ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

REDA DARŽINSKAITĖ

PERIODINĖS DVINARĖS REKURENTINĖS NATŪRALIŲJŲ SKAIČIŲ SEKOS, JŲ KLASIFIKACIJA IR TAIKYMAS

BAKALAURO DARBAS

Darbo vadovas
doc. Mindaugas Stakvilevičius

Šiauliai, 2011

TURINYS

ĮVADAS

Atsitiktinių skaičių generatoriai yra plačiai naudojami kriptografijoje, azartinių lošimų srityje, kompiuteriniame modeliavime ir kitose srityse. Atsitiktinių skaičių generatorių yra labai įvairių, tokių, kaip tiesinis kongriuentinis generatorius, netiesinis kongriuentinis generatorius, Fibonačio generatorius bei kiti. Generatoriai naudoja deterministinius algoritmus, todėl teisingiau juos vadinti pseudoatsitiktinių sekų generatoriais. Yra dvi pseudoatsitiktinių sekų šeimos: tiesiniai ir netiesiniai generatoriai [4]. Šiame darbe kalbama tik apie netiesinį generatorių, o pseudoatsitiktinius skaičius vadinsime tiesiog atsitiktiniais skaičiais.

Prie jau egzistuojančių įvairių skaičių sekų generatorių siūlomas dar vienas naujas netiesinis sekos generatorius. Šiuo generatorium naujo tipo sveikųjų skaičių sekos formuojamos netiesiniu, prieš tai esančių narių sukarpymo ir naujo montavimo metodu. Formuojami nauji sekos nariai, randamos jų priklausomybės nuo sekos pagrindo P ir dviejų pradinių sekos narių. Taip pat ištiriamos naujų sekų savybės:

- Periodiškumas.
- Ribotumas (sekos narių reikšmės ieškomos intervale [0; $P^2 - 1$]).
- Maksimalus periodas.

Darbo tikslas ir uždaviniai – ištirti naujo tipo skaičių sekas, sukurti netiesinį rekurentinės sekos generatorių, užrašytą Mathcad programa, taip pat ištirti sekų panaudojimo galimybes įvairiais metodais, pvz., iš sekų gautų atsitiktinių skaičių centrinių momentų analize.

Šiam tikslui įgyvendinti buvo nagrinėjami šie darbo uždaviniai:

- Suformuoti sekų sudarymo dėsnius.
- Sukurti tų dėsnių pagrindu sekų generatorius.
- Suformuoti sekos periodų radimo algoritmą ir sudaryti programą.
- Ištirti sekų gautų įvairiais generavimo būdais periodiškumą.
- Iš šių sekų suformuoti atsitiktinių skaičių sekas ir modeliuojant ištirti jų efektingumą.

Naudojami metodai:

- Sekų teorinė analizė.
- Kompiuterinis sekų ir jų periodų skaičiavimas.
- Tų sekų pagrindu gautų pseudoatsitiktinių skaičių savybių tyrimas.

Šio darbo tikslo nagrinėjimui buvo sukurta Mathcado matematinio paketo pagrindu speciali programa: ja naudojantis buvo generuojamos sekos, tiriamos jų savybės. Taip pat iš šių sekų buvo sudaromi atsitiktiniai skaičiai ir analizuojama jų kokybė.

1. PERIODINIŲ DVINARIŲ REKURENTINIŲ NATŪRALIŲJŲ SKAIČIŲ SEKŲ KLASIFIKACIJA

Apibrėšime pagrindines sąvokas, kurios bus naudojamos darbe.

1 apibrėžimas. Skaičių seka vadinama skaitinė funkcija $f(n)$, apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje $\mathbb{N}$.

Seką žymėsime simboliu $\{x_n\}$ arba $\{a_n\}$.

Seka gali būti išreikšta formule, nurodančia, kaip apskaičiuoti tos sekos n – tąjį narį. Bet mus domina, kad seka būtų apibrėžiama rekurentiniu būdu.

2 apibrėžimas. Rekurentinis būdas, kai nurodžius vieną arba kelis pirmuosius sekos narius, visi kiti jos nariai apskaičiuojami iš pirmesnių, pagal nurodytą taisyklę (dažniausiai formulę).

Pvz., turime $a_0 = 1$ ir $a_1 = 2$, o $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Rasime dar 5 šios sekos narius. Kadangi $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ ir $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, tai

$a_2 = a_1 + a_0 = 2 + 1 = 3,$

$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5,$

$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8,$

$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13,$

$a_6 = a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21,$

$- - - - - - - - - - - - -.$

Kadangi iš sąlygos matyti, kad $a_0 = 1$, o $a_1 = 2$, tai rekurentinis sąryšis ir šios pradinės sąlygos nusakys skaičių seką: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 13, a_6 = 21, \dots$.

Gauti skaičiai vadinami Fibonačio skaičiais, o jų seka – **Fibonačio skaičių seka**.

3 apibrėžimas. Dvinarės sekos, tai tokios sekos, kurios kiekvienas narys nusakomas nuo prieš tai esančiais dviem sekos skaičiais.

4 apibrėžimas. Seką $x_1, x_2, x_3, \dots$ vadinsime periodine, jei egzistuoja toks $T \in \mathbb{N}$ ir $N \in \mathbb{N}$, kad $x_n = x_{n+T}$, su visais $n > N$. Skaičius T vadinamas šios sekos periodu.

Pvz., panagrinėkime netiesinę rekurentinę periodinę skaičių seką imdami formulę:

$$x_{n+1} = P_1 x_1 + P_2 (mod\ 100),$$

kur $n = 0, 1, 2, \dots$ ir $x_0 = 29, N = 100, P_1 = 123, P_2 = 51$ rasime sekančius sekos narius:

$x_1 = 29 \times 123 + 51 (mod\ 100) = 3618 (mod\ 100) = 18,$

$x_2 = 18 \times 123 + 51 (mod\ 100) = 2265 (mod\ 100) = 65,$

$x_3 = 65 \times 123 + 51 (mod\ 100) = 8046 (mod\ 100) = 46,$

$x_4 = 46 \times 123 + 51(mod\ 100) = 5709(mod\ 100) = 9,$

o toliau $58, 85, 6, 89, 98, 5, 66, 69, 38, 25, 26, 49, 78, 45, 86, 29, 18, 65, \ldots$.

Kaip matome seka 21-ame žingsnyje pradėjo kartotis, tai $T = 21$.

5 apibrėžimas. Jei skaičius *T* neegzistuoja, tai seka vadinama neperiodine.

Pvz., Fibonačio skaičių seka yra neperiodinė, nes skaičių sekoje neegzistuoja skaičius *T* ir seka nesikartoja.

6 apibrėžimas. Tiesinis rekurentinis sąryšis apibrėžiamas formule

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + c_2 a_{n+2} + \cdots + c_{k+1} a_{n+k-1},$$

kur $n, k \in \mathbb{N}$.

Pvz., panagrinėkime tiesinę rekurentinę periodinę seką:

$a_0 = \alpha$ ir $a_1 = \beta$, o $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, tai

$a_2 = a_1 - a_0 = \beta - \alpha,$

$a_3 = a_2 - a_1 = \beta - \alpha - \beta = -\alpha,$

$a_4 = a_3 - a_2 = -\alpha - (\beta - \alpha) = -\alpha - \beta + \alpha = -\beta,$

$a_5 = a_4 - a_3 = -\beta - (-\alpha) = -\beta + \alpha,$

$a_6 = a_5 - a_4 = -\beta + \alpha - (-\beta) = -\beta + \alpha + \beta = \alpha,$

$a_7 = a_6 - a_5 = \alpha - (-\beta + \alpha) = \alpha + \beta - \alpha = \beta,$

$a_8 = a_7 - a_6 = \beta - \alpha,$

$- - - - - - - - - - - - - - -.$

Matome, kad 6-tame žingsnyje seka pradeda kartotis. Taigi šios tiesinės rekurentinės sekos periodas yra $T = 6$.

7 apibrėžimas. Sąryšis, kuris nepatenka į tiesinio rekurentinio sąryšio sąvoką yra vadinamas netiesiniu rekurentiniu sąryšiu.

Pvz., $a_{n+1} = n\sqrt{a_n}$, ši lygybė yra netiesinė, nes yra ištraukiama šaknis.

8 apibrėžimas. Natūralusis skaičius vadinamas bet koks teigiamas sveikasis skaičius.

9 apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio *X* *k*-osios eilės centriniu momentu μ_k vadinamas jo nuokrypis nuo vidurkio *k*-ojo laipsnio vidurkis, t.y.

$$\mu_k = M(X - MX)^k.$$

Centrinio momento apskaičiavimo formulės

$$\mu_k = \sum_i (x_i - MX)^k p_i \text{ ir } \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k p(x)dx.$$

2. SKAIČIAVIMO SISTEMOS

Skaičiavimo sistema vadinama skaičių vaizdavimo būdas ribotu kiekiu simbolių, turinčių tam tikras kiekybines reikšmes.

Skiriamos pozicinės ir nepozicinės skaičiavimo sistemos. Pozicinėse sistemose kiekvienas skaičiaus skaitmuo turi atitinkamą svorį, kuris priklauso nuo skaitmens vietos (pozicijos), skaičių išreiškiančių skaitmenų (simbolių) sekoje. Nepozicinėje skaičiavimo sistemoje kiekvienas simbolis reiškia atitinkamą skaičių nepriklausomai nuo simbolio vietos užraše. Su nepozicinės sistemos skaičiais žymiai sunkiau atlikti aritmetinius veiksmus, todėl ji plačiai nenaudojama (http://gama.vtu.lt/.../).

Aptarsime pačias populiariausias skaičiavimo sistemas.

2.1. DEŠIMTAINĖ SKAIČIAVIMO SISTEMA

Skaičiavimo sistema, kurios pagrindas 10, vadinama dešimtaine, o ja užrašytas skaičius – dešimtainiu. Šioje skaičiavimo sistemoje yra dešimt skaitmenų:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Šiais skaitmenimis galima išreikšti bet kokią skaitinę reikšmę.

