



VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Vladislav Žarnovskij

**ĮTEMPIMŲ BŪVIO ERDVIŠKUMO ĮTAKOS
PLOKŠTELIŲ SU ĮPJOVA ĮTEMPIMŲ INTENSYVUMO
KOEFIICIENTUI SKAITINIS TYRIMAS**

Daktaro disertacija

Technologijos mokslai. Mechanikos inžinerija (09T)

Vilnius, 2005

Disertacija rengta 2001–2005 m. Vilniaus Gedimino Technikos universitete.

Darbo mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Rimantas KAČIANAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, technologijos mokslai, mechanikos inžinerija – 09T)

Konsultantas

prof. habil. dr. Mykolas DAUNYS (Kauno technologijos universitetas, technologijos mokslai, mechanikos inžinerija – 09T).

TURINYS

Įvadas.....	5
1. Irimo mechanikos uždaviniai ir jų sprendimas baigtinių elementų metodu (BEM).....	10
1.1 Irimo mechanikos tikslai ir uždaviniai.....	10
1.2 Irimo kriterijai.....	12
1.3 Įtempimų ir deformacijų nustatymas.....	17
1.4 Baigtinių elementų metodas ir jo taikymas irimo mechanikoje.....	19
1.5 Erdviniai uždaviniai	25
1.6 Apibendrinimas ir tyrimo uždaviniai.....	29
2. Plokštelių trimačiai baigtinių elementų modeliai.....	30
2.1 Bendrieji teiginiai.....	30
2.2 Trimis taškais lenkiama plokštelė su įpjova	30
2.3 Dvimačiai modeliai	31
2.4 Trimačio modelio kūrimas.....	34
2.5 Modelio patikra	36
2.6 Skyriaus rezultatai ir išvados.....	41
3. Plokštelės erdviškumo tyrimas.....	42
3.1 Trimačiai įtempimų ir deformacijų laukai.....	42
3.2 Erdvinio būvio rodikliai.....	46
3.2.1 Įtempimų būvio erdviškumo laipsnis.....	46
3.2.2 Deformacijų būvio erdviškumo laipsnis.....	50
3.3 Būvių erdviškumo vertinimas.....	54
3.4 Skyriaus rezultatai ir išvados.....	55
4. Įtempimų intensyvumo koeficiento (K) tyrimas.....	57
4.1 Įtempimų intensyvumo koeficiento K nustatymo trimačiuose uždaviniuose modelis.....	57
4.2 Skaitiniai įtempimų intensyvumo koeficiento nustatymo metodai.....	60
4.2.1 Koeficiento K skaičiavimai pagal įtempimus.....	60
4.2.1 Koeficiento K skaičiavimai pagal poslinkius.....	63
4.2.3 Metodų palyginimas.....	67
4.3 Rezultatų analizė.....	68
4.4 Skyriaus rezultatai ir išvados.....	72

5.	Tampraus-plastinio deformavimo modeliavimas.....	74
5.1	Netiesinio uždavinio formulavimas.....	74
5.2	Įtempimų tyrimas	77
5.3	Įtempimų būvio erdviškumas.....	79
5.4	Erdvinio plastinės zonos kontūro nustatymas.....	80
5.5	Įtempimų intensyvumo koeficientas.....	83
5.6	Skyriaus rezultatai ir išvados.....	85
	Išvados ir rezultatai.....	86
	Literatūra.....	87

IVADAS

Irimo mechanika yra deformuojamojo kūno mechanikos šaka, nagrinėjanti plyšio arba plyšių sistemos atsivėrimą ir plitimą kūne. Irimo pradžią nusako kūno irimo rodikliai ir kriterijai, kuriuos nustatant reikia tiksliai apskaičiuoti įtempimų ir deformacijų laukus koncentratoriaus aplinkoje. Įvairūs defektai, kurie yra plyšių susidarymo bei irimo priežastis, apsunkina konstrukcijos elemento stiprumo skaičiavimą. Net taikant tobuliausias gamybos technologijas, nepavyksta sukurti medžiagos be defektų, kurie ir yra pagrindiniai irimo židiniai. Plyšys – vienas iš dažniausiai sutinkamų defektų, o naudojantis dirbtinai sukurtomis (imituotomis) įpjovomis tiriami irimo mechanikos dėsningumai.

Irimo sąlygos nusakomos irimo rodikliais ir kriterijais. Didėjančių išorinių jėgų atliekamas plyšiui atsiverti darbas, arba kūno potencinės deformavimo energijos sumažėjimas plyšiui padidėjus, gali būti išreiškiamas įtempimų intensyvumo koeficientu, atliekančiu fundamentalų vaidmenį irimo mechanikoje. Jam nustatyti taikomi trejopi metodai: klasikiniai – analiziniai, eksperimentiniai bei skaitiniai. Eksperimentiniais metodais pagrindžiami teoriniai (analiziniai) arba skaitiniai tyrimai. Tiesioginiais matavimais nustatyti atsivėrimo parametrus plyšio viršūnėje yra sudėtinga, todėl taikomi įvairūs šalutiniai metodai, pagrįsti poslinkių matavimais. Klasikiniai analiziniai metodai taikomi konkrečios geometrijos dvimačiams objektams su tam tikros formos defektais. Šių metodų paprastumas – pagrindinė priežastis, kodėl irimo mechanikoje yra populiariu erdvinis kūnus nagrinėti plokštuminiu požiūriu. Praktikoje dažniausiai taikomi naujausi skaitiniai metodai: baigtinių elementų (BE) ir kraštinių elementų (KE) metodai, kurie yra pigesni, juos taikant išsamesni rezultatai gaunami greičiau, negu atliekant natūrinius bandymus. Skaitiniais metodais tiksliau nustatomi įtempimų ir deformacijų būviai plyšio (defekto) viršūnės aplinkoje. Trimačiams uždaviniams reikia kurti sudėtingus erdvinis modelius su trimačiais tinklais.

Dauguma klasikinių analizinių, eksperimentinių ir skaitinių tyrimų apsiriboja dvimačių uždavinių sprendimu, taikant įvairias prielaidas, nors realus irimas paprastai vyksta trimačiuose objektuose (defekto viršūnės aplinkoje susidaro erdvinis būvis, kurio tikslus aprašymas tebėra neišspręsta problema). Skaitiniai tyrimai tik patvirtina, kad šalia plokštuminio deformacijų būvio plyšio viršūnėje egzistuoja erdvinė sritis, kurioje įtempimų būvis yra tarpinis (pereinantysis) su erdvinio būvio požymiais. Paskelbta nemaža publikacijų, kuriose bandoma skaitiškai nagrinėti įtempimų ir deformacijų pokyčius išilgai plyšio fronto, tačiau dar nėra tiksliai nustatyta, kokie veiksniai ar rodikliai lemia šių pokyčių dėsningumus. Kai būvis supaprastinamas iki plokštuminio (dvimačio); svarbu ištirti šio supaprastinimo įtaką, kitaip tariant – būvio erdviškumo įtaką.

Disertacijoje atlikti tyrimai priskirtini skaitinei irimo mechanikai.

Darbo tikslas

Siekiama:

1. Skaitiškai modeliuoti erdvinį įtempimų bei deformacijų būvį deformuojamoje plokštelėje su įpjova, apimant plastinių zonų susidarymą.
2. Tokiam modeliavimui sukurti taikome specialų erdvinį baigtinių elementų modelių sudarymo algoritmą. Norint gauti patikimus tyrimo rezultatus, reikia turėti baigtinių elementų tinklą, kuris būtų pajėgus tiksliai nustatyti mechaninius rodiklius fiksuotose plokštelės storio vietose. Algoritmas turi tikti plokštelėms (bandiniams) su įpjovomis diskretizuoti ir būti suderinamas su egzistuojančiais BE programiniais paketais.
3. Nustatyti, kaip modeliuojamas erdvinis įtempimų būvis ir irimo rodikliai kinta per plokštelės storį ir kaip jie priklauso nuo plokštelės storio.
4. Įvertinti plokštelės būvio erdviškumo ir plokštelės storio įtaką įtempimų intensyvumo koeficientui tiek tampriojoje, tiek tampriojoje-plastinėje stadijoje, t.y. nustatyti, kur ir kada naudotis supaprastintu plokštuminiu įtempimų būvio įvaizdžiu yra pateisinama ir kur toks erdvinio būvio supaprastinimas yra klaidingas ir neleistinas.

Tyrimų objektas ir metodai

Erdviškumo įtakai skaitiškai tirti buvo pasirinktas erdvinis kūnas su vienpuse įpjova, kuris atkartoją natūriniuose eksperimentuose dažnai naudojamą standartinį trimis taškais lenkiamą bandinį su imituotu defektu. Keičiant vieną kūno matmenį, jis virsta plokštele.

Pagal pirmąją normalinio atplėšimo irimo formą apkrauta plokštelė su centrine V–formos įpjova nagrinėjama makroskopiniu lygiu, kai medžiaga yra vienalytė ir izotropiška. Baigtinių elementų metodu tiriama įtempimų ir deformacijos laukų erdviškumo įtaka įtempimų intensyvumo koeficientui ir plastinių deformacijų zonos ties įpjovos viršūne formos kitimui.

Darbo naujumas ir originalumas

1. Įvertinta įtempimų būvio erdviškumo ir storio įtaka deformuojamo kūno mechaniniam būviui ir įtempimų intensyvumo koeficientui įvairiose plokštelės storio vietose.

2. Trimačiam modeliui nagrinėti ir erdviniams irimo mechanikos uždaviniams spręsti sukurtas bei pritaikytas originalus algoritmas ir kompiuterinės technologijos, kombinuojant prisitaikančius tinklus plokštumoje ir struktūrinius tinklus plokštelės storio kryptimi.

3. Remiantis klasikiniiais irimo mechanikos dėsningumais, aprašytas plastinių zonų formavimasis erdviniam plokštelės modelyje.

4. Baigtinių elementų modelis gali būti taikomas nagrinėti įvairaus sudėtingumo trimatėms struktūroms su įvairiais iš anksto žinomos formos defektais.

Darbo aprobacija

Pagrindiniai disertacinio darbo tyrimo rezultatai paskelbti ir svarstyti šiose mokslinėse konferencijose:

1. Žarnovskij V. Įtempimų ir deformacijų tyrimai lenkiamame bandinyje. // X – Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos asociacijos konferencija, VGTU, Vilnius, Lietuva, 2002–03–12.
2. Žarnovskij V. Trimačio įtempimų ir deformacijų būvio lenkiamame bandinyje tyrimas BEM. // XI Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos asociacijos konferencija, Vilnius, VGTU, Lietuva, 2003–04–04.
3. Žarnovskij V. The numerical investigation of out-of-plane stress and strain influence in notched plate by the FEM. // 3rd International Conference Strength, Durability and Stability of Materials and Structures "SDSMS '03", KTU, Klaipėda, Lithuania., 17–19 September, 2003.
4. Žarnovskij V. Erdvinių modelių taikymo bandinių su įpjova analizei BEM ypatumai. // XII Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos asociacijos konferencija, VGTU, Vilnius, Lietuva, 2004–04–09.
5. Kačianauskas R., Žarnovskij V., Stupak E. Three-dimensional Correction of Two-dimensional Fracture Criteria Using a Constraint Factor. // 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Warsaw, Poland, 15–21 August 2004.
6. Žarnovskij V., Kačianauskas R. Three-dimensional FE Simulation of Stress Intensity Factor in Three-point Bending Plate. // 17th Nordic Seminar on Computational Mechanics NSCM–17, KTH, Stockholm, Sweden, 15 – 16 October, 2004.
7. Žarnovskij V., Kačianauskas R. Erdvinio įtempimų būvio įtaka irimo rodikliams plokštelėje su įpjova, esant mažoms plastinėms zonoms. // Mechanika 2005, Kaunas. KTU, 2005–04–07.

Straipsniai, paskelbti daktaro laipsniui suteikti pripažįstamuose leidiniuose

1. Žarnovskij V.; Kačianauskas R. The Finite Element Investigation of the Thickness Influence on 3D Stress and Strain Fields in the SENB Specimens. *Mechanics*, Vol 4 (42). Kaunas: Technologija, 2003, p. 5–10.
2. Kačianauskas R.; Žarnovskij V.; Stupak E. Three-dimensional correction of two-dimensional fracture criteria using a constraint factor. In: ICTAM04 Abstracts Book and CD-ROM proceedings, Warsaw, Poland, 15–21 August, 2004 (Eds. Gutkowski W.; Kowalewski T.A.). IPPT PAN, Warszawa, Poland, 2004, 2 p.
3. Žarnovskij V.; Kačianauskas R. Three-dimensional FE simulation of stress intensity factor in three-point bending plate. In: Proceedings of the 17th Nordic Seminar on Computational Mechanics. KTH Mechanics Royal Institute of Technology, Sweden, 2004, p. 201–204.
4. Žarnovskij V.; Kačianauskas R. Erdvinio įtempimų būvio įtaka irimo rodikliams plokštelėje su įpjova, esant mažoms plastinėms zonoms. Tarptautinės konferencijos „Mechanika 2005“ pranešimų medžiaga. Kaunas: Technologija, 2005, p. 61–66.
5. Kačianauskas R.; Žarnovskij V.; Stupak E. Three-Dimensional Correction of Two-Dimensional Fracture Criteria Using a Constraint Factor. E-book: Mechanics of the 21st Century. (Eds. Gutkowski W.; Kowalewski T.A. Warsaw). Springer, 2005, p.1–2.
6. Kačianauskas R.; Mruz Z.; Žarnovskij V.; Stupak E. Three-Dimensional Correction of the Stress Intensity Factor for Plate with a Notch. *International Journal of Fracture*. (Priimtas spausdinti).

Kitos publikacijos

Lukoševičius K.; Žarnovskij V. The Restoration of an Automobile Deformed Side Member. *Transport Engineering*, Vol 1, 2001, p. 35–38.

Darbo sandara

Disertaciją sudaro penki skyriai, baigiamosios išvados ir 105 bibliografinių šaltinių sąrašas. Disertacijos tekstas pateiktas 94 kompiuteriu sumaketuotuose puslapiuose, tekste yra 54 paveikslai. Disertacija parašyta lietuvių kalba.

Darbo turinys

Įvadinis skyrius – įžanginė dalis, kurioje trumpai apibrėžta tyrimų sritis, suformuluotas darbo aktualumas, tikslas, apibūdintas tyrimų objektas, aptartas darbo naujumas bei originalumas, pateikta aprobacija.

Pirmajame skyriuje nagrinėjama kitų autorių paskelbta tyrimų medžiaga, susijusi su disertacijos tema, irimo mechanikos uždavinių analize, irimo kriterijų parinkimu ir plyšių modeliavimu. Aptariamos dažniausiai taikomo baigtinių elementų metodo galimybės šiems uždaviniams spręsti, analizuojami irimo mechanikos erdviniai uždaviniai.

Antrajame skyriuje nagrinėjami trimačiai plokštelių baigtinių elementų modeliai, aprašomas originalus baigtinių elementų erdvinio tinklų generavimo algoritmas ir ištestuotas erdvinis plokštelės su įpjova baigtinių elementų modelis.

Trečiajame skyriuje nagrinėjama plokštelės su įpjova įtempimų ir deformacijų trimačių laukų įtaka būvio erdviškumo rodikliams. Pateikti būvio erdviškumo rodiklių laukai. Nustatoma plokštelės erdvinio būvio priklausomybė nuo plokštelės storio.

Ketvirtasis skyrius skirtas įtempimų intensyvumo koeficiento analizei. Erdviniams efektams įvertinti pasiūlyta įtempimų intensyvumo koeficiento pataisa, priklausanti nuo plokštelės įtempimų būvio. Teorinis modelis lyginamas su skaitinio eksperimento rezultatais, kuriuos taikant išnagrinėtas įtempimų intensyvumo koeficiento kitimas storio kryptimi bei jo priklausomybė nuo plokštelės storio.

Penktajame skyriuje erdvinis baigtinių elementų modelis taikomas netiesinės irimo mechanikos uždaviniui erdviniame lenkiamame bandinyje su įpjova spręsti. Fiziškai netiesinis deformavimo uždavinys išspręstas esant tampriai plastinei tiesiškai stiprėjančiai medžiagai. Atsižvelgta į plastinės zonos įtaką įtempimų intensyvumo koeficientui per plokštelės storį, rezultatai sugretinti su tampriosios stadijos sprendiniu.

Disertacinio darbo pabaigoje pateiktas *literatūros sąrašas*.

1. Irimo mechanikos uždaviniai ir jų sprendimas baigtinių elementų metodu

Šis apžvalginis disertacijos skyrius skirtas išanalizuoti irimo tyrimų srities situaciją. Pateikiami irimo mechanikos rodikliai ir kriterijai bei formuluojami spęstini uždaviniai. Aptariamas baigtinių elementų metodas (BEM) bei jo taikymas irimo mechanikoje. Nagrinėjami baigtinių elementų metodo ypatumai, sprendžiant erdvinius irimo mechanikos uždavinius.

1.1 Irimo mechanikos tikslai ir uždaviniai

Irimo mechanika tiria apkrauto konstrukcinio elemento su defektu mechaninę elgseną. Irimo sąlygų ir priežasčių vertinimas būtinas analizuojant konstrukcijų irimą.

Vienas iš svarbiausių irimo mechanikos uždavinių - prognozuoti kūno atsparumą irimui veikiant išorinei apkrovai, kai žinomos kūno geometrinės ir medžiagos mechaninės charakteristikos. Dažnas praktinis inžinerinis irimo mechanikos tikslas - įvertinti suirimo pavojų kūnuose su tuštumomis, plyšiais ir įtrūkimais, aptikti ir įvertinti plyšių bei struktūrinių defektų įtaką plokštelės atsparumui. Konstrukcijos suirimui dėl išorinių statinių apkrovų aprašyti reikia apibendrintų irimo mechanikos dėsnių, susietų su įtempimų pasiskirstymu.

Irimo mechanikos tikslas – nustatyti irimo sąlygas įvairios formos kūnams, veikiamiems išorinių sąlygų ir žinomų apkrovų.

Irimo mechanikos kryptys:

- a) irimo modelių sudarymas, grindžiant juos teoriniais samprotavimais, eksperimentiniais duomenimis ir irimo kriterijais;
- b) įvairių uždavinių sprendimas, naudojant irimo modelius.

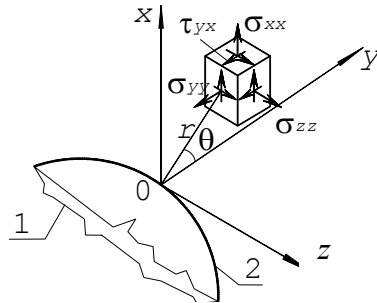
Irimo mechanika taip pat nagrinėja irimą be žymesnių plastinių deformacijų (trapųjį irimą), irimą su ženkliais plastinėmis deformacijomis (tąsųjį irimą) ir plyšių plitimą.

Tiesinės irimo mechanikos pradininku laikomas A. Grifitsas (A.Griffith, 1920 m.). Iki to laiko nebuvo paskelbtų išaiškinimų, kodėl skiriasi teoriškai apskaičiuotos ir realios trapiųjų medžiagų tempiamųjų stiprių reikšmės. A.Grifitsas pirmasis įrodė, kad realus trapiųjų medžiagų stipris yra ženkliai mažesnis nei teoriškai apskaičiuotas, nes medžiagose yra defektų.

Plyšys 1 (1.1a pav.) apibūdinamas kaip kūno 1 atskyrimo paviršius, medžiagos viduje apribotas pagrindinės briaunos 2, kuri dar vadinama plyšio kraštu. Yra trys kinematiškai

nepriklausomi viršutinio ir apatinio plyšio paviršių persislinkimo vienas kito atžvilgiu deformavimo atvejai (taip vadinamos “formos” I, II ir III) (1.1 b – d pav.).

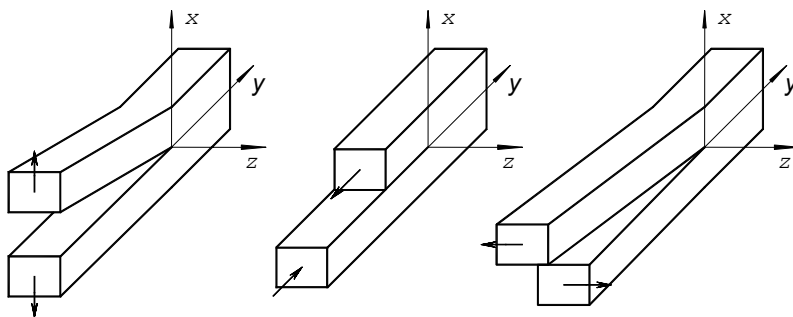
a)



b)

c)

d)



1.1 pav. Plyšys: a – plyšio geometrija; b – d pagrindinės plyšio plitimo formos (b – normalinio atplėšimo, c – skersinės šlyties, d – išilginės šlyties)

Priklausomai nuo plyšio plitimo formos, taikomos skirtingos išraiškos ir skirtingi irimo kriterijai įtempimams bei deformacijoms aprašyti.

Daugumoje konstrukcinių elementų yra geometrinių netobulumų: nuožulų, varžtų sriegių, krumplių, griovelių, kiaurymių ir pan. Jeigu defektų pokyčio matmenys yra baigtinio dydžio, tai įtempimų ir deformacijų laukas gali būti nustatomas lokaliai. Įtrūkimas irgi laikomas geometriniu netobulumu. Atskiras netobulumo atvejis yra *įpjova*. Įpjova yra apibūdinama jos viršūnės kreivumo spinduliu. Kai kontinuumas tampa begaliniu arba kreivės įtrūkimo ar įpjovos spindulio reikšmės artėja prie nulio, yra vartojama plyšio koncepcija ir taikomi atitinkami įtempimų intensyvumo koeficientai. Taigi kai kuriais atvejais įpjova tapatinama su *plyšiu*.

1.2. Irimo kriterijai

Įtempimų ir deformacijų būvis erdviniam kūne įpjovos viršūnėje yra pakankamai sudėtingas ir nevienareikšmis, todėl jam apibūdinti taikomi apibendrintieji rodikliai. Apibendrintieji rodikliai yra dydžiai, pagal atitinkamą kriterijų lemiantys irimo pradžią. Fizinė prasme kriterijai išreiškia bendrąjį įtempimų ir deformacijų pasiskirstymą tuo momentu, kai sukauptas kritinės potencinės deformavimo energijos kiekis (R. Kienzler, 2000 m.). Skaičiuojant plyšio atsivėrimo mechaninius uždavinius, naudojami trys būdai fiziškai išreikšti fizinį procesą:

- potencinę deformavimo energiją;
- įtempimai;
- deformacija.

Potencine deformavimo energija išreikštas būdas patogus, nes aprašo plyšio atsivėrimo proceso visumą. Įtempimais išreikšti kriterijai yra lokalūs, jie ne visai tiksliai atspindi integralinį būvį, tačiau yra patogūs išvedant praktines formules. Deformacijomis išreikšti kriterijai tiesiogiai susiję su eksperimentais, todėl jų taikymą sąlygoja natūriniai bandymai.

Praktiniu požiūriu kokybiškai ir kiekybiškai aprašant plyšio viršūnės būseną taikomi kriterijai, susiję su tokiais pagrindiniais rodikliais:

- įtempimų intensyvumo koeficientas K ;
- J -integralas;
- atpalaiduojamos energijos kiekis G ;
- plyšio atsivėrimas δ ;
- įtempimų koncentratoriaus viršūnėje $\sigma_{\theta\theta}$.

Nagrinėjant plokštelių su įpjova irimą, vyrauja pirmoji irimo forma (1.1 b pav.), nes storų plokštelių šlyties irimas tiek plokštelės plokštumoje, tiek „iš plokštumos“ nevyrauja. Antroji irimo forma teoriškai taip pat galėtų atsirasti tokio tipo plokštelėse. Tačiau šlyties plotas šiuo atveju viršija pirmos irimo formos tempiamos srities plyšio atsivėrimo plotą. Tuomet šis atvejis laikomas mažiau pavojingu ir šiame darbe nenagrinėjamas. Plonoms bei vidutinio storio plokštelėms trečia irimo forma gali atsirasti, tačiau šiuo atveju vyravimą perima stabilumo praradimo ir lenkimo iš plokštumos reiškiniai. Šiame darbe remuose tiriami tiksliai iki iriminiai procesai, todėl apsiribojama plokštelės deformavimu apkrovos veikimo plokštumoje.

Kadangi visas medžiagos bei deformavimo proceso savybės ir ypatumus sumodeliuoti yra sudėtinga, tai idealizuojant uždavinį taikomos inžinerinės prielaidos:

- medžiaga tampri arba idealizuotai stiprėjanti;
- apkrovos pridedamos kvazistatiškai;
- medžiaga homogeninė ir izotropinė;
- atramos idealios;
- įtempimų ir deformacijų būvis nagrinėjamas iki plyšio atsivėrimo momento.

Sudarant išorinės apkrovos veikiamo konstrukcijos elemento su plyšiu ar įpjovos irimo kriterijus, svarbu nustatyti įtempimų ir deformacijų būvį, ypač plyšio viršūnės aplinkoje, kur prasideda irimas. Tiesiškai tampriam kūnui ties įpjovos viršūne atsirandantis įtempimų laukas gali būti išreikštas apkrovomis ir kūno geometrija. Iš „jėgos“ pozicijų, pagrįstų įtempimų būvio analize, įtempimų laukas ties plyšio viršūne gali būti aprašomas bendru įtempimų pasiskirstymu, kurį kiekvienu plyšio didėjimo atveju apibūdina pagrindinis šio darbo objektas - irimo kriterijus, pagrįstas įtempimų intensyvumo koeficientu K (G.R.Irwin, 1960 m. ir P.C.Paris, G.C.SIH, 1965 m.).

Įtempimų intensyvumo koeficientas K – įtempimų ir deformacijų įpjovos viršūnėje matas, kuris nusako plyšio plitimo procesą, priklauso nuo išorinės apkrovos, kūno geometrijos, įskaitant įpjovos (plyšio) konfigūraciją, ir nuo kitų medžiagos tamprųjų konstantų. Jo dimensija – jėga padalinta iš ilgio trijų antrųjų laipsniu arba $(\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}})$. Šį dydį galima apibūdinti kaip parametą, nusakantį įtempimų lauką ties plyšio viršūne.

Irimas prasideda, kai įtempimai įpjovos viršūnėje persiskirsto taip, kad irimo kriterijaus rodiklis pasiekia kritinę reikšmę. Kadangi įtempimų pasiskirstymas plyšio viršūnėje apibūdinamas įtempimų intensyvumo koeficientais K_α , tai irimo pradžia laikomas būvis, kai įtempimų intensyvumo koeficientas prilygsta ribiniam medžiagos rodikliui. Bendroju atveju irimo kriterijus išreiškiamas sąlyga:

$$K_\alpha(\sigma, l, L, \dots) = K_{\alpha c} \quad (1.1)$$

Jis tinka kiekvienai atskirai irimo formai α ($\alpha = \text{I, II, III}$), priklausomai nuo plyšio plitimo formos. Čia σ apibūdina išorinę apkrovą, l – plyšio matmenis, L – kūno matmenis, indeksas c žymi kritinę dydžio reikšmę. K_{lc} reikšmė eksperimentinėje irimo mechanikoje yra vadinama medžiagos *irimo taksumu*. Ji nepriklauso nuo kūno su plyšiu geometrijos, o priklauso tik nuo medžiagos savybių, jos temperatūros ar apkrovos.

Yra žinomi įvairiausi analiziniai ir skaitiniai metodai, skirti įtempimų intensyvumo koeficientui K skaičiuoti. Tiesioginiais eksperimentais matuoti plyšio atsivėrimą ties viršūne gana sudėtinga, todėl taikomi šalutiniai metodai, pagrįsti poslinkio matavimu patogioje vietoje. Galima matuoti atsivėrimą plyšio centre, bet kuriame plyšio pjūvyje arba laisvajame plokštelės paviršiuje.

Sukurta keletas kritinių įtempimų intensyvumo koeficiento K_{Ic} nustatymo metodų: pradinės įpjovos gylio metodas, prisitaikomumo (*angl.* compliance) metodika, *CTOD* plyšio pločio prieaugio metodas (*angl.* crack tip opening displacement). Tiesinės bei netiesinės irimo mechanikos lenkiamos plokštelės spęstų uždavinių rezultatai šioje disertacijoje yra lyginami su teoriniu skaičiavimu, taikant analizines formules iš ASTM E399 standarto. Kritinės šių rodiklių reikšmės nustatomos eksperimentiniais metodais.

Kito irimo kriterijaus rodiklis J -integralas - vienas iš dažniausiai taikomų parametrų netiesinėje irimo mechanikoje (A. Carpinteri, 1990 m.; S. Sedmak, 1990 m.; K.Y. Sze, 1999 m.; T. Siegmund, 2000 m.; T. Denyse de Araujo, 2000 m.), kurį pasiūlė Rice, 1968 m.

$$J_I(\sigma, l, L, \dots) = J_{Ic}. \quad (1.2)$$

Įtempimų intensyvumo koeficientą su J -integralu plokštuminio deformacijų būvio atveju sieja tokia išraiška:

$$K_I^2 = \left(\frac{E}{1 - \nu^2} \right) J_I. \quad (1.3)$$

J -integralas išreiškiamas potencine energija:

$$J = - \left(\frac{d\Pi}{da} \right)_p, \quad (1.4)$$

čia Π – kūno su plyšiu potencinė energija, a -plyšio ilgis.

Nors J -integralas nepriklauso nuo integravimo kelio, bet, atsižvelgus į netiesinių irimo mechanikos uždavinių sudėtingumą, literatūroje įrodyta, kad net naudojant šiuolaikinius skaitinius metodus yra pakankamai sudėtinga gauti šio integralo apytikslius sprendinius ar užrašyti juos standartinėmis išraiškomis. Netiesinėje irimo mechanikoje J -integralą pirmas pritaikė Rice, 1968 m.

Energetinis irimo kriterijus tinka pirmam deformavimo atvejui (normalinis atplėšimas): plyšys plinta arba įvyksta irimas, kai plyšio plitimo energija G pasiekia kritinę reikšmę G_c :

$$G_\alpha(\sigma, l, L, \dots) = G_{\alpha c}, \quad \alpha = \text{I, II, III}, \quad (1.5)$$

čia kritinė energija reiškia tokią energiją, kuri suformuoja du plyšio paviršius vienu metu:

$$G_c = 2\gamma_s . \quad (1.6)$$

Atpalaiduojamos energijos kiekis G – tai nusakantis įtempimų lauką dydis, susietas su tamprios energijos pokyčiu dėl plyšio ilgėjimo (D.P.Miannay, 1997 m.). Tiesiškai tampriai medžiagai galioja proporcingumo ryšys tarp atpalaiduojamos energijos kiekio ir įtempimų intensyvumo koeficiento K (IIK):

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} , \quad (1.7)$$

čia E' – plokštuminiam deformacijų būviui $E' = E / (1-\nu^2)$, o plokštuminiam įtempimų būviui $E' = E$.

Tiesiškai tampriai medžiagai galioja proporcingumo ryšys tarp atpalaiduojamos energijos kiekio ir J -integralo:

$$G = J . \quad (1.8)$$

E. Orowanas 1955 m. išplėtė šį kriterijų, atsižvelgdamas į plastinio deformavimo energiją. Kadangi egzistuoja ryšys tarp jėgos, nuo kurios plyšys ilgėja, ir plyšio atsivėrimo prieaugio:

$$G = \sigma_o \delta , \quad (1.9)$$

tai energinis irimo kriterijus siejamas su įtempimų σ_o atliktu darbu, praplečiant plyšį dydžiu δ . Ši paskutinė lygtis sąlygoja trečią – deformacinį irimo kriterijų.

Deformacinis irimo kriterijus yra toks: irimas įvyksta, kai plyšio atsivėrimas δ pasiekia kritinę reikšmę δ_c :

$$\delta_\alpha = \delta_{\alpha c} . \quad \alpha = \text{I, II, III} . \quad (1.10)$$

Kriterijus, susijęs su kritiniu plyšio atsivėrimu, neturi griežto teorinio pagrindo. Jis tinkamas izotropinėms medžiagoms, kurios suyra tik pagal vieną iš makromechanizmų (normalinis atplėšimas, skersinė arba išilginė šlytis). Jeigu medžiaga anizotropinė, tai galimi visi 3 irimo makromechanizmai, nes plyšio vystymosi modelio sprendiniai gaunami taikant įvairias prielaidas. Netiesinėje irimo mechanikoje deformacinius irimo kriterijus ir plyšio pločio prieaugius (1.5) taikė T.L. Panontin, 2000 m.; M.A. Sutton, 2000 m.; F. Ma, M.A. Sutton, 2001 m.

Dažniausiai irimo forma būna mišri. Netgi vienos ašies kryptimi apkrautos konstrukcijos ir jų elementai turi įvairiai orientuotų defektų, kurių padėties kitimas apkrovimo ašies atžvilgiu sudaro sąlygas mišrių modų atsiradimui. Mišriu deformavimo atveju: (kai kūnas su plyšiu vienu metu yra veikiamas keleriopo apkrovimo), yra sudėtinga nusakyti plyšio plitimo kryptį. F.Erdogan ir G.Sih 1963 m. pasiūlė tokių kriterijų: kai prasideda irimas, plyšys plinta ta kryptimi, kuria tangentiniai įtempimai plyšio viršūnėje yra maksimalūs ir pasiekia kritinę reikšmę.

Pirmoji šio kriterijaus dalis gali būti išreikšta taip:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} \leq 0, \quad (1.11a)$$

o antroji dalis yra

$$\sigma_{\theta\theta}(\theta = \theta_0) = \sigma_{\theta\theta C}, \quad (1.11b)$$

čia σ_c – kritiniai įtempimai.

G. Shih 1974 m. pasiūlė minimalaus energijos tankio kriterijų: kai prasideda irimas, plyšys plinta ta kryptimi, kuria energijos tankis, pasiekęs kritinę reikšmę, yra minimalus. Įtempimų ir energiniai kriterijai beveik sutampa ten, kur dominuoja I - formos plyšio plitimas, bet skiriasi II - formos atveju.

Kūnas su įpjova reaguoja į apkrovą plyšio plitimu, kuris izotropinėse medžiagose vyksta didžiausių svarbiausiųjų įtempimų kryptimi. Nepasiekus kritinių ribų, plyšio ilgėjimas gali būti lėtas, tolygus arba su trūkiais, laipsninis ir matuojamas milimetrais per minutę ar per ciklą. Bet jis gali būti dinamiškas, kai jo augimo greitis yra matuojamas šimtais metrų per sekundę. Realiose konstrukcijose plyšio didėjimas, nesiekiantis kritinių reikšmių, paprastai nustatomas konkrečiai apkrovai. Kai plyšio dydis pasiekia kritinės reikšmės, plyšio atsivėrimo greitis staiga padidėja ir prasideda greitas plyšio ilgėjimas, kada medžiagos irimo procesas tampa reikšmingesnis. Paprastai šis kitimas susijęs su maksimalios apkrovos padidėjimu. Tokį staigų elgsenos pokytį lemia kritinės koeficientų K ir energijos G reikšmės, kurios nusako medžiagos irimo tąsumą. Stiprėjančioms medžiagoms plyšio plitimas yra apibūdinamas įtempimų ir deformacijų lauku plastinės zonos viduje. Be to, įpjovos plitimas gali būti apibūdintas ir įpjovos viršūnės plastine energija. J.Kuang ir Y.Chen 1997 m. viršūnės plastinę energiją skaičiavo ties tampriosios ir plastinės zonos riba, kuri nustatoma pasinaudojus Mizeso takumo sąlyga.

