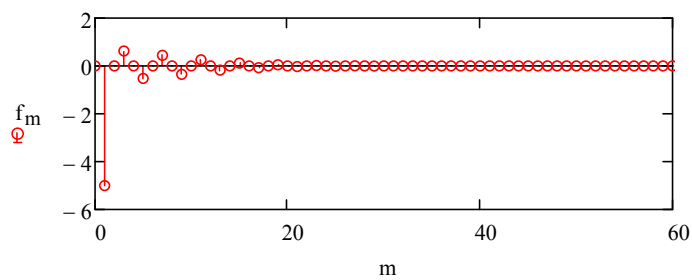


Sprendinių Φ grafikai: Φ' - eilučių metodu, Φ - integruojant.



Funkcijos sutampa visame intervale.

f_m koeficientų grafikas. Koeficientų, reikšmės artėja link 0, kai m neribotai didėja.



2.1.6 SPRENDINIŲ EILUTĖS KOEFICIENTŲ RADIMAS SU NEPRISKIRTOMIS PRADINĖMIS PARAMETRŲ REIKŠMĖMIS

Skaičiavimus atliksime su nepriskirtomis konkrečiomis parametrų reikšmėmis. Panaudosime (2.24) formulę lyginiams n (nelyginiai lygūs 0)

$$\sum_n g_n n^2 (n-2) r^n = 2 \sum_l \sum_k \frac{k^2}{l+2} g_k g_l r^{k+l+2}. \quad (2.24)$$

Nuosekliai skaičiuojant gaunami tokie rezultatai (tarpiniai čia praleisti):

Kai $n=4$: $g_4 4^2 (4-2) = 2 \left\{ \frac{2^2}{0+2} g_0 g_2 \right\}$.

Gauname $g_4 = 0,125 g_0 g_2$.

Kai $n=6$: $g_6 6^2 (6-2) = 2 \left\{ \frac{4^2}{0+2} g_4 g_0 + \frac{2^2}{2+2} g_2 g_2 \right\}$.

Gauname $g_6 = 0,01389 g_0^2 g_2 + 0,01389 g_2^2$.

Kai $n=8$: $g_8 8^2 (8-2) = 2 \left\{ \frac{6^2}{0+2} g_6 g_0 + \frac{4^2}{2+2} g_4 g_2 + \frac{2^2}{4+2} g_2 g_4 \right\}$,

$g_8 = 1,3028 * 10^{-3} g_0^3 g_2 + 4,34028 * 10^{-3} g_1 g_2^2$.

Kai $n=10$: $g_{10} 10^2 (10-2) = 2 \left\{ \frac{8^2}{0+2} g_8 g_0 + \frac{6^2}{2+2} g_6 g_2 + \frac{4^2}{4+2} g_4 g_4 + \frac{2^2}{6+2} g_2 g_6 \right\}$.

Gauname $g_{10} = 1,04167 * 10^{-4} g_0^4 g_2 + 7,8215 * 10^{-4} g_0^2 g_2^2 + 3,29861 g_2^3$.

Kai $n=12$: $g_{12} 12^2 (12-2) = 2 \left\{ \frac{10^2}{0+2} g_{10} g_0 + \frac{8^2}{2+2} g_8 g_2 + \frac{6^2}{4+2} g_6 g_4 + \frac{4^2}{6+2} g_4 g_6 + \frac{2^2}{8+2} g_2 g_8 \right\}$.

Gauname $g_{12} = 7,2338 * 10^{-6} g_0^5 g_2 + 1,03202 * 10^{-4} g_0^3 g_2^2 + 1,41059 * 10^{-4} g_0 g_2^3$.

Kai $n=14$: $g_{14} 14^2 (14-2) = 2 \left\{ \frac{12^2}{0+2} g_{12} g_0 + \frac{10^2}{2+2} g_{10} g_2 + \frac{8^2}{4+2} g_8 g_4 + \frac{6^2}{6+2} g_6 g_6 + \frac{4^2}{8+2} g_4 g_8 + \frac{2^2}{10+2} g_2 g_{10} \right\}$.

Gauname $g_{14} = 4,42885 * 10^{-7} g_0^6 g_2 + 1,09983 * 10^{-5} g_0^4 g_2^2 + 3,26013 * 10^{-5} g_0^2 g_2^3 + 7,84399 * 10^{-6} g_2^4$.