Pvz., pademonstruosime kaip gaunama dešimtainio skaičiaus 1485 skaitinė reikšmė:

$$1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 5 \times 10^0 = 1000 + 400 + 80 + 5 = 1485.$$

Reikšmė gaunama sumuojant kiekvieną skaitmenį, padauginus jį iš pagrindo, pakelto skaitmens pozicijos laipsniu.

Dabar pereikime iš vienos sistemos į kitą, pavyzdžiui, iš dešimtainės į septintainę [2]. Taigi, norint bet kokį skaičių A užrašyti septintainėje sistemoje, reikia rasti koeficientus $a_0, a_1, \dots, a_k$, iš kurių kiekvienas gali įgyti sveikąsias reikšmes nuo 0 iki 6 imtinai. Padalykime skaičių A iš 7. Imkime, kad $A = 3287$.

3287	7			
4	467	7		
	0	67	7	
		4	9	7
			2	**1**

2.1 pav. Sakičiaus 3287 skaičiavimas

Čia užrašytą skaičių $(3287)_{10}$ padalijęs iš 7, gauname dalmenį 469 ir liekaną 4. Vadinasi, skaičiaus 3287 septynetainės išraiškos paskutinis skaitmuo yra 4. Ieškodami kito (antrojo iš dešinės) skaitmens, dalijame 469 iš 7 ir gauname dalmenį 67 ir liekaną 0. Taip dalindami tolimesnius skaičius randame skaičių užrašytą septintainėje sistemoje (2.1 pav.). Taigi

$$(3287)_{10} = (12404)_7.$$

2.2. N – NĖS SKAIČIAVIMO SISTEMOS

Pozicinėje skaičiavimo sistemoje jos pagrindu gali būti ne tik skaičius 10, bet ir bet koks kitas natūrinis nedidelis skaičius N. Populiariausios yra trys pozicinės skaičiavimo sistemos (http://gama.vtu.lt/.../):

- **dvejetainė** (sistemos pagrindas 2, skaitmenys 0 ir 1),
- **aštuntainė** (pagrindas 8, skaitmenys 0, 1, …, 7),
- **šešioliktainė** (pagrindas 16, skaitmenys 0, 1, ..., 8, 9, A, B, C, D, E, F),

Pvz.: bet kuria sistema užrašytą skaičių išreikšdami kaip sandaugų sumą, lengvai randame skaičiaus dešimtainį atitikmenį:

- $1011_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11_{10}$;
- $75_8 = 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0 = 61_{10}$;
- $145_{16} = 1 \times 16^2 + 4 \times 16^1 + 5 \times 16^0 = 175_{10}$.

Šiose sistemose pereiti iš vienos į kitą galima tiesiogiai remiantis reikšmių lentele (2.1 lentelė). Lentelėje pateikti skaičiai nuo 0 iki 19 dešimtaine, aštuntaine, šešioliktaine ir dvejetaine sistema. Kiekvieno stulpelio viršuje užrašytas skaičiavimo sistemos pagrindas.

2.1 lentelė. Pagrindinės skaičiavimo sistemos

A_{10}	A_8	A_{16}	A_2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	10
3	3	3	11
4	4	4	100
5	5	5	101
6	6	6	110
7	7	7	111
8	10	8	1000
9	11	9	1001
10	12	A	1010
11	13	B	1011
12	14	C	1100
13	15	D	1101
14	16	E	1110
15	17	F	1111
16	20	10	10000
17	21	11	10001
18	22	12	10010
19	23	13	10011

Pvz.,

1. *Iš dvejetainės skaičiavimo sistemos perveskime į aštuntainę skaičiavimo sistemą:*

$$\begin{array}{cccc} 10 & 111 & 011 & 010 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 7 & 3 & 2 \end{array}$$

taigi $010\ 111\ 011\ 010_2 = 2732_8$

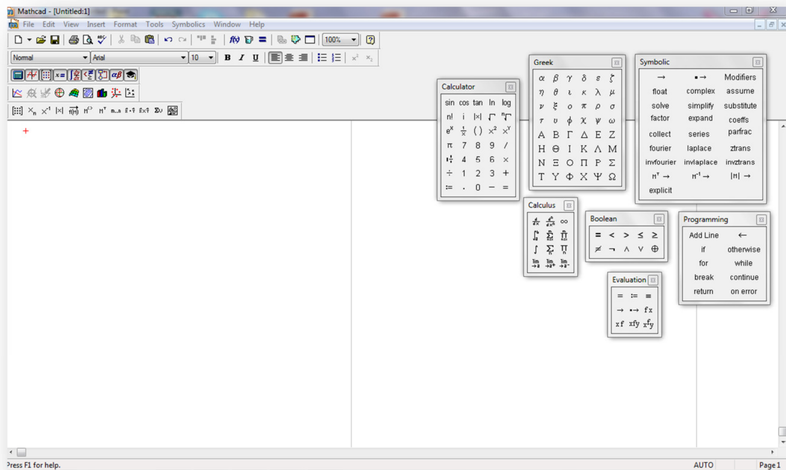
2. *Iš dvejetainės skaičiavimo sistemos perveskime į šešioliktainę skaičiavimo sistemą:*

$$\begin{array}{cccc} 110 & 0000 & 1011 & 1010 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 0 & B & A \end{array}$$

taigi $0110\ 0000\ 1011\ 1010_2 = 60BA_{16}$ *(http://gama.vtu.lt/.../).*

3. MATHCAD PROGRAMA

Mathcad – vienas iš galingiausių programinės įrangos paketas, skirtas matematinių, techninių ir ekonominių uždavinių sprendimui (3.1 pav.).



3.1 pav. Tipinis Mathcad puslapis

Mathcad yra turtingas skaičių skaičiavimo procedūrų komplektais, o programos viduje yra simbolių skaičiavimo procedūros.

Pagrindinės Mathcad galimybės yra šios [5]:

1. matinių skaičių algebros skaičiavimas;
2. vektorinis ir matricinis skaičiavimas;
3. nelinijinių lygčių ir sistemų sprendimas;
4. diferencialinių lygčių sprendimas;
5. 2D ir 3D grafika;
6. hiperbolinės, triginometrinės, logaritminės ir eksponentinės specialios, finansinės, statistinės funkcijos, tikimybių skaičiavimas;
7. programavimas.

Matematinis programų paketas Mathcad yra bene universaliausias. Tinka tiek mokymuisi, tiek moksliniam darbui. Šis paketas išsiskiria iš kitų žinomų PC programinės įrangos paketų, kaip MATLAB, Maple, Matematica, bei kitų, tuo, kad uždavinių sprendimo komandos užrašomos simboliais, praktiškai neišsiskiriančiais nuo klasikinės simbolikos. Tačiau simbolių skaičiavimo ir programavimo galimybės yra ribotos.

4. TIRIAMOJI DALIS

4.1. SEKOS GENERAVIMAS

4.1.1. SEKOS GENERAVIMO PAVYZDYS

Pirmutiniu atveju, kad lengviau būtų pailiustruoti vieną iš mūsų siūlomų metodų, formuluojant sekos generatorių pasinaudosime dešimtaine skaičiavimo sistema.

Imame sistemos pagrindą $P = 10$. Taip pat pasirenkame pradines reikšmes, pavyzdžiui, $a_1 = 23$ ir $a_2 = 48$, čia dešimtaine skaičiavimo sistema yra $a_1 = 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ ir $a_2 = 4 \times 10^1 + 8 \times 10^0$. Pareikalaukime, kad sekos narys nebūtų didesnis nei $M = P^2 - 1$, ir, kad sekos paskutinio nario numeris būtų ne didesnis nei $N = P^4$.

Transformuojame skaičius į netiesinę formą:

1. Sekos pirmojo nario nulinės pozicijos skaičių dauginame iš sistemos pagrindo P,
$$3 \times 10 = 30.$$
2. Sekos antrojo nario pirmos pozicijos skaičių dauginame iš sistemos pagrindo P,
$$4 \times 10 = 40.$$
3. Sekos antrojo nario nulinės pozicijos skaičius 08.
4. Sekos pirmojo nario pirmos pozicijos skaičius 02.

Taip suskaidę sekos narius, juos sudedame ir gauname sekantį sekos narį: $a_3 = 30 + +40 + 08 + 02 = 80$. Sekančiu žingsniu tokiu pačiu principu transformuojame kitus du sekos narius $a_2 = 48$ ir $a_3 = 80$.

1. Sekos jau antrojo nario nulinės pozicijos skaičių dauginame iš sistemos pagrindo P,
$$8 \times 10 = 80.$$
2. Sekos trečiojo nario pirmos pozicijos skaičių dauginame iš sistemos pagrindo P,
$$8 \times 10 = 80.$$
3. Sekos trečiojo nario nulinės pozicijos skaičius 00.
4. Sekos antrojo nario pirmos pozicijos skaičius 04.

Sudedame gautas reikšmes: $a_4 = 80 + 80 + 00 + 04 = 164$. Matome, kad gavome reikšmę, didesnę nei M. Todėl šią reikšmę daliname iš sistemos pagrindo P^2 ir imame tik jos liekaną, t.y. 64, tai ir bus sekantis sekos narys $a_3 = 64$.

Analogiškai surandame ir kitus sekančius sekos narius iki N.

4.1.2. SEKOS GENERAVIMAS BENDRU ATVEJU

Esant bet kokiam pagrindui P (nebūtinai $P = 10$) tarkime, kad turime du gretimus sekos narius a_n ir a_{n+1}.

Pažymėkime, kad A_n yra sekos nario a_n modulis P pagrindu, B_n yra santykio $\frac{a_n}{P}$ sveikoji dalis, A_{n+1} −sekos nario a_{n+1} modulis P pagrindu ir B_{n+1} − santykio $\frac{a_n}{P}$ sveikoji dalis.

