



VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Ruslan Prigodin

**APROKSIMACIJA SKELLAM SKIRSTINIŲ
APPROXIMATION BY THE SKELLAM LAW**

Baigiamasis magistro darbas

Taikomosios statistikos studijų programa, valstybinis kodas 621G31001

Statistinių metodų finansuose ir ekonomikoje specializacija

Statistikos studijų kryptis

Vilnius, 2018

Vilniaus Gedimino technikos universitetas Fundamentinių mokslų fakultetas Matematinės statistikos katedra	ISBN ISSN Egz. sk. Data-.....-.....
Antrosios pakopos studijų Taikomosios statistikos programos magistro baigiamasis darbas Pavadinimas Aproksimacija Skellam skirstiniu Autorius Ruslan Prigodin Vadovas Kazimieras Padvelskis	
Kalba: lietuvių	
Anotacija Šiame darbe yra nagrinėjama atsitiktinių dydžių, turinčių visus baigtinius momentus, skirstinių aproksimacija Skellamo skirstiniu. Aproksimacijos liekamasis narys vertinamas kumuliantų metodu. Nagrinėjami specialūs kumuliantai, leidžiantys rašyti V. Statulevičiaus tipo sąlygas. Rasti atsitiktinio dydžio, įgyjančio sveikąsias reikšmes, kai jo specialieji kumuliantai tenkina V. Statulevičiaus tipo sąlygą, aproksimacijos Skellam skirstiniu liekamojo nario tolygūs ir netolygūs įverčiai. Darbą sudaro 8 dalys: įvadas, neaprežtai dalūs atsitiktiniai dydžiai, Skellamo skirstinys, kumuliantai naudojami aproksimacijoje Skellam dėsnio, tolygieji įverčiai aproksimuojant Skellam dėsnio, netolygieji įverčiai aproksimuojant Skellam dėsnio, išvados, literatūros sąrašas. Darbo apimtis - 36 p. teksto be priedų, 16 bibliografinių šaltinių.	
Prasminiai žodžiai: pasiskirstymo funkcija, charakteristinė funkcija, kumuliantų metodas, Skellamo skirstinys, tolygus liekamojo nario įvertis, netolygus liekamojo nario įvertis.	

Vilnius Gediminas Technical University
Faculty of Fundamental Sciences
Department of Mathematical Statistics

ISBN	ISSN
Copies No.	
Date-.....-.....	

Master Degree Studies **Applied Statistics** study programme Master Graduation Thesis

Title	Approximation by the Skellam Law
-------	----------------------------------

Author **Ruslan Prigodin**

Academic supervisor **Kazimieras Padvelskis**

Thesis language: Lithuanian

Annotation

We consider an approximation of a cumulative distribution function which can be cumulative distribution functions of sums (products) of independent (dependent) random variables by the Skellam cumulative distribution function. Remainder term of the approximation is estimated by the cumulant method. The cumulant method is used by introducing special cumulants, satisfying the V. Statulevičius type condition. The main results is a uniform and nonuniform bound for the difference between cumulative distribution functions in terms of special cumulants.

Structure: introduction, infinitely divisible distributions, Skellam law, special cumulants in approximation by the Skellam law, uniform estimates in the approximation by the Skellam law, nonuniform estimates in the approximation by the Skellam law, conclusions, references.

Thesis consist of: 36 p. text without appendixes, 16 bibliographical entries.

Keywords: cumulative distribution function, characteristic function, cumulants method, Skellam law, uniform estimates, nonuniform estimates.

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Aproximacija Skellam skirstiniu

Atliko: Ruslan Prigodin
Vadovas: doc. Kazimieras Padvelskis

Vilnius, 2018

Turinys

Įvadas	2
1 Neapibrėžtai dalūs atsitiktiniai dydžiai	5
1.1 Neapibrėžtai dalių charakteristinių funkcijų savybės	6
1.2 Neapibrėžtai dalių charakteristinių funkcijų kanoninės išraiškos	7
1.3 Bendros ribinės teoremos	8
2 Skellamo skirstinys	10
3 Kumuliantai, naudojami aproksimacijoje Skellam dėsnio	13
4 Tolygieji įverčiai aproksimuojant Skellamo dėsnio	16
5 Netolygieji įverčiai aproksimuojant Skellam dėsnio	21
Išvados ir rezultatai	30
Literatūra	31

Įvadas

Viena pagrindinių tikimybių teorijos tyrimų krypčių yra ribinės teoremos. Garsioje B. V. Gnedenko ir A. N. Kolmogorovo [1] monografijoje yra rašoma: „Tikimybių teorijos pažintinė vertė atsiskleidžiama tik ribinėmis teoremomis. Be to, be ribinių teoremų negalima suprasti tikrojo turinio pačios pagrindinės tikimybių teorijos sąvokos – tikimybės sąvokos. Iš tikrųjų, visa tikimybių teorijos pažintinė vertė sąlygota tuo, kad masiniai atsitiktiniai reiškiniai savo visuminiame veikime sudaro kitus, ne atsitiktinius dėsningumus.”

Klasikinėje tikimybių teorijoje svarbią dalį užima sumų $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, n \in \mathbb{N}$ ir jų pasiskirstymo funkcijų $F_{S_n}(x)$ nagrinėjimas, kai ξ_k yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai įgyjantys realiasias reikšmes. Sumų S_n pasiskirstymo funkcijų $F_n(x)$ sekos riba $F(x)$, kai $n \rightarrow \infty$, yra vadinama sumos S_n ribine pasiskirstymo funkcija. Bedru atveju ribinę teoremą galime užrašyti tokiu būdu

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0, \quad \text{kai } n \rightarrow \infty.$$

Labai svarbus uždavinys yra įvertinti aproksimacijos paklaidą. Bendru atveju paklaidą galime užrašyti taip

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \leq \delta_n, \quad \text{kai } n \geq 1,$$

čia δ_n yra konvergavimo paklaida, iš kurios galima spręsti koks yra sumų S_n pasiskirstymo funkcijos $F_n(x)$ konvergavimo greitis prie ribinės pasiskirstymo funkcijos $F(x)$. Todėl bendru atveju galime užrašyti, kad

$$F_n(x) \sim F(x) \pm \delta_n, \quad n \geq 1.$$

Pirmosios ribinės teoremos buvo rastos nagrinėjant Bernulio eksperimentus. Tarkime, turime nepriklausomų vienodų eksperimentų seką. Atlikus kiekvieną eksperimentą, gali įvykti kuris nors įvykis su tikimybe p arba neįvykti su tikimybe $q = 1 - p$. Pažymėkime S_n įvykių įvykimų skaičių, atlikus n eksperimentų. Trivialumui išvengti tarkime, jog $0 < p < 1$. Nagrinėkime nepriklausomus atsitiktinius dydžius ξ_k , nusakytus taip:

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{su tikimybe } p, \\ 0, & \text{su tikimybe } q. \end{cases}$$

Tada

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Kadangi $\mathbf{E}\xi_k = p$, $\mathbf{E}\xi_k^2 = p$, tai $\mathbf{D}\xi_k = p - p^2 = pq$ tai

$$\mathbf{E}S_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k = np, \quad \mathbf{D}S_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{D}\xi_k = npq.$$

B. V. Gnedenko ir A. N. Kolmogorovas [1] rašo, kad nuo pirmosios ribinės teoremos įrodymo prasidėjo tikroji tikimybių teorijos istorija. Pirmąją tikimybių teorijos ribinę teoremą

1713 metais paskelbė J. Bernulis (Jacob Bernoulli, 1654–1705), tirdamas tikimybes

$$\mathbf{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Ji teigia, jog S_n/n konverguoja pagal tikimybę į p , t.y. kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0,$$

kai $n \rightarrow \infty$. Vėliau, A. de Muavras (Abraham de Moivre, 1667–1754) atveju $p = \frac{1}{2}$, o P. S. Laplasas (Pierre Simon Laplace, 1749–1827) bendru atveju gavo, kad

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad x \in \mathbb{R},$$

čia $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ – standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

S. D. Puasonas (Simeone Denis Poisson, 1781–1840) pastebėjo, kad pastarojoje formulėje konvergavimo greitis, kai tikimybė p maža, yra lėtas. Jis modifikavo Bernulio schemą, leidamas tikimybei $p = p_n$ priklausyti nuo bandymų skaičiaus n , tačiau taip, kad $np_n \rightarrow \lambda > 0$, kai $n \rightarrow \infty$. Pažymėję ξ_{nk} ir S_{nn} vietoje ξ_k ir S_n , matome, kad Puasono atvejis atitinka seką sumų

$$S_{nn} = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Čia kiekvienam n dėmenys ξ_{nk} yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę,

$$1 - \mathbf{P}(\xi_{nk} = 0) = \mathbf{P}(\xi_{nk} = 1) = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Nagrinėdamas šias binomines tikimybes, S. D. Puasonas įrodė, kad

$$\mathbf{P}(S_{nn} = k) \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{kai } n \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Taip buvo rastas Puasono dėsnis $\mathcal{P}(\lambda)$, kurio pasiskirstymo funkcija yra

$$F(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!},$$

čia $[x]$ reiškia skaičiaus x sveikąją dalį, t.y. didžiausią sveiką skaičių, neviršijantį x .

Dažnai yra nagrinėjama nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų S_n pasiskirstymo funkcijų konvergavimas prie normaliosios pasiskirstymo funkcijos, nes daugeliu atvejų atsitiktinių dydžių pasiskirstymai dažnai būna normalieji arba mažai nuo jų skiriasi. Todėl statistikoje, viena svarbiausių teoremų yra centrinė ribinė teorema (CRT). Iš tikrųjų tai ne viena teorema, greičiau – tai visa tyrimų kryptis.