Literatūroje buvo paskelbti įvairūs plyšio pločio priaugio kriterijai plokštei su plyšiu, kurio plitimo forma mišri (F. Erdogan, G.C. Sih, 1963 m.; G.C. Sih, 1974 m.;

C.F. Shih, 1974 m.; P.S. Theocaris, N.P. Andrianopoulos, 1982 m.; G.A. Papadopoulos, 1987 m.; J.H. Kuang, Y.C. Chen, 1997 m.). Įvairių autorių pasiūlyti plyšio plitimo kriterijai skiriasi tiek efektais, į kuriuos jie atsižvelgia, tiek prielaidomis.

Kaip jau buvo minėta, eksperimentiniais metodais matuoti plyšio pločio prieaugį ties viršūne gana sudėtinga, todėl skaitiniai metodai yra viena iš galimų alternatyvų. T.Panontin ir kt. 2000 m. savo straipsnyje apibendrina skaitinius eksperimentus ir pateikė patikslintas formules plyšio pločio prieaugiui ties viršūne nustatyti dažniausiai eksperimentiniuose tyrimuose naudojamiems necentriškai tempiamiems bandiniams. M.Sutton ir kt. 2000, 2001 m. nagrinėjo plyšio atsivėrimo kriterijaus taikymą mišrių formų plyšių plitimui plonose lakštinėse medžiagose modeliuoti.

Lietuvoje irimo mechanikos problematiką nagrinėjo M.K. Leonavičius, 2000 m., M. Daunys, S. Rimovskis, 2002 m.; N. Meslinas, A. Žiliukas, 2001 m.; G. Dundulis, E. Ušpuris, 2001 m.

1.3. Įtempimų ir deformacijų nustatymas

Norint nustatyti irimo rodiklius, reikia išspręsti deformuojamo kūno mechanikos uždavinį, t.y. nustatyti įtempimų ir deformacijų laukus įpjovos viršūnėje. Dauguma medžiagų ir konstrukcijų srityje atliktų tyrimų analizuoja įtempimų ir deformacijų laukus įpjovos arba plyšio viršūnėje. Populiarius mechanikos vadovėliai tradiciškai (T.Anderson, 1995 m.; D.Miannay, 1998 m.) aiškina įtempimų laukus virš plyšio kaip trijų formų kombinaciją, bet dalis mokslininkų analiziniais ir skaitiniais tyrimams taiko plokštuminių uždavinių.

Apibendrintas įtempimų lauko nustatymo sprendinys normalinio atplėšimo atveju (I formai), kuris vadinamas Irvino – Viljamso (M.L. Williams, 1957 m.; G.R. Irwin, 1957 m.) sprendiniu, gali būti užrašytas matematine eilute:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{\sigma ij}(\theta) + T \delta_{1i} \delta_{1j} + C_{ij2}(\theta) r^{\frac{1}{2}} + \dots + C_{ijn}(\theta) r^{\frac{n-1}{2}} + \dots \quad (1.12)$$

Panaši išraiška taikoma deformacijoms ir poslinkiams:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} f_{\varepsilon ij}(\theta) + \dots \quad (1.13)$$

Sprendiniai priklauso nuo analogiškos išraiškos, naudojamos II ir III plyšių formos (A.H. Hult, F.A. McClintoc, 1957 m.). Pirmasis narys ($r^{-1/2}$) rodo vyravimą arba “asimptotinį sprendinį”, kai r artėja prie nulio. Antrasis išraiškos (1.12) narys yra pastovus dydis. T yra

rodiklis, kurio dimensija atitinka įtempimus (*angl.* transverse stress arba *T*-stress). Jis priklauso nuo apkrovimo atvejo. Aukštesnės eilės narius dvimačiuose uždaviniuose įprasta atmesti, to tarpu erdviniuose uždaviniuose *T*–kriterijus įvertina erdviškumo įtaką.

Atmetus *T* ir supaprastinus išraišką (1.12), įtempimai gali būti užrašyti taip:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots, \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots, \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \dots, \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots.\end{aligned}\tag{1.14}$$

P.Theocaris ir N.Andrianopoulos 1982 m. pirmieji įvedė deformavimo energijos tankį – *T*. Jie pabrėžė, kad deformavimo energijos tankis gali būti suskaidomas į dvi dedamąsias dalis: dilatacijos energijos tankį ir distorsijos energijos tankį. Jie konstatavo, kad plyšys atsiveria ta kryptimi, kuria yra minimali dilatacijos energijos tankio skaitinė reikšmė, o irimas prasideda, kai maksimali dilatacijos energijos tankio ties tampriosios ir plastinės zonos riba skaitinė reikšmė pasiekia kritinę reikšmę. G.Papadopoulos 1987 m. pasiūlė plyšio plitimui Det.- kriterijų: plyšys plinta ta linkme, kuria yra maksimali antrojo įtempimų invarianto, skaičiuojamo išilgai plyšio fronto, reikšmė. Pertvarkius dilatacijos išraišką, galima nesunkiai įrodyti, kad Det.- kriterijus sutampa su *T*– kriterijumi ir įsitikinti, jog maksimalios antrojo įtempimų invarianto ir dilatacijos dedamosios skaitinės reikšmės yra analogiškos.

Įtempimų, deformacijų ir poslinkių plyšio viršūnėje pasiskirstymas gali būti apibūrintas pagal deformacijų teoriją kaip plastinei medžiagai su baigtine eksponentės *n* reikšme. Šį uždavinį 1968 m. išsprendė Hutchinson, Rice ir Rosengren, o Shih 1974 m. vėliau pasiūlė tokias pataisytas išraiškas:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_o} &= \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_o \sigma_o I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} f_{\sigma 1ij}(\theta, n) + Q^{HRR} \left(\frac{r}{J/\sigma_o} \right)^{s_2} f_{\sigma 2ij}(\theta, n); \\ \frac{\varepsilon_{ij}}{\alpha \varepsilon_o} &= \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_o \sigma_o I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} f_{\varepsilon 1ij}(\theta, n) + Q^{HRR} \left(\frac{r}{J/\sigma_o} \right)^{s_2} \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_o \sigma_o I_n r} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} f_{\varepsilon 2ij}(\theta, n); \\ \frac{u_i - u_i^0}{\alpha \varepsilon_o} &= \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_o \sigma_o I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} f_{u 1ij}(\theta, n) + Q^{HRR} \left(\frac{r}{J/\sigma_o} \right)^{s_2} \left(\frac{J}{\alpha \varepsilon_o \sigma_o I_n} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} r^{\frac{2}{n+1}} f_{u 2ij}(\theta, n);\end{aligned}\tag{1.15}$$

čia α ir n yra plastinės medžiagos konstantos, o u_i^o reiškia kieto kūno galimą poslinkį. Nedimensinės polinio kampo θ funkcijos $f_{\sigma ij}(\theta)$, $f_{\varepsilon ij}(\theta)$ ir $f_{uij}(\theta)$ priklauso nuo apkrovimo (irimo) atvejo, deformacijų sustiprėjimo eksponentės n ir plastinio, skirtingų deformavimo atvejų kombinaciją įvertinančio, parametro M^p . Lygtys (1.15) leidžia aprašyti būvį, kuris autorių Hutchinson, Rice ir Rosengren garbei yra vadinamas HRR ypatinguoju būviu. Hutchinson nagrinėjo plokščią įtempimų būvį ir plokščios deformacijos būvį, tuo tarpu Rice ir Rosengren apsiribojo plokščios deformacijos būvio atveju.

1.4. Baigtinių elementų metodas ir jo taikymas irimo mechanikoje

Nuo irimo mechanikos vystymosi pradžios buvo kuriami įvairūs analitiniai metodai, skirti irimui nagrinėti bei irimo parametrams nustatyti. Šie metodai leidžia apibūdinti tradicinės formos defektus, kurie paprastai nagrinėjami begalinių matmenų kūnuose. Realiesiems kūnams su įvairiausios formos defektais analizinį sprendinį parinkti yra gana sudėtinga, todėl tenka ieškoti kitų sprendimo kelių. Teoriniai irimo mechanikos modeliai yra pernelyg griozdiški ir nepatogūs, kadangi negali aprašyti sudėtingų irimo mechanikos uždavinių geometrijos, netiesinių irimo mechanikos uždavinių. Todėl tenka taikyti universalius skaitinius metodus ir šiuolaikinės kompiuterinės technologijas.

Skaitinių metodų taikymas irimo mechanikos uždaviniams spręsti nagrinėtinas keliais aspektais. Sprendžiant įtempimų ir deformacijų būvio analizės uždavinius, galima nagrinėti sudėtingesnes geometrijos sritis su įvairių formų defektais, apimant įvairias apkrovimo ir kraštines sąlygas. Tuo tarpu teorinius modelius galima taikyti tik ribotais griežtai aprašytais atvejais. Skaitiniais metodais galima tiksliau išnagrinėti įtempimų ir deformacijų būvį defektų aplinkoje, ypač plastiškose medžiagose, kur analitinius sprendinius gauti matematiškai yra pernelyg sudėtinga, net pasinaudojus šiuolaikinės kompiuterinės algebros paketais.

Nagrinėjant irimą, dažniausiai įprasta naudoti vieno parametro irimo kriterijus (1.1, 1.2, 1.5, 1.10), todėl skaitiniai metodai taikomi irimo rodikliams nustatyti (įtempimų intensyvumo koeficientams, J -integralams, atpalaiduojamos energijos kiekiui G), kurie gaunami išsprendus anksčiau aprašytus analizės uždavinius.

Pagrindinė skaitinių metodų taikymo sritis yra irimo procesų modeliavimas (T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, 1995 m.; N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, T. Belytschko 2000 m.), kuriuo galima stebėti plyšių plitimo eigą, trajektoriją, kai tuo tarpu eksperimentinių metodų procedūros yra sudėtingesnės. Plyšių plitimas yra netiesinis procesas,

kurio metu kinta plyšio trajektorija, kraštinės sąlygos ir pan.; visa tai galima nesunkiai numatyti pradinių duomenų paruošimo etape. Taigi skaitiniais metodais (skaitiniais eksperimentais) modeliuoti irimo mechanikos uždavinius yra parankiau.

Šiuo metu populiariausias tarp skaitinių metodų yra baigtinių elementų metodas, kuris taikomas ir irimo mechanikos uždaviniams spręsti. Be šio metodo gali būti naudojami ir kiti, pvz., kraštinių elementų metodu galima gauti tikslius tiesinės irimo mechanikos uždavinių sprendinius. Kadangi kraštinių elementų metodas naudoja Green'o funkciją, tai jis yra tinkamesnis tiesiniams uždaviniams (B.L. Karihaloo, Q.Z. Qiao, 2003 m.). Šis metodas taip pat pranašesnis, sprendžiant dinamikos uždavinius (D. Gross, 1999 m.), tačiau sunkiai realizuojamas norint aprašyti netiesiškumus.

Baigtinių elementų metodas (BEM) yra vienas labiausiai paplitusių apytikslių skaičiavimo metodų (J. Argyris, H.P. Mlejnek, 1986 m.; K.J. Bathe, 1995 m.; M.A. Crisfield, 1997 m.; O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, 2000 m.). Lietuvoje šį metodą išplėtojo A. Čyras, 1990 m.; R. Barauskas, 1998 m. Šis metodas plačiai taikytas mechaninėms konstrukcijoms modeliuoti jau metodo pradininkų (J. Argyris, H.P. Mlejnek, 1986 m.; L.T. Tenek, J. Argyris 1997 m.; O.C. Zienkiewicz, 2000 m.). Lietuvoje skaitinio modeliavimo klausimai, sprendžiant įvairias mechanikos problemas, pradėti tyrinėti akad. A. Čyro ir jo mokinių darbuose (R. Kačianauskas, 1994, 1995 m.; R. Baušys, 1997 m.). Irimo mechanikos uždaviniams spręsti šį metodą siūlė E.M. Morozov, G.P. Nikiškov, 1980 m.

Teoriniu požiūriu BEM yra analogiškas kitiems skaitiniams metodams, tačiau jis pranašesnis, todėl taikomas įvairioms techninėms problemoms spręsti:

- 1) išeities duomenys sudaromi automatiškai, panaudojant vartotojui labai patogius geometrinius įvaizdžius;
- 2) galima įvesti įvairiausias kraštines sąlygas;
- 3) tame pačiame modelyje galima naudoti įvairaus pavidalo BE, o tai labai padidina metodo efektyvumą;
- 4) realizuotos galimybės sutankinti tinklus įtempimų koncentracijos vietose.

Pagrindinės metodo idėjos toliau aptariamos vien pagal poslinkių formuluotę. Nagrinėjamoji kūno dalis padalijama į baigtinius elementus (paprasčiausias geometrinės figūros). Plokštuminiams uždaviniams spręsti dažniausiai yra taikomi trikampiai ir keturkampiai elementai. Baigtinio elemento viduje pritaikomas nežinomos funkcijos

(poslinkių) kitimo dėsnis. Šiuo dėsniu BE bet kurio taško e poslinkis $u_e(x)$ gali būti išreikštas mazginių taškų poslinkiais u_e ir aproksimacijos (formos funkcijų) matrica $[N_e(x)]$:

$$u_e(x) = [N_e(x)]u_e. \quad (1.16)$$

Matricą $[N_e(x)]$ galima gauti įvairiais būdais. Jos nariai sudaryti iš paprasčiausių išraiškų, dažniausiai iš laipsninių polinomų. Polinomo eilė yra siejama su elemento mazgų skaičiumi. Jei BE turi tik kampinius mazgus, tai $N_e(x)$ sudaroma iš tiesinių funkcijų.

Panaudojus poslinkių ir kitų dydžių kitimo BE dėsningumus (1.16), sudaromos lygtys visai baigtinių elementų sistemai. Išskiriami tokie skaičiavimo etapai:

- 1) informacijos formavimas apie atskirus BE;
- 2) atskirų BE pagrindinių priklausomybių formavimas;
- 3) atskirų BE priklausomybių surinkimas į vieną uždavinio modelį ir šio modelio sprendimas, pagrindinių nežinomųjų nustatymas;
- 4) kitų kintamųjų reikšmių skaičiavimas.

Kai uždavinys tiesinis, vieno elemento e būvio lygtis yra tokia:

$$[K_e] \cdot u_e = F_e, \quad (1.17)$$

čia $[K_e]$ – BE standumo matrica, F_e – elemento apkrovos vektorius.

Pasinaudojus transformacija, elemento standumo matrica išreiškiama tokiu būdu:

$$[K_e] = \int_{V_e} [B_e]^T [D_e] [B_e] dV, \quad (1.18)$$

čia $[B_e]$ – BE geometrinė matrica, gaunama sudiferencijavus poslinkių formos funkcijas, $[D_e]$ – modelio fizinių konstantų matrica, V_e – elemento tūris.

Vėliau iš elementų lygčių (1.17) yra formuojama viso BE ansamblio lygtis:

$$[K] \cdot u = F. \quad (1.19)$$

Kai uždavinys tiesinis, modelis (1.19) sudaro tiesinių lygčių sistemą.

Išsprendus lygčių sistemą (1.19) ir suradus sistemos mazgų poslinkius u , BE įtempimai apskaičiuojami taip:

$$\sigma_e = [\beta_e]u_e, \quad (1.20)$$

čia $[\beta_e]$ sudaroma iš $[D_e]$ ir $[B_e]$.

Be poslinkių formuluotės egzistuoja ir sudėtingesnės baigtinių elementų modelių kūrimo formuluotės, kur, panašiai kaip (1.19), numatomos ir įtempimų priklausomybės.

Sprendžiant *netiesinius uždavinius*, keliamas tikslas nustatyti tikrąsias būvio kintamųjų reikšmes aktualioje konfigūracijoje, atitinkančioje laiko momentą.

BE sistemos lygtį galima užrašyti taip:

$$\left([{}^tK_L] + [{}^tK_{NL}] \right) \Delta U = \Delta F, \quad (1.21)$$

čia $[{}^tK_L]$ ir $[{}^tK_{NL}]$ yra globalios tiesinė ir netiesinė standumo matricos, ΔF yra apkrovų vektorius, kuris išreiškia tūrinių, paviršinių jėgų ir pradinių įtempimų poveikį. Panaudojant formas funkcijas poslinkiams ir lygtį (1.23), kiekvienam BE e išvedamos standumo matricos. Vėliau jos sudedamos į globalias standumo matricas $[{}^tK_L]$ ir $[{}^tK_{NL}]$.

BE tiesinė standumo matrica $[{}^tK_L^e]$ gaunama iš lygties (1.21) pirmojo nario. Nors čia žymima “tiesinė”, bet galvojama apie geometrinį tiesiškumą. Iš tiesų ši matrica atspindi fizinių netiesiškumą ir užrašoma kaip:

$$[{}^tK_L^e] = \int_{V'} [{}^tB_L^e]^T [{}^tD^{ep}] [{}^tB_L^e] dV, \quad (1.22)$$

čia $[{}^tD^{ep}]$ yra tampri-plastinė fizinių konstantų matrica, o $[{}^tB_L^e]$ – tiesinė deformacijų aproksimacinė matrica.

Geometrinė standumo matrica $[{}^tK_{NL}^e]$ yra gaunama iš lygties (1.21) antrojo nario:

$$[{}^tK_{NL}^e] = \int_{V'} [{}^tB_{NL}^e]^T [{}^t\sigma] [{}^tB_{NL}^e] dV, \quad (1.23)$$

čia $[{}^tB_{NL}^e]$ yra netiesinė deformacijų aproksimacinė matrica, $[{}^t\sigma]$ yra Košy įtempimų tenzorius.

Kadangi analiziniai metodai gali būti taikomi tik ribotais geometrijos, apkrovimo ir kraštinių sąlygų atvejais, aktualus yra įtempimų intensyvumo koeficientų nustatymo skaitiniais metodais uždavinys. Dažniausiai naudojami skaitiniai įtempimų intensyvumo koeficientų nustatymo metodai, kurie remiasi tiesioginių poslinkių ekstrapoliavimo metodu (jo pradininku laikomas R. Barsoum, 1974 m.), energinių, specialiųjų integralų ir kitais metodais (A. Carpinteri, 1990 m; S. Sedmak, 1990 m; K.Y. Sze, 1999 m; T. Siegmund, 2000 m; T. Denyse de Araujo, 2000 m; T.L. Panontin, 2000 m; M.A. Sutton, 2000 m; F. Ma, M.A. Sutton, 2001 m.).

Kitas koeficiento K nustatymo metodas yra įtempimų lauko ekstrapoliavimas. Jis pranašus tuo, kad nebenaudojama plokštuminio būvio prielaida, tačiau tenka tiksliai nustatyti įtempimus koncentratoriaus zonoje (įtempimai ties viršūne singularūs). Įtempimų interpoliacijos metodu įvertinti įtempimų intensyvumo koeficiento kitimą plokštelės storio kryptimi galima be pradinės prielaidos apie plokštelės plokštuminį būvį. Poslinkių interpoliacijos metodu vertinant įtempimų intensyvumo koeficiento kitimą plokštelės storio kryptimi, iš pradžių reikia įvertinti plokštelės plokštuminį (įtempimų arba deformacijų) arba erdvinį būvį. Taikant baigtinių elementų metodą, įtempimų intensyvumo koeficientą galima

Vladislav Žarnovskij. Disertacija: Įtempimų būvio erdviškumo įtakos plokštelių su įpjova įtempimų intensyvumo koeficientui skaitinis tyrimas 22

nustatyti tiesioginiais arba netiesioginiais būdais. Taikant *tiesioginį* (angl. “direct”) būdą, įtempimų intensyvumo koeficientas skaičiuojamas, naudojant ekstrapoliaciją. Įtempimų metodas (Leung ir Su, 1995 m; Yang ir Ravi-Chandar, 1999 m; Kwon ir Sun, 2000 m.) ir CTOD metodas labiausiai paplitę koeficientui K ekstrapoliuoti. Net jei ir nėra teorinio pagrindo, kompiuterinės procedūros dažnai įgyvendinamos, taikant ortogonalius tinklus, kuriuose elementai orientuoti išilgai plyšio normalės kryptimi. Tinklo klasifikacija pagal ortogonalumą priklauso nuo elementų, esančių plyšio fronto plokštumoje, orientacijos. Jeigu mazgai neišsidėsto pagal normalę, įtempimus ir poslinkius galima interpoliuoti iš gretimų mazgų.

Kai įtempimų intensyvumo koeficientui skaičiuoti taikomi *netiesioginiai* metodai, naudojama informacija apie poslinkius ir įtempimus bei ir atpalaiduojamos energijos kiekį modelio mazguose. Netiesioginių metodų taikymo pavyzdžiai: virtualiojo plyšio uždarymo technika (K.Shivakumar ir kt., 1988 m; S.Fawaz, 1998 m; S.Kwon ir C.Sun, 2000 m.), ekvivalentinės srities integralas (G.Nikiškov ir S.Alturi, 1987 m; V.Červenka ir E.Saouma, 1997 m.) ir virtualiojo plyšio pailgėjimo metodas. Šiame darbe apsiribojama skaitiniuose tyrimuose dažniausiai taikomu baigtinių elementų metodu.

Netiesioginis metodas, kuriuo įtempimų intensyvumo koeficientai nustatomi iš tamprumo energijos atpalaidavimo intensyvumo kiekis G , turėtų būti dažniau naudojamas, atsižvelgiant į jo supaprastinimo efektą. Tačiau G.Guinea ir J.Planas, 2000 m. savo straipsnyje teigia, kad energetinių metodų propagavimas net ir universalių programų (pvz., ABAQUS, ANSYS, COSMOS) aprašymuose nėra argumentuotas. Jie taip pat pažymi, kad literatūroje retai kada kreipiamas dėmesys į įtempimų būvio ar Puasono koeficiento įtaką įtempimų intensyvumo koeficientams nustatyti, todėl reikia šios srities detalesnių tyrimų. Jie nagrinėjo baigtinių elementų formos, dydžio ir išsidėstymo įtaką įtempimų intensyvumo koeficientui, kuris nustatytas remiantis *tiesioginių* poslinkių ekstrapoliavimo metodu ir įrodė, kad tenkinant tam tikrus reikalavimus gaunami šio metodo rezultatai yra artimi tiksliausių energetinių metodų rezultatams - skiriasi tik keliais procentais. Autoriai taip pat įrodė, kad įtempimų būvio įtaka baigtinių elementų analizės rezultatams yra ne visuomet atmestina.

Svarbią vietą konstrukcijų inžinerijoje užima struktūrinis netiesiškumas. Teoriškai tai būtų netiesiškumą sukeliantys kraštinių sąlygų pokyčiai, kurie inžinerine prasme reiškia atraminių sąlygų pokyčius, dažniausiai atraminių ryšių pašalinimą arba pridėjimą. Struktūrinis netiesiškumas aprašomas tais pačiais matematiniais modeliais. Jo esmę sudaro elementų tipologijos pokyčiai, praktiškai realizuojami surenkant elementų matricas.

Šio tipo netiesiškumai atsiranda modeliuojant irimo procesą, kai atsižvelgiama į plyšių plitimą. Visgi šis netiesiškumo atvejis gali būti skirtingai realizuotas skirtingose universaliose

programose. Pavyzdžiui, ABAQUS irimas realizuojamas per atskirus irstančius kontaktinius paviršius, o ANSYS – per specialius ryšio elementus arba taikant elementų pašalinimo procedūrą.

Plyšio plitimas baigtinių elementų tinkle yra gana sudėtingas uždavinys, nes kinta tinklo topologija. Šiam uždaviniui spręsti dažniausiai taikomi du skirtingi būdai. *Pirmasis* (lokalusis) apibūdina irimą per mikromechaninius modelius, kuriuose atsižvelgiama į medžiagos pažeidimų kaupimąsi, jis aprašomas P.Bouchard ir kt. darbuose (P.O. Bouchard, 2000, 2003 m.). Kiti modeliai susieja pažeidimus su medžiagos elgsena, o pažeistą zoną apibūdina įtempimų perkėlimas nagrinėjamoje dalyje. Šiuo atveju nereikia aprašyti plyšio plitimo BE tinkle, nes plyšys pastebimas pagal ženklų normalinių įtempimų šuolį pažeistoje dalyje.

Antruoju būdu irimas apibūdinamas ne per pažeidimų kaupimąsi, o per poslinkių netolygumą, yra sąlygotas plyšio kraštų atotrūkio. Siekiant įtempimus tiksliau perkelti į naujai generuotą tinklą, gali būti taikomas baigtinių elementų tinklo regeneravimas (A. Tradegard, 1998 m.). Baigtinių elementų metodo taikymas irimo uždaviniams yra panašus į spyruoklių tinklo metodą; jį taikant, reikia pašalinti BE arba išlaisvinti juos kaip siūlo R.Becker ir R.Smelser, 1994 m; P.Bouchard ir kt. 2000, 2003 m. plyšio plitimą modeliuoja, sujungdami mazgų atpalaidavimo metodą su tinklo regeneravimo (plačiąja prasme) metodu. Kadangi spręstas didelių deformacijų uždavinys, kuriame dėl BE tinklo išsikraipymo prarandamas interpoliavimo BE tikslumas, tinklą pergeneravus galima skaičiavimus tęsti su nauju neiškraipytu ir pakankamai geru BE tinklu. Tinklo pergeneravimo metu būvio kintamieji yra perkelti iš senojo tinklo į naują, taip pasiekiamas maksimaliai geras tikslumas. Pergeneravimas užtikrina ir BE tinklo kokybę plyšio viršūnės aplinkoje net ir plintant plyšiui. Šis aspektas vaidina lemiamą vaidmenį, nes plyšio plitimą apibūdina mechaninių kintamųjų pasiskirstymas šioje dalyje.

Plyšių plitimui modeliuoti yra sukurta ir kitų originalių metodų. T.Belytschko, 1995 m. pasiūlė naudoti netinklinį Galer kino metodą, kuriame diskretizacijai naudojami modelio mazgai ir modelį aprašantys paviršiai. Šiame metode, kaip matyti iš pavadinimo, nenaudojami baigtiniai elementai, bet ties plyšio viršūne sukuriami daugiau mazgų. Vėliau Belytschko ir kt. 2000, 2001, 2002 m. pradėjo naudoti išplėstąjį BEM, kuriame standartinės BE poslinkių aproksimacijos išraiškos yra išplėtos tam tikromis funkcijomis.

K.Murthy ir M.Mukhopadhyay, 2000 m. sukūrė vieną pirmųjų automatinį plintančio fronto tipo tinklų generatorių, tinkamą dvimačiams irimo mechanikos uždaviniams spręsti. Jis yra suderintas su O.C. Zienkiewicz ir J.Žu 1987, 1992 m. paklaidų įvertinimu. Siūloma tankinimo metodika remiasi deformacijų energijos principu ir yra taikoma mišrių formų irimo

pritaikančiojoje BE analizėje. Šios krypties tyrimai literatūroje anksčiau nebuvo skelbti. Generatorius sukurtas taip, kad jame numatyta procedūra, kurianti plyšio viršūnėje norimo keičiamo dydžio sritį su specialiais irimo mechanikos elementais, kurie buvo aprašyti šio skyrelio pradžioje. Taigi taikant šiuos elementus, įtempimų intensyvumo koeficientų K reikšmės gaunamos gana tikslios.

1.5. Erdviniai uždaviniai

Tikras deformacijų būvis aplink plyšį visada yra erdvinis, todėl plokštuminių uždavinių taikymas prasmingas ne visuomet. Žinant šį neatitikimą, spręsta daug erdvinių uždavinių, siekiant išaiškinti, ar fundamentiniai plokštuminiai uždaviniai iš tikro gali būti formuluojami kaip erdviniai. Sprendžiant fundamentinius ir praktinius uždavinius, eksperimentiniams medžiagos rodikliams nustatyti dažnai modeliuojama plokštelė su įpjova, tačiau iki šiol nėra oficialiai priimtų kriterijų plokštelės storio įtakai įvertinti. T.Nakamura ir D.Parks 1988 m. pateikė vieną išsamiausių erdvinių laukų studijų, taikydami detaliąją (full-field) baigtinių elementų analizę. Tyrimas apsiribojo plyšio zonos modeliavimu plonaime tampriame apvaliame diske. Apžvalginį darbą panašia tematika parašė S.Kwon ir C.Sun 2000 m., analizuodami tiesinės stadijos erdvinius įtempimų laukus plokštelėje su kiauru plyšiu. Šis darbas išsamiai apibendrina daugelį šios srities straipsnių.

Pastaruoju metu paskelbta daug publikacijų, nagrinėjančių žymiai sudėtingesnius erdvinius uždavinius. Tamprių - plastinių plokštelių erdviškumo problemas komentuoja Kim ir kt. 2001 m. Tamprių kūnų dinaminę elgseną ir skaitinius metodus sąlyginai erdvinių plyšių sklidimui analizuoti aprašo P.Krysl ir T.Belytchko 1999 m; panašius tyrimus, tik taikant kraštinių elementų metodą, aprašo D.Gross 1999 m.

Daugelis tyrimų apsiriboja dviem ribiniais atvejais: plokštuminiu įtempimų būviu ir plokštuminiu deformacijų būviu. Šitie plokštuminiai sprendimai pritaikomi tik plokštelėms su begaliniu arba be galo mažu storiu, kai būvis gali būti priskirtas tam tikrai ribinei kategorijai: plokštuminiame įtempimų būviui arba plokštuminiame deformacijų būviui. Todėl tvirtinimas, kad konkreti plokštelė gali būti traktuojama kaip plona arba stora yra gana empiriškas.

Erdviniai uždaviniai sudėtingi tuo, kad reikia analizuoti milžinišką kiekį duomenų, skaičiuojant įtempimų ir deformacijų laukus palei plyšio frontą. Kompiuterinių technologijų vystymasis suteikia galimybę išplėsti erdvinių uždavinių sprendimo kokybę bei greitį.

Kartu su erdvinių laukų tyrimais, irimo rodiklių nagrinėjimas ir tikslumas išlieka svarbiausiu uždaviniu.

Galima tvirtinti, kad svarbų įnašą į analizinius minėtų problemų sprendimus savo darbuose padarė A.Kotousov ir C.Wang 2002(a); 2002(b) m. Taikant plokštuminio deformacijų būvio teoriją, pagrindinės erdvinės lygtys buvo transformuotos į plokštuminio uždavinio lygtis. Gautas fundamentalus erdvių įtempimų išsidėstymo sprendinys, priklausantis nuo jėgos padėties ir krašto dislokacijos begalinėje pasirinkto storio plokštelėje. Taikant šiuos sprendinius, kiauro plyšio problema buvo išspręsta analitiškai. Rezultatai rodo, kad šalia įpjovos dominuoja klasikiniai plokštuminio deformacijų būvio sprendiniai, o atstumais, didesniais negu plokštelės storis, dominuoja plokštuminio įtempimų būvio teorija. Šią teoriją Later (F.Berto ir kt. 2004 m.) sujungė su plokštuminiu įtempimų lauku prie įpjovos sprendiniu ir pritaikė atpalaiduojamos energijos kiekį erdviniams tyrimams tempiamoje plokštelėje su V formos įpjova.

Erdvinio įtempimų lauko įtempimų intensyvumo koeficiento skaitinio nustatymo būdas, kuriant BE tinklą aplink plyšio frontą, reikalauja ypatingo dėmesio, dažnai net išankstinio specialių irimo elementų pritaikymo virš plyšio. Tokių hibridinių erdvių baigtinių elementų pavyzdį siūlo D.Peng ir kt. 2002 m. Deja, ypatingus reikalavimus sunku pritaikyti pagrindinėse baigtinių elementų kodo komercinėse programose, kuriose uždavinys dažnai ribojamas vartotojo pasirinktų tinklų. Norint išreikšti irimo rodiklius, reikia atlikti sudėtingą standartinio BEM paketo rezultatų apdorojimą. Ryšių tarp skirtingų irimo mechanikos programinių paketų ir skirtingų duomenų bazių vaidmenį aprašė P.Krysl ir T.Belytschko 1999 m.

Sunku palyginti literatūroje pateiktus rezultatus, nes autoriai nagrinėja įvairios formos objektus. Ploną tempiamą ($B/W = 0,10$) su vienpuse įpjova plokštelę ir trimis taškais lenkiamą plokštelę ($B/W = 0,25$) nagrinėjo V.Červenka ir E.Saouma 1997 m. Pritaikytas J -integralas, įvertinantis kūno jėgos, temperatūros ir kitų apkrovų poveikį koeficientui K skaičiuoti, naudojant erdvinį baigtinių elementų tinklą. Atpalaiduojamos energijos kiekis transformuotas į koeficientą K , taikant efektyviojo tamprumo modulio sampratą. Kompaktinio bandinio formos plokštelę, apkrautą pagal I irimo formą, nagrinėjo A.Leung ir R.Su 1995 m. Plokštelė buvo vidutinio santykinio storio ($B/W = 1,5$). Buvo pritaikytas įtempimų metodas ir izoparametriniai erdviniai BE su 27 mazgais.

Erdvinius įtempimų laukus skirtingo storio tempiamose plokštelėse su U ir V formos įpjovomis nagrinėjo Z.Li ir kt. 2000 m. Storio įtaką tempiamose plokštelėse su centriniu plyšiu nagrinėjo S.Kwon ir C.Sun 2000 m. Pritaikyta globali plokštuminė BEM technika su lokaliu submodeliavimu ir 8 mazgų prizminiai BE. Koeficientas K apskaičiuotas pagal atpalaiduojamos energijos kiekį, taikant plokštuminio deformacijų būvio tamprumo modulius,

ir koeficiento K pagal įtempimus skaičiavimo metodą. Santykinis storis B/W kinta nuo 0,1 iki 2,0.

Atpalaiduojamos energijos kiekio apskaičiavimą ir jo išvestines, taikant virtualiojo plyšio pailgėjimo metodą, analizavo C.Hwang ir kt. 2001 m. Kaip taikymo pavyzdys nagrinėjama plona ($B/W = 0,25$) tempiama plokštelė su centrine ir vienpuse įpjovomis bei sąlyginai nesudėtingu struktūriniu tinklu. Taikant normalizuotą atpalaiduojamos energijos kiekį GE/K^2 ir Puasono koeficiento įtaką, ištirtas irimo kontūro plitimas per storį.

Eksperimentinį metodą, naudojant koherentinio gradiento paiešką, tyrimuose pritaikė S.Prabhu ir J.Lambros 1999 m., kai nagrinėjo plyšio erdvių įtempimų lauką plokštelėje, apkrautoje pagal I ir II irimo formą.

Erdvinį koeficiento K ir mišrių apkrovimo formų efektą, įskaitant III formą, įvairioms plokštelėms su inicijuotais defektais nagrinėjo G.Dhondt ir kt. 2001 m. Koeficientas K apskaičiuotas iš įtempimų lauko išilgai plyšio fronto, o atpalaiduojamos energijos kiekis gautas iš modifikuoto integralinio virtualinio plyšio uždarymo metodu.

Storio įtaką koeficientui K storose ($B/W = 2,166$) ir plonose ($B/W = 0,091$) tempiamuose plokštelės formos bandiniuose su centrine įpjova, taikydamas kraštinių elementų metodą, analizavo A.Agraval ir N.Kishore 2001 m.