Taigi,

$$a'_{n+2} = P \cdot A_n + P \cdot B_{n+1} + A_{n+1} + B_n.$$

Be to, jeigu a'_{n+2} viršija P^2, tai paliekamas tik šio skaičiaus modulis P pagrindu, kad šios sekos nario galutinė reikšmė nebūtų didesnė už P^2

$$a'_{n+2} = P \cdot A_n + P \cdot B_{n+1} + A_{n+1} + B_n,$$

$$a_{n+2} = mod(a'_{n+2}, P^2).$$

Galimos ir kitos 7 kombinacijos,

- $a'_{n+2} = P \cdot A_n - P \cdot B_{n+1} + A_{n+1} + B_n$;
- $a'_{n+2} = P \cdot A_n - P \cdot B_{n+1} - A_{n+1} + B_n$;
- $a'_{n+2} = P \cdot A_n + P \cdot B_{n+1} - A_{n+1} + B_n$;
- $a'_{n+2} = P \cdot A_n + P \cdot B_{n+1} - A_{n+1} - B_n$;
- $a'_{n+2} = P \cdot A_n - P \cdot B_{n+1} + A_{n+1} - B_n$;
- $a'_{n+2} = P \cdot A_n - P \cdot B_{n+1} - A_{n+1} - B_n$;
- $a'_{n+2} = P \cdot A_n + P \cdot B_{n+1} + A_{n+1} - B_n$.

tik tuo atveju, kai a' yra mažesnis už 0, jis yra papildomas P^2 (sugeneruotas skaičius turi būti teigimas).

Pastaba. Pirmąsias sekos narių reikšmes pasirenkame iš intervalo [0; $P^2 - 1$].

4.1.3. SEKOS GENERAVIMAS MATHCAD PROGRAMA

Prieš tai esančiame skyrelyje suformulavome kaip veikia sekos generatorius. Pasinaudodami Mathcad programa šį sekos generatoriaus formulavimą galime užrašyti tokia funkcija, kai duotos pradinės reikšmės $a_{0,j}$ ir $a_{1,j}$:

$$a_{n+2,j} := mod\left[P \cdot mod\left(a_{n,j}, P\right) + P \cdot floor\left(\frac{1}{P} a_{n+1,j}\right) + mod\left(a_{n+1,j}, P\right) + floor\left(\frac{1}{P} a_{n,j}\right), P^2\right],$$

čia:

P − sistemos pagrindas;

$a_{n,j}$, $a_{n+1,j}$ − sekos reikšmės prieš $a_{n+2,j}$ narį;

$a_{n+2,j}$ − rekurentine formule apskaičiuotas sekos narys;

$mod -$ skaičiaus, padalyto iš sistemos pagrindo P, modulis;

$floor -$ skaičiaus, padalyto iš sistemos pagrindo P, sveikoji dalis.

4.2. SEKOS PERIODO RADIMO ALGORITMAS

Pasinaudodami sekos generatoriaus formuluote suformuokime skaičių sekos periodo radimo algoritmą.

Pirmiausia, suformuojame atsitiktinių skaičių seką mūsų metodu su duotaisiais pirmaisiais ir antraisiais sekos nariais. Sekos ilgis yra lygus maksimaliam galimų nepasikartojamų porų skaičiui, t.y. paskutinis sekos narys ne didesnis nei $N = P^4$.

Po to tikriname, ar duotieji du gretimai esantys sekos nariai sutampa su pirmuoju ir antruoju tos sekos nariu. Jeigu sąlyga patenkinta, užfiksuojame tą indeksą, kuriam ši sąlyga yra patenkinta. Tai ir bus sekos su duotomis padinėmis reikšmėmis periodas T .

Surinkę duomenis iš visų galimų pradinių reikšmių variantų, surūšiuojame gautus periodus didėjimo tvarka. Tokiu būdu nustatome, su kuriomis konkrečiomis pradinėmis reikšmėmis yra sekos su rastais periodais. Tyrimo rezultatą apibendriname kaip dviejų stulpelių matricą. Pirmajame stulpelyje yra nurodoma, kurio stulpelio pradinėms reikšmėms gaunamas duotasis periodas, o antajame stulpelyje yra pats periodas. Taip pat vienu vektoriumi surašome visus rastus periodus mažėjimo tvarka.

4.2.1. SEKOS PERIODŲ RADIMAS MATHCAD'O PROGRAMA

Suformuojama skaičių sekos funkcija su pradinėmis reikšmėmis $a_{0,j} = c$ ir $a_{1,j}$ kaip atsitiktinius skaičius su J variantų skaičiumi

$$c := 0, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2),$$

čia pirmasis sekos skaičius yra sveikoji $\left(\frac{j}{P^2} + c\right)$ dalis, o $a_{1,j}$ yra skaičiaus j modulis P^2 atžvilgiu, čia $a_{0,j} := a0_j, a_{1,j} := a1_j$ su $j = 0 \ldots J$, $J = P^2 - 1$. Pirmuoju atveju sistemos pagrindą paimame $P := 10$.

Surandamas kiekvieno varianto, su kiekvienu $j \leq J$, periodas T

$$b'_{n,j} := \left(P^2 \cdot a_{0,j} + a_{1,j} = P^2 \cdot a_{n,j} + a_{n+1,j}\right) \cdot n,$$

$$b_{n,j} := b'_{n,j} \cdot \left(b'_{n,j} \neq 0\right) + (N + 1) \cdot \left(b'_{n,j} = 0\right).$$

Su funkcija $T_j := min\left(b^{\langle j \rangle}\right)$ išrenkame iš visų sutampančių mažiausią numerį ir pažymime jį kaip periodą *T*.

Periodus surūšiuojame nuo didžiausio iki mažiausio (*T1*) (4.1 lentelė)

4.1 lentelė. Periodų lentelė, kai *P = 10*

T1 =

	0
0	5567
1	2192
2	648
3	606
4	422
5	272
6	78
7	34
8	26
9	20
10	1

Taip pat surandamas kiekvieno varianto periodas T. Juos surūšiuojame didėjimo tvarka $(T^{'})$ (4.2 lentelė)

4.2 lentelė. Kiekvieno varianto periodų lentelė

T' =

	0	1
1	0	1
2	1	20
3	66	26
4	10	34
5	74	78
6	70	272
7	35	422
…	…	…
93	65	5567
94	32	5567
95	96	5567
96	64	5567
97	31	5567
98	7	5567
99	3	5567

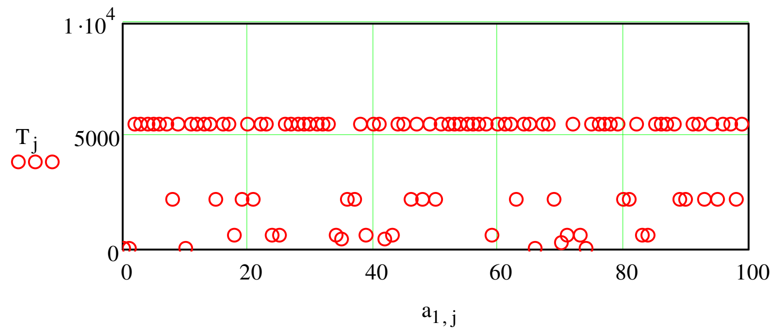
$T^{'}$ lentelės kairysis stulpelis parodo antruosius to paties pagrindo atskirų sekų narius $j \coloneqq 0 \ldots J$, o dešinysis stulpelis parodo periodą T su tuo j. 4.3 lentelėje parodyta periodinės skaičių sekos su skirtingomis antrojo pradinio skaičiaus reikšmėmis.

4.3 lentelė. Periodinės skaičių sekos su skirtingomis antrojo pradinio skaičiaus reikšmėmis

a =

	0	1	2	3	4	5	6	7	…	93	94	95	96	97	98	99
0	0	0	0	0	0	0	0	0	…	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	…	93	94	95	96	97	98	99
2	0	1	2	3	4	5	6	7	…	93	94	95	96	97	98	99
3	0	11	22	33	44	55	66	77	…	32	43	54	65	76	87	98
4	0	21	42	63	84	5	26	47	…	71	92	13	34	55	76	97
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
9999	0	10	87	26	85	25	53	79	…	73	78	9	1	76	92	58
10000	0	0	38	28	32	23	83	18	…	9	82	93	6	77	27	90
10001	0	1	16	90	90	75	18	15	…	46	69	83	16	44	56	75
10002	0	1	99	72	13	7	56	96	…	36	97	22	76	21	28	84

Visus rastus periodus galime atvaizduoti grafiku (4.1 pav.).



4.1 pav. Periodų atvaizdavimas, kai $P = 10$

4.1 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 0$.

4.3. ĮVAIRIŲ SUGENERUOTŲ SEKŲ PERIODŲ RADIMO BŪDAI

Šiame paragrafe pateiksime keletą skirtingų sekos generatoriaus veikimo būdų, parenkant skirtingas pradines reikšmes ir keičiant sekos generatoriaus skaičiavimo dėsnį, kiti pavyzdžiai pateikiami 2 priede.

4.3.1. VISŲ SEKOS PERIODŲ NUSTATYMO ALGORITMAS

Suteikiame duotajam intervalui [0; P^2-1] pradinių sekų reikšmes ir toliau generuojame seką tol, kol paskutiniai du sekos nariai sutaps su pirmuoju ir antruoju nariu. Tuo tikslu, užrašome iš pirmųjų dviejų narių gautą skaičių $c_0 = P^2 \cdot a_0 + a_1$. Skaičiuodami sekos narius iš dviejų paskutinių suformuojame narį $c_n = P^2 \cdot a_{n+1} + a_{n+2}$ ir tikriname ar $c_0 = c_n$. Tas *n*, kuriam lygybė patenkinta ir bus duotosios sekos periodas *T*.

Kadangi duotoji seka gali turėti priklausomai nuo dviejų pirmųjų narių skirtingus periodus, mes ieškosime tų periodų, suteikdami pirmiesiems sekos nariams vis kitas reikšmes. Šį procesą realizuojame pirmajam nariui suteikdami reikšmę $a_{0,j}$ − sveikoji santykio iš P^2 plius *c* dalis, o $a_{1,j}$ − skaičiaus *j* modulis pagrindu P^2, kur *j* gauna reikšmę nuo 0 iki *J*.