Apibrėžimas. Sakome, kad atsitiktinių dydžių sekai galioja centrinė ribinė teorema, jei centruotų ir normuotų sumų $\bar{S}_n = \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}$ pasiskirstymo funkcijų seka, kai $n \rightarrow \infty$, konverguoja prie standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos

$$\mathbf{P} \left(\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} < x \right) \Rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Aproksimacijai ribiniu dėsniu dažnai taikomi pasiskirstymo funkcijų sąsūkų (kompozicijų), charakteristinių funkcijų ir Steino metodai. Šiame darbe taikysime kumuliantų metodą, kuris yra plačiai aprašytas L. Sauliaus ir V. Statulevičiaus monografijoje [13]. Parašysime vieną svarbų aproksimacijos normaliuoju dėsniu rezultatą gautą kumuliantų metodu:

Teorema (Rudzkis, Saulis, Statulevičius (1978)). *Jeigu atsitiktinio dydžio ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}\xi = 1$, kumuliantai Γ_k tenkina Statulevičiaus sąlygą:*

$$|\Gamma_k| \leq \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta^{k-2}}, \quad \Delta > 0, \quad \gamma \geq 0, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (S_\gamma)$$

tai

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - \Phi(x)| \leq \frac{18}{\Delta_\gamma},$$

kai

$$\Delta_\gamma = c_\gamma \Delta^{\frac{1}{1+2\gamma}}, \quad c_\gamma = \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right)^{\frac{1}{1+2\gamma}}.$$

Šioje teoremoje atsitiktiniu dydžiu ξ , gali būti, pavyzdžiui, nepriklausomų ar priklausomų atsitiktinių dydžių suma, atsitiktinių dydžių su svoriais suma, arba atsitiktinių dydžių sandauga ir t.t. Tačiau praktikoje susiduriame, kad ne visų atsitiktinių dydžių ξ pasiskirstymo funkcijų ribinė yra normaliojo dėsno pasiskirstymo funkcija. Todėl yra nagrinėjama atsitiktinių dydžių ξ pasiskirstymo dėsnių konvergavimas ir į kitus ribinius tikimybinus dėsnius, pavyzdžiui, Puasono, χ^2 , Stjudento ir t.t. Šiame darbe nagrinėjama atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcijos aproksimacija neaprežtai dalia Skellamo tikimybinių dėsno pasiskirstymo funkcija.

Šio darbo pagrindinis tikslas yra rasti aproksimacijos Skellamo dėsniu liekamojo nario įverčius.

Magistro darbo pagrindiniai uždaviniai:

1. Išnagrinėti Skellamo tikimybinių dėsnių, išaiškinti jo svarbą statistikoje, aprašyti jo savybes;
2. Apibrėžti specialius kumuliantus, naudojamus aproksimacijoje Skellamo dėsniu, rasti jų ryšį su kumuliantais, apibrėžtais klasikiniu būdu;
3. Rasti tolygų ir netolygų liekamojo nario įverčius aproksimuojant Skellamo dėsniu.

1 Neaprėžtai dalūs atsitiktiniai dydžiai

1.1 Apibrėžimas. Sakome, kad atsitiktinis dydis ξ yra neaprėžtai dalus, jeigu bet kokiam $n \in \mathbb{N}$ jis gali būti išreikštas n tarpusavyje nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nn}$ suma

$$\xi = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nn}. \quad (1.1)$$

Neaprėžtai dalaus atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją vadiname neaprėžtai dalia.

1.2 Apibrėžimas. Pasiskirstymo funkciją $F(x)$, vadiname neaprėžtai dalia, jeigu kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ ji yra vienodų pasiskirstymo funkcijų $F_n(x)$, sąsūka

$$F(x) = F_n(x) * F_n(x) * \dots * F_n(x) = (F_n(x))^{*n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Aišku, kad pasiskirstymo funkcija $F(x)$ yra neaprėžtai dali tada ir tik tada, kai neaprėžtai dali yra ir charakteristinė funkcija.

1.3 Apibrėžimas. Sakome, kad charakteristinė funkcija $f(t)$, kai $t \in \mathbb{R}$, neaprėžtai dali, jeigu kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ ji yra kurios nors charakteristinės funkcijos $f_n(t)$, kai $t \in \mathbb{R}$, n -asis laipsnis

$$f(t) = (f_n(t))^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Tokį tikimybinį dėsnį, kurio charakteristinė funkcija ir pasiskirstymo funkcijos yra neaprėžtai dalios, vadiname neaprėžtai daliu dėsniu.

Pasinaudoję 1.3 apibrėžimu, pateikiame keletą neaprėžtai dalių tikimybinių dėsnų pavyzdžių.

1. Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = \mu$ ir dispersija $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$ charakteristinė funkcija yra

$$f(t) = \exp \left\{ i\mu t - \sigma^2 \frac{t^2}{2} \right\} = \left(\exp \left\{ i\frac{\mu}{n}t - \frac{\sigma^2}{n} \frac{t^2}{2} \right\} \right)^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Kadangi bet kokiam $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(t) = \exp \left\{ i\frac{\mu}{n}t - \frac{\sigma^2}{n} \frac{t^2}{2} \right\}$$

yra normaliojo dėsnio charakteristinė funkcija, todėl seka, kad normalusis tikimybinis skirstinys yra neaprėžtai dalus.

2. Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirsčiusio pagal Puasono dėsnį su parametru $\lambda > 0$ charakteristinė funkcija yra

$$f(t) = \exp \left\{ \lambda(e^{it} - 1) \right\} = \left(\exp \left\{ \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1) \right\} \right)^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

Kadangi bet kokiam $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{n} (e^{it} - 1) \right\}$$

yra Puasono dėsno charakteristinė funkcija su parametru $\frac{\lambda}{n}$, todėl seka, kad Puasono tikimybinis skirstinys yra neaprežtai dalus. Todėl atsitiktinį dydį, pasiskirsčiusį pagal Puasono dėsnį su parametru $\lambda > 0$, galima užrašyti nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, turinčių Puasono skirstinį su parametru $\frac{\lambda}{n} > 0$, $n = 1, 2, \dots$, suma.

1.1 Neaprežtai dalių charakteristinių funkcijų savybės

Neaprežtai dalių tikimybinių skirstinių charakteristinės funkcijos turi svarbias savybes, jas suformuluojame kaip teoremas.

1.1 Teorema. *Neaprežtai dali charakteristinė funkcija neturi realiųjų šaknų arba*

$$f(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Iš 1.1 teoremos seka, kad neaprežtai dalios charakteristinės funkcijos $f(t)$ logaritmas $\ln(f(t))$, kai $t \in \mathbb{R}$, egzistuoja ir yra baigtinis. Todėl ši teorema svarbi užrašant neaprežtai dalių charakteristinių funkcijų kanonines išraiškas.

1.2 Teorema. *Jeigu $f(t)$ neaprežtai dali charakteristinė funkcija, tai bet kokiai konstantai $c > 0$ funkcija $(f(t))^c$ yra charakteristinė funkcija.*

1.3 Teorema. *Baigtinio skaičiaus neaprežtai dalių charakteristinių funkcijų sandauga taip pat yra neaprežtai dali charakteristinė funkcija.*

Paskutinioji 1.3 teorema, padeda sudaryti naujus neaprežtai dalius dėsnius, kurie yra apibrėžti kaip sandauga neaprežtai dalių dėsnių. Pasinaudojus šia teorema, pavyzdžiui, galima įrodyti, kad Laplaso tikimybinis skirstinys, kuris yra dviejų atsitiktinių dydžių pasiskirsčiusių pagal gamą skirstinį su parametrais $\alpha = 1$, $\beta = \pm 1$ suma, yra neaprežtai dalus dėsnis.

1.4 Teorema. *Jei charakteristinė funkcija yra neaprežtai dalių charakteristinių funkcijų sekos riba, tai ji pati yra neaprežtai dali.*

Iš 1.3 ir 1.4 teoremų seka, kad neaprežtai dalių charakteristinių funkcijų klasė yra uždara daugybos ir perėjimo prie ribos atžvilgiu. Šios teoremos vadinamos uždaroumo teoremomis.

1.5 Teorema. *Jei $g(t)$, kai $t \in \mathbb{R}$, yra charakteristinė funkcija, tai kiekvienam neneigiamam $c \geq 0$, funkcija*

$$f(t) = \exp\{c(g(t) - 1)\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

yra neaprežtai dali charakteristinė funkcija.

1.6 Teorema. Charakteristinė funkcija yra neapibrėžtai dali tada ir tik tada, kai ji yra Puasono tipo charakteristinių funkcijų sekos riba.

1.7 Teorema. Charakteristinė funkcija $f(t)$ yra neapibrėžtai dali tada ir tik tada, kai ji yra pavidalo

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{\alpha_n(g_n(t) - 1)\},$$

kai α_n yra teigiami skaičiai, o $g_n(t)$ – charakteristinės funkcijos.

1.2 Neapibrėžtai dalių charakteristinių funkcijų kanoninės išraiškos

1.8 Teorema. Tam, kad funkcija $f(t)$ būtų kažkurio neapibrėžtai dalaus dėsnio charakteristinė funkcija, būtina ir pakankama, kad funkcijos logaritmą galima būtų išreikšti tokiu pavidalu

$$\ln f(t) = i\gamma t + \int \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} d\Psi(u), \quad (1.4)$$

kai $t \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\Psi(u)$ – nemažėjanti funkcija su baigtine variacija, o pointegralinė funkcija taške $u = 0$ apibrėžiama

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} = -\frac{t^2}{2}.$$

Išreiškimas $\ln f(t)$ formulėje (1.4) yra vienintelis ir ši formulė yra vadinama Levi–Chinčino formule, o funkcija $\Psi(t)$ yra vadinama Levi–Chinčino spektrine funkcija.

1.9 Teorema. Funkcija $f(t)$, kai $t \in \mathbb{R}$, yra neapibrėžtai dali charakteristinė funkcija tada ir tik tada, kai ją galima parašyti pavidalu

$$\ln f(t) = i\gamma t - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \int_{(-\infty, \infty) \setminus \{0\}} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dL(u), \quad (1.5)$$

kai $t \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, σ – neneigiama konstanta, $L(u)$ – nemažėjanti funkcija intervaluose $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, tolydi iš kairės, $L(-\infty) = L(\infty) = 0$ ir bet kuriems baigtiniams $\delta > 0$

$$\int_{(-\delta, \delta) \setminus \{0\}} u^2 dL(u) < \infty.$$

Išraiška (1.5) yra vienareikšmė.