Daugelis tyrėjų dėmesį sutelkė į erdvines zonos formas ir charakterio nustatymą. Erdvinę zoną, kuri labai svarbi nustatant ribines koeficiento K reikšmes, priimta vadinti pereinamąja zona tarp plokštuminio įtempimų ir plokštuminio deformacijų būvių. Eksperimentinį erdviškumo įrodymą atliko A.Rosakis ir K.Ravi-Chandar 1986 m. Jie nagrinėjo erdviškumo dydį homogeniškose izotropinėse lenkiamose plokštelėse su vienpuse įpjova. Jų rezultatai parodė, kad erdviniai įtempimai pradeda dominuoti, kai atstumas lygus pusei bandinio storio.

Įtempimų laukų erdviniai efektai paprastai tiriami atsižvelgiant į įtempimo σ_{zz} ir į deformacijos ε_{zz} komponentų tenzorius pagal normalę plokštelės laisvajam paviršiui., Atsižvelgiant į kūno erdvinį charakterį, dažniausiai taikomas kintamasis – įtempimų lauko rodiklis d , priklausantis nuo Puasono koeficiento Terminą "*angl. out-of-plane degree*" arba "*angl. degree of plane strain*" savo straipsniuose nuolat vartojo T.Nakamura ir D.Parks, 1988 m; S.Krishnaswamy ir kt. 1991 m; S.Kwon ir C.Sun, 2000 m. Pavadinimą "apribojimo rodiklis" (*angl. constraint factor*) vartojo autoriai (W.Guo ir kt. 2002 m., A.Kotousov ir C.Wang, 2002 m.). Deformacijos lauko erdvinis pobūdis (*angl. three-dimensionality*) aprašomas kitu parametru - deformacijos apribojimo rodikliu k (G.Nikishkov ir S.Atluri, 1987 m; V.Červenka ir E.Saouma, 1997 m; P.Krysl ir T.Belytschko, 1999 m.), kuri įvertindamas erdvinį fiktyvųjų tamprumo modulį netiesiogiai pritaikė G.Cherepanov, 1979 m.

Įtempimų apribojimo daugiklis (*angl.* the stress constraint factor) d kartais naudojamas įvertinant erdvinio įtempimų lauko apimtį. S.Krishnaswamy ir kt. 1991 m. skaitiškai gavo panašų rezultatą. Paskutiniai tyrimai parodė, kad plokštuminio deformacijų būvio zona ties įpjovos viršūnės ne visada lygi pusei plokštelės storio (S.Kwon ir C.Sun 2000 m.).

Santykinė plokštuminio deformacijų būvio zona yra mažesnė negu pusė plokštelės storio, didinat plokštelių storius, tuo tarpu absoliutus plokštuminės deformacijos dydis mažėja, mažinant plokštelių storį.

Pastebėta, kad griežtai apibrėžta plokštuminio deformacijų būvio zona gali būti tikrai konkrečiai apribotame plote. Plokštuminės deformacijos būvį įmanoma nustatyti taikant įtempimų erdviškumo rodiklio kontūrą: kai $d \geq 0,8$, tai bus plokštuminė deformacija ir $d \leq 0,2$ plokštuminis įtempimas.

Anksčiau minėti S.Kwon ir C.Sun 2000 m., analizuodami erdvinį laukų kontūro formą išilgai per storį, atkreipė dėmesį į neapibrėžtumus ties plokštelės kraštu. Pabrėžti sunkumai, tiriant atvirkštinę neapibrėžtumo kvadratinę šaknį, (K neapibrėžtumas, *angl.* „inverse square root singularity“) šalia plyšio fronto ir neapibrėžtumo viršūnės (V neapibrėžtumas), plokštelės laisvųjų paviršių ir plyšio fronto susikirtimo vietose.

Skirtingai nuo plokštuminio deformacijų būvio, plokštuminis įtempimų būvis atsiranda mažoje zonoje ties kraštu. Įtempimų lauko tyrimus ir koeficiento K skaičiavimą prie plokštelės krašto erdvinuose uždaviniuose nagrinėjo (A.Leung ir R.Su 1995 m; S.Prabhu ir J.Lambros 1999 m; A.Agraval ir N.Kishore 2001 m.). Nagrinėta įpjovos viršūnės neapibrėžtųjų įtaka. Įtempimų apribojimo rodiklis d tenkina K-V modelio svorio funkcijų savybes (S.Kwon ir C.Sun, 2000 m.). G.Cherepanov 1979 m. pasiūlė įvertinti plokštelės erdvinį būvį modifikuojant tamprumo modulį.

Akivaizdu, kad kraštinio sluoksnio storis priklauso nuo plokštelės storio ir įpjovos gylio bei turi didelę įtaką vidutinio storio plokštelių efektams. Koeficiento K reikšmės prie laisvojo paviršiaus staigiai mažėja ir artėja prie nulio. Koeficientas praranda savo prasmę paskutiniame taške, kai plyšys siekia laisvuosius paviršius.

Reikia pabrėžti, kad daug tyrinėtojų, taikydami erdvinį baigtinių elementų tinklą, naudojo nepakankamą tinklo tankį per objektų storį, todėl vis dar išlieka kraštinio sluoksnio klausimas. Tyrimai parodė, kad keičiant tinklo tankį per storį pastebimi svyravimai bei kraštinio sluoksnio efektai. 3 sluoksnius pritaikė V.Červenka ir E.Saouma, 1997 m; 5 - sluoksnius S.Prabhu ir J.Lambros 1999 m; 6 sluoksnius C.Hwang ir kt. 2001 m; 8 sluoksnius A.Leung ir R.Su 1995 m; 32 sluoksnius S.Kwon ir C.Sun 2000 m. pjaudami pusę plokštelės į baigtinius sluoksnius. Tai leido įvertinti koeficiento K reikšmių pasiskirstymą, plokštuminės deformacijos zonos ir kraštinio sluoksnio zonos gylį.

Struktūrinių tinklų taikymas skaitiškai neefektyvus ir neužtikrina pastovios paklaidos apskaičiuotuose laukuose. Prisitaikomumo ir tinklų regeneravimo koncepciją, išanalizavus įtempimo laukus plyšių viršūnėse, siūlo H.Askes ir kt. 2000 m. ir P.Bouchard ir kt. 2003 m. h prisitaikomumo strategijos taikymą su įtempimų rodikliu plokštuminėms irimo mechanikos problemoms spręsti analizuoja R.Kačianauskas ir kt. 2002 m., E.Stupak ir R.Kačianauskas 2003 m.

R.Barsoum pasiūlė ties plyšio viršūne naudoti specialiuosius izoparametrinius baigtinius elementus su perstumtu link plyšio viršūnės mazgu. Šis metodas yra pakankamai tikslus, nes naudojami pirminiai baigtinių elementų metodo, formuluoto poslinkiais, nežinomieji, t.y. poslinkiai. Tačiau vienas iš šio metodo trūkumų yra tas, kad ties plyšio viršūne turi būti tobulas baigtinių elementų tinklas.

Mišrias apkrovimo formas studijavo S.Prabhu ir J.Lambros 1999 m. Jie ištyrė, kad keičiant plyšio kampą bei apkrovimo formas, erdvinės zonos forma ir tūris nesikeičia (sutampa su I apkrovimo forma), bet kai iš mišrios formos neįmanoma išskirti vyraujančios formos, erdvinė zona sukasi aplink plyšio viršūnę.

1.6. Apibendrinimas ir tyrimo uždaviniai

Išnagrinėjus literatūrą galima teigti, kad baigtinių elementų metodas ir jo naujausios kompiuterinės technologijos yra tas instrumentas, kuris padeda spręsti sudėtingus irimo mechanikos uždavinius ir papildyti teorinius teiginius bei eksperimentinių tyrimų rezultatus. Sprendžiant irimo mechanikos uždavinius per mažai dėmesio buvo skiriama BE tinklo įtakai įtempimų laukams, nebuvo net rekomendacijų apie reikiamus elementų dydžius.

Galima suformuluoti keletą pagrindinių svarstomų literatūroje klausimų: koks yra sąryšis tarp erdvinio įtempimų lauko įtempimų intensyvumo koeficiento ir jo plokštuminių analogų; koks yra plokštuminio įtempimų būvio zonos ribų dydis ir kokia to būvio įtaka koeficientui K ; kokia storio įtaka.

Apibendrinant kitų autorių publikacijas, galima suformuluoti tokias išvadas:

- a) deformacijų būvis prie plyšio fronto yra artimas plokštuminiams;
- b) kraštinis sluoksnis su būdingais erdviniais laukais egzistuoja ties plokštelės kraštu;
- c) įtempimų intensyvumo koeficientas kinta plokštelės storio kryptimi.

2. Plokštelių trimačiai baigtinių elementų modeliai

2.1. Bendrieji teiginiai

Kalbant apie erdvinės struktūras ir jų diskretizavimą, reikia suvokti tokio uždavinio sprendimo sunkumus ir problemos mastą. Didelis nežinomųjų skaičius sukelia daug technologinių skaičiavimo sunkumų, kuriems įveikti reikalingi specialūs algoritmai.

Irimo mechanikos uždavinių sprendimas skaitiniais metodais, į kurių sąrašą patenka ir baigtinių elementų metodas, vienaip ar kitaip siejasi su skaičiuojamuoju modeliu. Ši modelį sudaro plokštelė su koncentratorium: plyšiu, įpjova ar kitokiu defektu. Šie sunkumai pasireiškia jau sprendžiant dvimačius uždavinius. Kaip parodė ankstesniame skyriuje atlikta literatūros analizė, dvimačių uždavinių modeliai nėra teoriškai išsamiau išnagrinėti, lyginant su įprastų plokštelių be įpjovos modeliais.

Dar mažiau ištirti erdviniai irimo mechanikos uždaviniai ir juos aprašantys baigtinių elementų modeliai.

Vieną iš disertacijos tikslų buvo siekiama sukurti trimačius baigtinių elementų modelius, kurių padalinimo algoritmais ir naudojamos kompiuterinės technologijos atitinka šias sąlygas:

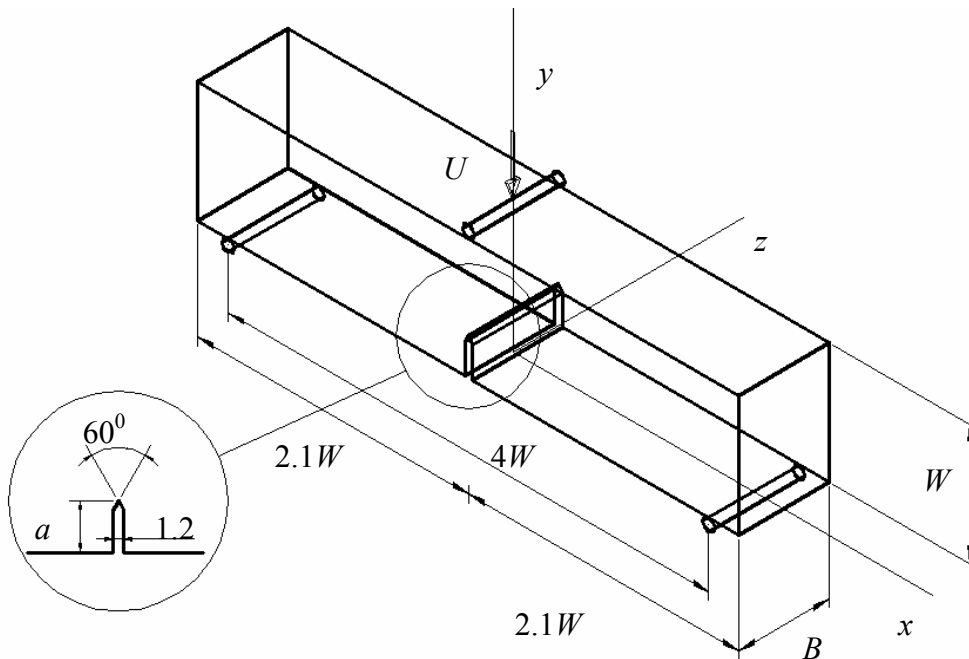
- 1) suderina nestrukūrinį prisitaikantį dvimatį tinklą statmenoje įpjovai plokštumoje su struktūriniu tinklu plokštelės storio kryptimi;
- 2) leidžia valdyti modelio kintamuosius;
- 3) yra suderinamas su įprastine BEM ideologija ir standartiniais BEM programų paketais.

Šiame skyriuje aprašoma bendroji trimačių modelių kūrimo idėja ir realizavimo algoritmas. Modelio patikra atlikta skaičiuojant trijų taškų lenkiamą plokštelę su centrine V formos įpjova. Dvimatis BEM modelis tirtas, iteracijomis kuriant prisitaikančiuosius baigtinių elementų tinklus plokštuminio deformacijų būvio uždaviniui, o erdvinis modelis tirtas nagrinėjant vidutinio storio plokštelę, kurios storio ir aukščio santykis ($B/W = 0,8$).

2.2. Trimis taškais lenkiama plokštelė su įpjova

Makroskopinio lygio erdviniams efektams tirti buvo pasirinkta plokštelė su centrine vienpuse įpjova. Plokštelės įpjova modeliuojamas plyšys; toks modeliavimas yra pakankamai pateisinamas (V.V. Panasiuk 1988 m.). Tokia plokštelė atitinka laboratoriniuose bandymuose

naudojamus trimis taškais lenkiamus bandinius. Bandinio plokštumos matmenys (2.1 pav.) buvo parinkti tokie patys, kaip standartiniuose laboratoriniuose testuose pagal ASTM E 399 standartą: aukštis $W = 20,0$ mm, atstumas tarp atramų duotas $4W$, plokštelės ilgis $4,2W$, storis $B = 16,0$ mm. Skirtingai nuo standartinių bandinių nagrinėjamos plokštelės įpjovos viršūnė smaila, nesuapvalinta, todėl mazguose prie pat viršūnės įtempimai nenagrinėjami (įpjovos gylis $a = 6,0$ mm, V formos įpjovos kampas $\beta = 60^\circ$). Plokštelė buvo apkrauta taip, kad būtų pasiekta I irimo forma.



2.1 pav. Trimis taškais lenkiamo bandinio geometrija

Plokštelė su įpjova per visą storį globalioje koordinačių sistemoje $Oxyz$ orientuota taip: Ox ašis yra įpjovos plokštumoje ir yra normalė įpjovos frontui; Oy ašis, atsižvelgiant į įpjovos plokštumą, ortogonal; radialinės koordinatės Oz ašis sutampa su įpjovos frontu; koordinatė z toliau bus laikoma storio koordinate.

Sprendžiant tiesinį uždavinį, plokštelės medžiagos rodikliai imami tokie: tamprumo modulis $E = 200$ GPa, Puasono koeficientas $\nu = 0,3$. Plokštei ties viduriu suteikiamas vertikalus kvazistatinis poslinkis U ($U_{max} = 0,04$ mm). Santykinė storio koordinatė išreiškiama $t(z) = z/B$.

2.3. Dvimačiai modeliai

Plokštelės erdvinis modelis buvo sudaromas dviem etapais: kūnas buvo padalintas į baigtinius elementus, sukuriant optimalų BE tinklą plokštelės plokštumoje, o paskui, taikant

erdvinių elementų kūrimo procedūrą, buvo sukurtas erdvinis plokštelės baigtinių elementų tinklas. Laikantis bendrųjų BEM taisyklių, kūne būdingieji paviršiai, linijos ar taškai būtina tampa baigtinių elementų paviršiais, kraštinėmis ar viršūnėmis. Toks pirminis dalijimas susijęs su struktūros savybėmis ir išoriniais poveikiais.

Diskretizuojant dvimatę sritį, pagrindiniai reikalavimai buvo standartiniai: kuo mažiau BE ir kuo aukštesnis tikslumo laipsnis. Buvo pasirinkti adaptyvieji (prisitaikantieji) baigtinių elementų tinklai, iš anksto sutankinti ties įpjovos viršūne, plokštumos BE buvo pasirinkta elementarioji BE forma – trikampis. Programa ANSYS taiko keturkampį BE, todėl trikampio elemento pritaikymui vienoje prizmės viršūnėje sutapatinami du mazgai.

Pirmu priartėjimu plokštuminis BE modelis generuotas pagal nestruktūrinį tinklą, o vėliau šis tinklas patankintas prie įpjovos viršūnės ir atramų, naudojant sukurtą adaptyvių tinklų generavimo algoritmą (R.Kačianauskas ir E.Stupak, 2002, 2003 m.). Buvo pritaikyta h -prisitaikančiųjų BE tinklų kūrimo technologija, skirta dvimatėms struktūroms su koncentratoriais modeliuoti. Prisitaikantieji BE modeliai gerai aprašo įtempimų laukus koncentratoriaus aplinkoje, nes BE tinklams tankinti ar retinti naudojamas įtempimų kriterijus (įtempimų tolydumo indikatorius). Įtempimų tolydumo indikatorių naudojanti h -prisitaikančioji BE strategija yra integruojama į standartinės BEM programas ir gali būti taikoma sudėtingos geometrijos sritims su koncentratoriais nagrinėti. Naudojant šią metodiką, galima atsižvelgti ir į medžiagos savybių pasiskirstymą, kraštines sąlygas bei apkrovimą. Šios technologijos struktūrinė schema pateikta 2.2 paveiksle.

Pagrindiniai plokštuminio tinklo kūrimo strategijos etapai:

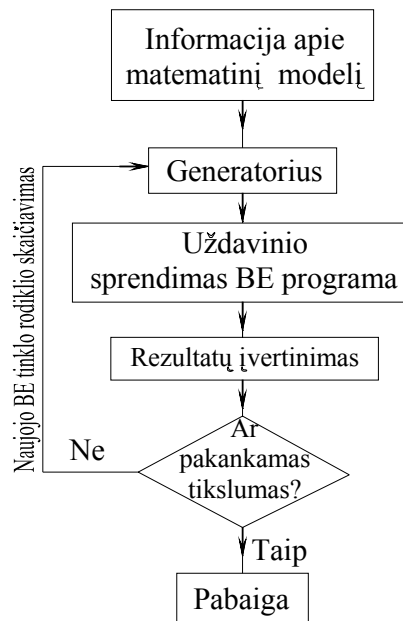
- a) sudaromas nagrinėjamosios srities dviašis BE modelis;
- b) BE programa sprendžiamas tikrinamasis analizės uždavinys, kurio galutinį rezultatą sudaro įtempimų pasiskirstymas nagrinėjamoje srityje.

Toliau BE uždavinio sprendinio tikslumas tikrinamas didžiausių įtempimų atsiradimo vietose:

$$|\sigma_i - \sigma_{i-1}| \leq \eta_{tol} \cdot \sigma^*, \quad (2.1)$$

čia σ_i ir σ_{i-1} – i -ojo ir $i-1$ -ojo sprendinio įtempimai; η_{tol} – duotoji įtempimų paklaida, σ^* – nominalusis įtempimas.

Jei tikslumas pakankamas, užbaigiama prisitaikomoji analizė, jei ne – generuojamas naujas BE tinklas.

2.2 pav. h –prisitaikančiosios BE strategijos algoritmo schema

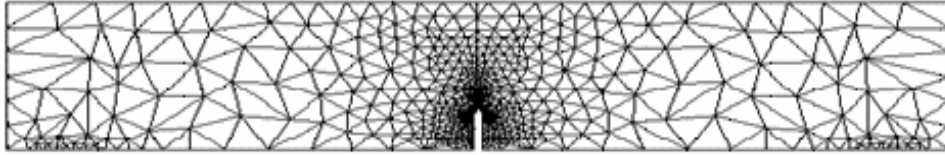
Naudojant automatinį nestruktūrinių BE tinklų generatorių, pagrįstą plintančio fronto metodu (pagrindinė jo idėja – vienu metu prie BE tinklo pridedamas tik vienas elementas), yra generuojamas pradinis retas BE tinklas, apimantis visą nagrinėjamą sritį. Naudojant šį nestruktūrinių tinklų generatorių, reikia pateikti informaciją apie pradinį foninį tinklą, kuris apima visą nagrinėjamą sritį, nagrinėjamos srities geometriją ir apibrėžti kraštines briaunas, mazgų išsidėstymo svorio funkciją. Ši svorio funkcija apibrėžia atstumų tarp mazgų kitimą, jos reikšmės pateikiamos foninio tinklo mazguose. Informacija apie generuotą tinklą, kaip apie foninį kito prisitaikančiosios BE analizės etapo tinklą, yra išsaugoma, o vėliau naudojama kaip pradinė informacija kito etapo tinklui generuoti.

Pats imliausias laiko sąnaudų atžvilgiu yra rezultatų įvertinimo etapas, nes siekiant rezultatų tikslumo, skaičiuoti tenka pagal skirtingus BE tinklus, todėl stengiamasi gauti kuo tikslesnį skaitinį sprendinį su kuo mažesniu BE skaičiumi. Tuomet reikia nustatyti uždavinio apibrėžimo srities regionus, kuriuose BEM paklaida yra maksimali, ir juose tobulinti srities diskretizavimą.

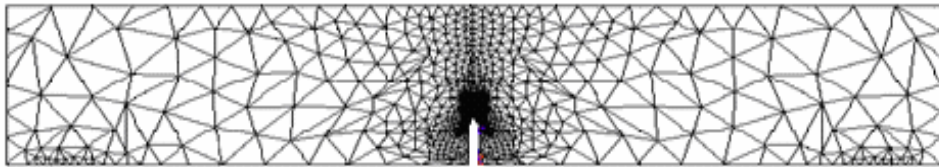
Šio darbo uždaviniams modeliuoti buvo taikyta universali BEM programa ANSYS, 2003 m. Tačiau būtų galima sėkmingai taikyti ir kitas tipines BE programas. Dviašio uždavinio sprendinys ir gautasis įtempimų pasiskirstymas analizuojamas specialia programa ANALYST (R. Kačianauskas ir kt., 2002 m.), kuri leidžia gauti naujojo indikatoriaus reikšmių z rinkinį. Pagal gautąsias reikšmes pakeičiami tinklo dydžio kontrolės parametrai.

Buvo išnagrinėti trys plokštuminio BE tinklo variantai su skirtingu plokštelės plokštumos diskretizacijos lygiu: 806 mazgai ir 1454 BE; 1069 mazgai ir 1958 BE; 2110 mazgai ir 3990 BE (2.3 pav.).

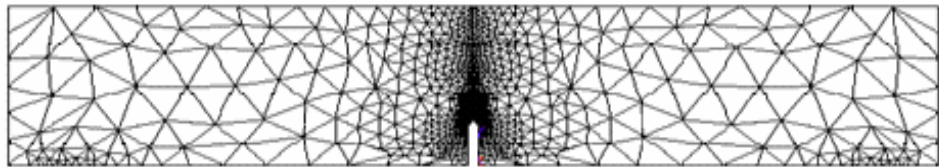
a)



b)



c)



2.3 pav. Plokštuminio tinklo padalinimo lygis: a) pradinis, b) tarpinis, c) paskutinis

Dėl uždavinio specifikos buvo nuspręsta skirtingai generuoti tinklus plokštelės plokštumoje ir plokštelės storio kryptimi.

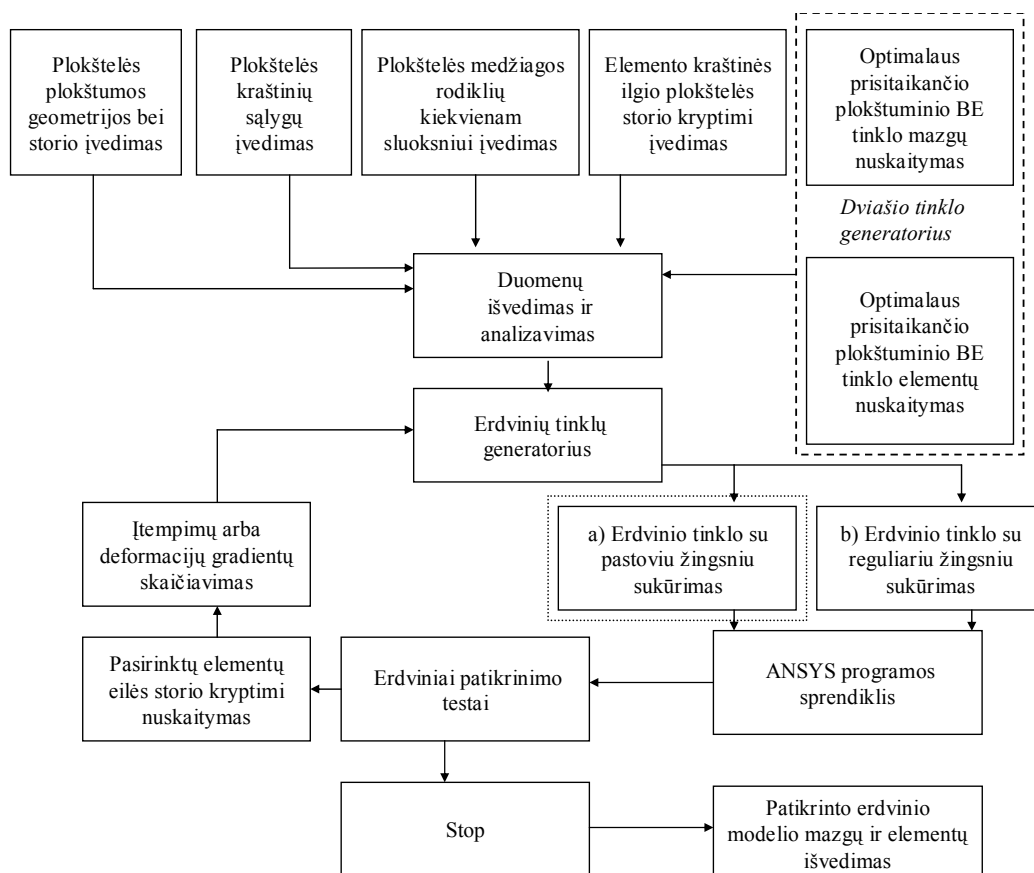
2.4. Trimačio modelio kūrimas

Buvo sukurtas originalus erdvinio tinklo generavimo metodas ir programa, dirbanti kartu su ANSYS programos paketu. Erdvinis baigtinių elementų modelio tinklas sukonstruotas, panaudojus struktūrinį plokštumoje prie įpjovos viršūnės sutankintą prisitaikantį tinklą, ir reguliarų struktūrinį tinklą plokštelės storio kryptimi (2.4 pav.).

BE tinklas sugeneruotas trimis etapais:

- pirmasis etapas – įvedami pradiniai duomenys (geometrija, storis, kraštinės sąlygos, medžiagos rodikliai, prisitaikantysis plokštuminis BE tinklas);

- antrasis etapas – kuriamas pradinis erdvinis reguliarus tinklas su pastoviu žingsniu per storį; tuo tikslu kiekvieno plokštuminio elemento koordinatės paverčiamos erdvinių elementų koordinatėmis ir perduodamos į ANSYS programos sprendiklį;
- trečiasis etapas – pagal atliktus patikrinimo testus analizuojama tinklo kokybė: a) jeigu ji nepakankama, tai pagal pasirinktus per plokštelės storį rodiklius (įtempimų arba poslinkių gradientus) nustatoma tankinimo storio kryptimi funkcija, kuriamas naujas erdvinis modelio BE tinklas (jau atsižvelgiant į rodiklių kitimą storio kryptimi, po to kartojama anksčiau aptartoji procedūra); b) jei BE tinklo kokybė tenkina reikalavimus, tai išvedamos mazgų koordinatės bei elementų numeriai .

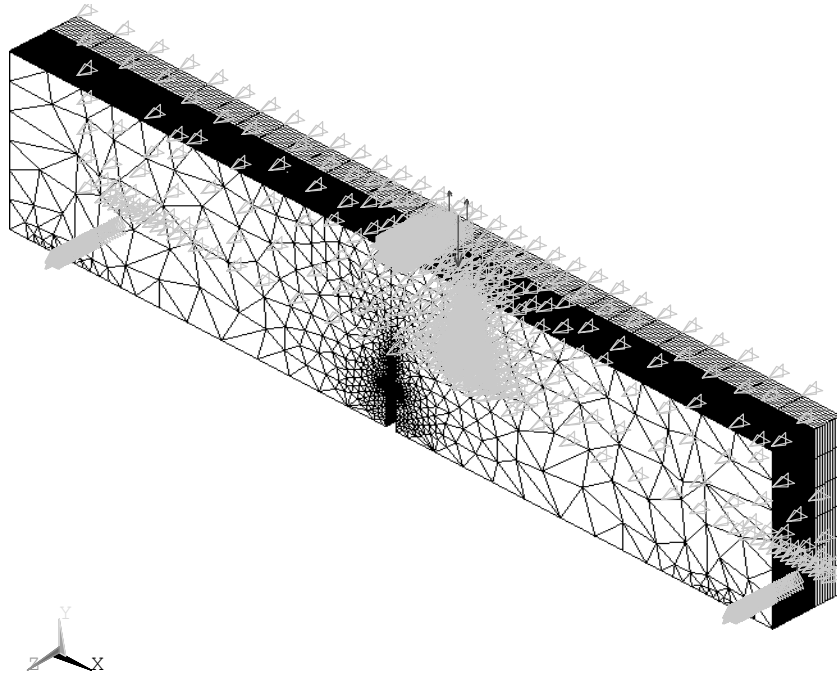


2.4 pav. Erdvinių tinklų kūrimo strategija

Sukurtasis erdvinis BE modelis susideda iš skirtingo pastovaus storio sluoksnių, todėl galima naudoti tokio tipo BE tinklus sprendžiant sluoksniuotos struktūros uždavinius. Disertaciniame darbe buvo pasirinkta vienoda visų sluoksnių medžiaga.

Diskretizuojant trimatę sritį, pasirinktas tarpinis BE variantas (tarp piramidės ir oktaedro) – trikampio pagrindo prizmė (tribriaunė prizmė) su 6 mazgais, du iš tų mazgų yra dvigubi.

Pasinaudojus modelio simetrija, siekiant sutrumpinti skaičiavimo laiką, buvo nagrinėjamas tik ketvirtis plokštelės modelio. Tokia modeliavimo technika iš principo neblogina rezultatų. Visos plokštelės BE tinklo pavyzdys parodytas (2.5) paveikslėlyje.



2.5 pav. Erdvinis baigtinių elementų modelis programos ANSYS terpėje

2.5. Modelio patikra

Plokštelės erdvinis BE modelis buvo tikrinamas dviem etapais.

Pirmasis etapas. Tikrinamas prisitaikantysis vienos plokštumos BE tinklas. Sukurtųjų tinklų parametrai mazguose virš įpjovos buvo sugretinti su analogiško uždavinio analiziniu sprendiniu. BE tinklo kokybė vertinama lyginant įtempimų σ_{yy} pasiskirstymus fiksuoto atskaitos kampo θ įpjovos viršūnėje su analiziniu sprendiniu. Analiziniai įtempimų sprendiniai tokioje įpjovoje gerai žinomi:

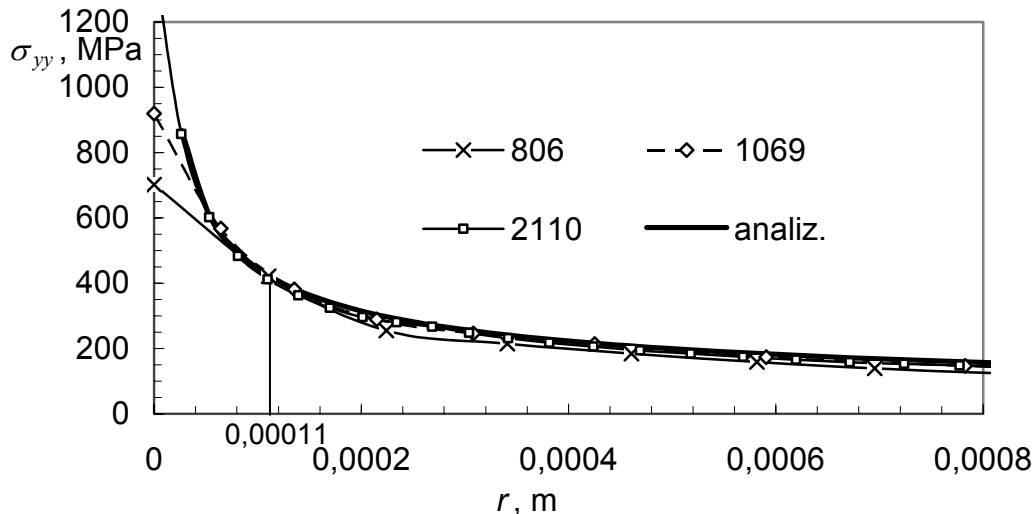
$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (2.2)$$

čia r ir θ – polinės (cilindrinės) taško koordinatės, K_I – įtempimų intensyvumo koeficientas.

Trimis taškais lenkiamam bandiniui I apkrovimo formai įtempimų intensyvumo koeficientas:

$$K_I = \frac{6F\sqrt{a}}{BW} \left[1.93 - 3.07\left(\frac{a}{W}\right) + 14.53\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 25.11\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 25.8\left(\frac{a}{W}\right)^4 \right]; \quad (2.3)$$

čia F – išorinė apkrova, a – įpjovos gylis, W ir B – plokštelės aukštis ir jos storis.

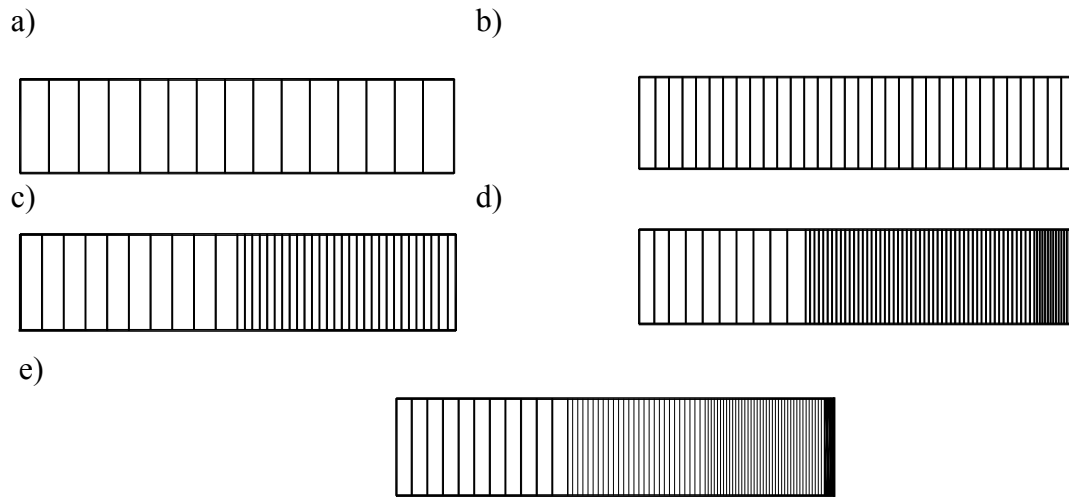


2.8 pav. Vertikaliajo įtempimo σ_{yy} įpjovos viršūnėje reikšmės priklausomybė nuo koordinatės r

Kruopšti pirmojo testo analizė padėjo pasirinkti optimalų baigtinių elementų tinklą plokštelės plokštumoje (2.8 pav.). Pakankamas tikslumas, gretinant su analiziniu sprendiniu, gautas jau pirmajame mazge prie viršūnės (0,11 mm atstumu). Siekdami nedidinti erdvinio uždavinio apimtį, Oxy plokštumoje pasirinkome pirmąjį BE tinklą su 806 mazgais ir 1454 baigtiniais elementais.