4.3.2. SEKOS SU SISTEMOS PAGRINDU *P = 10* PERIODŲ NUSTATYMAS

Vaizdumo dėlei, pirmiausia, panagrinėkime imdami sistemos pagrindą $P = 10$ su pirmosiomis dvejomis sekų serijų reikšmėmis $a_{0,j} = c$, ir $a_{1,j}$, kur $a_{1,j}$ perbėga visus sveikuosius skaičius nuo 0 iki J, ir generuojame seką su sudėties ir atimties veiksmais

$$a_{n+2,j} \coloneqq mod\left[P \cdot mod(a_{n,j}, P) + P \cdot floor\left(\frac{1}{P} a_{n+1,j}\right) - mod(a_{n+1,j}, P) - floor\left(\frac{1}{P} a_{n,j}\right) + 3P^2, P^2\right]$$

Tolimesnius veiksmus atliekame pagal sekos periodų radimo algoritmą. Randame periodus, kai $c \coloneqq 0$, $c \coloneqq 1$ ir $c \coloneqq 2$:

1. Imame $c \coloneqq 0, a0_j \coloneqq floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j \coloneqq mod(j, P^2)$.

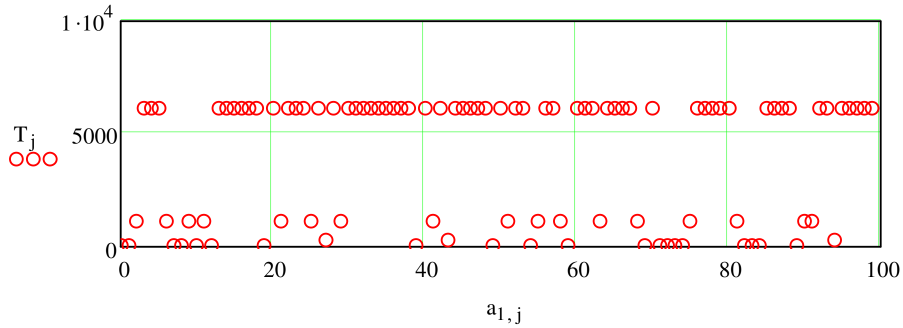
Rasti periodai pateikti 4.4 lentelėje.

4.4 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 0$ ir $P = 10$

T1 =

	0
0	6128
1	1107
2	328
3	24
4	14
5	12
6	1

Rastus periodus atvaizduojame grafiku (4.2 pav.)



4.2 pav. Periodų grafikas, kai $P = 10$

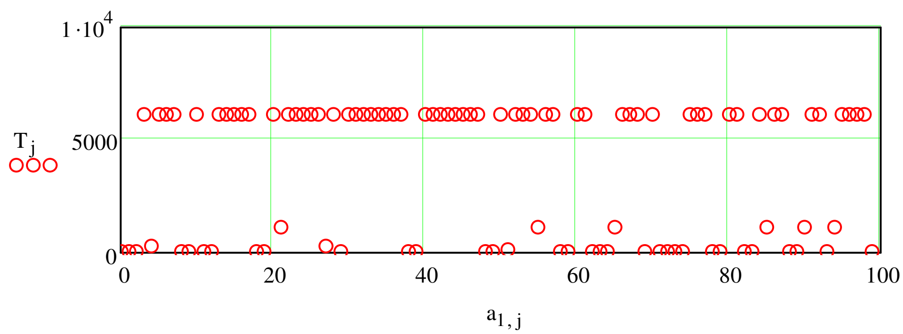
4.2 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 0$.

2. Imame $c \coloneqq 1, a0_j \coloneqq floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j \coloneqq mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (4.5 lentelė).

4.5 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 1$ ir $P = 10$

T1 =

	0
0	6128
1	1107
2	328
3	90
4	14
5	12



4.3 pav. Periodų grafikas, kai $P = 10$

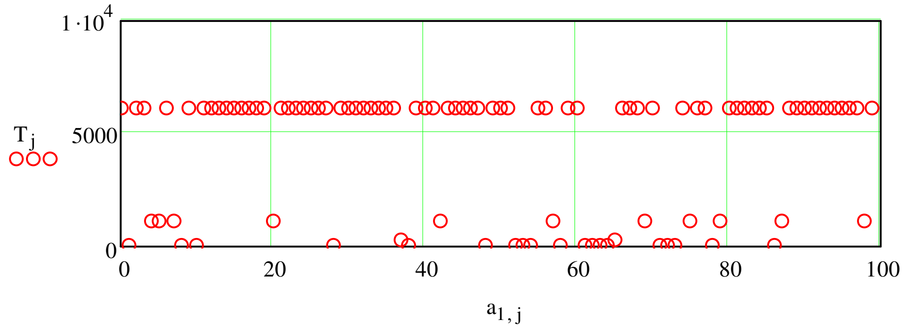
4.3 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 1$.

3. Imame $c \coloneqq 2, a0_j \coloneqq floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j \coloneqq mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (4.6 lentelė).

4.6 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 2$ ir $P = 10$

T1 =

	0
0	6128
1	1107
2	328
3	12



4.4 pav. Periodų grafikas, kai $P = 10$

4.4 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 2$.

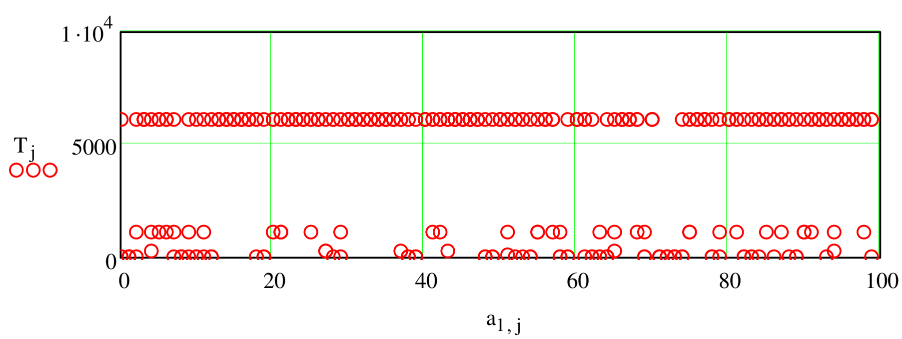
Kaip matome, imdami su $c \coloneqq 0$, $c \coloneqq 1$ ir $c \coloneqq 2$ neradome visiškai vienodų periodų, taip yra todėl, kad ėmėme sekos ilgį ne didesnį, nei $M = P^2 - 1$. Kad įsitikintumėme, jog galime rasti bendrus periodus, tam tikslui sekos ilgį imsime $M = 299$. Tada $a_{0,j}$ įgis reikšmes 0, 1, 2.

Taigi, paėmę $c \coloneqq 0$ ir $M = 299$, randami tokie periodai (4.7 lentelė).

4.7 lentelė. Bendra periodų lentelė, kai $P = 10$

$T1 =$

	0
0	6128
1	1107
2	328
3	90
4	24
5	14
6	12
7	1



4.5 pav. Bendras periodų grafikas, kai $P = 10$

4.5 paveikslėlyje pateiktas bendras periodų grafikas, kurios absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j}$ įgyja reikšmes 0, 1, 2.

4.3.3. SEKOS SU SISTEMOS PAGRINDU *P = 2* PERIODAI

Suformuojamas skaičių sekos generatorius su atimties veiksmais, su pirmosiomis dvejomis sekų serijų reikšmėmis $a_{0,j} = c$, ir $a_{1,j}$, kur $a_{1,j}$ perbėga visus sveikuosius skaičius nuo 0 iki J ir su sistemos pagrindu $P = 2$. Taip pat sekos narys yra ne didesnis nei $M = P^2 - 1$ ir sekos paskutinis narys ne didesnis nei $N = P^4$

$$a_{n+2,j} \coloneqq mod\left[P \cdot mod(a_{n,j}, P) - P \cdot floor\left(\frac{1}{P} a_{n+1,j}\right) - mod(a_{n+1,j}, P) - floor\left(\frac{1}{P} a_{n,j}\right) + 3P^2, P^2\right].$$

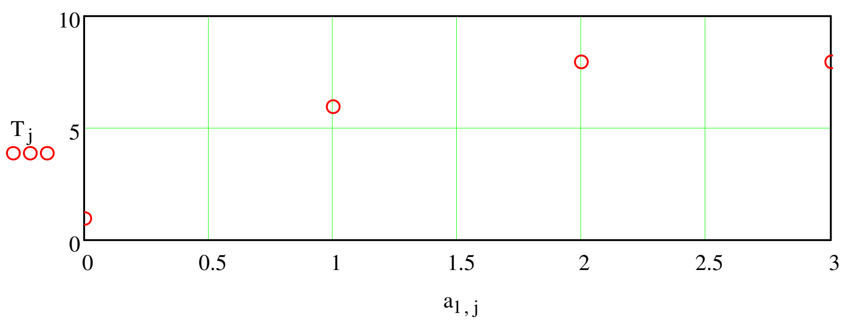
Randami periodai, kai imame $c \coloneqq 0$ ir $c \coloneqq 1$.

1. Imame $c \coloneqq 0, a0_j \coloneqq floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j \coloneqq mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (4.8 lentelė)

4.8 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 0$ ir $P = 2$

$T1 =$

	0
0	8
1	6
2	1



4.6 pav. Periodų grafikas, kai $P = 2$

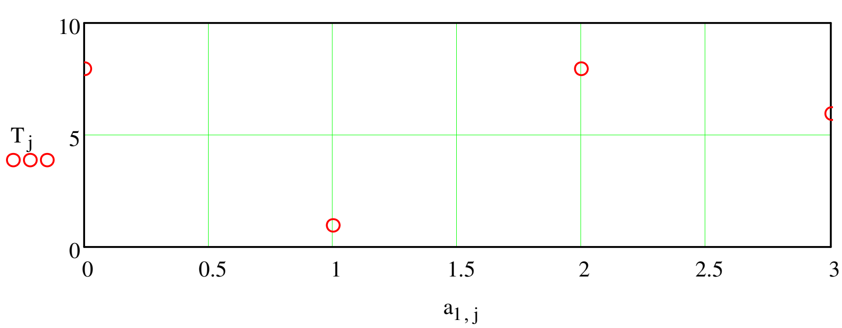
4.6 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 0$.