2.1.7 KOMPIUTERINIS EILUČIŲ KOEFICIENTŲ NUSTATYMO BŪDAS

Skaičiuodami analiziniu būdu radome, kad kiekvienas lyginis koeficientas g gali būti išreikštas formule:

$$G_w = \sum_{s=0}^{S-1} \left[(a_w)^{p0_s} \cdot (b_w)^{p2_s} \cdot C_s \right] \quad (3)$$

Konkrečiai:

$$\begin{aligned} g_4 &= C_0 g_2 \cdot g_0 \\ g_6 &= C_0 g_4 + C_1 (g_2)^2, \\ g_8 &= C_0 g_6 + C_1 g_7 g_4, \\ &\dots \end{aligned}$$

Apskaičiavus iš rekurentinės formulės koeficientą g_{20} konkrečioms a ir b reikšmėms sudarome lygčių sistemą, kurioje nežinomieji C yra koeficientai prie sumos (3) narių. Tų lygčių skaičius turėtų būti lygus ieškomų koeficientų skaičiui, visas lygtis rašome skirtingoms a ir b reikšmėms.

Apibendrinus gauname, kad koeficientai gali būti išreikšti formule G_w , kur p_0 yra a laipsnio rodiklis, o p_2 yra b laipsnio rodiklis.

Mathcad programa atlikau tyrimą, kuris leido apskaičiuoti g_{20} nari.

Pirmiausia pasirenkame ieškomo g_L numerį L , čia bus g_{20} .

$$L := 20$$

Atskiriame sveikąją dalį;

$$S := \text{floor}\left(\frac{L+2}{4}\right) \quad s := 0..S-1 \quad S = 5$$

$$p_{0_s} := \frac{L}{2} - 1 - 2s \quad p_{2_s} := s + 1$$

Sudarome laipsnių rodiklių dviejų stulpelių matricą,

$$p := \text{augmen}(p_0, p_2)$$

Pasirenkame lygčių skaičių $K > S$ (priedas prie S mūsų nuožiūra)

$$K := S + 5 \quad k := 0..K \quad j := 0..K$$

$$p = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \\ 5 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Panaudojame atsitiktinių skaičių generatorių ir priskiriame atsitiktines reikšmes intervale $(-6;6)$

$$a_k := \text{rnd}(12) - 6 \quad b_k := \text{rnd}(12) - 6$$

$$g_{0,k} := a_k \quad g_{1,k} := 0 \quad g_{2,k} := b_k$$

$$N := L - 3 \quad n := 0..N$$

N yra maksimalus koeficientų C rekurentinės formulės indeksas

$$g_{n+3, k} := \frac{2 \cdot \sum_{s=1}^{n+1} \left(\frac{s^2}{n+3-s} \cdot g_{s, k} \cdot g_{n-s+1, k} \right)}{(n+1) \cdot (n+3)^2}$$

$$G_k := g_{L, k}$$

Apskaičiuojame g_{20} priskirtiems atsitiktiniams a ir b ir pažymime apskaičiuotą G_k , kiekvienam k sudaroma atskira lygtis.

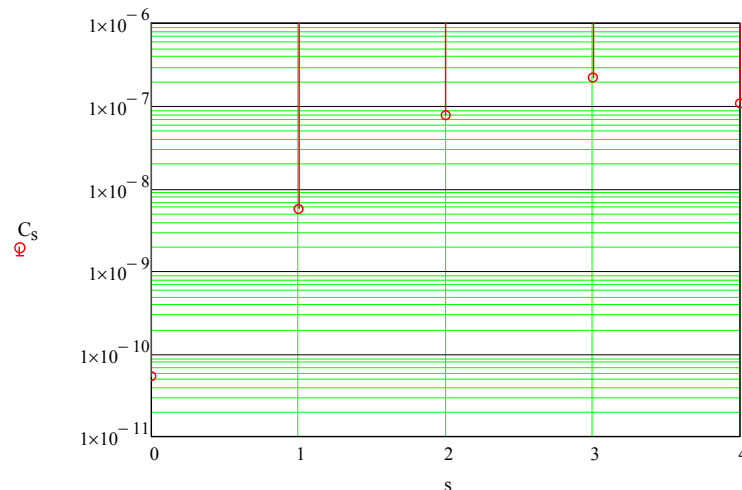
$$B_{k, s} := (g_{0, k})^{p_{0s}} \cdot (g_{2, k})^{p_{2s}}$$

B yra kairiosios pusės lygties matrica, o G dešinėsios pusės stulpelis, toliau nurodome lygčių sistemos $B \cdot C = G$ sprendimo komandą.

$$C := \text{Isolve}(B, G)$$

$$C = \begin{pmatrix} 5.382 \times 10^{-11} \\ 5.666 \times 10^{-9} \\ 7.716 \times 10^{-8} \\ 2.203 \times 10^{-7} \\ 1.074 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