Neapibrėžtai dalios charakteristinės funkcijos pavidalas (1.5) vadinamas Levi formule, o funkcija $L(u)$ – Levi spektrine funkcija.

Levi ir Levi–Chinčino formulės yra apibendrinimas Kolmogorovo formulės, kuri buvo rasta 1932 metais atsitiktiniams dydžiams, turintiems baigtinę dispersiją.

1.10 Teorema. Funkcija $f(t)$, kai $t \in \mathbb{R}$, yra neapibrėžtai dali charakteristinė funkcija tada ir tik tada, kai ją galima parašyti pavidalu

$$\ln f(t) = i\gamma t + \int \left(e^{itu} - 1 - itu \right) \frac{1}{u^2} dK(u), \quad (1.6)$$

kai $t \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $K(u)$ ($K(-\infty) = 0$) – nemažėjanti funkcija su baigtiniu pokyčiu. Išraiška (1.6) yra vienareikšmė.

Neaprežtai dalios charakteristinės funkcijos pavidalas (1.6) vadinamas Kolmogorovo formule, o funkcija $K(u)$ – Kolmogorovo spektrine funkcija.

Nesunku suskaičiuoti, kad Kolmogorovo formulėje

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \ln f(t) \Big|_{t=0} &= i\mathbf{E}\xi = i\gamma, \\ \frac{d^2}{dt^2} \ln f(t) \Big|_{t=0} &= -\mathbf{D}\xi = -\int dK(u).\end{aligned}$$

Todėl

$$\gamma = \mathbf{E}\xi, \quad K(+\infty) = \mathbf{D}\xi. \quad (1.7)$$

Kolmogorovo ir Levi-Chinčino spektrinių funkcijų sąryšis yra

$$K(u) = \int_{-\infty}^u (1 + v^2) d\Psi(v).$$

Pateikiame keletą spektrinių funkcijų pavyzdžių.

1. Normaliajam pasiskirstymui Levi-Chinčino formulėje (1.4) ir Kolmogorovo formulėje (1.6), kai $\gamma = \mu$

$$K(u) = \Psi(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } u \leq 0, \\ \sigma^2, & \text{kai } u > 0, \end{cases}$$

o Levi formulėje (1.5), kai $\gamma = \mu$ ir $\sigma = \sigma$, $L(U) \equiv 0$.

2. Puasono pasiskirstymui Levi-Chinčino formulėje, kai $\gamma = \frac{\lambda}{2}$

$$\Psi(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } u \leq 1, \\ \frac{\lambda}{2}, & \text{kai } u > 1, \end{cases}$$

Levi formulėje, kai $\gamma = \frac{\lambda}{2}$ ir $\sigma = 0$

$$L(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } u \leq 0, \quad u > 1 \\ -\lambda, & \text{kai } 0 < u \leq 1, \end{cases}$$

Kolmogorovo formulėje, kai $\gamma = \lambda$

$$K(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } u \leq 1, \\ \lambda, & \text{kai } u > 1. \end{cases}$$

1.3 Bendros ribinės teoremos

Patį bendriausią uždavinį kaip tarpusavyje nepriklausomų nykstančių atsitiktinių dydžių sumų pasiskirstymo funkcijų sekoms rasti ribinę pasiskirstymo funkciją galime suformuluoti taip. Tarkime duota nepriklausomų nykstančių atsitiktinių dydžių seka $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$, $n = 1, 2, \dots$

1.4 Apibrėžimas. Dydžiai ξ_{nk} yra tolygiai nykstami, jei kiekvienam fiksuotam $\varepsilon > 0$

$$\sup_{1 \leq k \leq k_n} \mathbf{P}\{|\xi_{nk}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

kai $n \rightarrow \infty$.

Sudarome sumas

$$S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nk_n} - A_n,$$

čia A_n tam tikra konstantų seka. Tada galima suformuluoti du uždavinius:

- a) rasti visų galimų sumų S_n ribinių dėsnų klasę;
- b) rasti sąlygas, kad sumų S_n pasiskirstymo dėsnų seka konverguotų į kurią nors konkretų tos klasės dėsnį.

Toliau nagrinėsime, kokias savybes turi nykstamieji dydžiai ir kokie yra jų sumų ribiniai dėsniai. Kiekvienai pasiskirstymo funkcijai $F(x)$ priskiriame skaičių:

$$a = \int_{|x| < \tau} x dF(x),$$

kai τ fiksuotas teigiamas skaičius. Pažymime $\xi^* = \xi - a$ ir šio dydžio pasiskirstymo bei charakteristinę funkcijas

$$F^*(x) = F(x + a), \quad f^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF^*(x).$$

Analogiškai funkcijai F_{nk} priskiriame skaičių a_{nk} , pažymėkime $\xi_{nk}^* = \xi_{nk} - a_{nk}$ bei jo pasiskirstymo ir charakteristinę funkcijas F_{nk}^* , f_{nk}^* .

1.1 Lema. Jei atsitiktiniai dydžiai ξ_{nk} yra nykstami, tai tokie yra dydžiai ξ_{nk}^* .

1.2 Lema. Jei

$$\prod_{k=1}^{k_n} |f_{nk}(t)| \rightarrow |f(t)|$$

ir f yra charakteristinė funkcija, tai egzistuoja teigiama konstanta c su sąlyga

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}^*(x) \leq c,$$

pakankamai dideliems n .

Sekančiai lemai reikalingi nauji pažymėjimai, todėl toliau vartosime tokius žymenis:

$$\psi(t) = \psi(t, \alpha, \Psi) = i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} d\Psi(u),$$

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^x \frac{y^2}{1+y^2} dF_{nk}^*(y),$$

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{k_n} \left(\alpha_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF_{nk}^*(x) \right),$$

tada

$$\psi_n(t) = \psi_n(t, \alpha_n, \Psi_n).$$

1.3 Lema. *Jei nepriklausomų nykstanų atsitiktinių dydžių sumų S_n pasiskirstymo funkcijos konverguoja į ribinį dėsnį su charakteristine funkcija f , tai f yra neapibrėžtai dali, be to,*

$$e^{\psi_n(t)} \rightarrow f(t)$$

ir

$$\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \ln f_{nk}^*(t) - (f_{nk}^*(t) - 1) \right\} = \ln \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) - \psi_n(t).$$

Taigi iš 1.3 lemos seka, kad jeigų nykstanų dydžių sumos konverguoja į tam tikrą tikimybinį dėsnį, tai tas dėsnis bus neapibrėžtai dalus.

1.11 Teorema. *Nepriklausomų kiekvienoje serijoje ir nykstanų atsitiktinių dydžių sumų ribinių skirstinių klasė sutampa su neapibrėžtai dalių dėsninių klasė.*

Gali būti taip, kad atsitiktinių dydžių sumų $S_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}$ pasiskirstymai neturi ribinio dėsnio, tačiau egzistuoja konstantų $b_n (n = 1, 2, \dots)$ seka, kad $S_n - b_n$ turi ribinį pasiskirstymą.

1.12 Teorema. *Tarkime, kad ξ_{nk} yra nykstami, kiekvienoje serijoje nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Sumų $S_n - b_n$ su konstantomis b_n ribinių dėsninių klasė sutampa su neapibrėžtai dalių dėsninių klasė.*

Toliau pateikiame konvergavimo kriterijų į konkretų dėsnį.

1.13 Teorema. *Sumų S_n pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į neapibrėžtai dalių pasiskirstymo funkciją su charakteristine funkcija*

$$f(t) = \exp \left\{ i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} d\Psi(u) \right\} \quad (1.9)$$

tada ir tik tada, kai $\Psi_n \rightarrow \Psi$, o $\alpha_n \rightarrow \alpha$, kai $n \rightarrow \infty$.

2 Skellamo skirstinys

J. O. Irwinas [3] 1937 metais nagrinėjo atsitiktinį dydį $\xi = \eta_2 - \eta_1$, kai $\eta_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ir $\eta_2 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ yra nepriklausomi. Vėliau 1946 metais J. O. Skellamas [14], 1952 metais A. de Castro ir A. Prekopa [11] apibendrino šį atsitiktinį dydį, kai $\eta_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ ir $\eta_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ yra nepriklausomi, todėl skirstinys tokio atsitiktinio dydžio buvo pavadintas Skellamo. Ir tik 2006 metais D. Karlis ir I. Ntzoufras [5], pradėjo nagrinėti atsitiktinį dydį ξ , kai $\eta_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ ir $\eta_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ yra priklausomi. Jau 1956 metais J. Romani [12] įrodė, kad visi Skellamo skirstinio nelyginiai kumuliantai lygūs $\lambda_2 - \lambda_1$, o visi lyginiai kumuliantai lygūs $\lambda_1 + \lambda_2$. Vėliau J. Strackee ir J. J. D. van der Gon [15] 1962 metais sudarė šio atsitiktinio dydžio ξ skirtingiems λ_1 ir λ_2 reikšmėms tikimybių lenteles. Ir tik 2000 metais D. Karlis ir I. Ntzoufras [4] išnagrinėjo Skellamo skirstinio savybes, o taip pat didžiausio tikėtinumo metodu vertino

skirstinio parametrus. Šiek tiek vėliau 2006 metais D. Karlis ir I. Ntzoufras [5] pritaikė Bajeso teoriją skaičiuojant Skellamo skirstinio parametrus.