2. Imame $c \coloneqq 1, a0_j \coloneqq floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j \coloneqq mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (4.9 lentelė)

4.9 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 1$ ir $P = 2$

$T1 =$

	0
0	8
1	6
2	1



4.7 pav. Periodų grafikas, kai $P = 2$

4.7 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 1$.

4.3.4. SEKOS SU SISTEMOS PAGRINDU *P = 16* PERIODAI

Suformuojamas skaičių sekos generatorius su sudėties ir atimties veiksmais, su pirmosiomis dvejomis sekų serijų reikšmėmis $a_{0,j} = c$, ir $a_{1,j}$, kur $a_{1,j}$ perbėga visus sveikuosius skaičius nuo 0 iki J , čia $J = 20$ ir su sistemos pagrindu $P = 16$. Taip pat sekos narys yra ne didesnis nei $M = P^2 - 1$ ir sekos paskutinis narys ne didesnis nei $N = P^4$

$$a_{n+2,j} := mod\left[P \cdot mod(a_{n,j}, P) + P \cdot floor\left(\frac{1}{P} a_{n+1,j}\right) + mod(a_{n+1,j}, P) - floor\left(\frac{1}{P} a_{n,j}\right) + 3P^2, P^2\right].$$

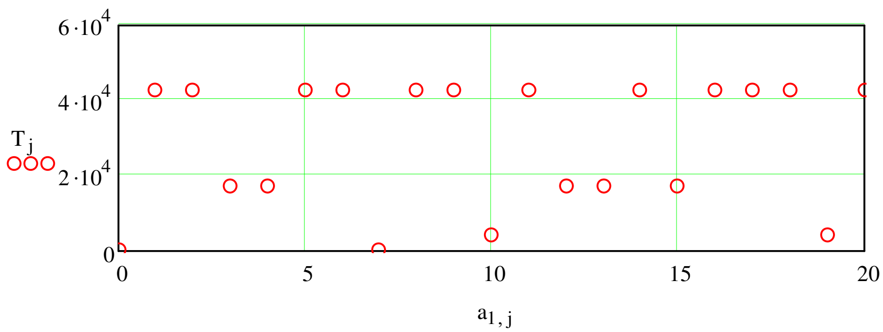
Randami periodai, kai imame $c := 0$, $c := 1$ ir $c := 2$.

1. Imame $c := 0, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (4.10 lentelė)

4.10 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 0$ ir $P = 16$

T1 =

	0
0	42673
1	17271
2	4421
3	134
4	1



4.8 pav. Periodų grafikas, kai $P = 16$

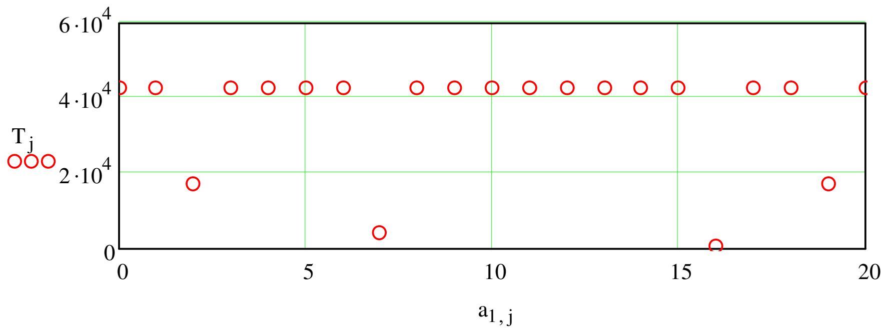
4.8 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 0$.

2. Imame $c := 1, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (4.11 lentelė)

4.11 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 1$ ir $P = 16$

T1 =

	0
0	42673
1	17271
2	4421
3	743



4.9 pav. Periodų grafikas, kai $P = 16$

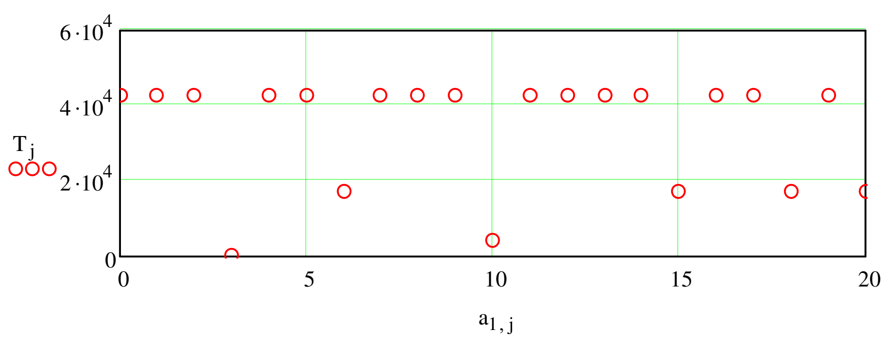
4.9 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 1$.

3. Imame $c := 2, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (4.12 lentelė)

4.12 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 2$ ir $P = 16$

T1 =

	0
0	42673
1	17271
2	4421
3	165



4.10 pav. Periodų grafikas, kai $P = 16$

4.10 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 2$.

4.4. SEKŲ PAGRINDU SUKURTŲ ATSITIKTINIŲ SKAIČIŲ SAVYBIŲ ANALIZAVIMAS CENTRINIŲ MOMENTŲ METODU

4.4.1. CENTRINIŲ MOMENTŲ RADIMO ANALIZĖ

Centrinių momentų radimui naudojame jau prieš tai aprašytą skaičių sekos periodo radimo algoritmą.

Po viso to, pirmiausia iš naujo sugeneruojame skaičių seką su pradinėmis reikšmėmis, su kuriomis sekos periodas T yra didžiausias. Sekos ilgis gali būti ne didesnis nei tos sekos periodas.

Naujai sugeneravę skaičių seką, tolimesniems veiksmams naudojame teorinę momentų skaičiavimo formulę. Taip pat skaičiuojame momentus, pasinaudodami tolygaus skirstinio sugeneruotais atsitiktiniais skaičiais, gautais standartiniu ir mūsų siūlomu metodais. Tam tikslui, pirmiausia, apskaičiuojame abiem metodams vidurkius. Atsitiktinius skaičius standartiniu metodu imame pagal standartinę Mathcad programą, o mūsų atveju atsitiktinius skaičius sudaro sugeneruoti sekos nariai, padalinti iš sistemos pagrindo kvadrato. Randame centrinius momentus.

Tyrimo rezultatą pateikiame kaip trijų stulpelių matricą. Pirmajame stulpelyje pateikiame teorines momento reikšmes, antrajame – standartinio metodo ir teorinio momentų skaičiavimo skirtumas, o trečiajame – mūsų metodo ir teorinio momentų skaičiavimo skirtumas.

4.4.2. CENTRINIŲ MOMENTŲ RADIMO ALGORITMAS MATHCAD PROGRAMA

Panaudojant skaičių sekos periodo radimo algoritmą, iš naujo, analogiškai, suformuojame skaičių sekos generatorių, su pradinėmis reikšmėmis, $a'_0 := 0$ ir su kuriomis sekos periodas T yra didžiausias. Sistemos pagrindą imame $P = 50$

$$a'_{n'+2} := mod\left(P \cdot mod\left(a'_{n'}, P\right) + P \cdot floor\left(\frac{1}{P} a'_{n'+1}\right) + mod\left(a'_{n'+1}, P\right) + floor\left(\frac{1}{P} a'_{n'}\right), P^2\right),$$

sekos ilgis N' yra lygus tos sekos didžiausiam periodui. Šiuo atveju $N' = 6235497$.

Tolimesniems veiksmams panaudojame teorinę momentų skaičiavimo formulę, kai intervalas yra $0 \leq x \leq 1$,

$$Mo_g := \int_0^1 (2x-1)^g dx,$$

imdami momentų laipsnius $g := 0 \ldots 15$.

Skaičiuojame momentus, imdami atsitiktinius skaičius standartiniu metodu ir su mūsų sugeneruotos skaičių sekos nariais. Standartiniu metodu imame atsitiktinius skaičius z_n, gautus pagal standartinę Mathcad programą ir surandame jų vidurkį $vz := \frac{1}{N'+1} \cdot \sum_{n=0}^{N'} z_n$. Skaičiuojame momentus naudodami formulę

$$Mz_g := \frac{1}{N'+1} \cdot \sum_{n=0}^{N'} \left(\frac{z_n - vz}{0{,}5}\right)^g.$$

Visą šią skaičiavimo eigą kartojame ir su mūsų sugeneruotais skaičių sekos nariais, tik vietoj atsitiktinių skaičių imame sugeneruotos skaičių sekos narius $a'_{n'}$, padalintus iš sistemos pagrindo kvadrato $x_{n'} := \frac{a'_{n'}}{P^2}$.

Kad galėtume palyginti abiejų metodų efektyvumą, suskaičiuojame skirtumus tarp standartinio ir mūsų generuotos sekos su teoriniais momentais (4.13 lentelė).