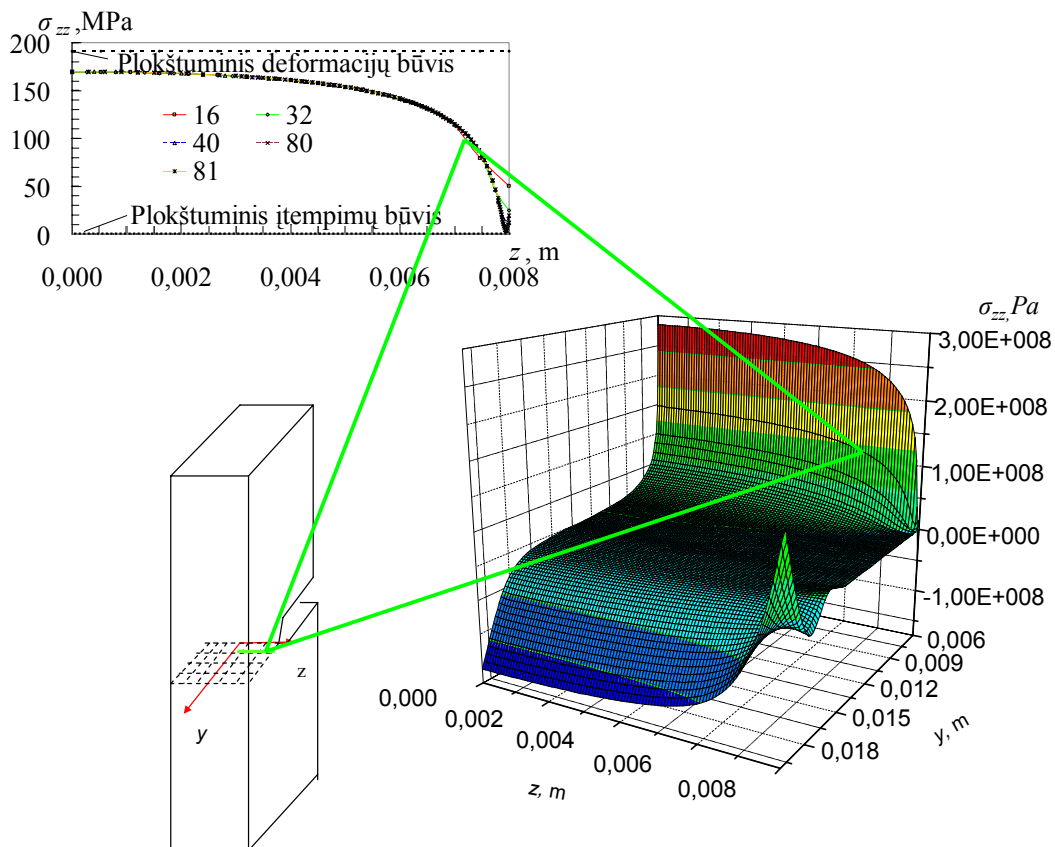
Antrasis etapas. Buvo ištirti penki erdviniai tinklai. Plokštumoje yz sudaryti reguliarūs 16 ir 32 sluoksnių tinklai dėl pakraščio efekto neužtikrino pakankamo tikslumo. Pakraščio efektui mažinti buvo generuoti dar trys storio kryptimi sutankinti BE tinklai (įvestos zonos su dvigubu, trigubu ir keturgubu tankumu). Tankinimo zonų ribos buvo nustatytos pagal didžiausius įtempimų gradientus.

Taikant visus 5 modelius su vienodomis sąlygomis buvo išspręstas statinis erdvinis uždavinys ir palyginti įtempimų kitimo storio kryptimi rezultatai (2.9 pav.). Plokštelės kraštinės sąlygos pasirinktos tokios, kokių reikalauja trimis taškais lenkiamo bandinio ASTM standartas (ASTM E 399).

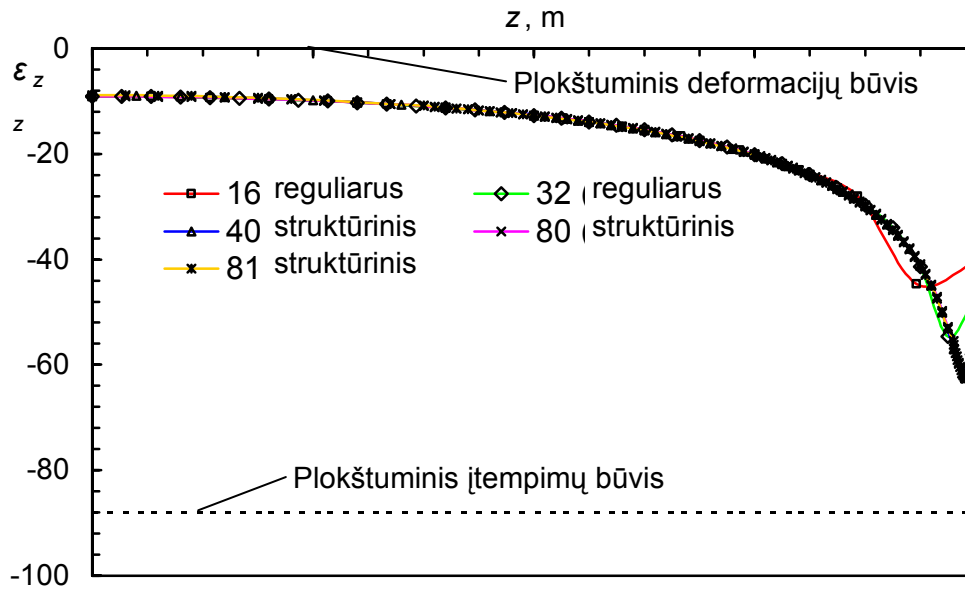
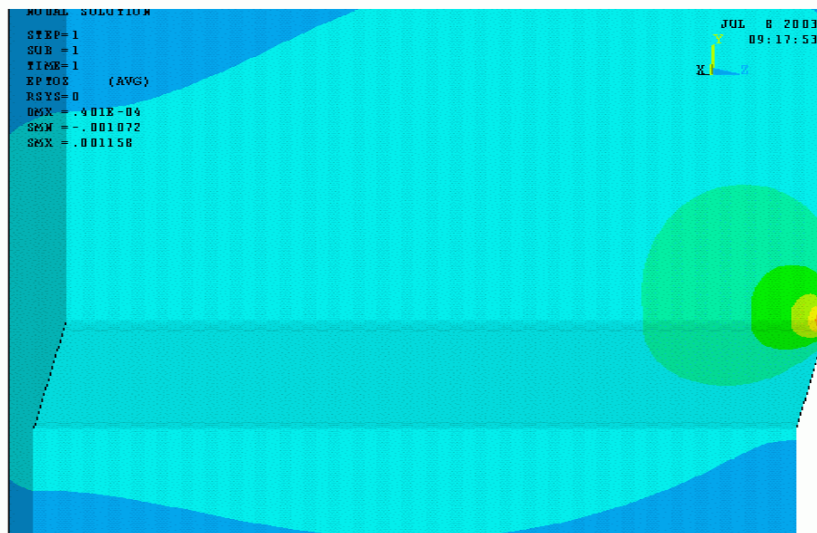


2.9 pav. Erdvinio BE modelio dalijimas į sluoksnius storio kryptimi: a) 16 sluoksnių, b) 32 sluoksniai, c) 40 sluoksnių, d) 80 sluoksnių, e) 81 sluoksnių

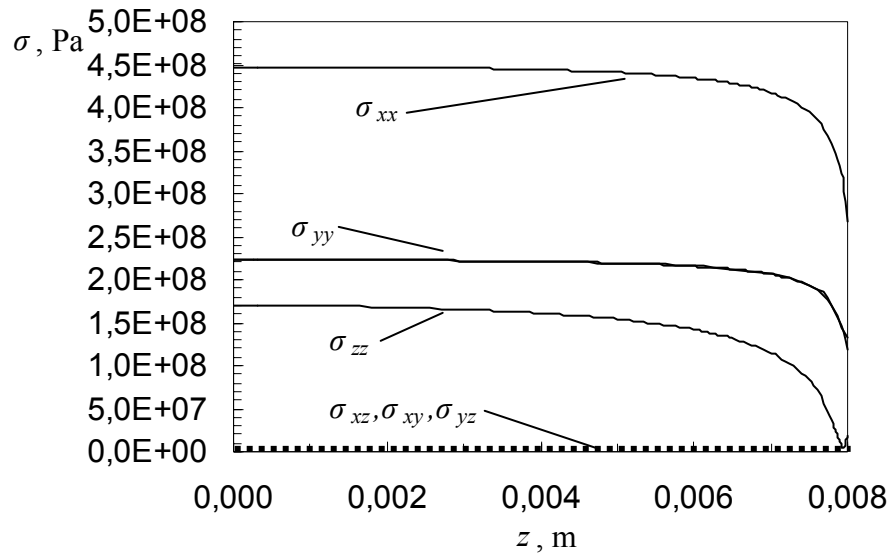
Erdvinio uždavinio vietos tarp plokščių uždavinių nustatymui bei riboms įvesti buvo išspręsti, taikant vienodas plokštelės išorinio apkrovimo sąlygas, du dviašiai uždaviniai (su plokštuminio deformacijų būvio ir plokštuminio įtempimų būvio prielaidomis).



2.10 pav. Įtempimų σ_{zz} kitimas plokštelės storio z kryptimi

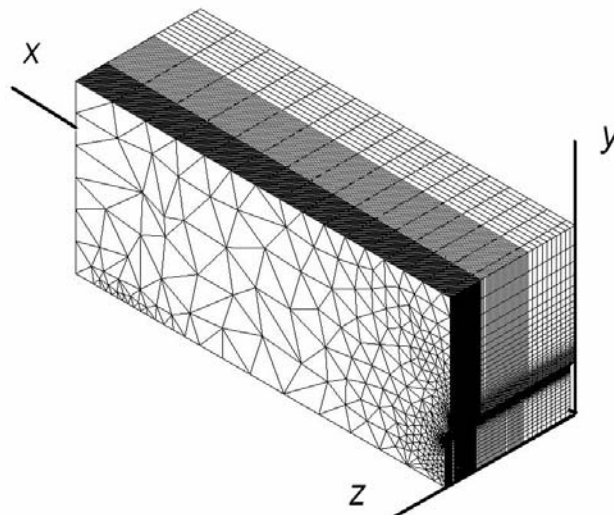
2.11 pav. Deformacijų ε_{zz} kitimas plokštelės storio z kryptimi2.12 pav. Deformacijų ε_{zz} kitimas ties plokštelės įpjova

Rezultatai, gauti su reguliariais 4 skirtingų tankumo zonų BE tinklais, praktiškai sutampa su 3 zonų tinklų rezultatais, todėl tolesniuose skaičiavimuose, taupant resursus, pasirinktas Oyz plokštumoje tinklas su trejopu zonų tankumu (2.10 ir 2.11 pav.). Testų konvergavimo rezultatai parodė, kad įtempimai bei deformacijos, išskyrus kraštinio sluoksnio zoną, nejautrūs plokštelės diskretizacijai storio kryptimi.



2.13 pav. Visų įtempimų komponentų σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xz} , σ_{xy} , σ_{yz} kitimas plokštelės storio z kryptimi

Kadangi buvo nagrinėjamos kiekvieno sluoksnio BE įtempimų reikšmės, reikia atskirai patikrinti reikšmių tolydumą, taikant ekstrapoliavimo metodą įtempimų kitimui virš įpjovos storio kryptimi (2.13 pav.).



2.14 pav. Aksonometrinis ketvirčio BE modelio vaizdas

Pasinaudojant modelio simetrija, toliau nagrinėjamas tik plokštelės ketvirtis su 80 sluoksnių (2.14 pav.). Tyrimo objektas modeliuojamas kaip sluoksniuota plokštelė, kurios kiekvienas sluoksnis nagrinėjamas atskiru plokštuminiu uždaviniu.

2.6. Skyriaus rezultatai ir išvados

Atlikus modelių patikrinimą, buvo padarytos tokios išvados

1. Erdvinių uždavinių sprendimas yra gana sudėtingas, nes skaičiuojant įpjovos fronte įtempimų ir deformacijų laukus, tenka analizuoti didelį duomenų kiekį. Tobulėjančios kompiuterinės technologijos suteikia galimybę kokybiškai gerinti erdvinių uždavinių sprendimo eigą.
2. Atlikti skaitiniai eksperimentai patvirtino h –prisitaikančiųjų baigtinių elementų strategijos, naudojančios įtempimų tolydumo indikatorių, ir ją realizuojančių tinklų generavimo algoritmo bei kompiuterinių technologijų veiksmingumą generuojant lokaliai prisitaikančiosius dviašius baigtinių elementų tinklus srityse su įtempimų koncentratoriais.
3. Erdvinio baigtinių elementų tinklo generavimo sistema, kurioje pasinaudojama informacija apie objekto geometriją, medžiagos rodiklių pasiskirstymą, kraštines sąlygas ir apkrovimą, sukuria tokį erdvinį baigtinių elementų tinklą, kuris kombinuoja prisitaikančiosius tinklus plokštumoje ir struktūrinius tinklus plokštelės storio kryptimi.
4. Sukurtasis erdvinis baigtinių elementų modelis susideda iš skirtingo storio sluoksnių, todėl tokio tipo baigtinių elementų tinklus galima naudoti sluoksniuotos struktūros uždaviniams spręsti.
5. Taikant įvairius storio diskretizacijos modelius, atlikti baigtinių elementų modelio patikrinimo testai, taikant įtempimų ir deformacijų laukus įpjovos viršūnėje.
6. Naudojant pasiūlytą automatinę pradinio baigtinių elementų tinklo kūrimo strategiją, galima sumažinti elementų kiekį ir tiksliau aprašyti plokštelės kraštinius efektus.

3. Plokštelės erdviškumo tyrimas

Erdviškumui tirti taikyti du rodikliai. Įtempimų būvio erdviškumo laipsnis nustatomas analizuojant trimačius įtempimų laukus, o deformacijų būvio erdviškumo laipsnis – pagal trimačius deformacijų laukus. Pateikti įtempimų būvio erdviškumo laipsnio ir deformacijų būvio erdviškumo laipsnio kitimo laukai. Išnagrinėtas erdviškumo laipsnio kitimas plokštelės storyje. Šie abu rodikliai atspindi du ribinius vertinimus. Rodiklių ekvivalentiškumas analizuojamas, taikant pasiūlytą ekvivalentiškumo sąlygą.

3.1. Trimačiai įtempimų ir deformacijų laukai

Ilgą laiką irimo mechanikos uždaviniai buvo sprendžiami, taikant tik plokštuminio uždavinio prielaidas. Buvo nagrinėjamos plonos plokštelės (plokštuminis įtempimų būvis) arba begalinio storio (plokštuminis deformacijų būvis) plokštelės, nebuvo kreipiama pakankamai dėmesio į įtempimų arba deformacijų būvio kitimą plokštelės storio kryptimi.

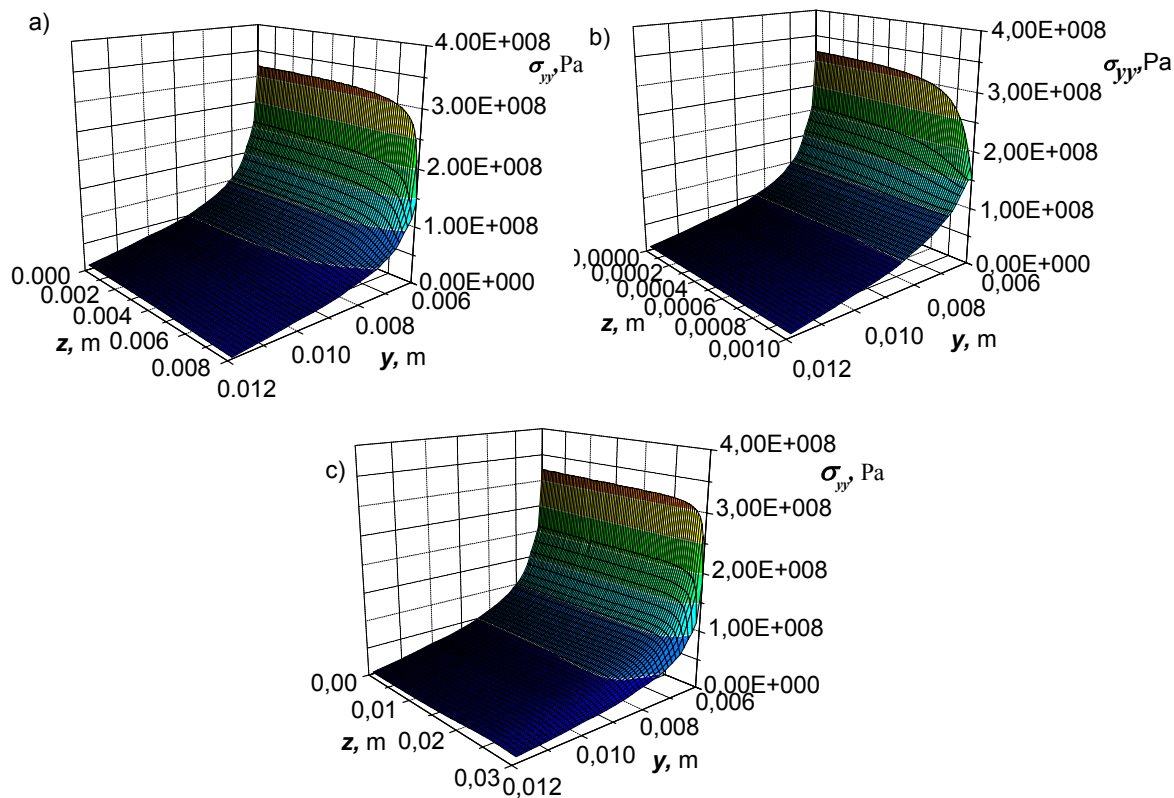
Pastaraisiais metais atsirado publikacijų, kuriose bandoma atskleisti, kaip plokštuminis deformacijų arba įtempimų būvis atitinka tikrovę. Plokštelės įtempimų ir deformacijų erdvinio būvio erdviškumui aprašyti buvo siūlomi įvairūs rodikliai.

Plokštelės įpjovos zonoje įtempimų ir deformacijų laukų erdviškumo lygį apibūdina įtempimai ir deformacijos kryptimi „iš plokštumos“ (σ_{zz} ir ε_{zz}). Naudojant anksčiau aptarto tinklo generavimo metodą ir kruopščią baigtinių elementų analizę, buvo ištirti komponentų „iš plokštumos“ pasiskirstymai. Įtempimų ir deformacijų komponentai buvo nustatomi $y = 0,001$ mm atstumu nuo įpjovos viršūnės įvairių storių (ir skirtingo diskretizacijos tankumo) modeliams.

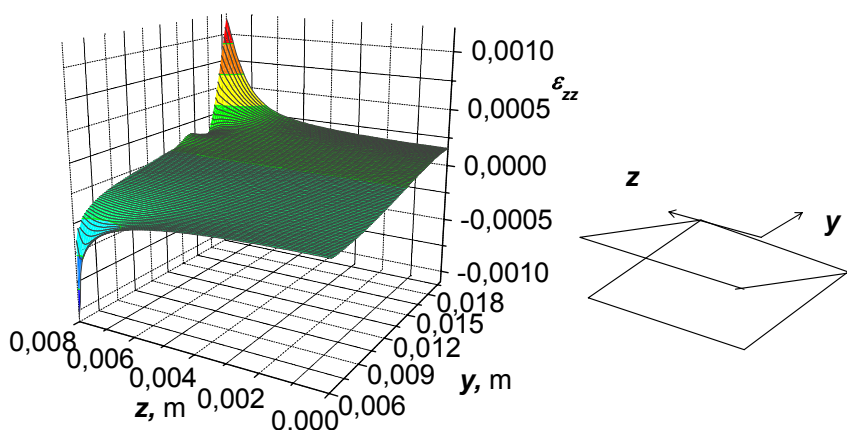
Atlikti skaitiniai tyrimai išryškino trimatį įtempimų ir deformacijų bei poslinkių laukų pobūdį plokštelėje. Tyrimams buvo pasirinktos trys (mažo, vidutinio, didelio storio) plokštelės. Būdingas įtempimų vaizdas iliustruojamas įtempimų σ_{yy} pavyzdžiu (3.1 pav.).

Analizuojant įtempimų σ_{yy} komponentų kitimą plokštelės storio kryptimi centriniame pjūvyje ir anksčiau aptarto trimis taškais lenkiamos plokštelės modelio įpjovos viršūnėje buvo nustatyta neapibrėžtumo zona (*angl.* vortex singularity). Neapibrėžtumo zona pastebima įpjovos viršūnės ir laisvojo paviršiaus sankirtoje. Labiausiai šis efektas pastebimas 3.1 b pav.

vidutinio storio plokštelėje. Toliau σ_{yy} įtempimų laukai bus taikomi skaičiuojant įtempimų intensyvumo koeficientą pagal įtempimus.



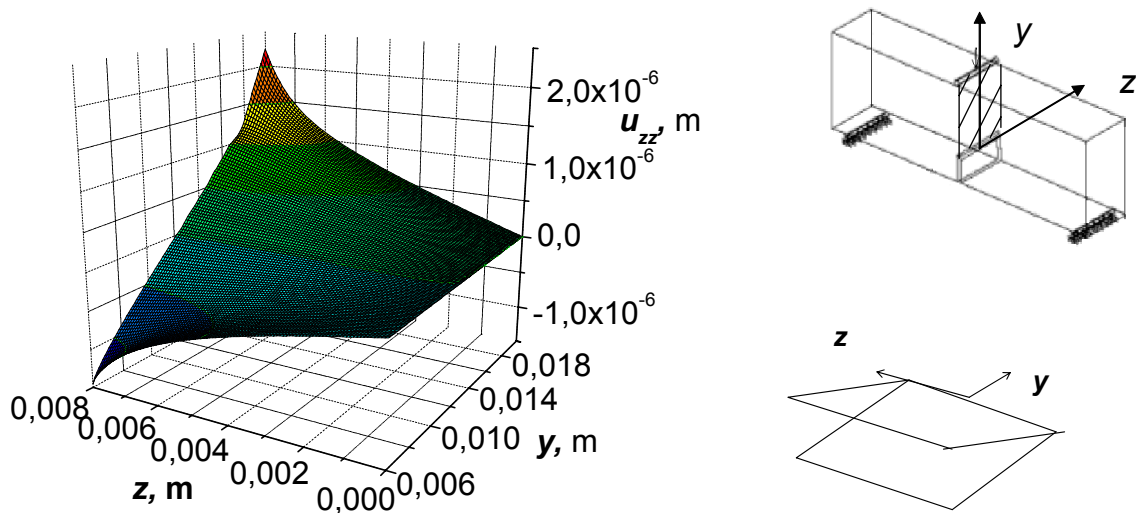
3.1 pav. Įtempimų σ_{yy} laukų kitimas įvairaus storio plokštelėse: a – mažo, b – vidutinio, c – didelio storio plokštelėse



3.2 pav. Deformacijų komponento ε_{zz} kitimas storio kryptimi virš vidutinio storio plokštelės įpjovos

Deformacijų ε_{zz} analizė parodė, kad vietoje, kurioje įpjova susikerta su plokštelės kraštu, yra didžiausių deformacijų zona ir čia deformacijų kitimo net prisitaikančiuoju tinklu neįmanoma tiksliai apibūdinti (3.2 pav.). Ten, kur išorinio poveikio zona susikerta su laisvu paviršiumi, taip pat atsiranda didelės deformacijos storio kryptimi.

Taip pat buvo patikrintas poslinkių u_{zz} kitimas virš įpjovos (3.3 pav.). Didžiausieji poslinkiai pastebimi ties plokštelės kraštu, o ties plokštelės viduriu yra arti nulio. Virš plokštelės įpjovos poslinkiai didėja storio kryptimi nuo plokštelės centro iki krašto.



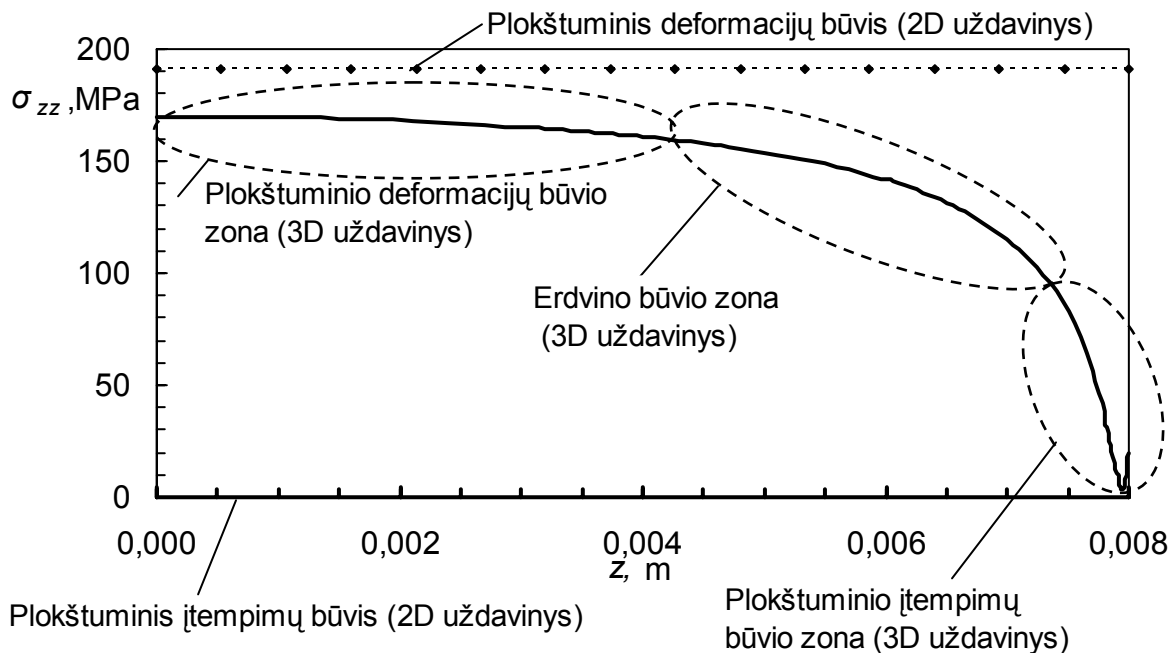
3.3 pav. Poslinkių u_{zz} storio kryptimi erdvinis laukas virš vidutinio storio plokštelės įpjovos

Išsamesnė įtempimų kitimo storio kryptimi analizė pateikta 3.4 pav. Čia vaizduojamas įtempimų komponentų σ_{zz} kitimas plokštelėje, įpjovos viršūnėje. Buvo išspręsti trys identiškos plokštuminės geometrijos uždaviniai, taikant vienodas vidutinio storio ($B/W = 0,8$) plokštelės išorinio apkrovimo sąlygas: du dviašiai uždaviniai (su plokštuminio deformacijų būvio ir plokštuminio įtempimų būvio prielaidomis) ir triašis uždavinys be prielaidų taikymo.

Skaitiniai tyrimai patvirtina, kad įtempimai storio kryptimi nepastovūs, kad įpjovos viršūnėje egzistuoja erdvinė sritis, kurioje įtempimų būvis yra tarpinis, o tarpinių būvių zonos dydis priklauso nuo plokštelės storio. Skaitiniai sprendiniai priklauso nuo sluoksnių dalijimo tankio ir nuo kiekvieno sluoksnio storio. Tik taikant labai tankią lokalią diskretizaciją, galima aptikti plokštuminį įtempimų būvį ties plokštelės kraštu tiek storio kryptimi, tiek plokštelės plokštumoje. Plokštuminis deformacijų būvis erdvinėje plokštelėje tampriojoje stadijoje įpjovos viršūnės zonoje per plokštelės storį Oz nepasiekiamas. Iš tikrųjų tarp šių ribinių

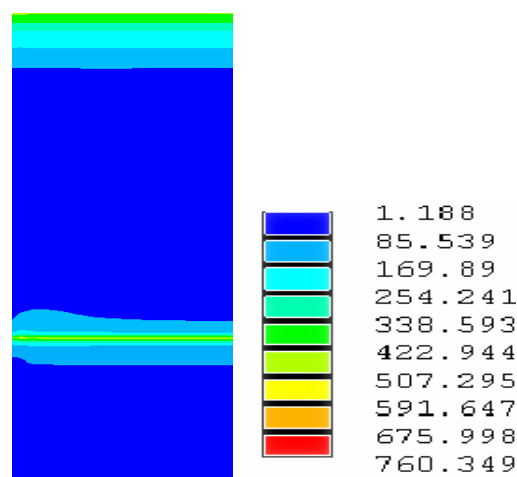
Vladislav Žarnovskij. Disertacija: Įtempimų būvio erdviškumo įtakos plokštelių su įpjova įtempimų intensyvumo koeficientui skaitinis tyrimas 44

erdvinio būvio atvejų būvių egzistuoja tarpinis (*angl.* transitional) būvis, kuriame nepaisyti dominuojančių σ_{zz} bei ε_{zz} negalima. Jis negali būti laikomas plokštuminiu. Kiti autoriai dar vadina jį pereinamuoju arba erdviniu (trimačiu) būviu arba zona (3.4 pav.).



3.4 pav. – Įtempimų komponentų σ_{zz} kitimas vidutinio storio plokštelėje virš įpjovos

Pažymėtina, kad iš įtempimų kitimo storio kryptimi (3.4 pav.) vidutinio storio erdvinei plokštei plokštuminis deformacijų būvis tampriojoje stadijoje nepasiekiamas, o plokštuminis įtempimų būvis beveik pasiekiamas, taikant labai smulkią diskretizaciją tik prie plokštelės krašto



3.5 pav. Mizeso įtempimų funkcijos pokytis plokštelės zOy skerspjūvyje

Tikrinant erdvinio efekto įtaką sudėtingam įtempimų būviui, išanalizuotas Mizeso įtempimų funkcijos kitimas storio kryptimi (3.5 pav.). Pastebėta, kad didžiausia Mizeso

įtempimų funkcijos reikšmė yra nuo plokštelės krašto maždaug per $1/8$ viso plokštelės storio. Toliau Mizeso įtempimų funkcija bus naudojama plokštelės plastinės zonos skaičiavimams.

3.2. Erdvinio būvio rodikliai

Šiame poskyryje naudojamosi dviem parametrais, kurie leidžia geriau apibūdinti plokštelės įtempimų ir deformacijos laukų ties V formos įpjovos viršūne erdviškumą. Dviašio įtempimų būvio rodiklio k ir dviašio deformacijų būvio rodiklio d pasiskirstymai plokštelės storio kryptimi analizuojami panaudojant aštuonias plokšteles su vienoda plokštumos geometrija, bet skirtingo storio.

Daugelis plokštelių, naudojamų standartiniuose laboratoriniuose irimo testuose, atitinka plokštelės pavidalą. Tačiau irimas tiriamas įvairaus storio bandiniuose ir ne visada paprasta nustatyti, ar tiriamą plokštelę yra „stora“ ar „plona“.

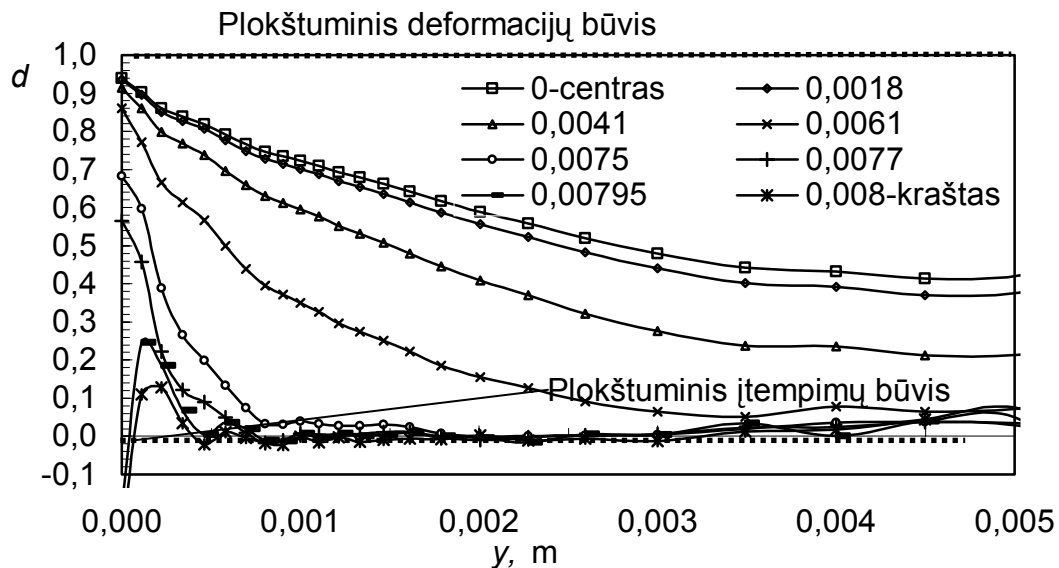
Šiame disertaciniame darbe, analizuojant aštuonis skirtingo storio bandinius, priimta juos (priklausomai nuo bandinio storio B ir aukščio W santykio) vadinti taip: ploni bandiniai ($B/W = 0,1; 0,2; 0,4$), vidutinio storio ($B/W = 0,6; 0,8; 1,0$), stori ($B/W = 1,5; 3,0$).