Skellamo skirstinys yra plačiai taikomas skirtingose srityse. Žinome, kad jau nuo senų laikų lažybų kontoros futbolo varžybose įmuštų įvarčių koeficientams sudaryti taiko Puasono skirstinį, todėl D. Karlis ir I. Ntzoufras [6] Skellamo skirstinį pritaikė modeliuojant įmuštų įvarčių skirtumui futbolo rungtynėse. Taip pat jie [5] straipsnyje modeliavo pažeistų, plombuotų ir išrautų dantų indekso skirtumą prieš pataisant dantis ir po jų taisymo. Šis indeksas vienas labiausiai taikomų odontologijos srityje. Y. Hwang, J. Kim ir I. Kweon [2] Skellamo skirstinį naudojo tam, kad nustatytų pikselių intensyvumo skirtumą foto kameroje. Kadangi fotonai yra pasiskirstę pagal Puasono skirstinį, todėl Skellamo skirstinio parametrai yra tiesiškai susieti su pikselių intensyvumu. Skirstinys taikomas ir ekonomikoje, ir finansuose, pavyzdžiui prognozuojant kainą. [8]

2.1 Apibrėžimas. *Jeigu atsitiktiniai dydžiai $\eta_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ ir $\eta_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, tai dydis $\xi = \eta_2 - \eta_1$ yra pasiskirstęs pagal Skellamo dėsnį su tikimybėmis:*

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{s=\max\{0, -k\}}^{\infty} \frac{\lambda_2^{s+k} \cdot \lambda_1^s}{(s+k)!s!}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Patikrinsime, kad tikimybė $\mathbf{P}\{\xi = k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ tenkina tikimybinių skirstinio apibrėžimą. Pažymėję $m = s + |k|$ gauname, kad

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta_2 - \eta_1 = k\} &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=\max\{0, -k\}}^{\infty} \frac{\lambda_2^{s+k} \cdot \lambda_1^s}{(s+k)!s!} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^{s+|k|} \cdot \lambda_1^s}{(s+|k|)!s!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^m}{m!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^s}{s!} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)} = 1, \end{aligned}$$

Parašome Skellamo dėsnio charakteristinę funkciją:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbf{E}e^{it\xi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{itk} \mathbf{P}\{\xi = k\} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=\max\{0, -k\}}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda_2^{s+k} \cdot \lambda_1^s}{(s+k)!s!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} e^{it(m-s)} \frac{\lambda_2^m \cdot \lambda_1^s}{m!s!} = e^{\lambda_2(e^{it}-1) + \lambda_1(e^{-it}-1)}, \end{aligned}$$

tai yra

$$g(t) = \exp \left\{ \lambda_2 (e^{it} - 1) + \lambda_1 (e^{-it} - 1) \right\}.$$

Rasime Skellamo dėsnio momentus. Gautą charakteristinę funkciją parašome:

$$\begin{aligned} g(t) &= \exp \{ \lambda_2 (e^{it} - 1) + \lambda_1 (e^{-it} - 1) \} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_2 (e^{it} - 1) + \lambda_1 (e^{-it} - 1) \right)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(it)^{2m}}{(2m)!} + (\lambda_2 - \lambda_1) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(it)^{2r-1}}{(2r-1)!} \right)^n \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} \sum_{m=1}^r \frac{r!}{m!} \sum_{l_1 + \dots + l_m = r} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^{\sum_{k=1}^r \mathbf{1}_{\{l_k \in 2\mathbb{N}\}}} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^{\sum_{k=1}^r \mathbf{1}_{\{l_k \in 2\mathbb{N}-1\}}}}{l_1! \dots l_m!}, \end{aligned}$$

čia $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$ ir $2\mathbb{N} - 1 = \{1, 3, 5, \dots\}$. Vadinasi Skellamo dėsnio momentai, kai $r \in \mathbb{N}$, yra

$$\mathbf{E}\xi^r = \sum_{m=1}^r \frac{r!}{m!} \sum_{l_1+\dots+l_m=r} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^{\sum_{k=1}^r \mathbb{1}_{\{l_k \in 2\mathbb{N}\}}} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^{\sum_{k=1}^r \mathbb{1}_{\{l_k \in 2\mathbb{N}-1\}}}}{l_1! \cdots l_m!}. \quad (2.1)$$

Parašysime pirmuosius Skellamo dėsnio momentus

$$\begin{cases} \mathbf{E}\xi^1 = \lambda_2 - \lambda_1, \\ \mathbf{E}\xi^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)^2, \\ \mathbf{E}\xi^3 = (\lambda_2 - \lambda_1) \left(1 + 3(\lambda_2 + \lambda_1) + (\lambda_2 - \lambda_1)^2\right), \\ \mathbf{E}\xi^4 = (\lambda_1 + \lambda_2) + 3(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \left(4 + 6(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_1)^2\right), \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (2.2)$$

Rasime Skellamo dėsnio kumuliantus, apibrėžtus klasikiniu būdu. Mūsų atveju

$$\begin{aligned} \ln g(t) &= \lambda_2 (e^{it} - 1) + \lambda_1 (e^{-it} - 1) = \lambda_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(it)^m}{m!} + \lambda_1 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (it)^r}{r!} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} (\lambda_2 + (-1)^r \lambda_1) \frac{(it)^r}{r!}. \end{aligned}$$

Vadinasi Skellamo dėsnio kumuliantai yra

$$\Gamma_r = \lambda_2 + (-1)^r \lambda_1, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Skellamo dėsnis yra neaprežtai dalus, nes atsitiktinio dydžio ξ pasiskirsčiusio pagal Skellamo dėsnį su parametrais $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ charakteristinė funkcija yra

$$f(t) = \exp \left\{ \lambda_2 (e^{it} - 1) + \lambda_1 (e^{-it} - 1) \right\} = \left(\exp \left\{ \frac{\lambda_2}{n} (e^{it} - 1) + \frac{\lambda_1}{n} (e^{-it} - 1) \right\} \right)^n = (f_n(t))^n,$$

kai $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Kadangi bet kokiam $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(t) = \exp \left\{ \frac{\lambda_2}{n} (e^{it} - 1) + \frac{\lambda_1}{n} (e^{-it} - 1) \right\}$$

yra Skellamo dėsnio charakteristinė funkcija su parametrais $\frac{\lambda_1}{n}, \frac{\lambda_2}{n}$, todėl Skellamo tikimybinių skirstinių yra neaprežtai dalus. Jeigu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ turime Irwino dėsnį. Aišku, kad jis taip pat yra neaprežtai dalus, nes atsitiktinio dydžio ξ pasiskirsčiusio pagal Irwino dėsnį su parametru $\lambda > 0$ charakteristinė funkcija yra

$$f(t) = \exp \left\{ \lambda (e^{it} + e^{-it} - 2) \right\} = \left(\exp \left\{ \frac{\lambda}{n} (e^{it} + e^{-it} - 2) \right\} \right)^n = (f_n(t))^n,$$

kai $t \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Kadangi bet kokiam $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{n} (e^{it} + e^{-it} - 2) \right\}$$

yra Irwino dėsno charakteristinė funkcija su parametru $\frac{\lambda}{n}$, todėl Irwino tikimybiniis skirstinys yra neaprėžtai dalus.

Nesunku parašyti Skellamo tikimybinių dėsno Levi-Chinčino, Levi ir Kolmogorovo spektrinės funkcijas. Kai $\gamma = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$, Levi-Chinčino spektrinė funkcija yra

$$\Psi(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } u \leq -1, \\ \frac{\lambda_1}{2}, & \text{kai } -1 < u \leq 1, \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, & \text{kai } u > 1. \end{cases}$$

Kai $\gamma = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$ ir $\sigma = 0$, Levi spektrinė funkcija

$$L(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } u \leq -1, \quad u > 1, \\ \lambda_1, & \text{kai } -1 < u \leq 0, \\ -\lambda_2, & \text{kai } 0 < u \leq 1. \end{cases}$$

Kai $\gamma = \lambda_2 - \lambda_1$, Kolmogorovo spektrinė funkcija yra

$$K(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } u \leq -1, \\ \lambda_1, & \text{kai } -1 < u \leq 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2, & \text{kai } u > 1. \end{cases}$$

3 Kumuliantai, naudojami aproksimacijoje Skellam dėsniu

Aproksimuojant diskretaus atsitiktinio dydžio ξ , igyjančio sveikąsias reikšmes, pasiskirstymo funkciją $F(x)$ Skellamo pasiskirstymo funkcija $G(x)$, reikalingi „specialūs“ kumuliantai. Tam tikslui apibrėžiame kumuliantus taško $w = w(t) = p_2(e^{it} - 1) - p_1(e^{-it} - 1)$, $p_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $p_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, aplinkoje:

$$\tilde{\Gamma}_r = \left. \frac{d^r}{dw^r} \ln f_\xi(t) \right|_{t=0}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

čia $f_\xi(t)$ yra atsitiktinio dydžio ξ charakteristinė funkcija. Rasime ryšį tarp kumuliantų $\tilde{\Gamma}_k$ ir Γ_k . Tam tikslui taikysime Biurmano-Lagranžo teoremą:

3.1 Teorema. *Jei vienareikšmė funkcija $y = f(z)$ yra analizinė srityje $|z - z_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, kurioje $f'(z) \neq 0$, $f(z_0) = y_0$, tai taško y_0 aplinkoje egzistuoja jos vienareikšmė atvirkštinė funkcija $z = h(y)$, $h(y_0) = z_0$ ir*

$$z = h(y) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(y - y_0)^n}{n!},$$

čia

$$a_n = \left[\left(\frac{z - z_0}{f(z) - y_0} \right)^n \right]^{(n-1)} \Big|_{z=z_0}.$$

Mūsų atveju $f(z) = p_2(e^z - 1) - p_1(e^{-z} - 1)$, $z_0 = 0$, $y_0 = 0$. Tada

$$\begin{aligned} \frac{z}{f(z)} &= \frac{z}{p_2(e^{it} - 1) - p_1(e^{-it} - 1)} = \frac{z}{\sum_{k=1}^{\infty} (p_2 + (-1)^{k-1} p_1) \frac{z^k}{k!}} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p_2 + (-1)^k p_1) z^k}{k+1} \frac{z^k}{k!} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} C(k) \frac{z^k}{k!} \right)^{-1}, \quad C(k) = \frac{p_2 + (-1)^k p_1}{k+1}. \end{aligned}$$

Toliau pasinaudosime Faa Di Bruno formule:

$$\frac{d^n}{dt^n} g(f(z)) = \sum_{k=1}^n g^{(k)}(f(z)) B_{n,k}(f'(z), f''(z), \dots, f^{(n-k+1)}(z)). \quad (3.2)$$