4.13 lentelė. Gautų rezultatų lentelė

Mj =

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	$-1.75075938\cdot10^{-14}$	$-5.40194385\cdot10^{-14}$
2	0.33333333	$1.89668536\cdot10^{-4}$	$5.08031048\cdot10^{-5}$
3	0	$-8.51859001\cdot10^{-5}$	$7.81069135\cdot10^{-7}$
4	0.2	$2.17274119\cdot10^{-4}$	$4.53301191\cdot10^{-5}$
5	0	$-1.17893308\cdot10^{-4}$	$2.18871664\cdot10^{-6}$
6	0.14285714	$2.24618351\cdot10^{-4}$	$4.0374601\cdot10^{-5}$
7	0	$-1.27516358\cdot10^{-4}$	$3.71623609\cdot10^{-6}$
8	0.11111111	$2.22128917\cdot10^{-4}$	$3.64494973\cdot10^{-5}$
9	0	$-1.28366058\cdot10^{-4}$	$5.10613496\cdot10^{-6}$
10	0.09090909	$2.15742773\cdot10^{-4}$	$3.32505642\cdot10^{-5}$
11	0	$-1.2630742\cdot10^{-4}$	$6.33114583\cdot10^{-6}$
12	0.07692308	$2.07954051\cdot10^{-4}$	$3.0574406\cdot10^{-5}$
13	0	$-1.23675136\cdot10^{-4}$	$7.41137651\cdot10^{-6}$
14	0.06666667	$1.99872082\cdot10^{-4}$	$2.82845808\cdot10^{-5}$
15	0	$-1.21342536\cdot10^{-4}$	$8.37039722\cdot10^{-6}$

4.13 lentelės kairysis stulpelis parodo teorines momentų reikšmes, vidurinysis stulpelis parodo standartinio ir teorinio metodo momentų skaičiavimo skirtumus, o dešiniajame – mūsų metodo ir teorinio momento skirtumai. Su kitais sistemos pagrindais gauti rezultatai pateikti 3 priede.

.

IŠVADOS

1. Pasiūlytos naujo tipo netiesinės sekos, sudarytos sukarpymo ir permontavimo mechanizmu.
2. Naujo tipo sekos buvo realizuotos Mathcado programa sukurtu sekos generatorium, kuris suformuoja seką, kai nurodytas sistemos pagrindas P ir pirmosios dvi reikšmės a_0 ir a_1.
3. Naudojant sukurtą sekos generatorių buvo randami jos periodai T, kai $N = P^4$.
4. Ištyrus įvairius sugeneruotų sekų periodų radimo būdus buvo rasti periodai, priklausomai nuo to, kokie buvo paimami sistemos pagrindai, pradinės reikšmės ir sekų skaičiavimo dėsnis.
5. Sudarius sekų serijas, kai $a_{0,j}$ įgyja reikšmes 0, 1, 2, ... galima rasti visus galimus duoto pagrindo P sekos periodus.
6. Pritaikius sekas momentų analizėje, pastebėta, kad iš mūsų siūlomu metodu gautų atsitiktinių skaičių sekų rasti centriniai atsitiktinių skaičių momentai statistiškai gaunami ne mažesniu tikslumu, nei iš tų atsitiktinių skaičių, kuriuos generuoja standartinis Mathcado atsitiktinių skaičių generatorius.

NAUDOTA LITERATŪRA

1. AKSOMAITIS, A. *Tikimybių teorija ir statistika*. Kaunas, 2000. 132 p. ISBN 9986-13-893-0.
2. FOMINAS, S. *Skaičiavimo sistemos,* Vilnius, 1988. ISBN 5-420-00049-0.
3. PLANKIS, T. *Kompiuteriniai skaičiavimai kai kurioms sekoms ir polinomams* (daktaro disertacija), Vilnius (2009).
4. *Generatoriai.* [Žiūrėta 2011 04 12]. Prieiga per internetą: <http://random.mat.sbg.ac.at/generators/ >.
5. *Mathcad.* [Žiūrėta 2011 03 07]. Prieiga per internetą: <http://www.mathcad.lt/>.
6. *Skaičiavimo sistemos.* [Žiūrėta 2011 03 02] Prieiga per internetą: <http://gama.vtu.lt/biblioteka/IT/4_paskaita.htm>.

PRIEDAI

1. PRIEDAS. PROGRAMŲ TEKSTAI

1.1. SKAIČIŲ SEKOS PERIODŲ RADIMO PROGRAMOS TEKSTAS

$P := 10 \quad M := P^2 - 1 \quad M = 99 \quad N := P^4 \quad n := 0..N \quad J := M \quad j := 0..J$

$c := 1 \quad a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right) \quad a1_j := mod(j, P^2) \quad a_{0,j} := a0_j \quad a_{1,j} := a1_j \quad N = 10000$

$a_{n+2,j} := mod\left[P \cdot mod(a_{n,j}, P) + P \cdot floor\left(\frac{1}{P} a_{n+1,j}\right) + mod(a_{n+1,j}, P) + floor\left(\frac{1}{P} a_{n,j}\right), P^2\right]$

$b'_{n,j} := (P^2 \cdot a_{0,j} + a_{1,j} = P^2 \cdot a_{n,j} + a_{n+1,j}) \cdot n \quad b_{n,j} := b'_{n,j} \cdot (b'_{n,j} \neq 0) + (N+1) \cdot (b'_{n,j} = 0)$

$T_j := min(b^{\langle j \rangle}) \quad w_j := j \quad wt := augment(w, T) \quad T' := csort(wt, 1)$

$Td := \max(T) \quad k := 1..J \quad t_k := (T'_{k-1,j} < T'_{k,1}) \cdot k \quad t' := -sort(-t) \quad Td = 5567$

$R := \sum_{j=0}^{J} (t'_j > 0) \quad r := 0..R \quad T1_r := T'_{t'_r,1} \quad S := \sum_{r=0}^{R} T1_r \quad S = 8419$

1.2. CENTRINIŲ MOMENTŲ RADIMO PROGRAMOS TEKSTAS

$P := 50 \quad M := P^2 - 1 \quad M = 24 \quad N := P^4 \quad n := 0..N \quad J := 2 \quad j := 0..J$

$c := 1 \quad a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right) \quad a1_j := mod(j, P^2) \quad a_{0,j} := a0_j \quad a_{1,j} := a1_j \quad N = 6250000$

$a_{n+2,j} := mod\left[P \cdot mod(a_{n,j}, P) + P \cdot floor\left(\frac{1}{P} a_{n+1,j}\right) + mod(a_{n+1,j}, P) + floor\left(\frac{1}{P} a_{n,j}\right), P^2\right]$

$b'_{n,j} := (P^2 \cdot a_{0,j} + a_{1,j} = P^2 \cdot a_{n,j} + a_{n+1,j}) \cdot n \quad b_{n,j} := b'_{n,j} \cdot (b'_{n,j} \neq 0) + (N+1) \cdot (b'_{n,j} = 0)$

$T_j := min(b^{\langle j \rangle}) \quad w_j := j \quad wt := augment(w, T) \quad T' := csort(wt, 1)$

$k := 1..J \quad t_k := (T'_{k-1,j} < T'_{k,1}) \cdot k \quad t' := -sort(-t)$

$R := max(T'^{\langle 0 \rangle}) \quad r := 0..R \quad T1_r := T'_{t'_r,1} \quad S := \sum_{r=0}^{R} T1_r \quad S = 6235497$

$Td := \max(T) \quad Td = 6235497$

$a'_0 := c \quad a'_1 := T'_{R,0} \quad N' = Td \quad n' := n..N' \quad N' = 6235497$

$a'_{n'+2} := mod\left[P \cdot mod(a'_{n'}, P) + P \cdot floor\left(\frac{1}{P} a'_{n'+1}\right) + mod(a'_{n'+1}, P) + floor\left(\frac{1}{P} a'_{n'}\right), P^2\right]$

$G := 15 \quad g := 0..G \quad Mo_g := \int_0^1 (2x-1)^g$

$z_{n'} := rnd(1) \quad vz := \frac{1}{N'+1} \cdot \sum_{n=0}^{N'} z_n \quad Mz_g := \frac{1}{N'+1} \cdot \sum_{n=0}^{N'} \left[\left(\frac{z_n - vz}{0.5}\right)^g\right] \quad vz = 0.5001$

$x_{n'} := \frac{a'_{n'}}{P^2} \quad vx := \frac{1}{N'+1} \cdot \sum_{n=0}^{N'} x_n \quad Mx_g := \frac{1}{N'+1} \cdot \sum_{n=0}^{N'} \left[\left(\frac{x_n - vx}{0.5}\right)^g\right] \quad vz = 0.4998$

$Mj := augment(Mo, Mz - Mo, Mx - Mo)$

2. PRIEDAS. SEKOS GENERAVIMO KOMBINACIJŲ PAVYZDŽIAI

1 Pvz. Imame $P = 4$, $M = P^2 - 1$, $N = P^4$, pirmąsias dvi pradines reikšmes $a_{0,j} = c$, ir $a_{1,j}$, kur $a_{1,j}$ perbėga visus sveikuosius skaičius nuo 0 iki J ir formuojame skaičių sekos generatorių su sudėties ir atimties veiksmais

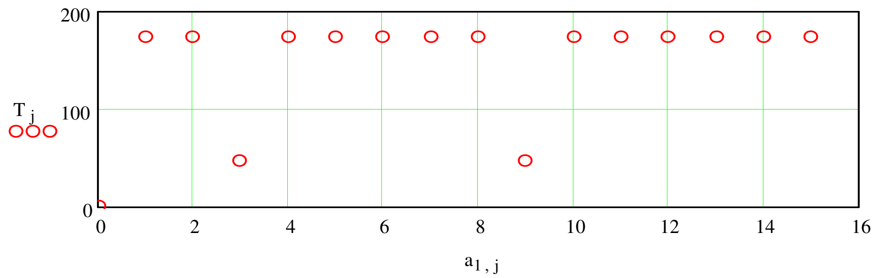
$$a_{n+2,j} \coloneqq mod\left[P \cdot mod(a_{n,j}, P) - P \cdot floor\left(\frac{1}{P}a_{n+1,j}\right) + mod(a_{n+1,j}, P) + floor\left(\frac{1}{P}a_{n,j}\right) + 3P^2, P^2\right].$$

1. Imame $c \coloneqq 0, a0_j \coloneqq floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j \coloneqq mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (1 lentelė).