3.2.1. Įtempimų būvio erdviškumo laipsnis

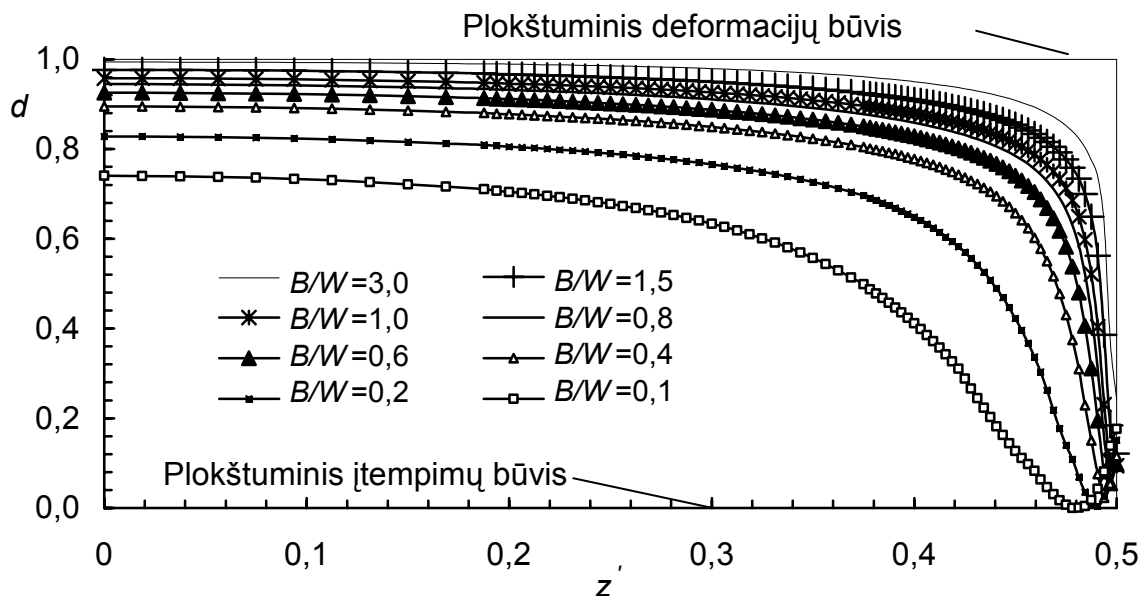
Įpjautos plokštelės erdvinio įtempimų būvio zoną galima nagrinėti, taikant įtempimų būvio erdviškumo laipsnį d („out-of-plane degree“ pagal T.Nakamura and D.Parks 1988 m.; W. Guo 2002 m.; S.W.Kwon 2000 m.; A. Kotousov 2002 m.; kitų dar vadinamą *angl.* „degree of plane strain“ arba „constraint factor“), kuris išreiškiamas taip:

$$d = \frac{\sigma_{zz}}{\nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}. \quad (3.1)$$

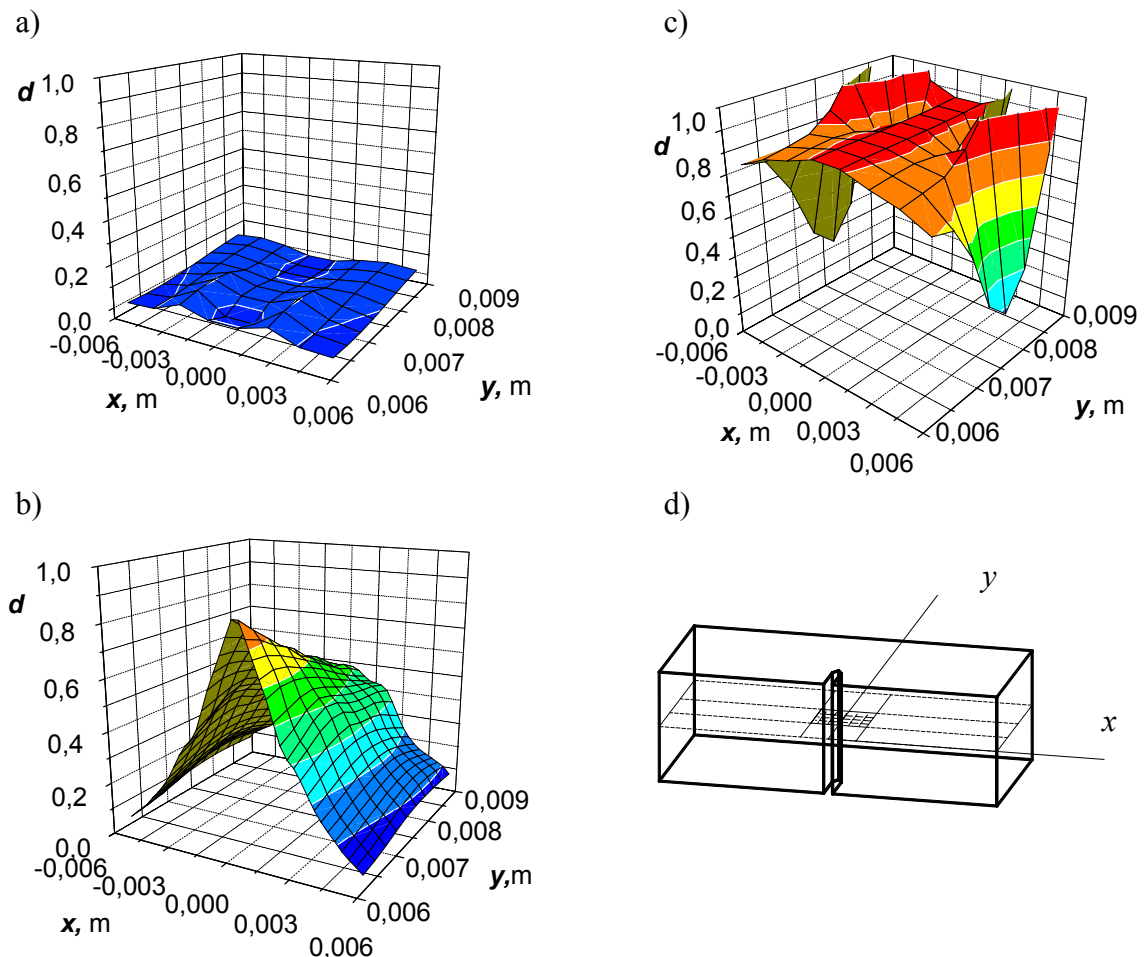
Kai įtempimų būvis plokštuminis, šis rodiklis lygus nuliui, o kai deformacijų būvis plokštuminis, jis lygus vienetui. Toks normalizavimas leidžia patogiai pateikti informaciją apie tarpinius įtempimų būvius. Įtempimų būvio erdviškumo laipsnio kitimas vidutinio storio plokštelėje (joje labiausiai pasireiškia erdviniai efektai) parodytas 3.6 paveiksle.

3.6 pav. Įtempimų būvio erdviškumo laipsnio d kitimas ašies Oy kryptimi

Tiriant vidutinio storio plokštelę pastebėta, kad tolstant nuo įpjovos Oy ašies atžvilgiu, taip pat kaip ir Oz ašies atžvilgiu, kinta įtempimų būvio erdviškumo laipsnis. Ties koncentratoriaus viršūnės viduriu susidaro būvis artimas plokštuminiam deformacijų būviui ($d = 0,94$), tolstant nuo įpjovos viršūnės vidurinėje plokštumoje aiškiai matomas tarpinis būvis. Pjūviuose ties $1/4$, $1/2$, $3/4$ pusės plokštelės storio, tolstant nuo koncentratoriaus, per tarpinį būvį artėjama prie sąlygiškai plokštuminio įtempimų būvio. Kituose pjūviuose tik ties įpjova (nuo 0 iki 0,002 mm) išeinama iš plokštuminio įtempimų būvio.

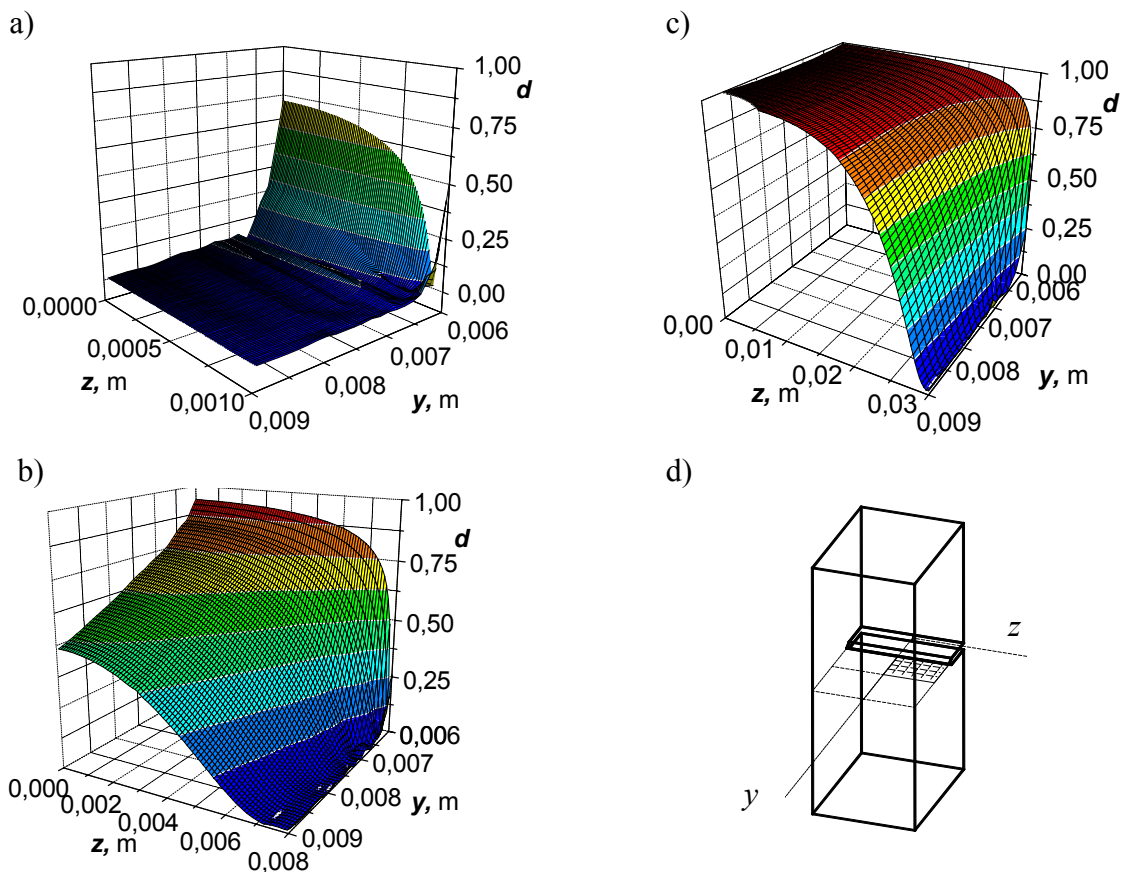
3.7 pav. Įtempimų būvio erdviškumo laipsnio d kitimas storio ašies Oz kryptimi įvairaus storio plokštelėse

Įtempimų būvio erdviškumo laipsnio kitimas storio kryptimi virš plokštelės įpjovos buvo ištirtas skirtingo storio plokštelėse su vienodomis apkrovimo sąlygomis ir vienoda plokštumine geometrija. Skirtingo storio plokštelių rodiklių kitimo kreivių pobūdis panašus (3.7 pav.). Labiausiai skiriasi plokštuminių ir erdviųjų zonų proporcijos. Kai santykinis storis mažėja, sąlyginė plokštuminio deformacijų būvio zona taip pat mažėja, o plokštuminio įtempimų būvio ir tarpinė zona didėja. Pastebimas įtempimų būvio erdviškumo laipsnio reikšmių skirtumas: kai santykinis storis padidėja nuo ($B/W = 0,1$) iki ($B/W = 3,0$), tai plokštuminio įtempimų būvio zonos proporcija mažėja nežymiai, o plokštuminio deformacijų būvio skaičiai didėja nuo 0,54 iki 0,93. Grynasis plokštuminis deformacijų būvis pasiekiamas tik labai storose plokštelėse su santykiniu storiumi ($B/W = 3,0$) ir tik ties plokštelės viduriu. Tai reiškia, kad taikant plokštuminio deformacijų būvio prielaidą būtina atsižvelgti į plokštelės storį.



3.8 pav. Įtempimų būvio erdviškumo laipsnio d kitimas plokštumoje xOy ties plokštelės viduriu ($z = 0$): a – plona plokštelė ($B/W = 0,1$), b – vidutinio storio plokštelė ($B/W = 0,8$), c – stora plokštelė ($B/W = 3,0$), d – nagrinėjamo pjūvio padėtis.

Siekiant sumažinti tyrimo zoną ties įpjova, (3.8 pav., 3.12 pav.), pasirinktas kontūras su matmenimis nuo $x = -0,006$ m iki $x = 0,006$ m ir nuo $y = 0,006$ m iki $y = 0,009$ m., įpjovos viršūnė yra taškas su koordinatėmis $x = 0$; $y = 0,006$ m. Buvo analizuotas įtempimų būvio erdviškumo laipsnio kitimas (3.8 pav.) ties plonos plokštelės ($B/W = 0,1$) vidurinė plokštuma xOy : visoje plokštumoje xOy yra sąlyginai plokštuminis įtempimų būvis be didesnių nukrypimų. Vidutinio storio plokštelė ($B/W = 0,8$) labiausiai pasižymi tarpiniais (erdviniais) būviais. Įpjovos viršūnės zonoje yra sąlyginis plokštuminis deformacijų būvis, kuris tolstant nuo įpjovos išilgai Ox ašiai pereina į erdvinį būvį, o po to – į sąlygiškai plokštuminį deformacijų būvį (sparčiau, negu pagal Oy ašį). Storoje plokštelėje ($B/W = 3,0$) ties įpjovos viršūne prie Oy ašies yra plokštuminis deformacijų būvis, o tolstant į šonus nuo Oy ašies yra nežymių nukrypimų nuo jo.



3.9 pav. Įtempimų būvio erdviškumo laipsnio d kitimas įpjovos plokštumoje yOz ($x = 0$): a – plona plokštelė ($B/W = 0,1$), b – vidutinio storio plokštelė ($B/W = 0,8$), c – stora plokštelė ($B/W = 3,0$), d – nagrinėjamo pjūvio padėtis plokštelėje.

3.9 pav. ir 3.13 pav. tyrimų zona yra tarp $y = 0,006$ m ir $y = 0,009$ m bei tarp $z = 0$ ir $z = t$; $t = 2,0$ mm plonoje plokštelėje ($B/W = 0,1$); $t = 16,0$ mm vidutinio storio plokštelėje

($B/W = 0,8$); $t = 3,0$ mm storioje plokštelėje ($B/W = 3,0$); įpjovos viršūnė pasirinkta kaip linija $y = 0,006$ m. Nagrinėdami įtempimų būvio erdviškumo laipsnio d kitimą įpjovos plokštumoje Oyz (3.9 pav.) su koordinate $x = 0$, matome, kad plonoje plokštelėje ($B/W = 0,1$) ties plokštelės viduriu $d = 0,72$ deformacijų būvis gali būti sąlyginai laikomas plokštuminiu. Ties įpjovos susikirtimu su laisvuju paviršiumi nuo sąlyginio plokštuminio deformacijos būvio *tolylgiai* pereinama prie plokštuminio įtempimų būvio. Pažymėtina, kad tik susikirtimo vietoje atsiranda maža sprendinio neapibrėžtumo zona (tai patvirtina kitų autorių nuomonė, kad net ir taikant tankų tinklą vietoje, kur įpjovos frontas kerta laisvąjį paviršių, įtempimai yra singuliarūs). Tolstant nuo įpjovos fronto pagal Oy ašį, šuoliškai išsivyrąja plokštuminis įtempimų būvis.

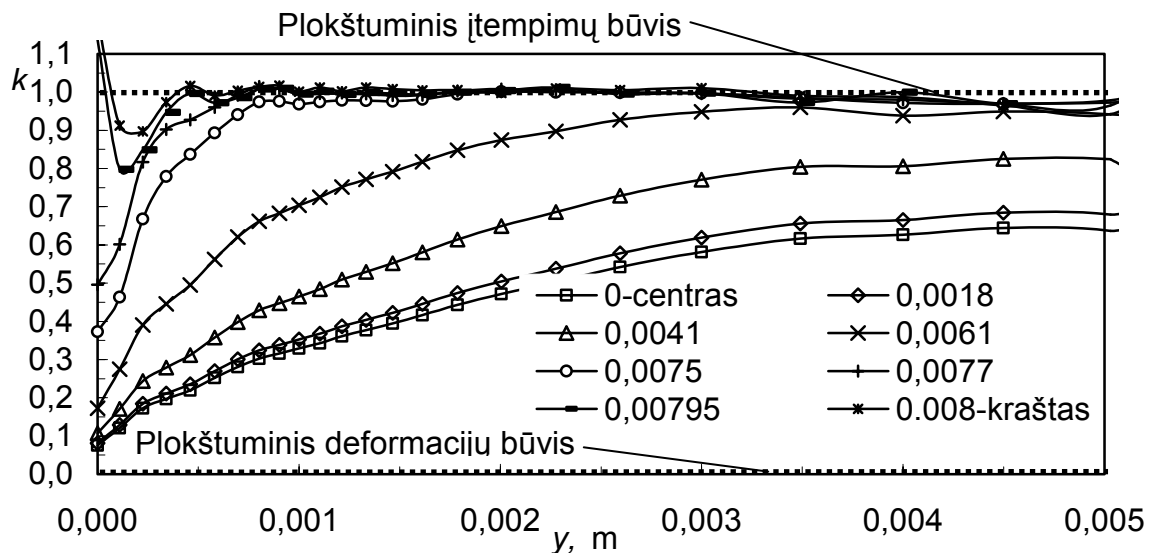
Vidutinio storio plokštelėje ($B/W = 0,8$) būvių erdviškumas pasireiškia itin reikšmingai. Sąlyginio plokštuminio būvio zona ties plokštelės viduriu staigiai pereina į erdvinį būvį, o ties kraštu keičiasi į sąlygiškai plokštuminį (kraštinį) įtempimų būvį. Tolstant nuo įpjovos fronto pagal y ašį, išlieka laipsnio d tendencija lėtai mažėti plokštuminio įtempimų būvio link. Storioje plokštelėje ($B/W = 3,0$) sąlyginių būvių kitimas dar staigesnis, negu vidutinio storio plokštelėje, pereinamoji zona dar mažesnė, o tolstant nuo įpjovos išilgai y ašies, pokyčių tendencija praktiškai nesikeičia.

3.2.2. Deformacijų būvio erdviškumo laipsnis

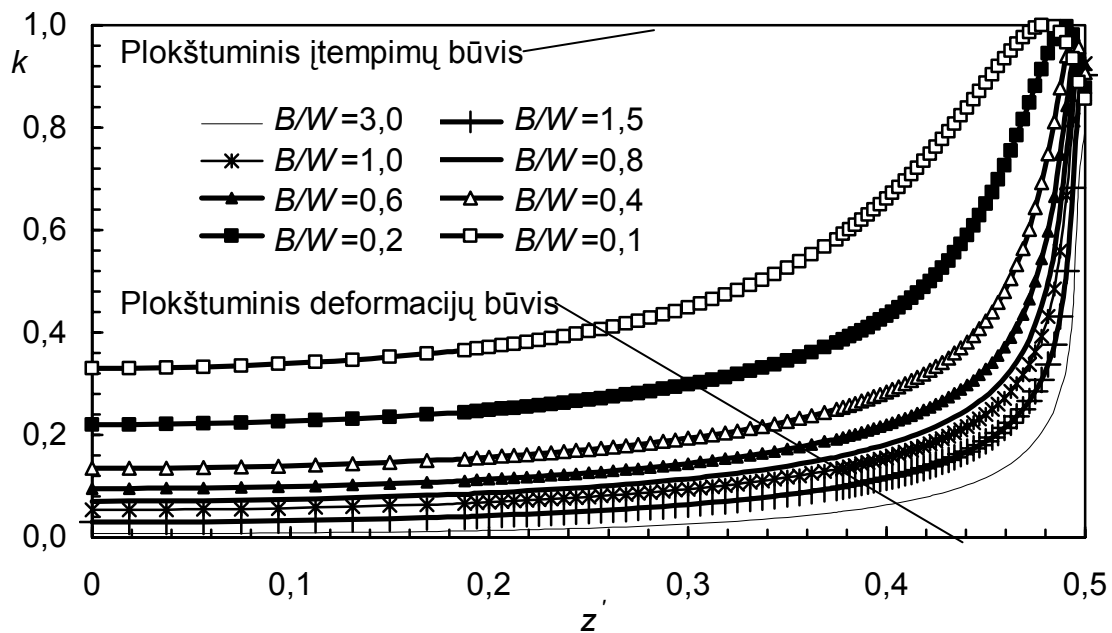
G.Nikishkov ir S.Atluri, 1987 m. įvertindami erdvinio deformacijų lauko apimtį, pritaikė panašų nenormalizuotą rodiklį (*angl.* strain constraint factor). Šiame darbe siūloma erdviškumą apibūdinti panašiu rodikliu – normalizuotu deformacijų būvio erdviškumo laipsniu k . Jis papildomai atsižvelgia į Puasono koeficiento įtaką:

$$k = \left(\frac{\nu - 1}{\nu} \right) \frac{\varepsilon_{zz}}{(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})}. \quad (3.2)$$

Savo skaitine reikšme šis rodiklis yra priešingas įtempimų būvio erdviškumo laipsniui – jis lygus nuliui, kai plokštuminis yra deformacijų būvis, ir lygus vienetui, kai plokštuminis yra įtempimų būvis. Deformacijų būvio erdviškumo laipsnio kitimas skirtingo storio plokštelėse parodytas 3.10 pav. Jų charakteris panašus į 3.5 pav. dėšningumus.

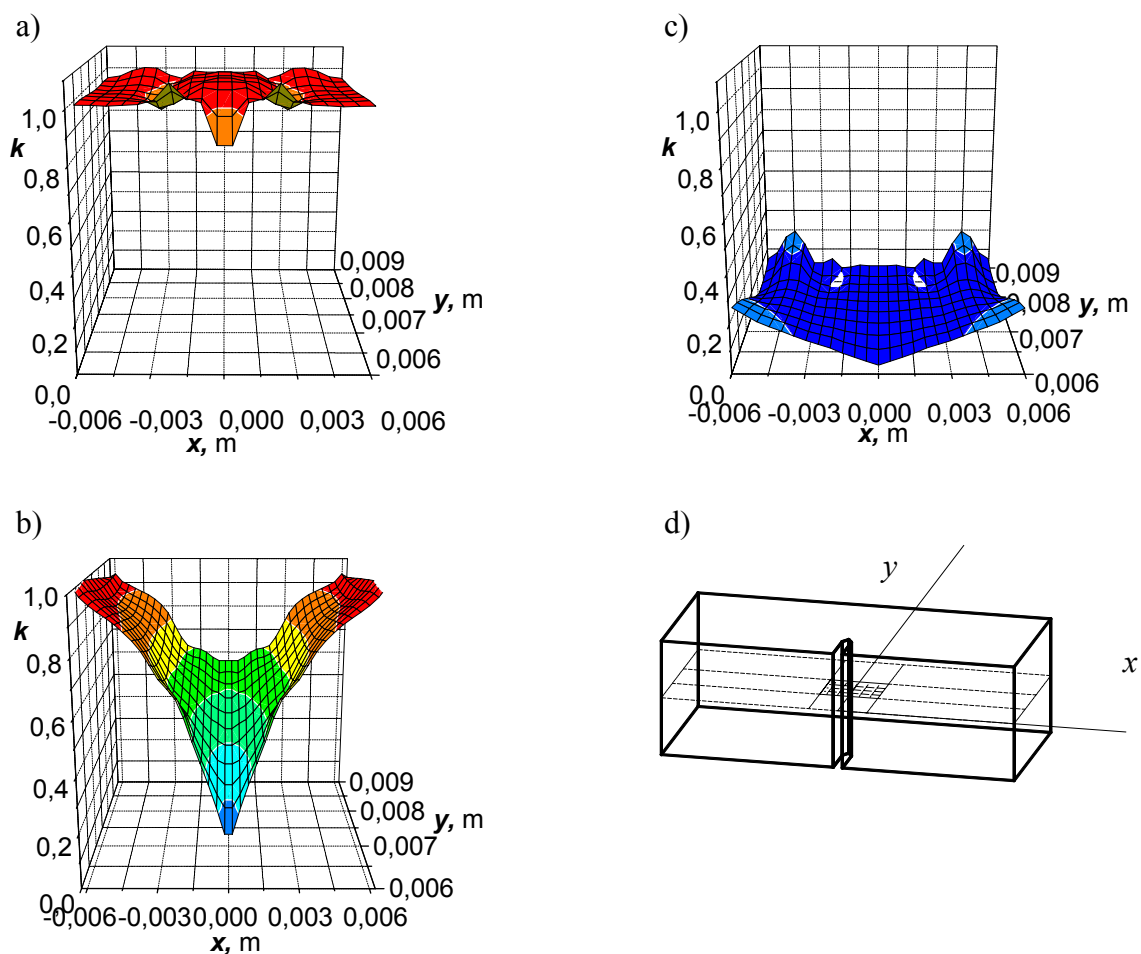
3.10 pav. Deformacijų būvio erdviškumo laipsnio k kitimas ašies y kryptimi

3.10 paveikslą kreivės priešinga tvarka atkartoja ankščiau aptarto 3.6 pav. išvadas. Galima teigti, kad y ašies kryptimi atstumo prieaugis priklauso nuo tarpinės zonos, kuri yra artima plokštuminio įtempimų būvio zonai; perėjimo gradientas priklauso nuo padėties: didžiausias yra prie krašto, mažiausias - plokštelės centre. Gauti rezultatai sutampa su kitų autorių duomenimis.

3.11 pav. Deformacijų būvio erdviškumo laipsnio k kitimas storio z' kryptimi skirtingo storio plokštelėse

Sąlyginai maža plokštuminio deformacijų būvio zona priklauso nuo įpjovos pločio, kai atstumo prieaugis išilgai y ašies artina tarpinę zoną prie plokštuminio įtempimų būvio; deformacijų būvio erdviškumo laipsnio didėjimas priklauso nuo storio koordinatės tarp centro ir laisvo paviršiaus.

Deformacijų būvio erdviškumo laipsnis, kaip jau minėta anksčiau, yra priešingas įtempimų būvio erdviškumo laipsniui, todėl natūralu, kad 3.11 pav. atvirkščiai pakartoja 3.7 pav. Kaip ir buvo pažymėta anksčiau, 3.9 a pav. lauko viršutinė kreivė ($B/W = 0,1$) rodo, kad plokštuminio deformacijų būvio zona palyginti maža, o didinant plokštelės storį, zona taip pat didėja.

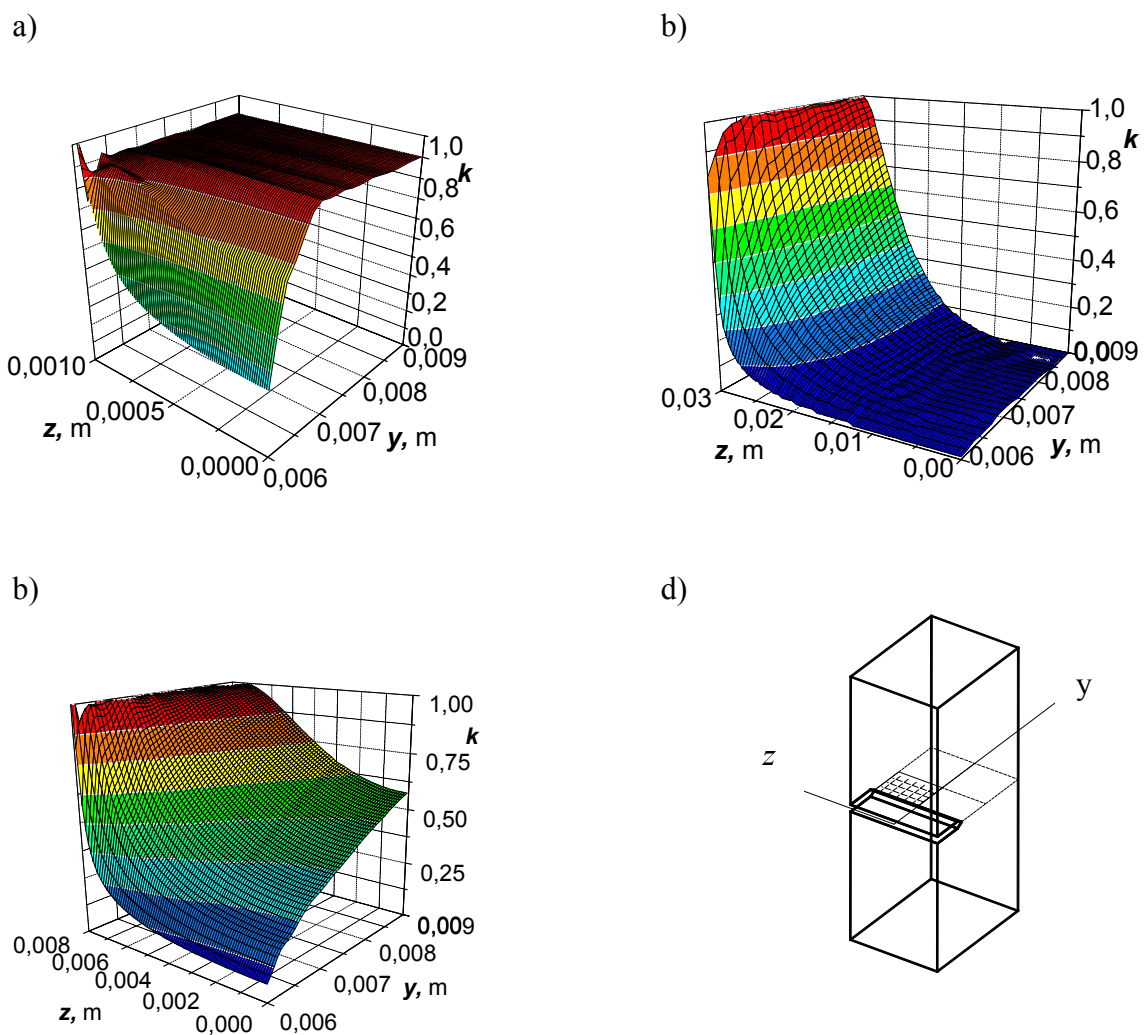


3.12 pav. Deformacijų būvio erdviškumo laipsnio k kitimas plokštumoje xOy ties plokštelės viduriu ($z = 0$): a – plona plokštelė ($B/W = 0,1$), b – vidutinio storio plokštelė ($B/W = 0,8$), c – stora plokštelė ($B/W = 3,0$), d – nagrinėjamo pjūvio padėtis (žr. pastabą prie 3.7 pav.)

Didėjant storiui, tarpinės zonos augimo gradientas taip pat didėja, nors pati zona mažėja. Plonoje plokštelėje ties viduriu vyrauja sąlyginai tarpinis būvis ($k = 0,5$), o artėjant

krašto link, beveik išigalioja plokštuminis įtempimų būvis ($k = 0,99$). Plokštuminis deformacijų būvis ($k = 0,01$) aptinkamas tik labai storose plokštelėse su santykinu storiu ($B/W = 3,0$) ir tik ties plokštelės viduriu. Didėjant plokštelės storiui, sprendinio neapibrėžtumo („singuliari“) zona mažėja.

Deformacijų būvio erdviškumo laipsnio k kitimo priklausomybė nuo koordinačių z ir y pavaizduota 3.12 a pav., sutampa su įtempimų būvio erdviškumo kitimo vaizdu 8 a pav., išskyrus mažą zoną ties įpjova, kur matyti 10 % didesnė reikšmė. Rodiklių kitimas pagal 3.12 b pav. ir 3.8 b pav. sutampa. Analizuojant storą plokštelę, rodiklių kitimas 3.12 c ir 3.8 c pav. plokštelės zonoje nuo $-0,002$ m iki $0,002$ m virš įpjovos sutampa, kitur aiškiai skiriasi. Plokštuminis deformacijų būvis gali būti nagrinėjamas kaip galimų erdvinių būvių riba.



3.13 pav. Deformacijų būvio erdviškumo laipsnio k kitimas įpjovos plokštumoje yOz , ($x = 0$): a – plona plokštelė ($B/W = 0,1$), b – vidutinio storio plokštelė ($B/W = 0,8$), c – vidutinio storio plokštelė ($B/W = 3,0$), d – nagrinėjamo pjūvio padėtis (žr. pastabą prie 3.8 pav.)

Rodiklių kitimas 3.13 pav. ir 3.9 pav. yra priešingas. Didinant storį, erdviųjų būvių zona keičia savo padėtį bei pavidalą (t.y. slenka bei plečiasi). Plonoje plokštelėje deformacijų būvio erdviškumo laipsnis kinta kryptimi aplink Oz ašį, vidutinio storio plokštelėje – jau kryptimi aplink abi (Oz ir Oy) ašis, o storoje plokštelėje – jau tik aplink Oy ašį.

3.3. Būvių erdviškumo vertinimas

Įtempimų ir deformacijų erdviškumo laipsniai (3.1 ir 3.2) nustato, kaip įtempimų ir deformacijų laukai tenkina plokštuminių įtempimų ir deformacijų būvių sąlygą. Kai įtempimų būvis plokštuminis, d lygus nuliui, o kai deformacijų būvis plokštuminis, d lygus vienetui; k lygus nuliui, kai plokštuminis yra deformacijų būvis, k lygus vienetui, kai plokštuminis yra įtempimų būvis.

Akivaizdu, kad tarpinės reikšmės $0 \leq |d| \leq 1, 0 \leq |k| \leq 1$ nurodo erdvinį būvį, kaip tarpinį būvį tarp plokštuminio įtempimų būvio ir plokštuminio deformacijų būvio. Tarpinės reikšmės suprantamos kaip erdviškumo rodikliai.

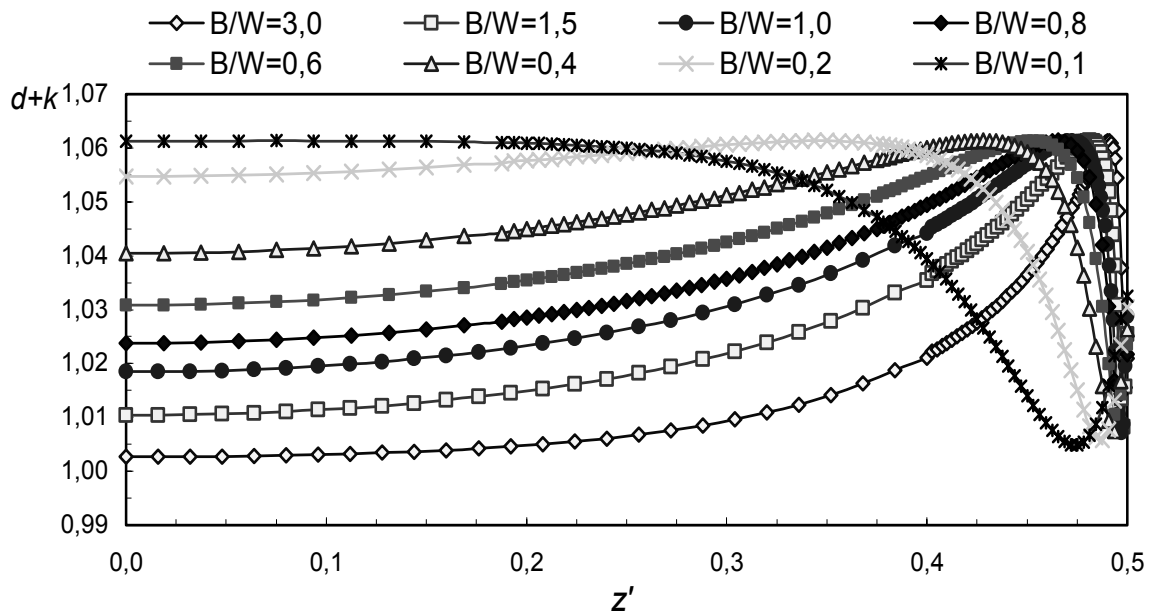
Ekvivalentiškumo sąlygą ribinių erdviųjų būvių atvejais tenkina du erdviškumo rodikliai – įtempimų ir deformacijų erdviškumo laipsniai:

$$k + d = 1. \quad (3.3)$$

Ši lygtis gali būti naudojama kaip trimačio sprendinio erdviųjų rodiklių kokybės indikatorius. Su šia problema taip pat susidūrė Li ir kt. 2000 m. bei Berto ir kt. 2004 m.