Formulėje (3.2), $B_{n,k}(f'(z), f''(z), \dots, f^{(n-k+1)}(z))$ žymi Belo polinomas:

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!} \right)^{j_1} \left(\frac{x_2}{2!} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!} \right)^{j_{n-k+1}},$$

čia sumuojame pagal visus sveikuosius neneigiamus $j_1, j_2, \dots, j_{n-k+1}$, tokius, kad

$$j_1 + j_2 + \dots + j_{n-k+1} = k \text{ ir } j_1 + 2j_2 + \dots + (n-k+1)j_{n-k+1} = n.$$

Kadangi

$$\left(\frac{z}{f(z)} \right)^{(l)} \Big|_{z=0} = \sum_{k=l}^{\infty} C(k) \frac{z^{k-l}}{(k-l)!} \Big|_{z=0} = C(l), \quad (3.3)$$

tai pasinaudoję (3.2) gauname

$$a_1 = 1, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} B_{n-1,k}(C(1), C(2), \dots, C(n-k)), \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

Mūsų atveju pirmosios a_n konstantos yra

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = -\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \\ a_3 = 3 \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}, \\ a_4 = 14 \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1 + \lambda_2)} - 15 \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}{(\lambda_1 + \lambda_2)^3}, \\ \dots \end{cases} \quad (3.5)$$

Iš (3.4) ir Biurmano-Lagranžo teoremos išplaukia, kad

$$z = it = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n}{n!}. \quad (3.6)$$

Iš formalios lygybės $\ln f_{\xi}(t) = \ln f_{\xi}(t)$ arba

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_k \frac{w^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \frac{(it)^k}{k!}, \quad (3.7)$$

pasinaudoję (3.6), gauname

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_k \frac{w^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_k}{k!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n}{n!} \right)^k.$$

Nesunku pastebėti, kad

$$\tilde{\Gamma}_k = k! \sum_{r=1}^k \frac{\Gamma_r}{r!} \sum_{l_1+\dots+l_r=k} \frac{a_{l_1} \cdots a_{l_r}}{l_1! \cdots l_r!}, \quad (3.8)$$

Pirmųjų kumuliantų sąryšis yra

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1, \\ \tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 + a_2 \Gamma_1, \\ \tilde{\Gamma}_3 = \Gamma_3 + 3a_2 \Gamma_2 + a_3 \Gamma_1, \\ \tilde{\Gamma}_4 = \Gamma_4 + 6a_2 \Gamma_3 + (4a_3 + 3a_2^2) \Gamma_2 + a_4 \Gamma_1, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (3.9)$$

Skellamo skirstiniui šie kumuliantai lygūs:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_1 = \lambda_2 - \lambda_1, \\ \tilde{\Gamma}_2 = \frac{4\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}, \\ \tilde{\Gamma}_3 = \frac{-12\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}, \\ \tilde{\Gamma}_4 = -3(\lambda_1 + \lambda_2) + 17 \frac{(\lambda_2-\lambda_1)^2}{(\lambda_1+\lambda_2)} - 15 \frac{(\lambda_2-\lambda_1)^4}{(\lambda_1+\lambda_2)^3}, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (3.10)$$

Taip apibrėžtų kumuliantų nepakanka, norint gauti išsamius aproksimacijoje Skellamo dėsniu rezultatus ($\tilde{\Gamma}_r \neq 0$, kai $r \geq r_0$). Tada apibrėžiame kumuliantus taško $w = p_2(e^{it} - 1) - p_1(e^{-it} - 1)$ aplinkoje tokiu būdu

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}_r = \left. \frac{d^{r-1}}{dw^{r-1}} (\ln f_X(t))'_{it} \right|_{t=0}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Iš formalios lygybės $(\ln f_{\xi}(t))' = (\ln f_{\xi}(t))'$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\tilde{\Gamma}}_{k+1} \frac{w^k}{k!} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \frac{(it)^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_{k+1} \frac{(it)^k}{k!}, \quad (3.12)$$

rasime sąryšį tarp $\tilde{\tilde{\Gamma}}_k$ ir Γ_k kumuliantų. Taigi, pasinaudoję (3.6) ir (3.12)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\tilde{\Gamma}}_{k+1} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{k+1}}{k!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n}{n!} \right)^k.$$

Iš čia gauname

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}_1 = \Gamma_1, \quad \tilde{\tilde{\Gamma}}_k = k! \sum_{r=1}^k \frac{\Gamma_{r+1}}{r!} \sum_{l_1+\dots+l_r=k} \frac{a_{l_1} \cdots a_{l_r}}{l_1! \cdots l_r!}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

Pirmųjų kumuliantų sąryšis yra

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1, \\ \tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2, \\ \tilde{\Gamma}_3 = \Gamma_3 + a_2 \Gamma_2, \\ \tilde{\Gamma}_4 = \Gamma_4 + 3a_2 \Gamma_3 + a_3 \Gamma_2, \\ \tilde{\Gamma}_5 = \Gamma_5 + 6a_2 \Gamma_4 + (4a_3 + 3a_2^2) \Gamma_3 + a_4 \Gamma_2, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Nesunku įsitikinti, kad Skellamo skirstiniui

$$\tilde{\Gamma}_k = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_2 - \lambda_1, & \text{kai } k = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2, & \text{kai } k = 2, \\ 0, & \text{kai } k \geq 3. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

4 Tolygieji įverčiai aproksimuojant Skellamo dėsnium

Šiame skyriuje rasime aproksimacijos Skellamo dėsnium tolygų liekamojo nario įvertį. Tam naudosime Caregradskio teoremą:

4.1 Teorema. [16] Jeigu $f(t)$ ir $g(t)$ – sveikaskaičių atsitiktinių dydžių charakteristinės funkcijos ir

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt$$

egzistuoja, tai

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq \frac{1}{4\pi} I,$$

kur F ir G – atitinkamos pasiskirstymo funkcijos.

Tarkime, kad atsitiktinis dydis ξ , kurio pasiskirstymo funkcija $F(x)$, turi visus momentus $\mathbf{E}\xi^k$, o jo charakteristinės funkcijos logaritmo išvestinę taško $w = p_2(e^{it} - 1) - p_1(e^{-it} - 1)$ aplinkoje galime parašyti taip

$$(\ln f(t))' = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{k+1} \frac{w^k}{k!}.$$

Skellamo skirstinio pasiskirstymo funkciją pažymime $G(x)$ ir jo charakteristinę funkciją $g(t) = \exp \left\{ \lambda_2 (e^{it} - 1) + \lambda_1 (e^{-it} - 1) \right\}$.

4.2 Teorema. Jeigu atsitiktinio dydžio ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = \lambda_2 - \lambda_1$, igrįjančio sveikąsias reikšmes, kumuliantai $\tilde{\Gamma}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą:

$$\left| \tilde{\Gamma}_k \right| \leq \frac{(k-2)!}{\Delta^{k-2}} (\lambda_1 + \lambda_2), \quad \Delta > 0, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (S)$$

o

$$\left| \tilde{\Gamma}_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \right| \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta},$$

tai

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| \leq \frac{16 \min\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\pi \Delta (1 - \delta)}, \quad (4.1)$$

kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (4.2)$$

Irodymas. Įvertinsime skirtumą $|f(t) - g(t)|$ pasinaudoję nelygybe $|e^s - 1| \leq |s| e^{|s|}$, $s \in \mathbb{C}$, gauname

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &= |e^{\ln f(t)} - e^{\ln g(t)}| = |g(t)| |e^{\ln f(t) - \ln g(t)} - 1| \\ &\leq |g(t)| |\ln f(t) - \ln g(t)| e^{|\ln f(t) - \ln g(t)|}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tada

$$|\ln f(t) - \ln g(t)| = \left| \int_0^t ((\ln f(t))' - (\ln g(t))') dt \right| \leq \int_0^{|t|} |(\ln f(t))' - (\ln g(t))'| dt. \quad (4.4)$$

Išskleidę eilute atsitiktinio dydžio ξ charakteristinės funkcijos $f(t)$ logaritmo išvestinę taško $w(t) = p_2 (e^{it} - 1) - p_1 (e^{-it} - 1)$ aplinkoje, gauname

$$(\ln f(t))' = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{k+1} \frac{w^k}{k!}.$$

Pastebėsime, kad $\tilde{\Gamma}_1 = \lambda_2 - \lambda_1$ ir $\left| \tilde{\Gamma}_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \right| \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta}$, $(\ln g(t))'_{it} = \lambda_2 - \lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)w$ todėl pasinaudoję (S)

$$\begin{aligned} |(\ln f(t))' - (\ln g(t))'_{it}| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{k+1} \frac{w^k}{k!} - \lambda_2 + \lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)w \right| \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|w|}{\Delta} + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \tilde{\Gamma}_{k+1} \right| \frac{|w|^k}{k!} \\ &\leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|w|}{\Delta} + (\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)!|w|^k}{\Delta^{k-1}k!} \\ &\leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|w|}{\Delta} + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|w|^2}{2\Delta} \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{w}{\Delta} \right|^{k-2}. \end{aligned}$$

Kadangi

$$|w(t)| = \left| p_2 (e^{it} - 1) - p_1 (e^{-it} - 1) \right| \leq 2p_2 \left| \sin^2 \frac{t}{2} \right| + 2p_1 \left| \sin^2 \frac{t}{2} \right| = 2 \left| \sin^2 \frac{t}{2} \right| \leq 2,$$

todėl, kai $\Delta \geq \frac{2}{\delta}$, $0 < \delta < 1$, tai $\left| \frac{w}{\Delta} \right| \leq \delta$, gauname

$$\begin{aligned} |(\ln f(t))' - (\ln g(t))'| &\leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|w|}{\Delta} + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|w|^2}{2\Delta} \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{w}{\Delta} \right|^{k-2} \\ &\leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|w|}{\Delta(1 - \delta)} + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|w|}{\Delta(1 - \delta)} \leq \frac{4(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Istatome (4.5) į (4.4)

$$\begin{aligned} |\ln f(t) - \ln g(t)| &\leq \frac{4(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{|t|} \sin^2 \frac{t}{2} dt \leq \frac{4(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{2|t|} \sin^2 \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{8(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} (1 - \cos|t|) = \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2}, \end{aligned}$$

todėl gauname, kad

$$|\ln f(t) - \ln g(t)| \leq \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2}. \quad (4.6)$$