Logaritminis g_{20} sumos koeficientų grafikas



Apskaičiuotos sumos formulę išskleisime, joje a laipsnius imame iš pirmo p matricos stulpelio; b laipsnius imame iš antrojo p matricos stulpelio, o C imame iš C matricos stulpelio.

$$G_{20} = C_0 a^9 b^1 + C_1 a^7 b^2 + C_2 a^5 b^3 + C_3 a^3 b^4 + C_4 a^1 b^5$$

Rezultatų sutikrinimui pasirenkame laisvai a ir b numerį w ir patikriname ar gauname sumos formulę Gw tą patį, ką buvome gavę rekurentine formule.

$$w := 7$$

$$a_w = -2.352 \quad b_w = 3.4$$

Turime kairiosios pusės matricą, sudarytą iš koeficientų be konkrečių reikšmių, skirtingų prie įvairių a ir b laipsnių.

$$G_w := \left[\sum_{s=0}^{S-1} \left[(a_w)^{p0_s} \cdot (b_w)^{p2_s} \cdot C_s \right] \right] \quad (3)$$

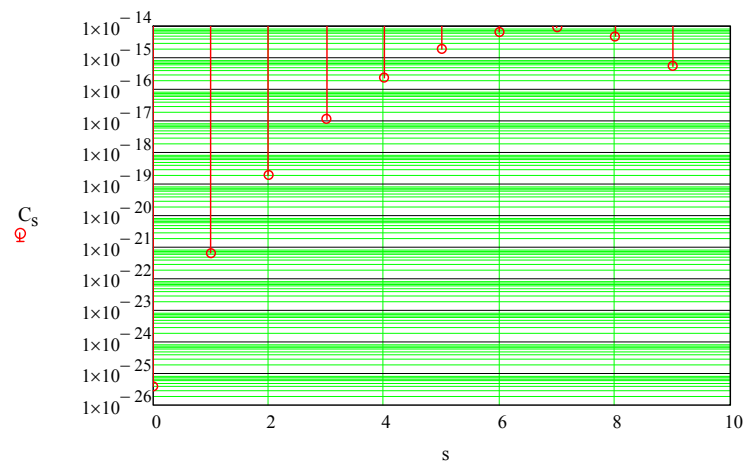
$$G_w = -7.425746 \times 10^{-4}$$

$$G_w = -7.425746 \times 10^{-4}$$

Patikriname gautų rezultatų paklaidą

$$G_w - G_w = 0$$

Žemiau pateiktas logaritminis g_{40} sumos koeficientų grafikas.



	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1.9 · 10 ⁻¹⁵
6	6.551 · 10 ⁻¹⁵
7	9.296 · 10 ⁻¹⁵
8	4.69 · 10 ⁻¹⁵
9	0

IŠVADOS

1. Radome netiesinių Dirako išsigimusių diferencialinių lygčių sprendinius išsigimimo taško $r=0$ aplinkoje.
2. Reguliarius sprendinius radome laipsninių eilučių pavidalu.
3. Radome rekurentinę formulę, išreiškianti visus eilučių koeficientus per dvi pradines reikšmes.
4. Gavome, kad funkcijų, apskaičiuotų per gautas eilutes, ir apskaičiuotų skaitiškai integruojant, reikšmės sutampa pradiniam kintamojo r intervale.
5. Radome būdą apskaičiuoti ieškomų funkcijų eilučių koeficientus, nepriskyrus jiems konkrečių reikšmių.

LITERATŪRA

1. Čiegis, R. 2003. *Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai*. Vilnius.
2. Golokvosčius, P. 2000. *Diferencialinės lygtys*. Vilnius, TEV.
3. Korovkinas, P. 1963. *Matematinė analizė*. Maskva.
4. Stakvilevičius, M. 1999. *Dirako lygtys – šešiamačio pseodoeuklidinio pasaulio su trimačiu laiku bemasio lauko lygčių projekcija į standartinį keturmatį pasaulį*. Fizikos ir matematikos fakulteto mokslinio seminaro darbai, 2, 74-79, 1999.
5. Šinkūnas, J., Urbonas, A. 2004. *Eilutės*. Vilnius.

The Solutions of Nonlinear Dirac Equation in a Neighbourhood of Degenerate Point

SUMMARY

The purpose of the thesis. Find nonlinear Dirac equation solutions of degenerate points around.

Methods used in thesis. To achieve the purpose of the thesis was performed analysis of Lithuanian and foreign literature and applied mathematical methods.

The main result. Find nonlinear Dirac equation solutions of degenerate points around.

Conclusion. Proved existence of nonlinear Dirac equation solutions of degenerate points around.