Ekvivalentiškumo sąlyga (3.3) buvo išnagrinėta įvairioms storio plokštelėms. Tyrimo rezultatai paaiškinti 3.14 pav. Kreivių pobūdis priklauso nuo plokštelių santykinio storio ir nusakomas perėjimu nuo dominuojančios plokštuminio deformacijų būvio zonos prie plokštuminio įtempimų būvio zonos ties plokštelės kraštu. Erdviškumo rodiklio pobūdis prie plokštelės krašto labai sudėtingas ir gali būti paaiškintas kraštinio sluoksnio efektu.

Skaitiniai sprendiniai (3.14 pav.) rodo, kad ir tarpinėse zonose ši sąlyga apytiksliai tenkinama, ypač esant ribinėms plokštuminio įtempimų ir plokštuminio deformacijų būvių sąlygoms storose plokštelėse ($B/W > 3,0$); visais kitais atvejais skirtumas gali siekti iki 6 %. Erdviškumo tyrimas, taikant du nepriklausomus rodiklius: – deformacijų ir įtempimų būvio erdviškumo laipsnius; parodė, kad rodikliai sparčiai kinta erdvinėje zonoje.



3.14 pav. Reikšmių, tenkinančių ekvivalentiškumo sąlygą, kitimas priklausomai nuo storio

Storose plokštelėse geriausias sutapimas – ties plokštelės viduriu. Artėjant prie krašto, skirtumai didėja. Plonose plokštelėse atvirkščiai: blogiausias rodiklių sutapimas ties plokštelės viduriu ir geresnis artėjant prie krašto.

Ekvivalentiškumo sąlygos analizė padėjo atskleisti abiejų rodiklių prasmę ir erdviškumo įvertinimo sunkumus bei erdviškumo indikatorių tinkamumo problemą. Esmę galima paaiškinti taip: abu rodikliai turi būti traktuojami kaip du ribiniai kintamieji, nustatantys erdviškumo ribas. Todėl įvertinant ekvivalentiškumo sąlygą (3.3), skaičiavimuose buvo taikomi du nepriklausomi būdai bei nagrinėjami jų skirtumai ir netikslumai.

Pateikti grafikai padėjo tik atskleisti esančius iki 6 % skirtumus, tačiau nepadėjo atsakyti į klausimą, kodėl šie skirtumai išnyksta vyraujant plokštuminiam deformacijų būviui ir išauga vyraujant plokštuminiam įtempimų būviui

3.4. Skyriaus rezultatai ir išvados

1. Įtempimų ir deformacijų laukų analizė parodė, kad plokštelės įpjovos pakraštyje yra maža neapibrėžtumo zona. Net su prisitaikančiais tinklais plokštumoje bei reguliariu tinklu storio kryptimi nepavyko išvengti BEM kraštinio efekto įtakos.

2. Įtempimų ir deformacijų būvių erdviškumo rodiklių analizė parodė, kad palyginti storioje ($B/W = 0,8$) trimis taškais lenkiamoje plokštelėje egzistuoja tam tikra erdvių būvių zona ties įpjovos viršūne. Plokštelės centre apie 60 % storio priklauso plokštuminiam deformacijų būviui, o likusi sritis prie krašto yra tarpinė tarp plokštuminio deformacijų būvio ir plokštuminio įtempimų būvio.
3. Didėjant storiui, tarpinės zonos augimo gradientas taip pat didėja, nors pati zona mažėja. Plonoje plokštelėje ties viduriu vyrauja sąlyginai tarpinis būvis ($k = 0,50$), o artėjant link krašto, beveik išgalioja plokštuminis įtempimų būvis ($k = 0,99$). Plokštuminis deformacijų būvis ($k = 0,01$) aptinkamas tik labai storose plokštelėse santykiniam storiui esant ($B/W = 3,0$) ir tik ties plokštelės viduriu. Didėjant plokštelės storiui, sprendinio neapibrėžtumo („singuliari“) zona mažėja.
4. Storose plokštelėse plokštuminis deformacijų būvis nepasiekiamas, pasiekiamas tik sąlygiškai plokštuminis deformacijų būvis. Plokštuminis deformacijų būvis gali būti nagrinėjamas tik kaip erdvinio būvio ribinis atvejis.
5. Abiejų erdviškumo laipsnių ekvivalentiškumas priklauso nuo plokštelių storio.
6. Taikant sudarytą erdvinį baigtinių elementų modelį ir du nepriklausomus rodiklius, skaitiškai ištirtas įtempimų ir deformacijų erdviškumas skirtingo storio plokštelėse. Tyrimai parodė, kad plokštuminis deformacijų būvis susidaro tik storų ($B/W \geq 1,5$) plokštelių vidurinėje zonoje, kitais atvejais susidaro tarpinis erdvinis būvis, o plokštuminis įtempimų būvis susidaro tik atskirose lokaliuose zonose prie laisvojo krašto.
7. Du erdviškumo rodikliai apibrėžia ribines reikšmes, kurios ekvivalentiškos tik esant plokštuminiam deformacijų būviui. Kitais atvejais vertinimai gali skirtis iki 6 %.

4. Įtempimų intensyvumo koeficiento (K) tyrimas

Šis disertacijos skyrius skirtas įtempimų intensyvumo koeficiento analizei trimačio uždavinio atveju. Erdviniams efektams įvertinti pasiūlyta įtempimų intensyvumo koeficiento pataisa, priklausoma nuo plokštelės įtempimų būvio. Teorinė įtempimų intensyvumo koeficiento pataisa gretinama su atliktais tiesioginiais skaitiniais skaičiavimais įvairaus storio plokštelėse, taikant baigtinių elementų metodą. Įtempimų intensyvumo koeficientas nustatomas skaitiniu plokštuminiu metodu, pritaikius poslinkių ir įtempimų ekstrapoliavimo techniką – tokiu būdu erdvinį kūną galima analizuoti kaip atskirų plokščių sluoksnių rinkinį. Teorinis modelis lyginamas su skaitinio eksperimento rezultatais, kuriuos taikant išnagrinėtas koeficiento K kitimas storio kryptimi bei jo priklausomybė nuo plokštelės storio.

4.1. Įtempimų intensyvumo koeficiento K nustatymo trimačiuose uždaviniuose modelis

Tiesinėje irimo mechanikoje visi medžiagos irimo procesai ties plokštelės įpjovos viršūne priklauso nuo įtempimų lauko intensyvumo, apibūdinamo bendru įtempimų pasiskirstymu, kuris išreiškiamas įtempimų intensyvumo koeficientu K kiekvienam plyšio didėjimo atvejui (G.R. Irwin, 1960 m.; P.C. Paris ir G.C.SIH, 1965 m.). Įtempimų laukas charakterizuojamas įtempimų intensyvumo koeficientu K .

Įtempimai plyšio zonoje yra proporcingi koeficientui K , kuris vienareikšmiškai apibrėžia plyšio viršūnės būklę. Šis vieningas plyšio būvio rodiklis yra viena svarbiausių irimo mechanikos sąvokų. Koeficientas K priklauso nuo kūno su plyšiu matmenų, plyšio dydžio ir deformavimo tipo, apkrovos didumo. Jei K žinomas, visus įtempimų, deformacijų bei poslinkių komponentus galima išreikšti kaip koeficiento K ir koordinačių r ir θ funkcijas.

Žinoma, kad dviašiai sprendiniai tinka tik begalinio arba artimo nuliui storio plokštelėms, todėl tiriant baigtinio storio plokšteles, reikia atskleisti erdviškumo rodiklių įtaką įtempimų intensyvumo koeficiento reikšmėms, t.y. nustatyti to koeficiento K vietą ir reikšmes tarp dviejų kraštinių būvių.

Erdviniai efektai plokštelėse nagrinėjami darant prielaidą, kad tai yra tarpinis būvis tarp dviejų kraštinių būvių: plokštuminio įtempimų būvio ir plokštuminio deformacijų būvio.

Erdviškumo įtaką išreiškia vienas įtempimų intensyvumo koeficientas K_{3D} , kurio reikšmė priklauso nuo plokštelės storio, $K_{3D} = K_{3D}(t)$, kur t plokštelės storis. Taikant šią koncepciją erdviniam įtempimų intensyvumo koeficientui, plokštuminis įtempimų intensyvumo koeficientas, pakoreguotas storio pataisa:

$$K_{3D}(t) = K_{2D} \Delta K_{3D}(t), \quad (4.1)$$

čia $\Delta K_{3D}(t)$ atstovauja storio integraliniam erdviškumo rodikliui, o K_{2D} išreiškia įtempimų intensyvumo koeficientą plokštuminio deformacijų būvio atveju.

Plokštuminis deformacijų būvis kaip santykinio įtempimų intensyvumo koeficiento viršutinė riba plokštelėje yra $\Delta K_{3D} = 1$, o plokštuminis įtempimų būvis, kaip apatinė riba, išreiškiamas taip:

$$\Delta K_{3D} = \sqrt{1 - v^2}. \quad (4.2)$$

S.W.Kwon ir C.T.Sun 2000 m. pasiūlė išraišką (4.2) kaip erdviškumo pataisos rodiklį ties plokštelės viduriu. Jų požiūris remiasi prielaida, kad erdvinį įtempimų intensyvumo koeficientą galima įvertinti, taikant pusiau analizines išraiškas. Pataisos koncepcija formuluojama tiesinės irimo mechanikos teorijos ribose.

Taikant efektyviojo tamprumo modulio E_{eff} sąvoką (4.21-4.26), erdvinis (arba trimačius) ryšius tarp įtempimų intensyvumo koeficiento K_{3D} ir atsilaivsinimo energijos kiekio G (Červenka ir Saouma, 1977 m.; Krysl ir Belytchko, 1999 m.), gauname:

$$K_{3D}^2(z) = E_{eff}(z)G. \quad (4.3)$$

Erdvino būvio laipsnio rodikliai d ir k , efektyvusis tamprumo modulis E_{eff} bei irimo parametrai K priklauso nuo plokštelės storio t , todėl $d = d(t, z)$, $k = k(t, z)$, $E_{eff} = E_{eff}(t, z)$ ir $K_{3D} = K_{3D}(t, z)$. Įvedus storio pataisos koncepciją, kuri grindžiama prielaida, kad erdvinis efektus bendrame sluoksnyje su skaičiuojamuoju storio t^* , galima nustatyti ryšį tarp irimo parametrų (4.3):

$$\frac{1}{t^*} \int_{t^*} K^2(t, z) dz = \frac{1}{t^*} G \int_{t^*} E_{eff}(t, z) dz. \quad (4.4)$$

Įvedant:

$$K_{3D}^2(t) = \frac{1}{t^*} \int_{t^*} K^2(t, z) dz, \quad (4.5)$$

čia t^* skaičiuojamasis plokštelės storis.

Įstatčius efektyvųjį tamprumo modulį (4.22 arba 4.23) į lygtį (4.4), gauname:

$$K_{3D}^2(t) = \frac{EG}{1-\nu^2} \left(1 - \nu^2 \frac{1}{t} \int_{t^*} k(t, z) dz \right). \quad (4.6)$$

Pritaikius plokštuminės deformacijos prielaidą, turime:

$$K_{2D}^2 = \frac{1}{1-\nu^2} EG. \quad (4.7)$$

Akivaizdu, kad lygtį (4.5) galima pertvarkyti į nagrinėjamą pataisos išraišką (4.3), kurioje storio pataisos rodiklis yra:

$$\Delta K_{3D}(t) = \sqrt{1 - \nu^2 c(t)}. \quad (4.8)$$

Integraliniam, nuo storio priklausančiam, erdviniam rodikliui skaičiuoti naudojami būvių erdviškumo laipsniai d (3.1) ir k (3.2). Puasono koeficientų įtaką būvio laipsnio rodikliui galima eliminuoti analiziškai, kai plokštumos geometrijos (įskaitant įpjovą arba plyšį) bei apkrovos įtakos reikia nustatyti skaitiškai. Siūlomas integralinis erdvinis rodiklis (pataisos koeficientas) c , priklausantis nuo plokštelės storio t , skirtas skaičiuoti plokštelės irimo rodikliams, atsižvelgiant į būvių erdviškumą

Integralinio erdvinio rodiklio (pataisos koeficiento) išraiška yra:

$$c(t) = \frac{1}{t^*} \int_{t^*} k(t, z) dz. \quad (4.9)$$

Disertacijoje nagrinėjami trys integraliniai erdviniai rodikliai (pataisos koeficientai), priklausomi nuo plokštelės storio. Skaičiuojant integralinio erdvinio rodiklio (pataisos koeficiento) vidurkį $c_{av(t)}$, laikoma, kad plokštelė sudaryta iš vieno sluoksnio ir $t^* = t$:

$$c_{av}(t) = \frac{1}{t} \int_t k(t, z) dz. \quad (4.10)$$

Kai eliminuojame kraštinį t_b storio sluoksnį (neapibrėžtumo zoną), tada $t^* = t - t_b$ ir integralinis erdvinis rodiklis yra:

$$c_{\text{av bl}}(t) = \frac{1}{t - t_b} \int_{t-t_b}^t k(t, z) dz. \quad (4.11)$$

Kai maksimali integralinio erdvinio rodiklio (pataisos koeficiento) c_{max} reikšmė priklauso nuo didžiausių būvio erdviškumo laipsnių, apskaičiuotų nuliniame sluoksnyje z , esant ribai $t^* = \lim_{t \rightarrow 0} t$, tuomet:

$$c_{\text{max}}(t) = k_{\text{min}}(t). \quad (4.12)$$

Praktiškai c_{max} reikšmės būna vidurinėje plokštumoje su koordinate $z = 0$. Integralinis erdvinis rodiklis c toliau taikomas įtempimų intensyvumo koeficiento erdviškumo įvertinimui (nusako viso bandinio sąlyginį būvį).

Teorinio pataisos rodiklio (4.8) realizavimas galimas tik nustačius įtempimų būvio erdviškumo laipsnį d (3.1) arba deformacijų būvio erdviškumo laipsnį k (3.2), o jo galiojimas gali būti patikrintas pagal apskaičiuotus skaitinio eksperimento rezultatus.

4.2. Skaitiniai įtempimų intensyvumo koeficiento nustatymo metodai

Literatūroje galima rasti nemažai *analizinių* ir *skaitinių* metodų įtempimų intensyvumo koeficientui K skaičiuoti. Aktualus uždavinys – šių koeficientų nustatymas *skaitiniais* metodais, nes *analiziniai* metodai taikomi tik ribotais geometrijos, apkrovimo ir kraštinių sąlygų atvejais. Dažniausiai naudojami skaitiniai metodai remiasi *tiesioginiu* poslinkių ekstrapoliavimo metodu. Kitas tiesioginis koeficiento K nustatymo metodas – ekstrapoliavimas iš įtempimų reikšmių. Šis metodas pranašus tuo, kad netaikoma plokštuminio būvio prielaida, tačiau reikia tiksliai nustatyti įtempimus koncentratoriaus zonoje, nes įtempimai ties viršūne singularūs.

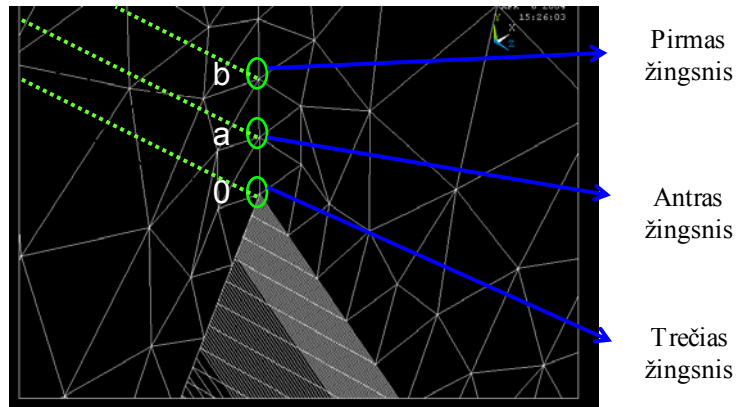
Iš *netiesioginių* poslinkių metodų galima išskirti įtempimų intensyvumo koeficiento nustatymą iš atpalaiduojamos energijos kiekio G arba J -integralo.

4.2.1. Koeficiento K skaičiavimas pagal įtempimus

Įtempimų intensyvumo koeficientui skaičiuoti buvo pritaikytas nesudėtingas *skaitinis* metodas, kai skaičiuojama pagal įtempimus σ_{yy} mazguose virš įpjovos ir

ekstrapoliuojama į plokštelės konцентрatoriaus viršūnę. Šis metodas geras tuo, kad nereikalauja pradinės prielaidos apie plokštelės įtempimų arba deformacijų būvį, vertinant įtempimų intensyvumo koeficientą per bandinio storį.

Kai įtempimų būvis erdvinis, įtempimų intensyvumo koeficientas tiriamas įpjovos viršūnės linijoje kiekviename plokštelės sluoksnyje ir išreiškiamas storio koordinatės funkcija. Kai taikoma plokštuminio būvio prielaida, plokštelė nagrinėjama kaip viengubas sluoksnis, kuriame koeficientas K apskaičiuojamas viena reikšme. Įtempimų ir deformacijų laukai įpjovos zonoje yra artimi plokštuminiam deformacijų būviui.



4.1 pav. Įtempimų intensyvumo koeficiento skaičiavimas pagal įtempimus, taikant ekstrapoliavimo technologiją

Šiame darbe pritaikyta koeficiento K skaičiavimo pagal įtempimus metodika:

- naudojant erdvinio BEM uždavinio rezultatus, sudaroma matrica, kurioje įtempimų komponentas σ_{yy} yra matricos narys su indeksais, žyminčiais mazgo koordinatės x, y, z ;
- virtotojui pasirinkus bet kuriuos mazgus, apskaičiuojamos dvi koeficiento K reikšmės kiekvienam plokštelės sluoksniui (4.1 pav. pirmas ir antras žingsniai):

$$K_{I(a)}^{\sigma}(z) = \sigma_{yy(a)} \sqrt{2\pi r_{(0a)}} / \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (4.13)$$

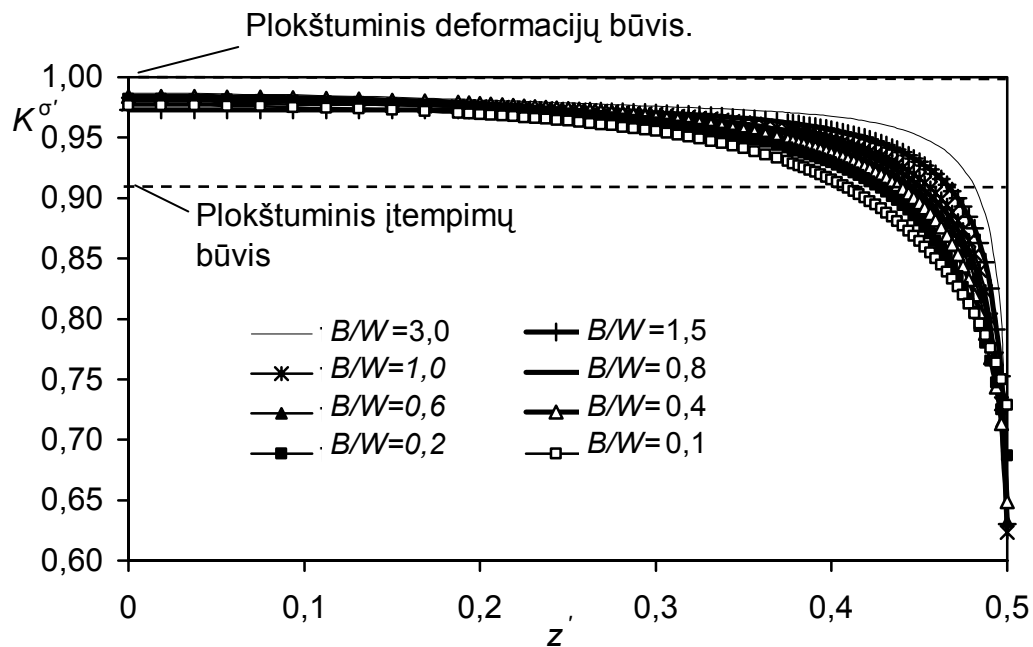
$$K_{I(b)}^{\sigma}(z) = \sigma_{yy(b)} \sqrt{2\pi r_{(0b)}} / \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (4.14)$$

čia $\sigma_{yy(a)}$ – įtempimai virš įpjovos taške a , $\sigma_{yy(b)}$ – įtempimai virš įpjovos taške b , $r_{(0a)}$ – atstumas nuo įpjovos viršūnės iki taško a , $r_{(0b)}$ – atstumas nuo įpjovos viršūnės iki taško b , θ – atskaitos kampas ($^\circ$);

c) taikant ekstrapoliavimo metodiką kiekvienam sluoksniui koeficiento K reikšmė ekstrapoliuojama į plokštelės įpjovos viršūnę (4.1 pav. trečias žingsnis) :

$$K_{I(1)}^{\sigma}(z) = K_{I(a)} - ((K_{I(b)} - K_{I(a)}) / (r_{(0b)} - r_{(0a)})) \cdot r_{(0a)}. \quad (4.15)$$

Gaunama serija koeficiento K reikšmių, kurių kiekviena K reikšmė įpjovos viršūnėje atitinka vieną plokštelės sluoksnį. Pagrindinis šio metodo trūkumas - reikia geros kokybės tinklo ties įpjova bei tiksliai apskaičiuotų įtempimų reikšmių.



4.2 pav. Santykinis įtempimų intensyvumo koeficientas K' , apskaičiuotas pagal įtempimus ties santykinėmis storio koordinatėmis $z' = z/t$ įvairaus storio plokštelėse

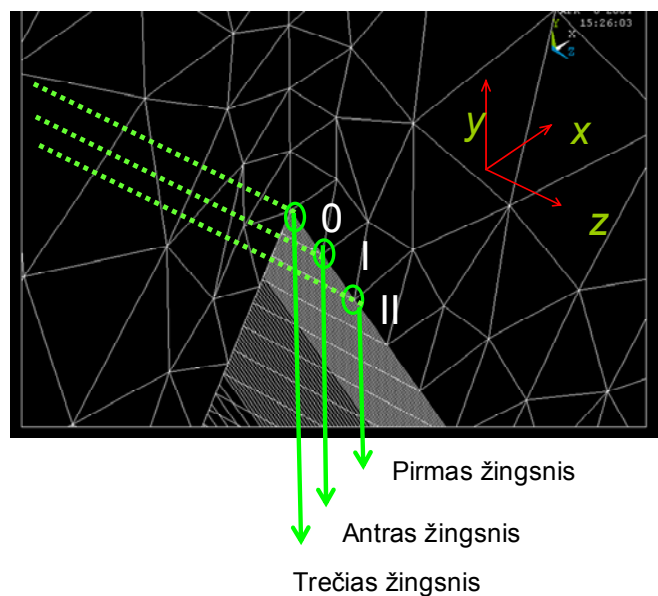
Erdvinio koeficiento K analizei buvo spręsti du plokštuminiai uždaviniai, kurie parodo erdvinį uždavinių vietą tarp plokštuminių uždavinių. Jų sprendiniai parodyti punktyrinėmis linijomis (4.2 pav.). Nė viena koeficiento K reikšmė iš plokštelių rinkinio nepasiekia plokštuminio deformacijų būvio. Santykinio plokštuminio būvio zonoje koeficientų K skirtumai įvairaus storio plokštelėse siekia iki 2 %. Erdvinėje zonoje pastebimas didesnis koeficiento K reikšmių išsibarstymas – iki 15 %; ties kraštu reikšmės praktiškai sutampa.

Reikėtų atskirai pažymėti inžinerinių uždavinių rezultatų palyginimo su kitų autorių rezultatais problemą. Kadangi lyginti galima tik tuos rezultatus, kurie gauti taikant vienodą apkrovimo schemą ir sąlygas, įvedamas bematis koeficientas $K' = K / K_0$ su keliais įtempimų intensyvumo koeficiento K_0 normalizavimo variantais. Panašią bedimensinę konstantą K' rezultatų palyginimui naudojo T.L.Anderson 1995 m. ir A.Y.T.Leung 1995 m., J. T. Martin 1996 m. bei B. Yang 1999 m.

Įtempimų intensyvumo koeficientui K normalizuoti kiekviena reikšmė atidalinama iš plokštuminio deformacijų būvio sprendinio $K' = K / K_{2D}$.

4.2.2. Koeficiento K skaičiavimas pagal poslinkius

Taikant poslinkių metodą, įtempimų intensyvumo koeficiento K reikšmės buvo skaičiuotos žemiau įpjovos kiekviename BE mazge pagal storio koordinatę z ir ekstrapoliuotos iš dviejų mazgų į viršūnę. Taip skaičiuojant, tenka nagrinėti kiekvieno plokštelės sluoksnio plokštuminį būvį.



4.3 pav. Įtempimų intensyvumo koeficiento skaičiavimas iš poslinkių, taikant ekstrapoliavimo metodiką

Rezultatams patikrinti bei palyginti atliktas koeficiento K skaičiavimas pagal BE mazgo poslinkius:

a) naudojant erdvinio BEM uždavinio rezultatus, sudaroma matrica, kurioje poslinkių komponentas u_{xx} yra matricos narys su indeksais, žyminčiais mazgo koordinatės x, y, z ;

b) vartotojui pasirinkus norimus ir tinkamus BE mazgus, apskaičiuojamos dvi koeficiento K reikšmės kiekvienam plokštelės sluoksniui (4.4 pav. pirmasis ir antrasis žingsniai):

$$K_{I(II)}^u(z) = (2 \cdot u_{xx(II)} \cdot \mu) / \sqrt{\frac{r_{(0-II)}}{2\pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(\kappa_{(IIeff)} + 1 - 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right), \quad (4.16)$$

$$K_{I(I)}^u(z) = (2 \cdot u_{xx(I)} \cdot \mu) / \sqrt{\frac{r_{(0-I)}}{2\pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(\kappa_{(Ieff)} + 1 - 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right), \quad (4.17)$$

čia u_{xxI} – įpjovos mazgo I poslinkis, u_{xxII} – įpjovos mazgo II poslinkis, $r_{(0-I)}$ – atstumas nuo įpjovos viršūnės iki (I) taško, $r_{(0-II)}$ – atstumas nuo įpjovos viršūnės iki (II) taško, θ – atskaitos iki įpjovos kampas, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = const$ šlyties modulis, $\kappa_{(Ieff)}$ – bandinio efektyvusis rodiklis, atsižvelgiantis į sluoksnio būvį ties tašku (I), $\kappa_{(IIeff)}$ – medžiagos efektyvusis rodiklis, atsižvelgiantis į sluoksnio būvį ties tašku (II);

c) taikant ekstrapoliavimo metodiką kiekvienam plokštelių sluoksniui koeficiento K reikšmė ekstrapoliuojama į plokštelės įpjovos viršūnę (4.3 pav. trečiasis žingsnis).

$$K_{I(I)}^u(z) = K_{I(II)} - ((K_{I(II)} - K_{I(I)}) / (r_{(0-II)} - r_{(0-I)})) \cdot r_{(0-I)}. \quad (4.18)$$

Gaunama serija koeficiento K reikšmių, kurių kiekviena K reikšmė linijoje, įpjovos viršūnėje atitinka vieną plokštelės sluoksnį. Pagrindinis šio metodo trūkumas – sudėtinga nustatyti $\kappa_{(eff)}$ – bandinio efektyvųjų rodikli, įvertinantį sluoksnio būvį.

Klasikinėje literatūroje koeficientas K pagal poslinkius skaičiuojamas tik plokštuminio būvio atvejais, kai plokštuminis įtempimų būvis:

$$\kappa_{pi} = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad (4.19)$$

$$\kappa_{pd} = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu, \quad (4.20)$$

kur plokštuminis deformacijų būvis: λ – Lamé koeficientas, ν – Puasono koeficientas.

Plokštei siūlomas erdvinį būvį vertinantis rodiklis κ_{eff} , kuris priklauso nuo efektyvaus tamprumo modulio bei Puasono ir Lamé koeficiento:

$$\lambda_{eff} = \frac{E_{eff} \cdot \nu_{eff}}{(1 + \nu_{eff})(1 - 2\nu_{eff})}. \quad (4.21)$$

Taikant tamprumo teorijos metodologiją ir efektyviąją, nuo padėties priklausomą tamprumo konstantos koncepciją, erdvinį būvį įpjovos viršūnėje galima transformuoti į santykinai (kvazi) plokštuminį, įvedant nuo įtempimų arba deformacijų būvio efektyviosios tamprumo konstantos priklausančią sąvoką. Tos konstantos kitimą išilgai įpjovos fronto lemia vienas kintamasis – būvio erdviškumo laipsnis d arba k .

Efektyvusis tamprumo modulis yra konstanta, priklausoma nuo plokštelės storio koordinatės z . Kaip efektyvusis medžiagos plokštelės storio rodiklis konstanta gali būti išreikšta vienu parametru – erdvinio būvio laipsniu. Efektyvusis tamprumo modulis E_{eff} išreiškiamas 4.4 pav., taikant d laipsnį (įvedant pirmos eilės Teiloro eilutės skaidymą):

$$E_{eff}(z) = E \frac{1}{1 - \nu^2 d(z)}, \quad (4.22)$$

arba k laipsniu:

$$E_{eff}(z) = E \frac{1}{1 - \nu^2 k(z)}. \quad (4.23)$$

Erdviniam būviui galioja išraiška:

$$E_{eff} = E \left(\frac{1}{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{1 + \nu} \cdot \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}} \right), \quad (4.24)$$

kuri pasiūlyta Cherepanovo 1979 m. Ribiniams būviams (4.22-4.23) formulės transformuojamos taip:

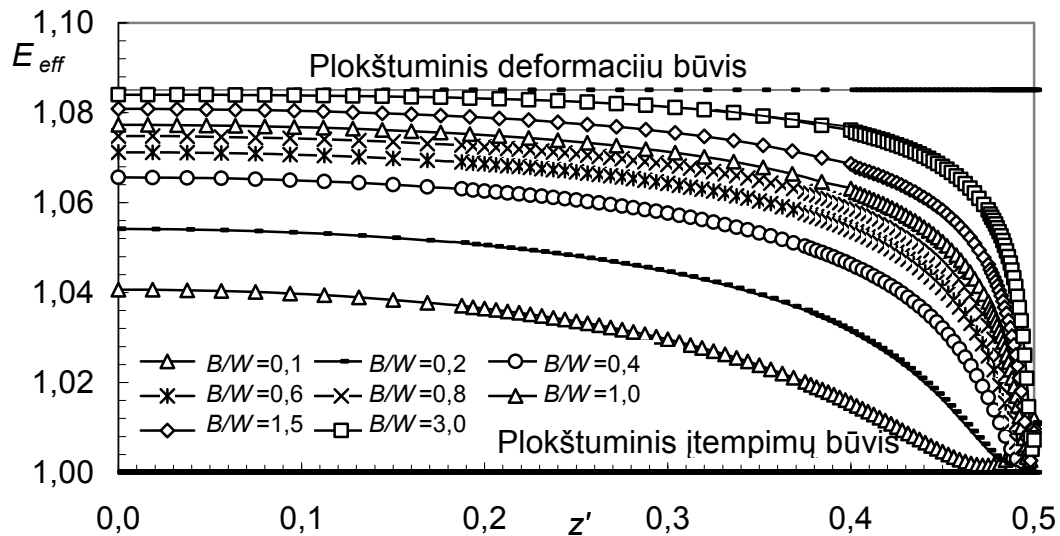
a) plokštuminiam įtempimų būviui

$$E_{eff} = E; \quad (4.25)$$

b) plokštuminiam deformacijų būviui

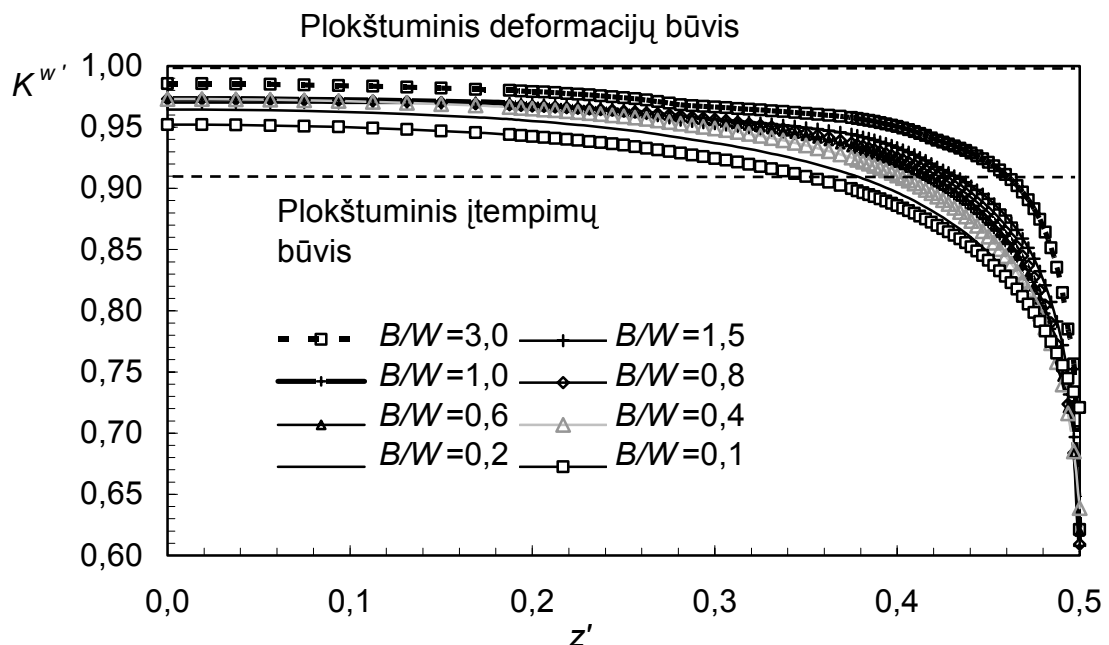
$$E_{eff} = E / (1 - \nu^2). \quad (4.26)$$

Efektyvusis tamprumo modulis išreiškiamas įtempimų būvio arba deformacijų būvio rodikliais, kurie transformuoja erdvinį įtempimų būvį įpjovos viršūnėje į sąlygiškai plokštuminį. Panašios išraiškos gali būti gautos, taikant Puasono arba Lame konstantas.



4.4 pav. Efektyviojo tamprumo modulio E_{eff} kitimas storio kryptimi z' įvairaus storio plokštelėse

Santykinio efektyviojo tamprumo modulio kitimas, kai $E' = E_{eff} / E$, parodytas 4.4 pav. Efektyvusis tamprumo modulis naudojamas skaičiuojant įtempimų intensyvumo koeficientus pagal mazgų poslinkius. Taikant aptartą metodiką bei formules (4.7–4.17), buvo gautas santykinis koeficiento K reikšmių pasiskirstymas įvairaus storio plokštelėse (4.5 pav.).