Taip pat įvertiname $|g(t)|$,

$$|g(t)| = \left| e^{\lambda_2(e^{it}-1) + \lambda_1(e^{-it}-1)} \right| \leq e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}}. \quad (4.7)$$

Į (4.3) nelygybę įstatę (4.6) ir (4.7) gauname

$$|f(t) - g(t)| \leq \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} \exp \left(\frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} - 2(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2} \right). \quad (4.8)$$

Pastebėsime, kad

$$2 - \frac{16}{\Delta(1 - \delta)} \geq 1,$$

kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1.$$

Todėl gauname, kad

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &\leq \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} \exp \left(-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2} \left(2 - \frac{16}{\Delta(1 - \delta)} \right) \right) \\ &\leq \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pasinaudoję Caregradskio teorema, iš (4.9) gauname (4.1) nelygybę:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \leq \frac{4(\lambda_1 + \lambda_2)}{\pi \Delta(1 - \delta)} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{8(\lambda_1 + \lambda_2)}{\pi \Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\pi \Delta(1 - \delta)} \int_0^1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(1-u^2)} du \\ &= \frac{16}{\pi \Delta(1 - \delta)} \cdot (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}) = \frac{16 \min\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\pi \Delta(1 - \delta)}. \end{aligned}$$

4.2 Teorema įrodyta.

Iš šios teoremos seka aproksimacijos Irwino, Puasono, neigiamos asimetrijos Puasono dėsniais paklaidų įverčiai.

Parašome aproksimacijos Irwino dėsniu (Skellamo dėsnio atvejis kai $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) paklaidos įvertį. Pažymėkime Irwino tikimybinio dėsnio pasiskirstymo funkciją $I(x)$.

4.3 Teorema. Jeigu atsitiktinio dydžio ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = 0$, įgyjančio sveikąsias reikšmes, kumuliantai $\tilde{\tilde{\Gamma}}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą:

$$\left| \tilde{\tilde{\Gamma}}_k \right| \leq \frac{(k-2)!}{\Delta^{k-2}} 2\lambda, \quad \Delta > 0, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (\bar{S})$$

o

$$\left| \tilde{\tilde{\Gamma}}_2 - 2\lambda \right| \leq \frac{2\lambda}{\Delta},$$

tai

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - I(x)| \leq \frac{16 \min\{1, 2\lambda\}}{\pi \Delta (1 - \delta)}, \quad (4.10)$$

kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (4.11)$$

Puasono dėsnio (Skellamo dėsnio atvejis kai $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda$) atveju nesunku pastebėti, kad $w = e^{it} - 1$. Pažymėkime Puasono pasiskirstymo funkciją $\Pi(x)$.

4.4 Teorema. Jeigu atsitiktinio dydžio ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = \lambda$, įgyjančio neneigiamas sveikąsias reikšmes, kumuliantai $\tilde{\tilde{\Gamma}}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą:

$$\left| \tilde{\tilde{\Gamma}}_k \right| \leq \frac{(k-2)!}{\Delta^{k-2}} \lambda, \quad \Delta > 0, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (\bar{S})$$

o

$$\left| \tilde{\tilde{\Gamma}}_2 - \lambda \right| \leq \frac{\lambda}{\Delta},$$

tai

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - \Pi(x)| \leq \frac{16 \min\{1, \lambda\}}{\pi \Delta (1 - \delta)}, \quad (4.12)$$

kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (4.13)$$

4.1 Išvada. Tegul nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ξ_{nk} , $k = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ tokie, kad

$$\mathbf{P}\{\xi_{nk} = 1\} = \frac{\lambda}{n}, \quad \mathbf{P}\{\xi_{nk} = 0\} = 1 - \frac{\lambda}{n},$$

ir sumų $S_{nn} = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}$ pasiskirstymo funkcijos $F_{S_{nn}}(x)$, tai

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{S_{nn}}(x) - \Pi(x)| \leq \frac{32\lambda \min\{1, \lambda\}}{n\pi(1 - \delta)}, \quad (4.14)$$

kai

$$n \geq 4\lambda \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (4.15)$$

Išrodymas. Sumų $S_{nn} = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$ charakteristinės funkcijos yra

$$f_{S_{nn}}(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{n} (e^{it} - 1) \right)^n.$$

Kadangi

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n} (e^{it} - 1)\right)^n \longrightarrow e^{\lambda(e^{it} - 1)}, \quad \text{kai } n \rightarrow \infty,$$

tai $\mathbf{P}\{S_{nn} < x\} \Rightarrow \Pi(x)$ kai $n \rightarrow \infty$. Kai $w = e^{it} - 1$, gauname

$$(\ln f_{S_{nn}}(t))' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \lambda^k w^k}{n^{k-1} k} \right)' = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k \lambda^{k-1}}{n^{k-2}} + \frac{(-1)^{k-1} \lambda^k}{n^{k-1}} \right) (k-1)! \frac{w^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda$$

Tada $\tilde{\tilde{\Gamma}}_1 = \lambda$ ir kumuliantai $\tilde{\tilde{\Gamma}}_k$ atsitiktinių dydžių S_{nn} yra

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}_k = (k-1)! \left(\frac{(-1)^k \lambda^{k-1}}{n^{k-2}} + \frac{(-1)^{k-1} \lambda^k}{n^{k-1}} \right), \quad k = 2, 3, \dots$$

todėl

$$\left| \tilde{\tilde{\Gamma}}_2 - \lambda \right| \leq \frac{\lambda}{\Delta_n}, \quad \left| \tilde{\tilde{\Gamma}}_k \right| \leq \frac{(k-2)!}{\Delta_n^{k-2}} \lambda,$$

čia $\Delta_n = \frac{n}{2\lambda}$, $k = 3, 4, \dots$. Nelygybėje (4.12) paėmę $\Delta = \Delta_n = \frac{n}{2\lambda}$, gauname (4.14).

Neigiamos asimetrijos Puasono skirstinys su parametru $\lambda > 0$ (Skellamo dėsnio atvejis kai $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$) skirstinys yra

$$\mathbf{P}\{\xi = -k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Pasiskirstymo funkciją pažymėkime $\tilde{\Pi}(x)$. Šiuo atveju nesunku pastebėti, kad $w = 1 - e^{-it}$.

4.5 Teorema. *Jeigu atsitiktinio dydžio ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = -\lambda$, įgyjančio neteigiamas sveikąsias reikšmes, kumuliantai $\tilde{\tilde{\Gamma}}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą:*

$$\left| \tilde{\tilde{\Gamma}}_k \right| \leq \frac{(k-2)!}{\Delta^{k-2}} \lambda, \quad \Delta > 0, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (\overline{\overline{S}})$$

o

$$\left| \tilde{\tilde{\Gamma}}_2 - \lambda \right| \leq \frac{\lambda}{\Delta},$$

tai

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - \tilde{\Pi}(x)| \leq \frac{16 \min\{1, \lambda\}}{\pi \Delta (1 - \delta)}, \quad (4.16)$$

kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (4.17)$$

4.2 Išvada. *Tegul nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ξ_{nk} , $k = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ tokie, kad*

$$\mathbf{P}\{\xi_{nk} = -1\} = \frac{\lambda}{n}, \quad \mathbf{P}\{\xi_{nk} = 0\} = 1 - \frac{\lambda}{n},$$

ir sumų $S_{nn} = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}$ pasiskirstymo funkcijos $F_{S_{nn}}(x)$, tai

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{S_{nn}}(x) - \tilde{\Pi}(x)| \leq \frac{32\lambda \min\{1, \lambda\}}{n\pi(1 - \delta)}, \quad (4.18)$$

kai

$$n \geq 4\lambda \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (4.19)$$

Įrodymas. Sumų $S_{nn} = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$ charakteristinės funkcijos yra

$$f_{S_{nn}}(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{n} (e^{-it} - 1)\right)^n.$$

Kadangi

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n} (e^{-it} - 1)\right)^n \longrightarrow e^{\lambda(e^{-it}-1)}, \quad \text{kai } n \rightarrow \infty,$$

tai $\mathbf{P}\{S_{nn} < x\} \Rightarrow \tilde{\Pi}(x)$ kai $n \rightarrow \infty$. Kai $w = 1 - e^{-it}$, gauname

$$(\ln f_{S_{nn}}(t))' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \lambda^k w^k}{n^{k-1} k}\right)' = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda^{k-1}}{n^{k-2}} - \frac{\lambda^k}{n^{k-1}}\right) (k-1)! \frac{w^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda$$

Tada $\tilde{\Gamma}_1 = -\lambda$ ir kumuliantai $\tilde{\Gamma}_k$ atsitiktinių dydžių S_{nn} yra

$$\tilde{\Gamma}_k = (k-1)! \left(\frac{\lambda^{k-1}}{n^{k-2}} - \frac{\lambda^k}{n^{k-1}}\right), \quad k = 2, 3, \dots$$

todėl

$$\left|\tilde{\Gamma}_2 - \lambda\right| \leq \frac{\lambda}{\Delta_n}, \quad \left|\tilde{\Gamma}_k\right| \leq \frac{(k-2)!}{\Delta_n^{k-2}} \lambda,$$

čia $\Delta_n = \frac{n}{2\lambda}$, $k = 3, 4, \dots$. Nelygybėje (4.16) paėmę $\Delta = \Delta_n = \frac{n}{2\lambda}$, gauname (4.18).