1 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 0$ ir $P = 4$

T1 =

	C = 0
0	174
1	48
2	1



1 pav. Periodų grafikas, kai $P = 4$

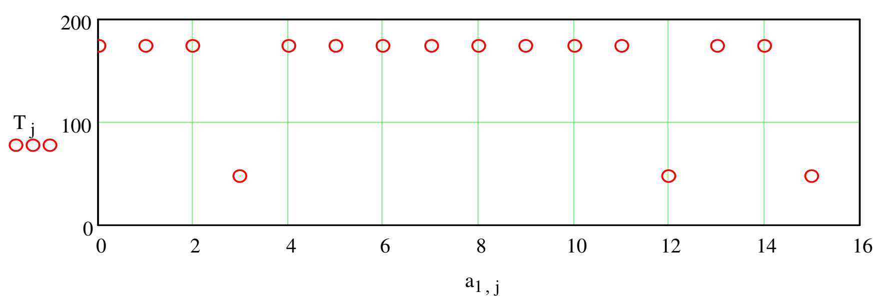
1 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 0$.

2. Imame $c \coloneqq 1, a0_j \coloneqq floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j \coloneqq mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (2 lentelė).

2 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 1$ ir $P = 4$

T1 =

	0
0	174
1	48



2 pav. Periodų grafikas, kai $P = 4$

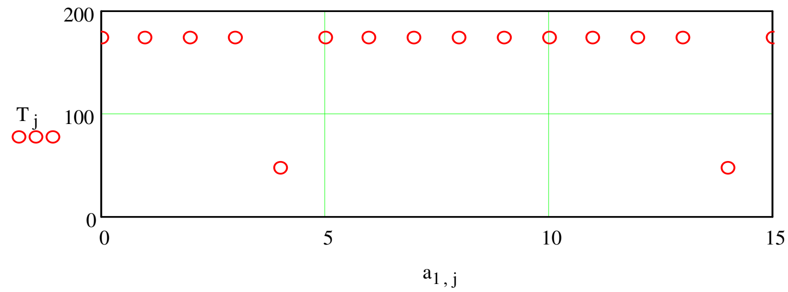
2 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 1$.

3. Imame $c := 2, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (3 lentelė).

3 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 2$ ir $P = 4$

T1 =

	0
0	174
1	48



3 pav. Periodų grafikas, kai $P = 4$

3 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 2$.

<u>2 Pvz.</u> Imame $P = 8$, $M = P^2 - 1$, $N = P^4$, pirmąsias dvi pradines reikšmes $a_{0,j} = c$, ir $a_{1,j}$, kur $a_{1,j}$ perbėga visus sveikuosius skaičius nuo 0 iki J ir formuojame skaičių sekos generatorių su sudėties ir atimties veiksmais

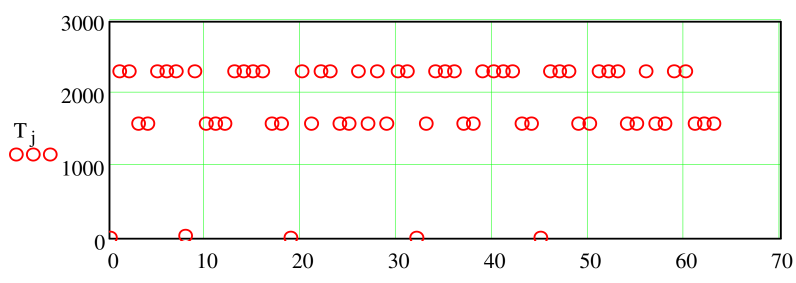
$$a_{n+2,j} := mod\left[P \cdot mod(a_{n,j}, P) - P \cdot floor\left(\frac{1}{P} a_{n+1,j}\right) - mod(a_{n+1,j}, P) + floor\left(\frac{1}{P} a_{n,j}\right) + 3P^2, P^2\right].$$

1. Imame $c := 0, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (4 lentelė).

4 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 0$ ir $P = 8$

T1 =

	0
0	2301
1	1577
2	28
3	8
4	6
5	1



4 pav. Periodų grafikas, kai $P = 8$

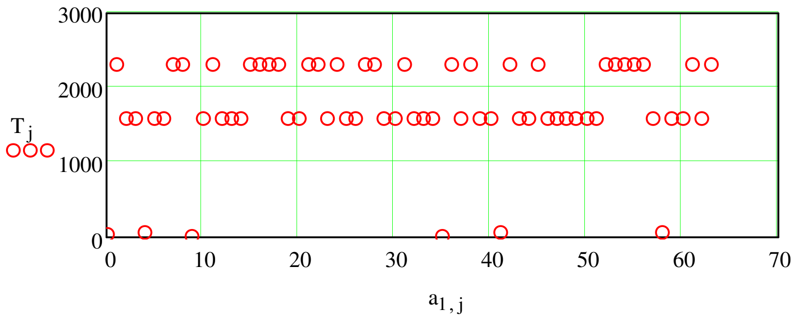
4 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 0$.

2. Imame $c := 1, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (5 lentelė).

5 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 1$ ir $P = 8$

T1 =

	0
0	2301
1	1577
2	54
3	28
4	24
5	8



5 pav. Periodų grafikas, kai $P = 8$

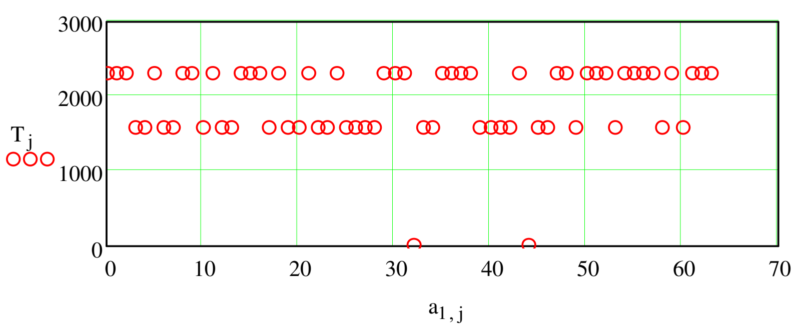
5 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 1$.

3. Imame $c := 2, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (6 lentelė).

6 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 2$ ir $P = 8$

T1 =

	0
0	2301
1	1577
2	24
3	12



6 pav. Periodų grafikas, kai $P = 8$

6 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 2$.

<u>3 Pvz.</u> Imame $P = 7$, $M = P^2 - 1$, $N = P^4$, pirmąsias dvi pradines reikšmes $a_{0,j} = c$, ir $a_{1,j}$, kur $a_{1,j}$ perbėga visus sveikuosius skaičius nuo 0 iki J ir formuojame skaičių sekos generatorių su sudėties ir atimties veiksmais

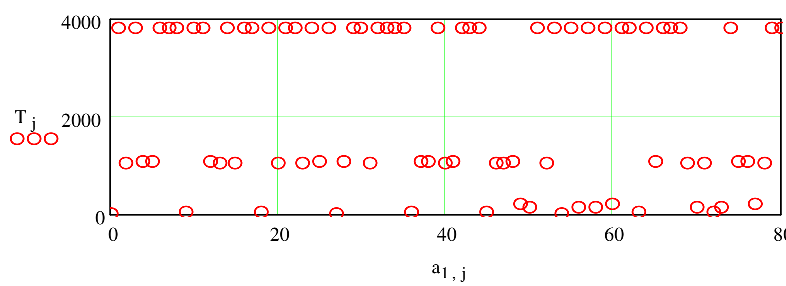
$$a_{n+2,j} := mod\left[P \cdot mod(a_{n,j}, P) + P \cdot floor\left(\frac{1}{P}a_{n+1,j}\right) - mod(a_{n+1,j}, P) + floor\left(\frac{1}{P}a_{n,j}\right) + 3P^2, P^2\right].$$

1. Imame $c := 0, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (7 lentelė).

7 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 0$ ir $P = 7$

T1 =

	0
0	3820
1	1089
2	1049
3	212
4	141
5	48
6	16
7	1



7 pav. Periodų grafikas, kai $P = 7$

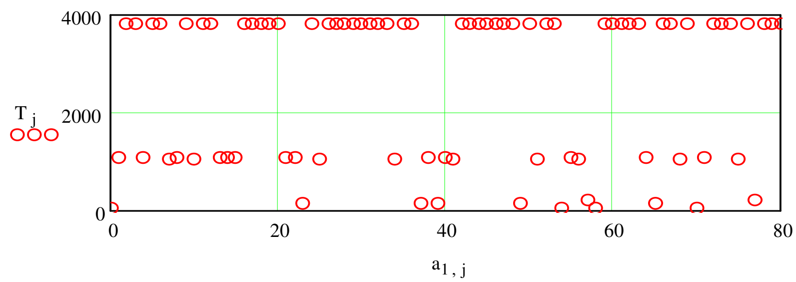
7 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 0$.

2. Imame $c := 1, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (8 lentelė).

8 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 1$ ir $P = 7$

T1 =

	0
0	3820
1	1089
2	1049
3	212
4	141
5	64
6	48



8 pav. Periodų grafikas, kai $P = 7$

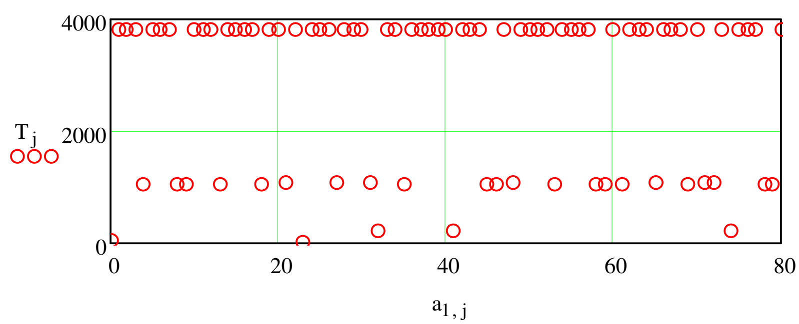
8 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 1$.

3. Imame $c := 2, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (9 lentelė).

9 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 2$ ir $P = 7$

T1 =

	0
0	3820
1	1089
2	1049
3	212
4	48
5	11



9 pav. Periodų grafikas, kai $P = 7$

9 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 2$.