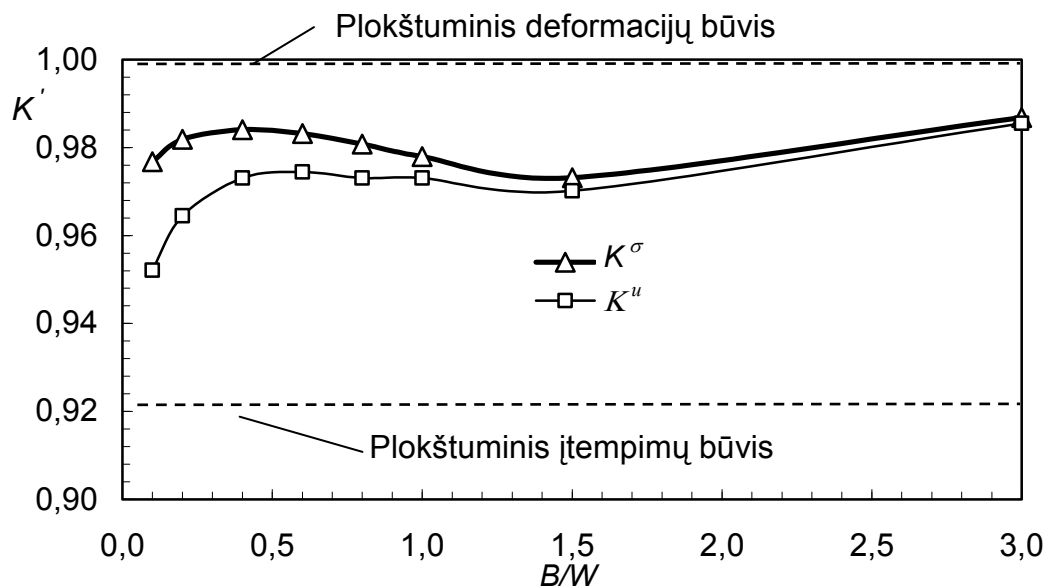
4.5 pav. Santykinis įtempimų intensyvumo koeficientas K' apskaičiuotas pagal poslinkius ties santykinėmis storio koordinatėmis z/t įvairaus storio plokštelėse

Koeficiento K reikšmių skirtumai ties plokštelės viduriu siekia iki 4 %, erdvinio būvio zonoje – iki 12 %, o ties plokštelės kraštu reikšmės sutampa.

4.2.3 Metodų palyginimas

Šiame poskyryje pateikiamas abiejų skaitiškai nustatytų koeficientų palyginimas: santykinio įtempimų intensyvumo koeficiento K^{σ} , apskaičiuoto pagal įtempimus (4.2 pav.), ir santykinio įtempimų intensyvumo koeficiento K^w , apskaičiuoto pagal poslinkius (4.5 pav.).

Lyginant 4.5 pav. ir 4.2 pav., koeficientas K , apskaičiuotas pagal poslinkius, turi didesnę tendenciją sparčiau mažėti artėjant prie plokštelės krašto. Tai lemia integruoto įtempimų intensyvumo koeficiento K' priklausomybę nuo santykinio plokštelės storio (4.6 pav.).



4.6 pav. Integruoto įtempimų intensyvumo koeficiento K' priklausomybė nuo santykinio plokštelės storio B/W

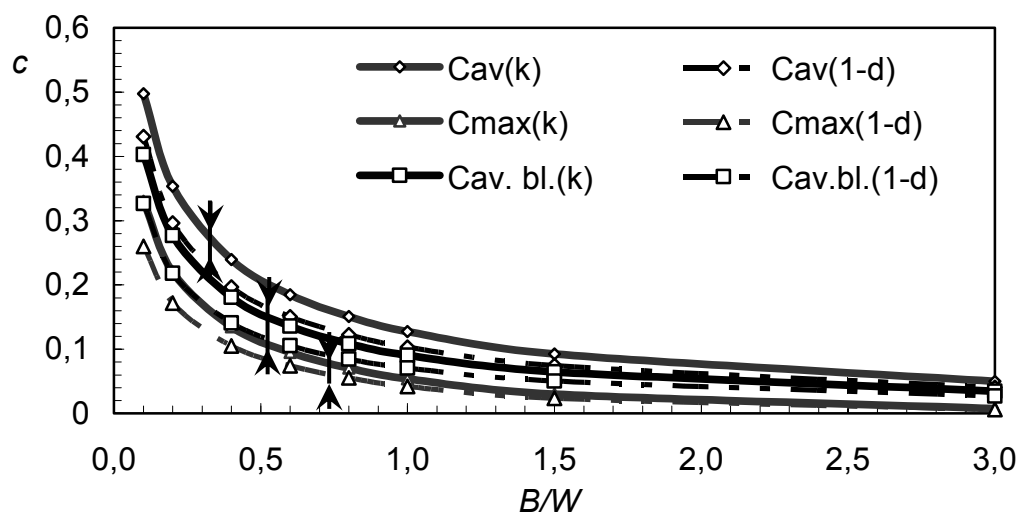
Tiriant plokštelės storio įtaką įtempimų intensyvumo koeficientui, suintegruotos visų storių abejais metodais skaitiškai gautos kreivės (4.2 pav. ir 4.5 pav.). Pastebėta, kad plonose plokštelėse integruotas įtempimų intensyvumo koeficientas K' artėja prie nulio. Kai santykis B/W apie (0,5), kreivė pasiekia bangos maksimumą, toliau lėtai mažėja iki $B/W=1,5$, o vėliau artėja prie plokštuminių deformacijų būvio storose plokštelėse. Kreivė, gauta integruojant įtempimų intensyvumo koeficientą, apskaičiuotą

pagal įtempimus, parodo erdvinio poveikio viršutinę ribą. Remiantis šio lyginimo rezultatais, vėlesniuose plokštelės storio įtakos tyrimuose apsiribota koeficiento K skaičiavimu pagal įtempimus.

4.3. Rezultatų analizė

Rezultatų analizė skiriama teorinio erdvinio modelio palyginimui su skaitinio eksperimento rezultatais bei storio įtakai nagrinėti. Analizuojant ankstesnių skyrių rezultatus, nustatytas ryšys tarp erdvinio ir plokštuminių (dviašių) irimo kriterijų. Pasiūlyta skaičiuojamojo storio korekcijos pataisa plokštuminiams įtempimų intensyvumo koeficientui, skirta baigtinio storio kūnams su koncentratoriumi. Siūlomas sprendimo kelias buvo pritaikytas modeliuojant pirmos irimo formos trijų taškų lenkiamos plokštelės irimo rodiklius skirtinguose storuose.

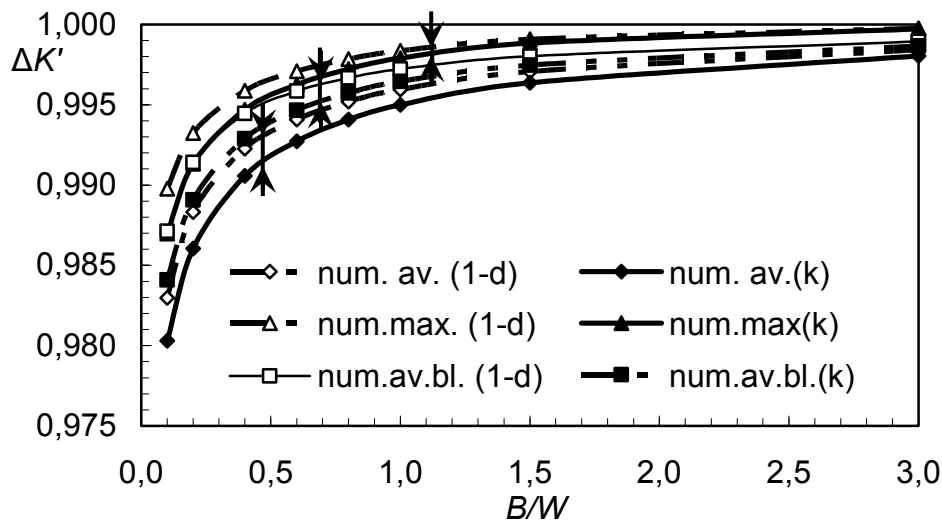
Kaip matyti iš išraiškos (4.8), trimatė įtempimų intensyvumo koeficiento pataisa $\Delta K'_{3D}$ išreiškiama priklausančiu nuo storio pataisos koeficientu $c(t)$, nustatomą integruojant erdviškumo rodiklį k . Pirmiausia tikrinama erdviškumo rodiklių k ir d įtaka koeficientui c , kuris gali būti apskaičiuotas tiesiogiai įstačius į (4.10) formulėje gautas k reikšmes arba reikšmes, apskaičiuotas iš įtempimų laukų per ekvivalentiškumo sąlygą (3.3). Palyginimo rezultatai įvairių storių plokštelėse pateikti (4.7 pav.), dydžiai c_{av} , $c_{av.bl.}$, ir c_{max} apskaičiuoti pagal (4.9; 4.10; 4.11).



4.7 pav. Integralinio erdvinio rodiklio c kitimas, priklausomai nuo santykinio plokštelės storio

Gautos c reikšmės panaudotos įtempimų intensyvumo koeficiento tyrimui. Taip gauto erdvinio pataisos rodiklio kitimai, priklausomi nuo plokštelės storio, pavaizduoti 4.8 pav.. Pasiūlyta integralinė išraiška lyginama su plokštuminio deformacijų būvio prielaida $\Delta K_{3D} = 1$. Teorinės reikšmės, esant storai plokštei, artėja prie plokštuminio deformacijų būvio, o plonose plokštelėse plokštuminis įtempimų būvis nepasiekiamas.

Skaitinio pataisos rodiklio vidurkio $\Delta K_{3D \text{ av num}}(t)$ reikšmės įmanoma apskaičiuoti integruojant $\bar{K}(t, z)$ per storį $t^* = t$, taikant (4.5) lygtį. Didžiausias skaitinio pataisos rodiklio maksimumo $\Delta K_{3D \text{ max num}}(t)$ reikšmės galima apskaičiuoti iš $K_{3D}(t)$ reikšmių ties vidurinės plokštelės plokštuma, kai koordinatė $z = 0$. Skaitinio pataisos rodiklio su eliminuota neapibrėžtumo zona $\Delta K_{3D \text{ av.bl.num}}(t)$ reikšmės apskaičiuojamos integruojant $\bar{K}(t, z)$ per storį $t^* = t - t_b$.



4.8 pav. Teorinio integralinio pataisos rodiklio $\Delta K'_{3D}$ priklausomybė nuo santykinio plokštelės storio B/W

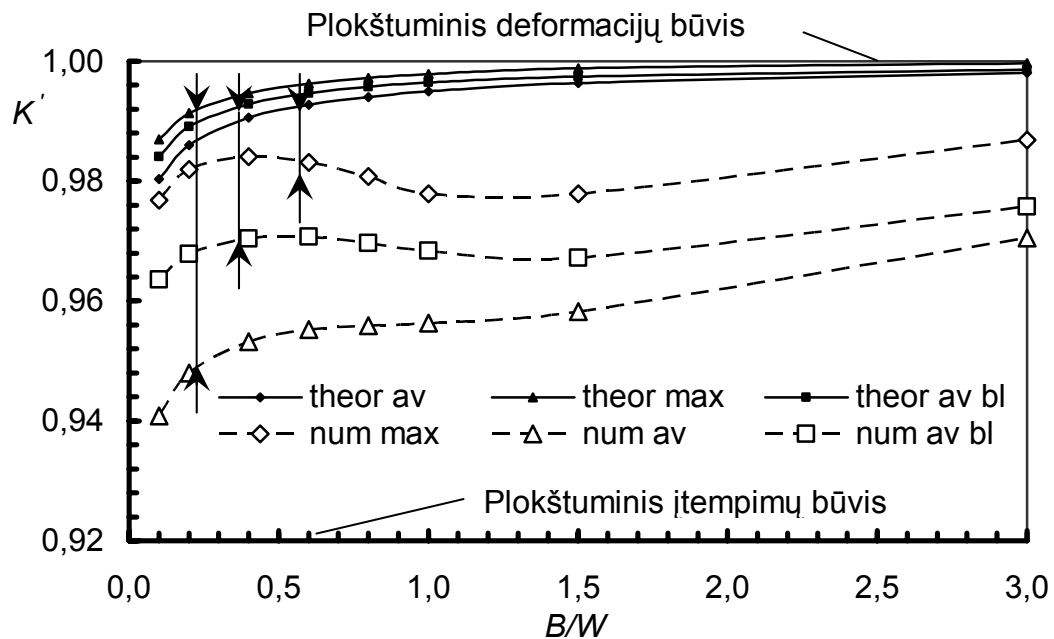
Nagrinėjamų pataisos išraiškų palyginimas su tiesioginiais BEM rezultatais parodytas (4.9 pav.). Apskaičiuotas deformacijos būvio laipsnio rodiklis k , naudojant (3.2) lygtį, geriau tinka skaitinio eksperimento rezultatams. 4.9 paveiksle nagrinėjama įtempimų intensyvumo koeficiento teorinė pataisa, kuri iliustruoja nuo storio priklausančius erdvinis efektus.

Ši pataisa gali būti nagrinėjama kaip viršutinė įvertinimo riba, mažinanti klasikinį plokštuminių deformacijų būvio apribojimą $\Delta K_{3D} = 1$ iki 2 % plonoms plokštelėms

($B/W = 0,1 \div 0,4$) (4.9 pav.). Skirtumai tarp pataisos koeficiento maksimumų ir vidurkių nereikšmingi.

Skaitiškai gauta pataisa gali būti traktuojama kaip apatinė įvertinimų riba, didinanti plokštuminių įtempimų būvio įvertinimą (4.7) ir mažinanti klasikines ribas. Pataisos vidurkis pagerina apatinę ribą iki 4 %, o pataisos maksimumas didina iki 6 %.

Gauti rezultatai (4.9 pav.) parodo nepastovumą, atsirandantį vidutinio storio ($0,8 \leq B/W \leq 1,0$) plokštelėse. Analizuojant rezultatus, iškyla klausimas apie šių nesutapimų priežastį. Bandant atsakyti į šį klausimą, išanalizuota kraštinio sluoksnio įtaka rezultatams. Įtempimų intensyvumo koeficiento reikšmės ties plokštelės kraštu kerta plokštuminių įtempimų ribą. Be to, tiriamojo kraštinio sluoksnio storis skirtingas, gretinant su rezultatais, gautais taikant erdvinio būvio laipsnio rodiklius. Tai patvirtina kitų autorių teiginiai, kad erdvinio būvio kraštinio sluoksnio zonoje negalima traktuoti kaip paprasto perėjimo nuo plokštuminės deformacijos būvio prie plokštuminių įtempimų būvio.

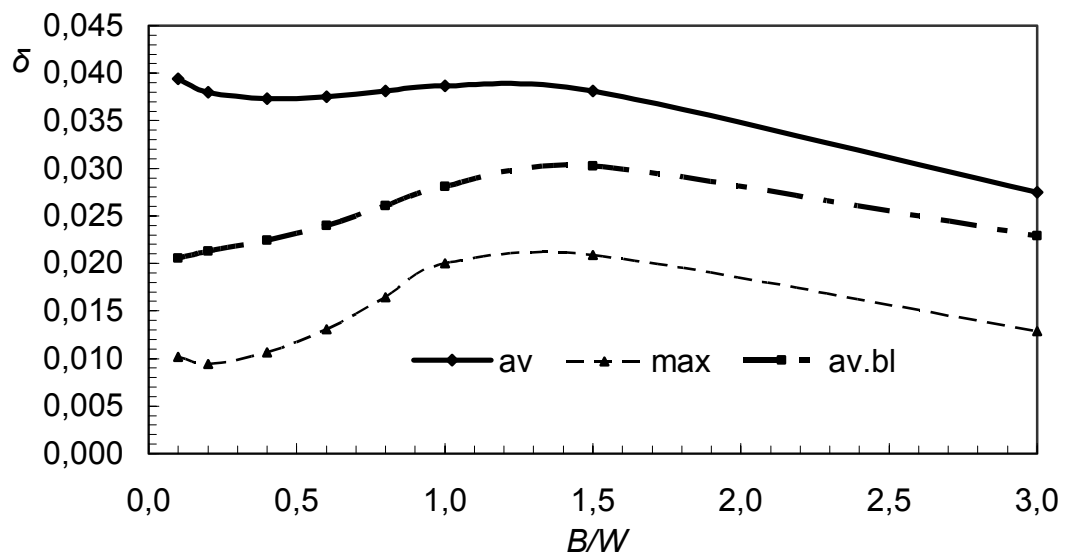


4.9 pav. Pasiūlytos įtempimų intensyvumo koeficiento pataisos palyginimas su tiesioginio modeliavimo rezultatais

Tariama, kad kraštinė zona apibūdinama plokštuminio būvio reikšmėmis, absoliutusias ir santykinis kraštinės zonos ties laisvuju paviršiumi dydžiai apskaičiuoti pagal 4.2 pav. ir parodytas 4.11 ir 4.12 pav.

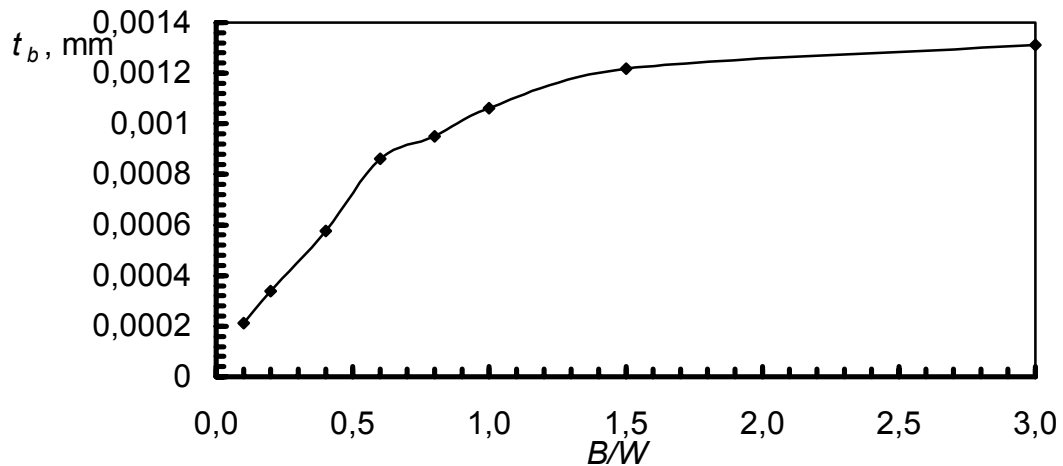
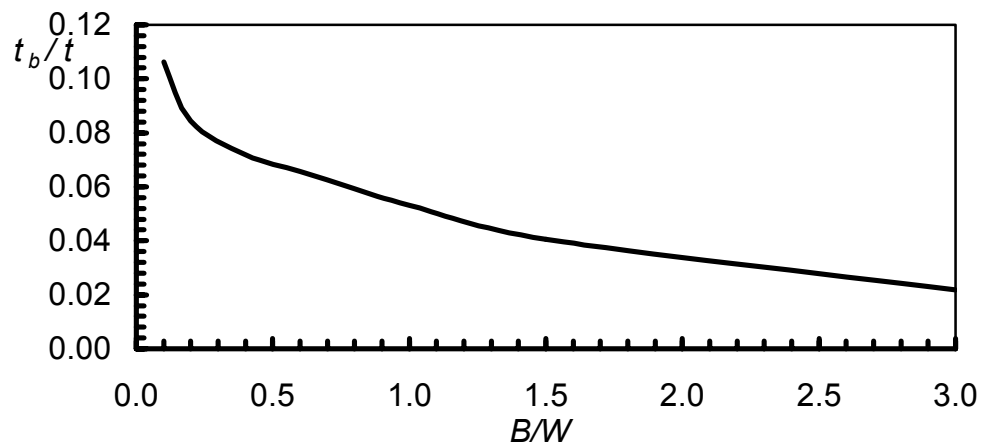
Varijuojamų pokyčių pobūdis atskleidžia įtempimų intensyvumo koeficiento elgesį (4.9 pav. ir 4.10 pav.). S.W.Kwon ir C.T.Sun 2000 m. teigia, kad kraštinio sluoksnio efektas ypač pastebimas vidutinio storio plokštelėse, todėl atsirado idėja apskaičiuoti vidutinę pataisą, nepaisant kraštinės zonos efekto. Žinant, kad kraštinio sluoksnio t_b reikšmės skaitiškai gautos pagal 4.11 pav., pataisos vidurkio reikšmės $c_{av.bl}(t)$ palygintos su 4.7 pav.

Skirtumai tarp teoriškai išnagrinėtos ir skaitiškai apskaičiuotos aproksimacijų $\delta = \Delta K_{3D\text{ theor}}(t) - \Delta K_{3D\text{ num}}(t)$ parodyti 4.10 pav. Parametras δ išreiškia neapibrėžtumų ribą. Ši riba varijuoja 3–4 % zonoje pataisos vidurkiui ir 1–2 % zonoje pataisos maksimumui.



4.10 pav. Pasiūlyto santykinų įtempimų intensyvumo koeficiento pataisos skirtumų palyginimas su tiesioginio modeliavimo rezultatais

Gauti nauji rezultatai, atsižvelgiant į kraštinio sluoksnio dydį tarp didžiausios ir vidurinės reikšmės, kai jų vertės atitinka didžiausią įvertinimą. Kraštinio sluoksnio įtakos anuliavimas leidžia netiesiogiai įrodyti jo poveikį įtempimų intensyvumo koeficiento kontūro pokyčiams, kai aptartas vidurkio pataisos rodiklis (4.11 pav.), atsižvelgiant į kraštinį sluoksnį, gali būti nagrinėjamas kaip tinkamiausias integralas storio įvertinimui.

4.11 pav. Absoliutinio kraštinės zonos dydžio t_b priklausomybė nuo santykinio storio B/W 4.12 pav. Santykinio kraštinės zonos dydžio t_b/t priklausomybė nuo santykinio storio

Įrodyta, kad irimo rodiklių faktinis kitimas išilgai įpjovos frontui prognozuojamas pagal erdvinio būvio laipsnio variaciją, kai erdvinė pataisa plokštuminiam įtempimų intensyvumo koeficientui aprašoma integruotomis būvio laipsnio vertėmis.

4.4. Skyriaus rezultatai ir išvados

1. Taikant skaičiavimą pagal įtempimus įtempimų intensyvumo koeficiento reikšmių skirtumai santykinio plokštuminio būvio zonoje iki 2 %; erdvinėje zonoje pastebimas didesnis išsibarstymas – iki 15 %; ties kraštu reikšmės iš esmės sutampa.

2. Taikant skaičiavimą pagal poslinkius įtempimų intensyvumo koeficiento reikšmių skirtumai ties plokštelės viduriu siekia 4 %, erdvinio būvio zonoje skirtumai iki 12 %, ties plokštelės kraštu reikšmės sutampa.

3. Apibūdinta plokštelės storio įtaka įtempimų intensyvumo koeficientų reikšmėms. Gauta, kad plonose plokštelėse integruotas įtempimų intensyvumo koeficientas mažėja. Kai santykis B/W apie (0,5), kreivė pasiekia maksimumą, toliau lėtai mažėja iki $B/W = 1,5$ ir toliau didėjant B/W , artėja prie plokštuminio deformacijų būvio storose plokštelėse.

4. Tyrimais įrodyta, kad įtempimų intensyvumo koeficientas kinta plokštelės storio kryptimi (išilgai įpjovos fronto). Naudojant integralines koeficientų reikšmes, jis gali būti prognozuojamas pagal siūlomų erdviškumo rodiklių kitimą.

5. Pasiūlytu pataisos koeficientu, priklausančiu nuo plokštelės storio, galima patikslinti plokštelės plokštuminių irimo rodiklių skaičiavimus, taip atsižvelgiant į būvių erdviškumą.

6. Darbe pasiūlyta erdviškumą įvertinanti įtempimų intensyvumo koeficiento pataisa yra viršutinė įvertinimo riba, mažinanti klasikinį plokštuminių deformacijų būvio apribojimą $\Delta K_{3D} = 1$ iki 2 % plonoms plokštelėms ($B/W = 0,1 \div 0,4$). Skirtumai tarp pataisos koeficiento maksimumų ir vidurkių mažareikšmiai. Skaitiškai gauta įtempimų intensyvumo koeficiento pataisa gali būti traktuojama kaip apatinė plokštuminių įtempimų būvio riba, siaurianti klasikinį intervalą tarp ribų. Pataisa pakelia apatinę ribą iki 2–6 %.

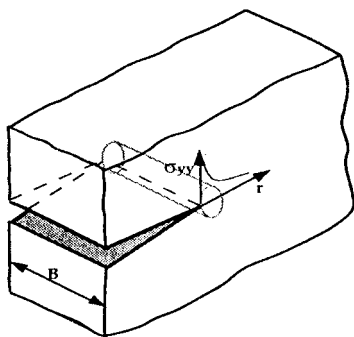
7. Teoriškai gautas įtempimų intensyvumo koeficientas įvertinamas, taikant pataisą dėl erdviškumo yra viršutinė šio koeficiento riba. Esant plonoms plokštelėms, kai B/W kinta nuo (0,1) iki (0,4), šis teorinis įvertis patvirtintas skaitinio eksperimento rezultatais, kadangi rezultatų skirtumai neviršija 2 %. Esant vidutinio storio plokštelėms, kai B/W kinta nuo (0,4) iki (1,0) ir storoms plokštelėms, kai B/W daugiau už (1,0), šis skirtumas išaugo iki 7 %. Tokio neatitikimo priežastį lemia kraštinio sluoksnio įtaka.

5. Tampraus - plastinio deformavimo modeliavimas

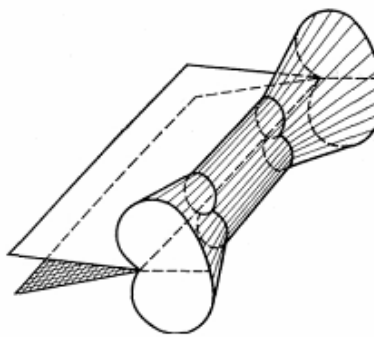
5.1. Netiesinio uždavinio formulavimas

Plokštelės analizei taikomi netiesinės irimo mechanikos dėsniai, nustatomas plastinės srities, susidarančios įpjovos viršūnėje, dydis, savybės, tos srities pokytis plyšiui plintant. Nagrinėtas kvazitąsus irimas, kai plastinės srities dydis įpjovos viršūnėje prilyginamas įpjovos dydžiui, o nominaliniai įtempimai σ pjūvyje viršija takumo įtempimą, $\sigma \geq \sigma_o$, nes tiesinės irimo mechanikos dėsniai efektyviai taikomi, kai $\sigma \leq 0,8\sigma_o$. Tarpinėje srityje galima taikyti abi teorijas. Pusiau empirinio pobūdžio prielaidos ir pataisos padeda sukurti plyšio plitimo modelį, tačiau realaus irimo proceso neatspindi. Įtempimų būvio erdviškumo įtaka yra vienas iš nepakankamai ištirtų irimo mechanikos uždavinių.

a)



b)



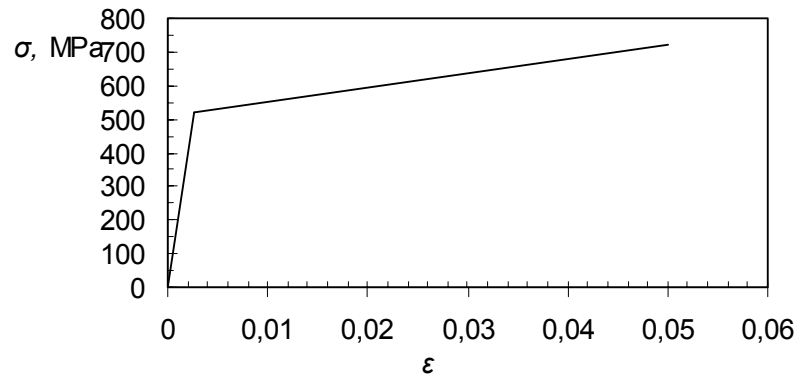
5.1 pav. Plastinės zonos forma: a – pagal T.Anderson, 1993 m.; b – D.Broek, 1974m.

Klasikinėje literatūroje siūloma prielaida, kad plastinė zona storio kryptimi nekinta (5.1 a pav.) arba kinta tiesiškai – nuo plokštuminio įtempimų būvio ties kraštu iki plokštuminio deformacijų būvio ties plokštelės viduriu (5.1 b pav.). Taikant baigtinių elementų metodą, naudojant prisitaikančiųjų BE tinklą plokštumoje ir reguliarių tinklą storio kryptimi (aprašytus 2 skyriuje), buvo išspręstas fiziškai netiesinis uždavinys, ir jo rezultatai parodė, kad plastinės zonos kitimo pobūdis žymiai sudėtingesnis.

Pagrindinis šio skyriaus tikslas – ištirti erdvinėje lenkiamoje plokštelėje su įpjova erdviškumo įtaką, kuri įvertinama erdviškumo būvio laipsniu, išanalizuoti plastinės zonos kitimą virš plokštelės įpjovos ir nustatyti įtempimų intensyvumo koeficiento K kitimą storio kryptimi virš įpjovos fronto, atsižvelgiant į plastinės zonos kontūro įtaką.

Analizuojant literatūrą ir gautus tampraus uždavinio rezultatus, buvo nustatyta, kad erdviniai efektai labiausiai pasireiškia vidutinio storio plokštelėse ($B/W = 0.8$), todėl buvo

pasirinkta nagrinėti vidutinio storio plokštelė, kurios medžiaga sustiprėja pagal tiesinį dėsnį. Plokštelės plokštuminė geometrija tokia pat, kaip ir tiesinio sprendinio; geometrija ir apkrovimo sąlygos bei tamprus skaičiavimo rezultatai buvo pateikti 2 skyriuje.



5.2 pav. Medžiagos įtempimų – deformacijų diagrama

Išorinis apkrovimas užduotas kontroliuojamu vertikaliu kvazistatiniu poslinkiu U ($U_{max} = 0,22$ mm), kuris kinta nustatytais užduotais prieaugiais. Žingsnių poslinkis kinta prieaugiais, storis išreikštas santykiniais vienetais. Medžiagos tamprumo modulis $E = 200$ MPa, Puasono koeficientas $\nu = 0,28$ (kaip ir 2 skyriuje). *Netiesinio* uždavinio atveju medžiagos elgsena virš takumo įtempimo $\sigma_0 = 520$ MPa kinta pagal tiesinį sustiprėjimo dėsnį, santykis $\sigma_0 / E = 1 / 500$, ribiniai įtempimai $\sigma_I = 600$ MPa. Santykinė storio koordinatė išreiškiama $t(z) = z/B$.

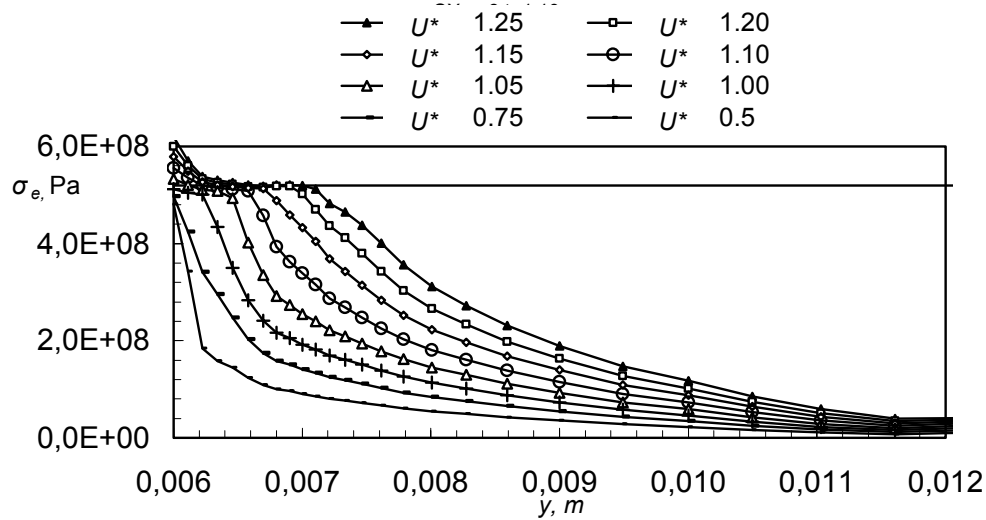
Skaičiavimas universaliu programų paketu ANSYS buvo atliktas 2 etapais: 1) tamproje stadijoje, kai Mizeso funkcijos įtempimai $\sigma < 520$ MPa, 2) kai Mizeso funkcijos įtempimai $520 < \sigma < 720$ MPa. Abiejuose etapuose skaičiavimai buvo atliekami su 116319 baigtinių elementų ir 65286 mazgų tinklu.

Izotropinėms vienalytėms plastiškoms medžiagoms taikoma energijos formos pokyčio teorija, vadinama Mizeso kriterijumi (Hill R., 1956 m.):

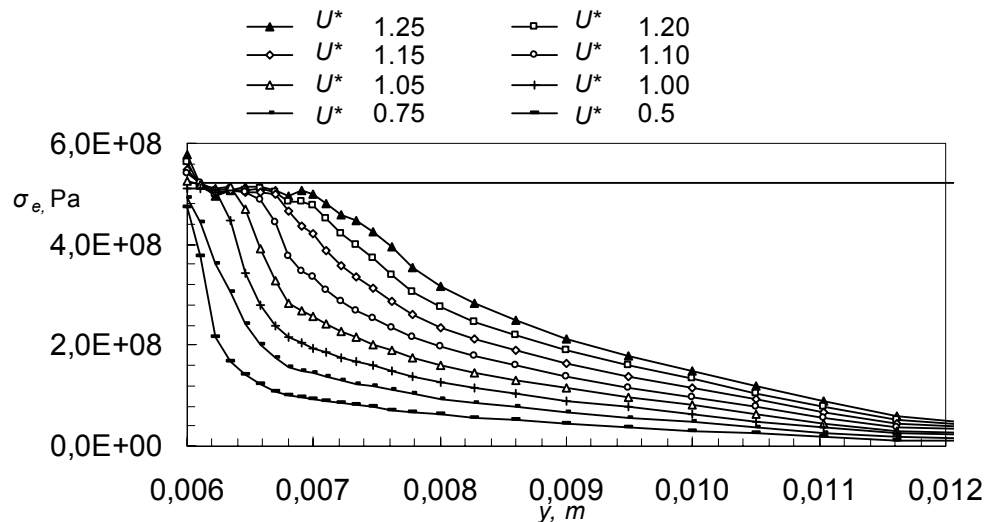
$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 2\sigma_e^2 \quad (5.1)$$

Netiesinio uždavinio rezultatų patikrinimui apskaičiuota Mizeso įtempimų funkcija ir nubraižyta 5.3 paveiksle. Poslinkis išreikštas sąlyginiais vienetais U^* (sąlyginis vertikalus poslinkis $U^* = 1,00$ atitinka takumo pradžią, o U_{max} atitinka $U^* = 1,25$).

a)



b)



5.3 pav. Mizeso įtempimų funkcijos reikšmių išsidėstymas: a) išorinėje xy plokštumoje pagal y ašį; b) centrinėje xy plokštumoje pagal y ašį

Mizeso įtempimų funkcijos reikšmių grafikai kerta horizontalią takumo pradžios liniją $\sigma_e = 520$ MPa, kai sąlyginis poslinkis $U^* \geq 1,00$ (5.3 pav.). Labiausiai šis efektas pasireiškia išorinėje plokštumoje, bet analizuojant 5.3 ir 3.5 grafikus kartu matyti, kad Mizeso įtempimų funkcija pasiekia maksimumą ne ties plokštelės kraštu ar centru, o maždaug per $1/8$ plokštelės storio.