5 Netolygieji įverčiai aproksimuojant Skellam dėsnium

Šiame skyriuje rasime netolygius liekamojo nario įverčius, aproksimuojant Skellamo skirstiniu. Tam tikslui taikysime lemą:

5.1 Lema. [9] *Jei atsitiktinių dydžių ξ ir η , įgyjančių sveikąsias reikšmes, pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ ir $G(x)$, charakteristinės funkcijos $f(t)$ ir $g(t)$ atitinkamai, tai*

$$\begin{aligned} (1 + |x|)|F(x) - G(x)| &\leq \frac{1}{8\pi} \left(4 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt + 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(f(t) - g(t))'}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

ir

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^2 |F(x) - G(x)| &\leq \frac{1}{8\pi} \left(8 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt + 5 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin^3 \frac{t}{2}} \right| dt + 8 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(f(t) - g(t))'}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(f(t) - g(t))'}{\sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(f(t) - g(t))''}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.1 Teorema. Jeigu atsitiktinio dydžio ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = \lambda_2 - \lambda_1$, įgyjančio sveikąsias reikšmes, kumuliantai $\tilde{\Gamma}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą:

$$\left| \tilde{\Gamma}_k \right| \leq \frac{(k-2)!}{\Delta^{k-2}} (\lambda_1 + \lambda_2), \quad \Delta > 0, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (\text{S})$$

o

$$\left| \tilde{\Gamma}_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \right| \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta},$$

tai

$$(1 + |x|) |F(x) - G(x)| \leq \frac{85(\lambda_1 + \lambda_2)}{\pi \Delta (1 - \delta)}, \quad (\text{5.3})$$

kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (\text{5.4})$$

Įrodymas. Įvertinsime $(f(t) - g(t))'$. Turime

$$\begin{aligned} (f(t) - g(t))' &= g'(t) \cdot (e^{\ln f(t) - \ln g(t)} - 1) + g(t) \cdot (\ln f(t) - \ln g(t))' \cdot e^{\ln f(t) - \ln g(t)} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (p_2 e^{it} - p_1 e^{-it}) \cdot g(t) (e^{\ln f(t) - \ln g(t)} - 1) \\ &\quad + g(t) \cdot (\ln f(t) - \ln g(t))' \cdot e^{\ln f(t) - \ln g(t)} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (p_2 e^{it} - p_1 e^{-it}) \cdot (f(t) - g(t)) \\ &\quad + g(t) \cdot (\ln f(t) - \ln g(t))' \cdot e^{\ln f(t) - \ln g(t)}, \end{aligned}$$

tada

$$\left| (f(t) - g(t))' \right| \leq (\lambda_1 + \lambda_2) |f(t) - g(t)| + |g(t)| \cdot \left| (\ln f(t) - \ln g(t))' \right| \cdot \left| e^{\ln f(t) - \ln g(t)} \right|. \quad (\text{5.5})$$

Kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1,$$

gauname, kad

$$\begin{aligned} \left| (f(t) - g(t))' \right| &\leq \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} + \frac{4(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} \\ &\leq \frac{20(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{5.6})$$

Iš gautų įverčių (4.9) ir (5.6) gauname, kad

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt &\leq \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{32(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{64(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(1-u^2)} du \leq \frac{64 \min\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)}, \end{aligned} \quad (\text{5.7})$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt &\leq \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{32(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&\leq \frac{32(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} dt = \frac{32\pi(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)}, \tag{5.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(f(t) - g(t))'}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt &\leq \frac{20(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{40(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{80(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - u^2)} du \\
&\leq \frac{80 \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\} \min\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \leq \frac{80(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)}. \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Tada gautus integralų įverčius įstatę į (5.1), gauname

$$(1 + |x|)|F(x) - G(x)| \leq \frac{85(\lambda_1 + \lambda_2)}{\pi\Delta(1 - \delta)},$$

čia

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1.$$

5.1 Teorema įrodyta.

Analogiškai galime gauti ir aproksimacijos ribinių Irwino, Puasono, neigiamos asimetrijos Puasono dėsnų netolygiuosius paklaidų įverčius.

5.2 Teorema. *Jeigu atsitiktinio dydžio ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = 0$, įgyjančio sveikąsias reikšmes, kumuliantai $\tilde{\Gamma}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą:*

$$\left| \tilde{\Gamma}_k \right| \leq \frac{(k - 2)!}{\Delta^{k-2}} 2\lambda, \quad \Delta > 0, \quad k = 3, 4, \dots, \tag{\overline{S}}$$

o

$$\left| \tilde{\Gamma}_2 - 2\lambda \right| \leq \frac{2\lambda}{\Delta},$$

tai

$$(1 + |x|)|F(x) - I(x)| \leq \frac{170\lambda}{\pi\Delta(1 - \delta)}, \tag{5.10}$$

kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \tag{5.11}$$

5.3 Teorema. *Jeigu atsitiktinio dydžio ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = \lambda$, įgyjančio neneigiamas sveikąsias reikšmes, kumuliantai $\tilde{\Gamma}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą:*

$$\left| \tilde{\Gamma}_k \right| \leq \frac{(k - 2)!}{\Delta^{k-2}} \lambda, \quad \Delta > 0, \quad k = 3, 4, \dots, \tag{\overline{S}}$$

o

$$\left| \tilde{\Gamma}_2 - \lambda \right| \leq \frac{\lambda}{\Delta},$$

tai

$$(1 + |x|) |F(x) - \Pi(x)| \leq \frac{85\lambda}{\pi\Delta(1 - \delta)}, \quad (5.12)$$

kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (5.13)$$

5.1 Išvada. Tegul nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ξ_{nk} , $k = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ tokie, kad

$$\mathbf{P}\{\xi_{nk} = 1\} = \frac{\lambda}{n}, \quad \mathbf{P}\{\xi_{nk} = 0\} = 1 - \frac{\lambda}{n},$$

ir sumų $S_{nn} = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}$ pasiskirstymo funkcijos $F_{S_{nn}}(x)$, tai

$$(1 + |x|) |F_{S_{nn}}(x) - \Pi(x)| \leq \frac{170\lambda^2}{n\pi(1 - \delta)}, \quad (5.14)$$

kai

$$n \geq 4\lambda \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (5.15)$$

5.4 Teorema. Jeigu atsitiktinio dydžio ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = -\lambda$, įgyjančio neteigiamas sveikąsias reikšmes, kumuliantai $\tilde{\Gamma}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą:

$$\left| \tilde{\Gamma}_k \right| \leq \frac{(k-2)!}{\Delta^{k-2}} \lambda, \quad \Delta > 0, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (\overline{\overline{S}})$$

o

$$\left| \tilde{\Gamma}_2 - \lambda \right| \leq \frac{\lambda}{\Delta},$$

tai

$$(1 + |x|) |F(x) - \tilde{\Pi}(x)| \leq \frac{85\lambda}{\pi\Delta(1 - \delta)}, \quad (5.16)$$

kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (5.17)$$

5.2 Išvada. Tegul nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ξ_{nk} , $k = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ tokie, kad

$$\mathbf{P}\{\xi_{nk} = -1\} = \frac{\lambda}{n}, \quad \mathbf{P}\{\xi_{nk} = 0\} = 1 - \frac{\lambda}{n},$$

ir sumų $S_{nn} = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}$ pasiskirstymo funkcijos $F_{S_{nn}}(x)$, tai

$$(1 + |x|) |F_{S_{nn}}(x) - \tilde{\Pi}(x)| \leq \frac{170\lambda^2}{n\pi(1 - \delta)}, \quad (5.18)$$

kai

$$n \geq 4\lambda \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{8}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (5.19)$$

5.5 Teorema. Jeigu atsitiktinio dydžio ξ su vidurkiu $\mathbf{E}\xi = \lambda_2 - \lambda_1$ ir dispersija $\mathbf{D}\xi = \lambda_1 + \lambda_2$, įgyjančio sveikąsias reikšmes, kumuliantai $\tilde{\Gamma}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą:

$$\left| \tilde{\Gamma}_k \right| \leq \frac{(k-2)!}{\Delta^{k-2}} (\lambda_1 + \lambda_2), \quad \Delta > 0, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (\text{S})$$

tai

$$(1 + |x|)^2 |F(x) - G(x)| \leq \frac{137(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\pi \Delta (1 - \delta)}, \quad (5.20)$$

kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{4}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (5.21)$$

Įrodymas. Pastebėsime, kad $\tilde{\Gamma}_1 = \lambda_2 - \lambda_1$ ir $\tilde{\Gamma}_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, $(\ln g(t))'_{it} = \lambda_2 - \lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)w$, todėl pasinaudoję (S)

$$\begin{aligned} \left| (\ln f(t))' - (\ln g(t))'_{it} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{k+1} \frac{w^k}{k!} - \lambda_2 + \lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)w \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \left| \tilde{\Gamma}_{k+1} \right| \frac{|w|^k}{k!} \\ &\leq (\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)! |w|^k}{\Delta^{k-1} k!} \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) |w|^2}{2\Delta} \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{w}{\Delta} \right|^{k-2}. \end{aligned}$$

Kadangi

$$|w(t)| = \left| p_2 (e^{it} - 1) - p_1 (e^{-it} - 1) \right| \leq 2p_2 \left| \sin^2 \frac{t}{2} \right| + 2p_1 \left| \sin^2 \frac{t}{2} \right| = 2 \left| \sin^2 \frac{t}{2} \right| \leq 2,$$

todėl, kai $\Delta \geq \frac{2}{\delta}$, $0 < \delta < 1$, tai $\left| \frac{w}{\Delta} \right| \leq \delta$, gauname

$$\left| (\ln f(t))' - (\ln g(t))' \right| \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) |w|^2}{2\Delta} \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{w}{\Delta} \right|^{k-2} \leq \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^4 \frac{t}{2}. \quad (5.22)$$

Istatome (5.22) į (4.4)

$$\begin{aligned} |\ln f(t) - \ln g(t)| &\leq \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{|t|} \sin^4 \frac{t}{2} dt \leq \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{2|t|} \sin^2 \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{4(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} (1 - \cos|t|) = \frac{8(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2}, \end{aligned}$$

todėl gauname, kad

$$|\ln f(t) - \ln g(t)| \leq \frac{8(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2}. \quad (5.23)$$

Kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{4}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1,$$