4 Pvz. Imame $P = 12$, $M = P^2 - 1$, $N = P^4$, pirmąsias dvi pradines reikšmes $a_{0,j} = c$, ir $a_{1,j}$, kur $a_{1,j}$ perbėga visus sveikuosius skaičius nuo 0 iki J ir formuojame skaičių sekos generatorių su sudėties ir atimties veiksmais

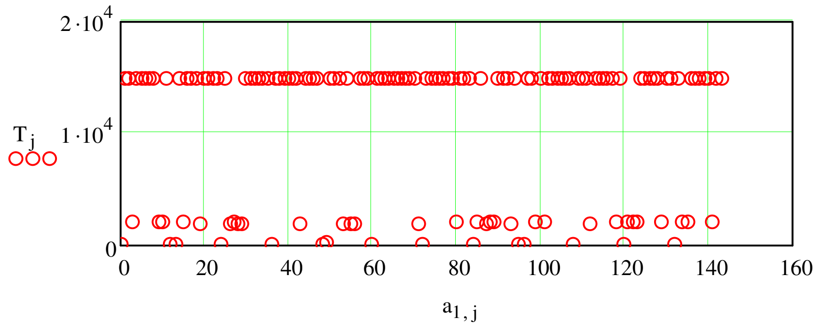
$$a_{n+2,j} := mod\left[P \cdot mod(a_{n,j}, P) - P \cdot floor\left(\frac{1}{P} a_{n+1,j}\right) + mod(a_{n+1,j}, P) - floor\left(\frac{1}{P} a_{n,j}\right) + 3P^2, P^2\right].$$

1. Imame $c := 0, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (10 lentelė).

10 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 0$ ir $P = 12$

T1 =

	0
0	14935
1	2085
2	1947
3	168
4	117
5	104
6	14
7	12
8	1



10 pav. Periodų grafikas, kai $P = 12$

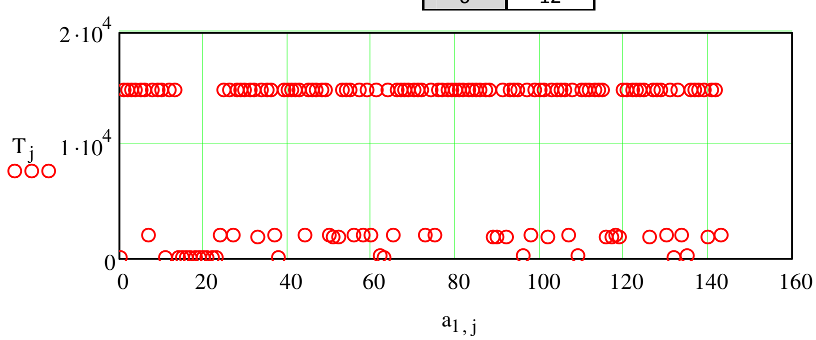
10 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 0$.

2. Imame $c := 1, a0_j := floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j := mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (11 lentelė).

11 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 1$ ir $P = 12$

T1 =

	0
0	14935
1	2085
2	1947
3	168
4	117
5	14
6	12



11 pav. Periodų grafikas, kai $P = 12$

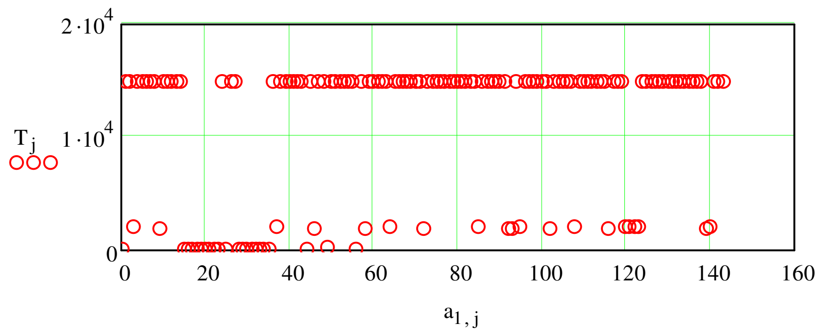
11 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 1$.

3. Imame $c \coloneqq 2, a0_j \coloneqq floor\left(\frac{j}{P^2} + c\right), a1_j \coloneqq mod(j, P^2)$ ir randami skaičių sekos periodai (12 lentelė).

12 lentelė. Periodų lentelė, kai $a_{0,j} = 2$ ir $P = 12$

T1 =

	0
0	14935
1	2085
2	1947
3	168
4	117
5	104
6	84
7	12



12 pav. Periodų grafikas, kai $P = 12$

12 paveikslėlio absicėje atidėtas antrasis sekos skaičius $a_{1,j}$, o ordinatėje yra atidėtas sekos periodas, kai $a_{0,j} = 2$.

3. PRIEDAS. GAUTI CENTRINIŲ MOMENTŲ REZULTATAI

1. Imant skirtingus sistemos pagrindus gauti tokie periodai

13 lentelė. Rastų periodų lentelė

	$P = 10$	$P = 20$	$P = 30$	$P = 40$
0	5567	80420	340027	1617926
1	20	38632	279257	184076
2	0	0	0	0

14 lentelė. Gauti tyrimo rezultatai kai P = 10

Mj =

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	$5.0659\cdot10^{-15}$
2	0.3333	0.0017	$3.064\cdot10^{-4}$
3	0	-0.0055	0.0031
4	0.2	0.0019	0.0014
5	0	-0.0062	0.0051
6	0.1429	0.0019	0.002
7	0	-0.0063	0.0063
8	0.1111	0.0018	0.0024
9	0	-0.0062	0.007
10	0.0909	0.0015	0.0026
11	0	-0.006	0.0075
12	0.0769	0.0013	0.0027
13	0	-0.0059	0.0079
14	0.0667	0.001	0.0028
15	0	-0.0057	0.0081

15 lentelė. Gauti tyrimo rezultatai kai P = 20

Mj =

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	$3.602\cdot10^{-15}$
2	0.3333	0.0016	$1.8204\cdot10^{-4}$
3	0	$2.4798\cdot10^{-4}$	0.0015
4	0.2	0.0013	$2.7787\cdot10^{-4}$
5	0	$5.371\cdot10^{-4}$	0.0021
6	0.1429	$9.8217\cdot10^{-4}$	$3.646\cdot10^{-4}$
7	0	$7.1213\cdot10^{-4}$	0.0025
8	0.1111	$7.8082\cdot10^{-4}$	$4.0848\cdot10^{-4}$
9	0	$8.2364\cdot10^{-4}$	0.0027
10	0.0909	$6.5338\cdot10^{-4}$	$4.1944\cdot10^{-4}$
11	0	$9.0017\cdot10^{-4}$	0.0028
12	0.0769	$5.7347\cdot10^{-4}$	$4.1145\cdot10^{-4}$
13	0	$9.5576\cdot10^{-4}$	0.0029
14	0.0667	$5.2366\cdot10^{-4}$	$3.9408\cdot10^{-4}$
15	0	$9.9771\cdot10^{-4}$	0.0029

16 lentelė. Gauti tyrimo rezultatai kai P = 30

Mj =

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	0
2	0.3333	$-3.1855\cdot10^{-4}$	$-2.6435\cdot10^{-4}$
3	0	$-1.8868\cdot10^{-4}$	$5.3331\cdot10^{-5}$
4	0.2	$-1.5603\cdot10^{-4}$	$2.8793\cdot10^{-5}$
5	0	$-2.6493\cdot10^{-4}$	$1.2107\cdot10^{-6}$
6	0.1429	$-1.3612\cdot10^{-5}$	$1.6259\cdot10^{-4}$
7	0	$-3.0092\cdot10^{-4}$	$-4.8283\cdot10^{-5}$
8	0.1111	$7.0611\cdot10^{-5}$	$2.2062\cdot10^{-4}$
9	0	$-3.2325\cdot10^{-4}$	$-8.5257\cdot10^{-5}$
10	0.0909	$1.1662\cdot10^{-4}$	$2.453\cdot10^{-4}$
11	0	$-3.3873\cdot10^{-4}$	$-1.1125\cdot10^{-4}$
12	0.0769	$1.4002\cdot10^{-4}$	$2.5466\cdot10^{-4}$
13	0	$-3.4954\cdot10^{-4}$	$-1.2866\cdot10^{-4}$
14	0.0667	$1.5033\cdot10^{-4}$	$2.569\cdot10^{-4}$
15	0	$-3.5683\cdot10^{-4}$	$-1.3961\cdot10^{-4}$

17 lentelė. Gauti tyrimo rezultatai kai P = 40

Mj =

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	$1.9266\cdot10^{-15}$	$2.5164\cdot10^{-14}$
2	0.3333	$-1.0683\cdot10^{-4}$	$1.6671\cdot10^{-4}$
3	0	$-2.6048\cdot10^{-4}$	$5.1624\cdot10^{-5}$
4	0.2	$-4.3064\cdot10^{-5}$	$1.92\cdot10^{-4}$
5	0	$-3.5762\cdot10^{-4}$	$5.5397\cdot10^{-5}$
6	0.1429	$-6.3094\cdot10^{-6}$	$2.0514\cdot10^{-4}$
7	0	$-3.9063\cdot10^{-4}$	$5.0264\cdot10^{-5}$
8	0.1111	$1.3151\cdot10^{-5}$	$2.0974\cdot10^{-4}$
9	0	$-3.9841\cdot10^{-4}$	$4.5019\cdot10^{-5}$
10	0.0909	$2.4501\cdot10^{-5}$	$2.0943\cdot10^{-4}$
11	0	$-3.9713\cdot10^{-4}$	$4.0593\cdot10^{-5}$
12	0.0769	$3.1771\cdot10^{-5}$	$2.0671\cdot10^{-4}$
13	0	$-3.9334\cdot10^{-4}$	$3.6807\cdot10^{-5}$
14	0.0667	$3.6788\cdot10^{-5}$	$2.0304\cdot10^{-4}$
15	0	$-3.8957\cdot10^{-4}$	$3.3464\cdot10^{-5}$