į (4.3) įstatę (5.23) gauname

$$|f(t) - g(t)| \leq \frac{8(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}}, \quad (5.24)$$

ir į (5.5) įstatę (5.22), (5.23), (5.24) gauname

$$\begin{aligned} |(f(t) - g(t))'| &\leq \frac{8(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} + \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^4 \frac{t}{2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}}. \\ &\leq \frac{10(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Pasinaudoję (5.23), rasime dar vieną $|\ln f(t) - \ln g(t)|$ įvertį:

$$\begin{aligned} |\ln f(t) - \ln g(t)| &\leq \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{|t|} \sin^4 \frac{t}{2} dt = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{|t|} (1 - \cos t) dt \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} (|t| - \sin|t|). \end{aligned}$$

Žinome, kad visiems $t \in \mathbb{R}$ yra teisinga nelygybė

$$|\sin t - t| \leq \frac{|t|^3}{6},$$

todėl

$$|\ln f(t) - \ln g(t)| \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{6\Delta(1 - \delta)} |t|^3. \quad (5.26)$$

Kai

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{4}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1,$$

gauname, kad

$$|f(t) - g(t)| \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{6\Delta(1 - \delta)} |t|^3 \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}}. \quad (5.27)$$

Įvertinsime $(f(t) - g(t))''$. Turime

$$\begin{aligned} (f(t) - g(t))'' &= (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (p_2 e^{it} + p_1 e^{-it}) \cdot (f(t) - g(t)) \\ &\quad + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (p_2 e^{it} - p_1 e^{-it}) \cdot (f(t) - g(t))' \\ &\quad + (g(t) \cdot (\ln f(t) - \ln g(t))')' e^{\ln f(t) - \ln g(t)} \\ &\quad + g(t) \cdot ((\ln f(t) - \ln g(t))')^2 e^{\ln f(t) - \ln g(t)} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (p_2 e^{it} + p_1 e^{-it}) \cdot (f(t) - g(t)) \\ &\quad + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (p_2 e^{it} - p_1 e^{-it}) \cdot (f(t) - g(t))' \\ &\quad + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (p_2 e^{it} - p_1 e^{-it}) g(t) \cdot (\ln f(t) - \ln g(t))' \cdot e^{\ln f(t) - \ln g(t)} \\ &\quad + g(t) \cdot (\ln f(t) - \ln g(t))'' \cdot e^{\ln f(t) - \ln g(t)} \\ &\quad + g(t) \cdot ((\ln f(t) - \ln g(t))')^2 e^{\ln f(t) - \ln g(t)}, \end{aligned}$$

tada

$$\begin{aligned}
|(f(t) - g(t))''| &\leq (\lambda_1 + \lambda_2)|f(t) - g(t)| + (\lambda_1 + \lambda_2)|(f(t) - g(t))'| \\
&\quad + (\lambda_1 + \lambda_2)|g(t)| \cdot |(\ln f(t) - \ln g(t))'| \cdot |e^{\ln f(t) - \ln g(t)}| \\
&\quad + |g(t)| \cdot |(\ln f(t) - \ln g(t))''| \cdot |e^{\ln f(t) - \ln g(t)}| \\
&\quad + |g(t)| \cdot ((\ln f(t) - \ln g(t))')^2 \cdot |e^{\ln f(t) - \ln g(t)}|.
\end{aligned}$$

Primename, kad $\tilde{\Gamma}_1 = \lambda_2 - \lambda_1$ ir $\tilde{\Gamma}_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, $(\ln g(t))'_{it} = \lambda_2 - \lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)w$, todėl pasinaudoję (S)

$$\begin{aligned}
|(\ln f(t) - \ln g(t))''_{it}| &= \left| w'_{it} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{k+2} \frac{w^k}{k!} - w'_{it}(\lambda_1 + \lambda_2) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\Gamma}_{k+2}| \frac{|w|^k}{k!} \\
&\leq (\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!|w|^k}{\Delta^k k!} \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|w|}{\Delta} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{w}{\Delta} \right|^{k-1}.
\end{aligned}$$

Kadangi $|w(t)| \leq 2 \left| \sin^2 \frac{t}{2} \right|$, todėl, kai $\Delta \geq \frac{2}{\delta}$, $0 < \delta < 1$, tai $\left| \frac{w}{\Delta} \right| \leq \delta$, gauname

$$|(\ln f(t) - \ln g(t))''_{it}| \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|w|}{\Delta} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{w}{\Delta} \right|^{k-1} \leq \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2}. \quad (5.28)$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}
|(f(t) - g(t))''| &\leq \left(\frac{8(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} + \frac{10(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} + \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} \right) \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} \\
&\leq \left(\frac{26(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)^2\}}{\Delta(1 - \delta)} \sin^2 \frac{t}{2} \right) \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}}. \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Pasinaudoję įvairiais (5.24), (5.25), (5.27), (5.29) gauname, kad

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt &\leq \frac{8(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{32(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(1-u^2)} du \leq \frac{32 \min\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)}, \quad (5.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt &\leq \frac{8(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&\leq \frac{16(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} dt = \frac{16\pi(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)}, \tag{5.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{\sin^3 \frac{t}{2}} \right| dt &\leq \frac{\pi^3(\lambda_1 + \lambda_2)}{6\Delta(1 - \delta)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{\pi^3(\lambda_1 + \lambda_2)}{3\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&\leq \frac{\pi^3(\lambda_1 + \lambda_2)}{3\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} dt = \frac{\pi^4(\lambda_1 + \lambda_2)}{3\Delta(1 - \delta)}, \tag{5.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(f(t) - g(t))'}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt &\leq \frac{10(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{20(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{40(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - u^2)} du \\
&\leq \frac{40 \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\} \min\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \leq \frac{40(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Delta(1 - \delta)}. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(f(t) - g(t))'}{\sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt &\leq \frac{10(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&= \frac{20(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&\leq \frac{20(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} dt \\
&= \frac{20\pi(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)}, \tag{5.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{(f(t) - g(t))''}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt &\leq \frac{26(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)^2\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&\leq \frac{52(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)^2\}}{\Delta(1 - \delta)} \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\
&\leq \frac{104 \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)^2\} \min\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)} \\
&\leq \frac{104(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\Delta(1 - \delta)}. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Tada integralų įverčius (5.30), (5.31), (5.32), (5.33), (5.34), (5.35) įstatę į (5.2), gauname

$$(1 + |x|)^2 |F(x) - G(x)| \leq \frac{137(\lambda_1 + \lambda_2) \max\{1, (\lambda_1 + \lambda_2)\}}{\pi \Delta (1 - \delta)},$$

čia

$$\Delta \geq 2 \max \left\{ \frac{1}{\delta}; \frac{4}{1 - \delta} \right\}, \quad 0 < \delta < 1.$$

5.5 Teorema įrodyta.

Išvados ir rezultatai

1. Parodyta, kad šis skirstinys yra neapibrėžtai dalus.
2. Aproximacijos Skellamo dėsnio konvergavimo greitis yra toks pat kaip ir aproximacijos Puasono dėsnio.
3. Šiame darbe apibrėžti kumuliantai, kurie leidžia vertinti liekamąjį narį aproksimuojant Skellam skirstiniu. Rasti ryšiai su klasikiniu būdu apibrėžtais kumuliantais.
4. Gautas, atsitiktinio dydžio, įgyjančio sveikąsias reikšmes, kai jo kumuliantai $\tilde{\Gamma}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą, skirstinio aproximacijos Skellam skirstiniu liekamojo nario tolygusis įvertis.
5. Gauti, atsitiktinio dydžio, įgyjančio sveikąsias reikšmes, kai jo kumuliantai $\tilde{\Gamma}_k$ tenkina Statulevičiaus tipo sąlygą, skirstinio aproximacijos Skellam skirstiniu liekamojo nario netolygūs įverčiai.

Literatūra

- [1] B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley publishing company (1954).
- [2] Y. Hwang, J. Kim and I. Kweon. *Sensor noise modeling using the Skellam distribution: Application to the color edge detection*. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (2007), pp. 1-8.
- [3] J. O. Irwin. *The frequency distribution of the difference between two independent variates following the same Poisson distribution*. Journal of the Royal Statistical Society Series A 100 (1937), pp. 415.
- [4] D. Karlis and I. Ntzoufras. *Distributions based on Poisson differences with applications in sports*. Technical Report 101, Department of Statistics, Athens University of Economics, 2000.
- [5] D. Karlis and I. Ntzoufras. *Bayesian analysis of the differences of count data*. Stat. Med. 25, no. 11 (2006), pp. 1885-1905.
- [6] D. Karlis and I. Ntzoufras. *Bayesian modeling of football outcomes: Using the Skellam's distribution for the goal difference*. IMA J. Management Math., (2008).
- [7] K. Kubilius. *Ribinės teoremos*. Vilniaus universiteto leidykla (1998).
- [8] N. Leonenko. *Fractional Skellam processes with applications to finance*. School of Mathematics, Cardiff University, (2011).
- [9] K. Padvelskis. *Netolygūs įverčiai puasoninėje aproksimacijoje*. Lietuvos matematikos rinkinys: Lietuvos matematikų draugijos darbai, Vilnius MII, VU, T.46 spec. Nr. (2006) p. 459-462. ISSN 0132-2818.
- [10] K. Padvelskis and R. Prigodin. *Nonuniform estimates in the approximation by the Irwin law*. Lithuanian Journal of Statistics, vol. 55, (2016), pp. 112-118.
- [11] A. Prekopa. *On composed Poisson distributions. IV. Remarks on the theory of differential processes*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 3 (1952), pp. 317-325.
- [12] J. Romani. *Distribution of the algebraic sum of Poisson variables*. Trabajos Estadist. 7 (1956), pp. 175-181.
- [13] L. Saulis, V. Statulevičius. *Limit theorems for large deviations*. Kluwer Academic Publishers (1991).
- [14] J. G. Skellam. *The frequency distribution of the difference between two Poisson variates belonging to different populations*. J. Roy. Statist. Soc. (N.S.) 109 (1946), pp. 296.

- [15] J. Strackee and J. J. D. van der Gon. *The frequency distribution of the difference between two Poisson variates*. Statistica Neerlandica 16 (1962), pp. 17-23.
- [16] I. P. Tsaregradski. *On a uniform approximation for a binomial distribution of infinitely divisible laws*. Probability theory (1956), pp. 440-474.