Tampraus - plastinio kūno uždaviniai: kvazitriapiam irimui G. Irvinas, 1957 m. pasiūlė pataisą, leidžiančią atsižvelgti į plastines deformacijas. Įtempimų būvis plyšio viršūnėje,

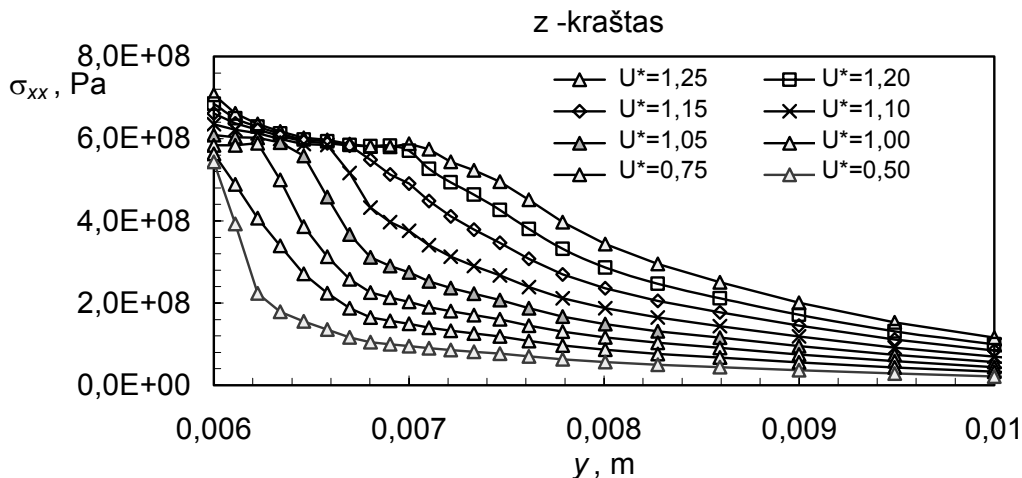
padidinus plyšio ilgį dydžiu r_p , pritaikius tiesinės irimo mechanikos modelį, inžineriniams skaičiavimams plastinės srities dydis imamas toks:

$$r_p = \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{K_c}{\sigma_y} \right)^2, \quad (5.2)$$

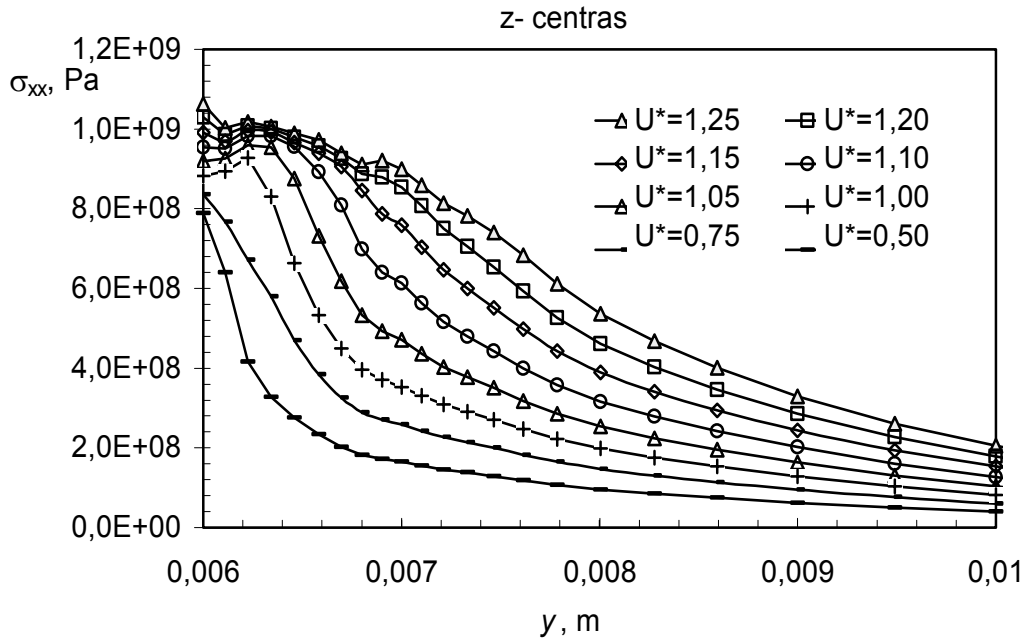
čia $n = 1$ plokštuminiam įtempimų būviui, $n = 3$ plokštuminiam deformacijų būviui.

5.2. Įtempimų tyrimas

Išsprendus netiesinį uždavinį, buvo gauti tempimų laukų pasiskirstymai ties įpjovos viršūne ir palyginti tarpusavyje su literatūroje pateikiamais sprendiniais (jų prielaidos ir sprendimo metodika aprašyti 1 poskyryje). Pažymėtina, kad kaip ir tiesinės irimo mechanikos uždaviniuose, įtempimų komponento „singularumas“ atsiranda tiek ties įpjovos ir laisvojo paviršiaus susikirtimo vieta, tiek ties visa įpjovos fronto linija. Pagal tiesinę irimo mechaniką, kai $r \rightarrow 0$, abiem ribinių būvių atvejais viršūnės zonoje gaunami begaliniai įtempimai. Bet atsiradus didelėms deformacijoms, įpjovos viršūnė suapvalėja, todėl įtempimai ties įpjovos viršūne dėl plastinės zonos sumažėja. Analizės uždaviniuose, kur pasiekiamas HRR (Hutchinson, Rice ir Rosengren) ypatingasis būvis, neatsižvelgiama arba į įpjovos viršūnės apvalėjimą, arba į dideles deformacijas įpjovos viršūnės zonoje. Tokia analizė remiasi mažų deformacijų teorija, kuri yra daugiaašis tempimo bandymo deformacijų atitikmuo. Mažų deformacijų teorija nebegalioja, kai deformacijos viršija maždaug 0,10 (10 %).

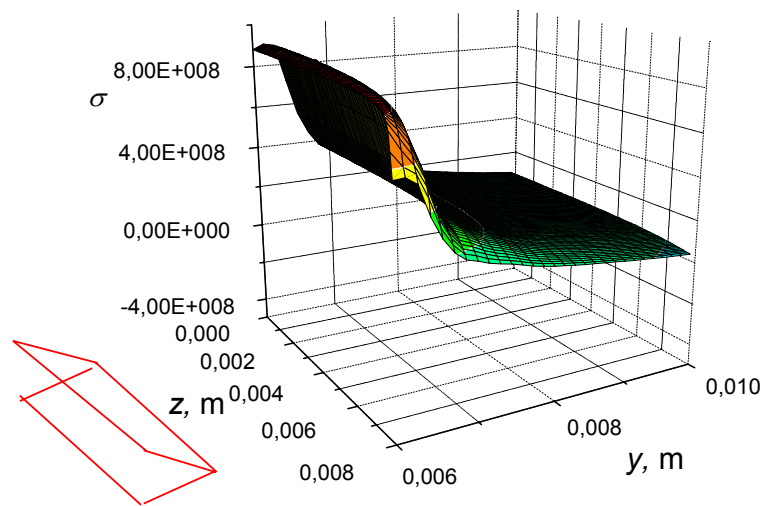


5.3 pav. Įtempimų komponentės virš įpjovos reikšmės ties plokštelės kraštu palei Oy ašį įvairių apkrovų atvejais

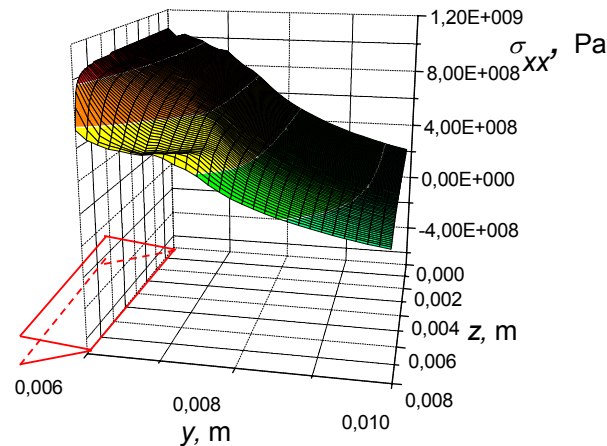


5.4 pav. Įtempimų σ_{xx} komponentės virš įpjovos reikšmės ties plokštelės viduriu palei Oy ašį įvairių apkrovų atvejais

Iš rezultatų matyti, kad įtempimų grafikas plokštelės įpjovos viršūnėje didelės apkrovos atveju užsilenkia į apačią (5.3 ir 5.4 pav.). Todėl, net ir taikant Irvino pataisą, įtempimų intensyvumo koeficiento K skaičiavimo metodas pagal įtempimus netinkamas. Tolimesniems koeficiento K skaičiavimams pasirinktas įtempimų intensyvumo koeficiento pagal poslinkius skaičiavimo metodas.



5.5 pav. Įtempimų reikšmės virš įpjovos, kai sąlyginė apkrova $U^* = 1,00$



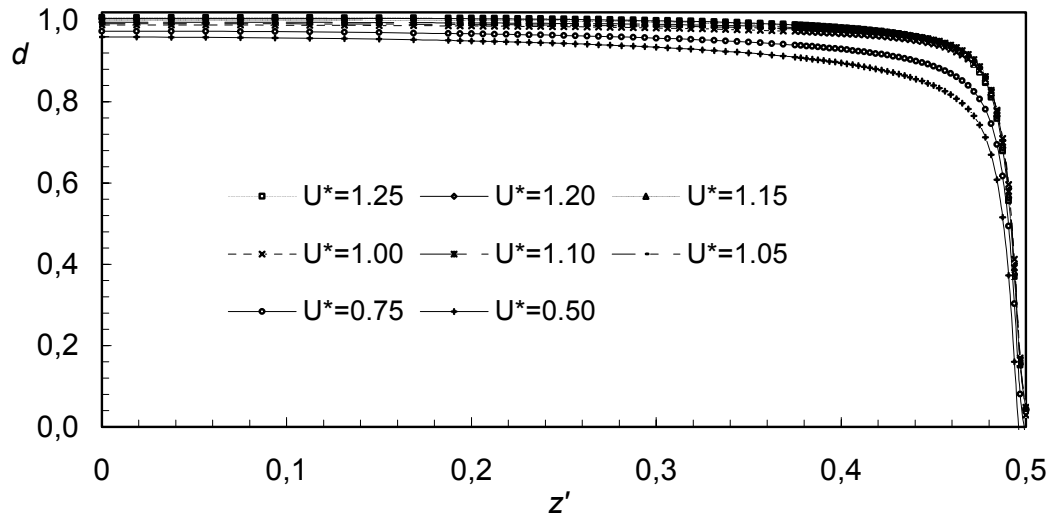
5.6 pav. Įtempimų reikšmės virš įpjovos, kai sąlyginė apkrova $U^* = 1,25$

5.5 ir 5.6 paveikslai vaizduoja įtempimų kitimą didinant išorinę apkrovą (5.5 pav. rodo įtempimų reikšmes tampriojoje stadijoje, esant didžiausiai apkrovai; 5.6 pav. – netiesinėje stadijoje). Lyginant abu paveikslus, netiesinėje stadijoje pastebimas įtempimų kitimas prie įpjovos fronto linijos, lauko išsitiesinimas Oy ašies kryptimi ir didėjantis grafiko užlenkimas prie laisvojo paviršiaus.

5.3. Įtempimų būvio erdviškumas

Įtempimų būvio erdviškumo laipsnis d įvertina plokštelės įtempimų būvį. Kai d lygus 0, egzistuoja plokštuminis įtempimų būvis, kai jis lygus 1, egzistuoja plokštuminis deformacijų būvis (žr. 3 skyrių).

Įtempimų būvio erdviškumo laipsnis apskaičiuotas pagal (3.1) formulę. Skaičiavimai parodė, kad plastinės deformacijos stadijoje, didinant apkrovą, įtempimų būvio erdviškumo laipsnis d artėja prie vieneto beveik per visą ilgį ir tik prie krašto staigiai pereina prie reikšmių, artimų nuliui. Įtempimų būvio erdviškumo laipsnio reikšmės plokštelėje, esant skirtingoms sąlyginės apkrovos U^* reikšmėms, parodytos 5.7 paveiksle.

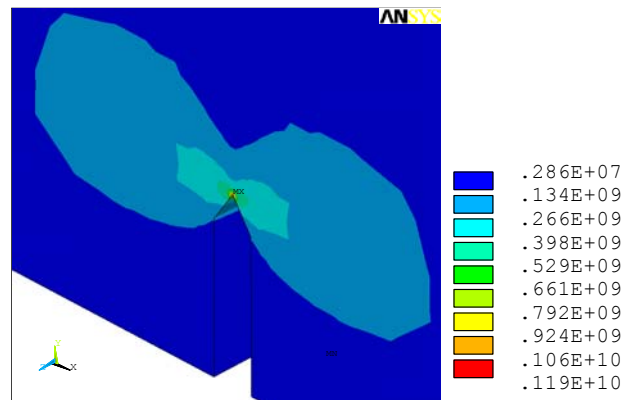


5.7 pav. Įtempimų būvio erdviškumo laipsnio reikšmės per plokštelės storį, esant skirtingoms apkrovoms

Tampriojoje stadijoje didinant apkrovą, įtempimų būvio erdviškumo laipsnis tolygiai didėja, pereinant į plastinę stadiją – iš esmės nesikeičia. Apskaičiuotas įtempimų būvio erdviškumo laipsnis parodo, kad netiesinėje stadijoje praktiškai visur, išskyrus mažą kraštinę zoną, pasiekiamas plokštuminis deformacijų būvis, todėl įtempimų intensyvumo koeficiento virš įpjovos skaičiavimams galima taikyti plokštuminio deformacijų būvio formules.

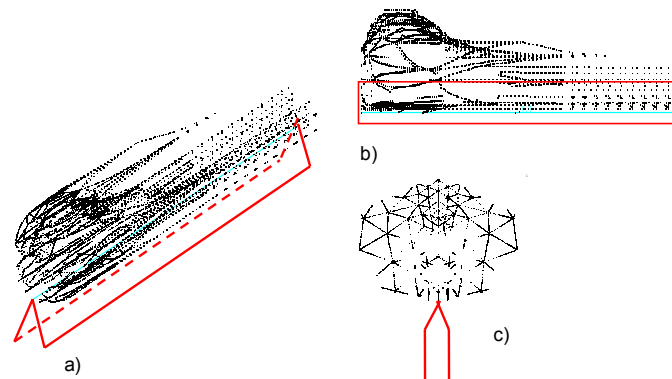
5.4. Erdvinio tampriai–plastinės zonos kontūro nustatymas

Plastinės zonos išplitimas žymia dalimi veikia įtempimų būvio erdviškumą, tačiau jos pavidalas ir įtaka dar nėra gerai išnagrinėti (5.1 pav.). Plastinės zonos kontūrą žymi taškai, kuriuose Mizeso įtempimų funkcijos reikšmė lygi takumo įtempimui.



5.8 pav. Mizeso įtempimų funkcijos reikšmių išsidėstymas zonoje išorinėje xOy plokštumoje prie įpjovos

Mizeso įtempimų funkcijos reikšmių zona, parodyta 5.8 paveiksle ir yra panaši į 5.1 b paveikslo vaizdą. Analizuojant plokštelės modelio mazguose Mizeso įtempimų funkcijos lauko reikšmes po kiekvieno apkrovos pokyčio, buvo atrinkti baigtinių elementų mazgai, tarp kurių yra taškas su reikšme, kuri lygi takumo įtempimui σ_0 (nes mazge į vieną pusę nuo to taško reikšmė didesnė už σ_0 , o į kitą pusę – mažesnė). Taikant interpoliavimo metodiką, buvo nustatytos tikros taško su σ_0 koordinatės po kiekvieno apkrovos pokyčio.

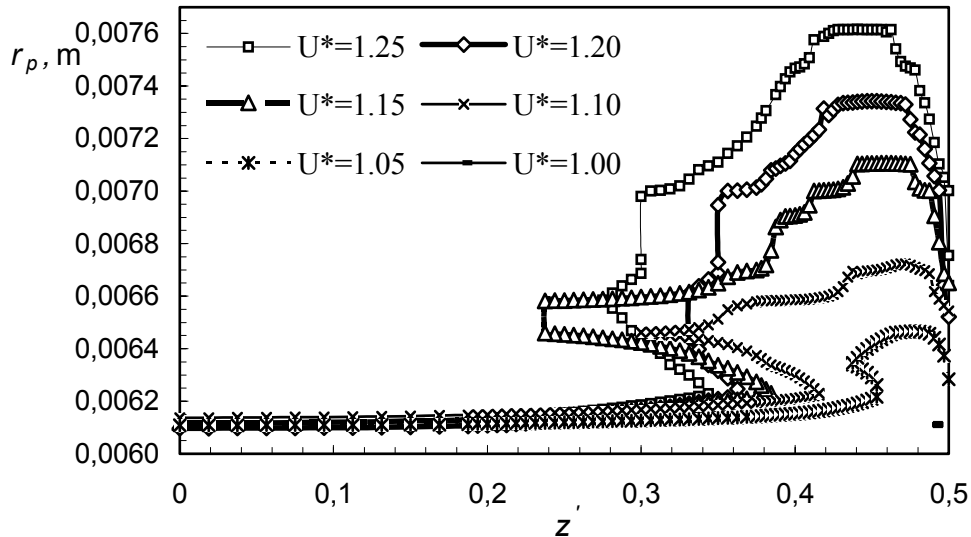


5.9 pav. Plastinės zonos kontūro taškų koordinatės: a) – erdvinis vaizdas, b) – vaizdas iš šono, c) – vaizdas iš priekio

Taikant anksčiau aptartą metodiką ir jos pagrindu autoriaus sukurta programą, sudarytas 5.9 paveikslas, rodantis plastinės zonos pradžios bei pabaigos koordinatas, kai santykinė išorinė apkrova $U^* = 1,25$. Programa nustato plastinės zonos koordinatas, nes

Vladislav Žarnovskij. Disertacija: Įtempimų būvio erdviškumo įtakos plokštelių su įpjova įtempimų intensyvumo koeficientui skaitinis tyrimas

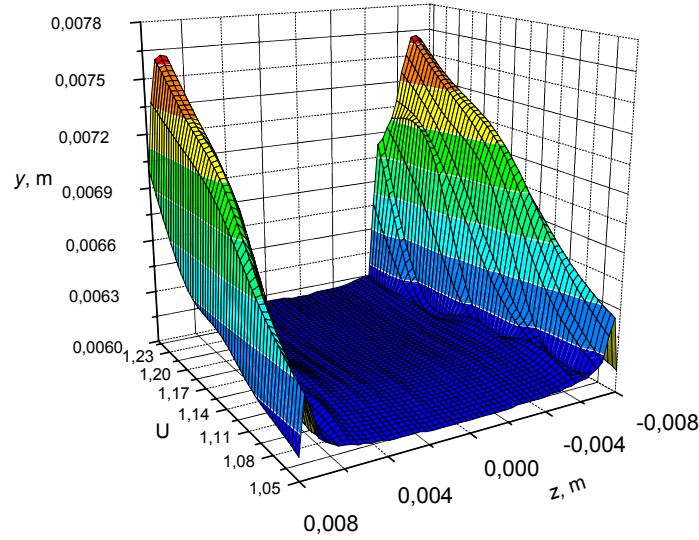
standartiniai paketai duoda šias reikšmes Gauso integralo taškuose, ir vartotojui nustatyti kontūro formą tik iš pjūvių vaizdų yra gana sudėtinga. Išorinės sąlyginės apkrovos poveikiui nagrinėti 5.10 pav. nubraižytas plastinės zonos fronto augimo laukas aplink įpjovą per visą plokštelės storį.



5.10 pav. Plastinės zonos formos virš įpjovos per plokštelės storį įvairių apkrovų atvejais

Skaičiavimai parodė, kad labiau apkraunant plokštelę, plastinė zona išsidėsto koncentruotai arti laisvojo krašto, ir jos kontūras tarp plokštelės vidurio ir išorinės plokštumos nėra tiesus kaip schematiškai vaizduojama klasikinėse studijose. Netiesi plastinė zona prie plokštelės krašto praplatėja nuo 0,1 iki 0,2 plokštelės santykinio storio.

Naudojant 5.10 paveikslo kontūro koordinatų didžiausias reikšmes, 5.11 pav. vaizduojama, kaip plastinės zonos kontūro forma kinta didinant išorinę apkrovą. Plastinė zona prie plokštelės kraštų plečiasi ir pagal Oz , ir pagal Oy ašį į plokštelės gilumą. Apkrovai padidėjus 20 %, netiesios plastinės zonos gylis prie krašto padidėja 3 kartus (nuo 0,4 mm iki 1,2 mm), o plotis - 2 kartus (nuo 2,0 mm iki 4,0 mm).

5.11 pav. Plastinės zonos kontūras zOy pjūvyje virš įpjovos įvairių apkrovų atvejais

5.5. Įtempimų intensyvumo koeficientas

Įtempimų intensyvumo koeficientai buvo skaičiuojami pagal formules (4.4, 4.5, 4.6) plokštuminio deformacijų būvio atveju, kai medžiagos efektyvusis rodiklis κ_{Ieff} lygus:

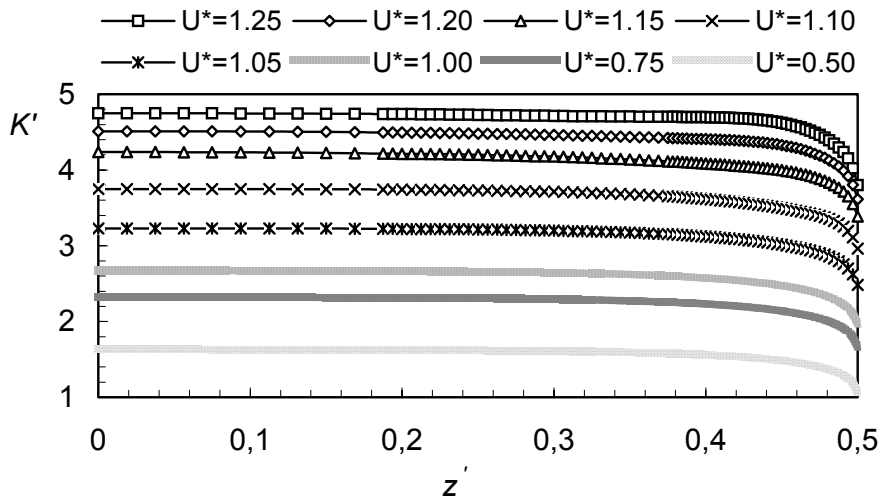
$$\kappa_{pd} = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu. \quad (5.3)$$

Priklausomai nuo apkrovos kitimo buvo sudaryti šių koeficientų grafikai (5.12 pav.), kur tampruminio uždavinio rezultatai buvo palyginti su tamprios-plastinės stadijos uždavinio rezultatais (5.13 pav.). Gauti skaitiniai rezultatai palyginti su analizinio sprendinio rezultatais. Rezultatai buvo normalizuojami taikant trijų taškų lenkiamos plokštelės teorinę plokštuminę deformaciją K_I nurodytą (ASTM E399) standarte. Standarte siūloma išraiška:

$$K_Q = \frac{P_Q S}{B W^{\frac{3}{2}}} \frac{3 \left(\frac{a}{W} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1.99 - \left(\frac{a}{W} \right) \left(1 - \frac{a}{W} \right) \left(2.15 - 3.93 \frac{a}{W} + 2.7 \frac{a^2}{W^2} \right) \right]}{2 \left(1 + \frac{2a}{W} \right) \left(1 - \frac{a}{W} \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad a/W \leq 1, \quad (5.4)$$

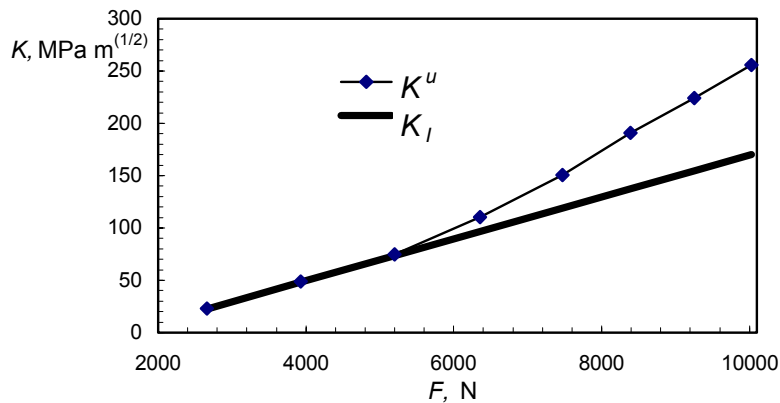
kur K_Q – lenkiamo bandinio įtempimų intensyvumo koeficientas ($\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$), P_Q – išorinė apkrova, B – plokštelės storis, S – atstumas tarp atramų, W – plokštelės aukštis, a – įpjovos gylis.

Žinant plokštelės įpjovos poslinkius, taikant ekstrapoliavimo metodiką, buvo apskaičiuotos santykinio koeficiento K reikšmės palei plokštelės storį, kintant išorinei apkrovai.



5.12 pav. Plokštelės įtempimų intensyvumo koeficiento reikšmės per plokštelės storį, esant skirtingoms apkrovoms, $K' = K^u / K_l$.

Plastinės zonos įtaka koeficientui K parodyta 5.13 pav.: didėjant plastinei zonai, koeficientas K^u kinta sparčiau, negu tampriojoje stadijoje K_l .



5.13 pav. Įtempimų intensyvumo koeficiento K kitimas, keičiant apkrovą

Nustatytos įtempimų intensyvumo koeficiento reikšmės virš įpjovos fronto ir plastinės deformacijos zonos įtaka koeficientui K . Padidėjus apkrovai 2 kartus, koeficientas K dėl plastinių deformacijų taip pat padidėja apie 3,5 karto.

5.6. Skyriaus išvados

1. Sukurtasis būdas erdviniam plokštelės modeliui sudaryti, suderinantis nestruktūrinius tinklus plokštumoje ir struktūrinius tinklus plokštelės storio kryptimi, tinka irimo mechanikos erdviniams sudėtingos struktūros uždaviniams spręsti. Tai rodo tikrinamųjų testų analizė.

2. Tampriojoje stadijoje didinant apkrovą, įtempimų būvio erdviškumo laipsnis tolygiai didėja, o perėjus į plastinę stadiją, praktiškai nesikeičia. Apskaičiuotas įtempimų būvio erdviškumo laipsnis rodo, kad netiesinėje stadijoje beveik visur, išskyrus mažą kraštinę zoną, pasiekiamas plokštuminis deformacijų būvis, todėl įtempimų intensyvumo koeficiento virš įpjovos skaičiavimams galima taikyti plokštuminio deformacijų būvio formules.

3. Didinant išorinį apkrovimą, plastinė zona erdvinėje plokštelėje susikoncentruoja prie laisvojo krašto, praplatėja nuo $0,1 z/B$ iki $0,2 z/B$, jos kontūras nėra tiesus, kaip schematiškai vaizduojama klasikinėse studijose.

4. Nustatytos įtempimų intensyvumo koeficiento reikšmės virš įpjovos fronto ir plastinės deformacijos zonos įtaka koeficientui K . Padidinus apkrovą 2 kartus, įtempimų intensyvumo koeficiento grafiko netiesinė dalis sumažėja apie 50 %. Dėl plastinių deformacijų apkrovai padidėjus 2 kartus, koeficientas K padidėja apie 3,5 karto.

Išvados ir rezultatai

1. Erdvinis įtempimų ir deformacijų būvis deformuojamoje plokštelėje modeliuojamas, pritaikius originalų sukurtąjį algoritmą ir kompiuterines technologijas. Tai rodo tikrinamųjų testų analizė. Originalių algoritmų panaudojimas įgalina pritaikantįjį baigtinių elementų tinklą naudoti rodiklių nustatymui fiksuotuose erdvinės plokštelės storio taškuose.
2. Taikant sudarytą erdvinį baigtinių elementų modelį ir du nepriklausomus rodiklius, skaitiškai ištirtas įtempimų ir deformacijų erdviškumas skirtingo storio plokštelėse. Tyrimai parodė, kad plokštuminis deformacijų būvis susidaro, kai santykinis plokštelių storis B/W viršija 1,5, kitais atvejais susidaro tarpinis erdvinis būvis, o plokštuminis įtempimų būvis susidaro tik atskirose lokaliuose zonose prie laisvojo krašto.
3. Būvių erdviškumą apriboja du rodikliai, kurių ribinės reikšmės ekvivalentiškos tik esant plokštuminio deformacijų būvio atveju. Kitais atvejais rodiklių reikšmės gali nukrypti iki 6 %.
4. Erdvinės plokštelės įtempimų intensyvumo koeficiento kitimo per plokštelės storį pobūdis priklauso nuo jos storio. Kai plokštelės storis $B/W = 0,1$, erdvinė zona sudaro 60 %, o kai $B/W = 3,0$ - tik 20 %.
5. Tyrimais įrodyta, kad įtempimų intensyvumo koeficientas kinta plokštelės storio kryptimi (išilgai įpjovos fronto) ir gali būti prognozuojamas pagal siūlomų erdviškumo rodiklių kitimo dėsnius, naudojant integralines koeficientų reikšmes.
6. Nepriklausomai nuo plokštelės apkrovimo, plastinės zonos kontūras plokštelėje yra tiesus (toks, koks vaizduojamas klasikinėse studijose) tik tai nuo plokštelės vidurio maždaug iki jos storio ketvirčio ($0,2 - 0,3 B$). Tačiau plokštelės storio pakraštyje plastinės zonos geometrija kinta nedėsningai ir labai sudėtingai.
7. Tamprios-plastinės deformavimo stadijos uždavinio analizė rodo, kad didinant apkrovą įtempimų erdvinio būvio rodiklio zonos santykiniai matmenys nekinta.
8. Padidinus plokštelės apkrovą 2 kartus, integralinis įtempimų intensyvumo koeficientas dėl plastinių deformacijų padidėja apie 3,5 karto.

Literatūra

1. ABAQUS/Standard. ABAQUS release No tes: Fracture Analysis. Abaqus Inc: United States of America, 2003, p. 707–725.
2. Agrawal A.K., Kishore N.N. A study of free surface effects on through cracks using BEM. *Engineering fracture Mechanics*, Vol 68, No 11, Pergamon, 2001, p. 1297–1316.
3. Algor Processor Reference Manual. Algor Interactive Systems Inc., 1989. 600 p.
4. Anderson T.L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. Boca-Raton – London – New-York – Washington: CRC Press, 1995. 688 p.
5. ANSYS Advanced Analysis Techniques Guide. USA: SAS IP, ANSYS Inc., 1998. 175 p.
6. ANSYS Release 8.0 Documentation. United States of America: SAS IP, ANSYS Inc., 2003.
7. Argyris J., Mlejnek H.P. *Die Methode der Finiten Elemente; Band I*. Friedrich Vieweg & Sohn, 1986. 846 p.
8. Askes H, Sluys L.J, de Jong B.B.C. Remeshing techniques for r-adaptive and combined h/r-adaptive analysis with application to 2D/3D crack propagation. *International Journal of Structural Engineering & Mechanics*, Vol 12(5), 2001, p. 475–490.
9. Barauskas R. The Base of the FEM (Baigtinių elementų metodo pagrindai). Kaunas: Technologija, 1998. 375 p. (in Lithuanian)
10. Barsoum R.S. Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, Vol 10, Kluwer Academic Publishers, 1974, p. 603–605.
11. Basista M., Nowacki W.K., editors. *Modeling of Damage and Fracture Processes in Engineering Materials*. Warsaw: IPPT PAN, 1999. 298 p.
12. Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995. 1037 p.
13. Becker R., Smelser R.E. Simulation of strain localization and fracture between holes in a aluminum sheet. *Journal Mech. Phys. Solids*, Vol 42. Pergamon, 1994, p. 773–790.
14. Belevičius R. General knowledge about program system ANSYS (Bendros žinios apie programinę sistemą ALGOR). Vilnius: Technika, 1995. 104 p. (in Lithuanian).
15. Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Crack propagation by element – free Galerkin method. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 51, Pergamon, 1995, p. 295–315.
16. Berto F., Lazzarin P., Wang C.H. Three-dimensional linear elastic distributions of stress and strain energy density ahead of V-shaped notches in plates of arbitrary thickness. *International Journal of Fracture*, Vol 127, Kluwer Academic Publishers, 2004, p. 265–282.

17. Bouchard P.O., Bay F., Chastel Y. Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria. *Comp. Method in Appl. Mech. Engrg.*, Vol 192, Elsevier, 2003, p. 3887–3908.
18. Bouchard P.O., Bay F., Chastel Y., Tovenia I. Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engrg.*, Vol 189, Elsevier, 2000, p. 723–742.
19. Broek D. (The Practical Use of Fracture Mechanics) Основы механики разрушения. Москва, Высшая школа, 1980, 368 p. (in Russian)
20. Carpinteri A. (ed. M.P.Wnuk) Non-linear phenomena associated with fracture in strain-softening materials. In: *Nonlinear Fracture Mechanics, CISM Courses and lectures, N 314*, Wien - New York: Springer, 1990, p. 61–122.
21. Cherepanov G.P. *Mechanics of brittle fracture*, McGraw-Hill, New York. 1979. 939 p.
22. Chervenka V. Saouma E. Numerical evaluation of 3-D SIF for arbitrary finite element meshes. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 57, No 5, Pergamon, 1997, p. 541–563.
23. Crisfield M.A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol 1, Chichester: Wiley, 1997. 508 p.
24. Čyras A. *Structural mechanics (Statybinė mechanika)*. Vilnius: Mintis, 1990. 442 p.
25. Daunys M., Rimovskis S. Analysis of circular cross – section bar loaded by static and cyclic elasto – plastic pure bending. *Mechanics (Mechanika)*, No 1 (33). Kaunas: Technologija, 2002, p. 5–10.
26. Denyse de Araujo T., Bittencourt T.N., Roehl D., Martha L.F. Numerical estimation of fracture parameters in elastic and elastic – plastic analysis. In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000 (CD-ROM)*, Barcelona, Spain, 2000. p 1– 18
27. Dhondt G., Chergui A. Buchholz F.G. Computational fracture analysis of different specimens regarding 3D and mode coupling effects. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 68, Pergamon, 2001, p. 383–401.
28. Dolbow J., Moës N., Belytschko T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engrg.*, Vol 190. Elsevier, 2001, p. 6825–6846.
29. Dundulis G., Ušpuras E. Ultimate Analysis of Ignalina NPP Reinforced Concrete Containment Subjected to Internal Pressure. *Proceeding of 10th International Conference on Fracture ICF10 CD-ROM*, Honolulu: USA, 2001., p 1–6.
30. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. of Basic Engineering*, Vol 85, 1963, p. 519–527.

31. Farahmand B. Fracture Mechanics of Metals, Composites, Welds, and Bolted Joints. Application of LEFM, EPFM, and FMDM Theory. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2001. 383 p.
32. Fawaz S. A. Stress intensity factor solutions for part-elliptical through crack. Engineering Fracture Mechanics, Vol 63, Pergamon, 1999, p. 209–226.
33. Fawaz S. A. Application of the virtual crack closure technique to calculate stress intensity factors for through crack with an elliptical crack front. Engineering Fracture Mechanics, Vol 59, No 3, Pergamon, 1998, p. 327–342.
34. Gdoutos E.E. Crack growth based on energy balance. Failure in Structures. 1997. p. 45–57.
35. Gdoutos E.E. Critical stress intensity factor fracture criterion. Failure in Structures. 1997. p. 59–73.
36. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans., A 221, 1920, p. 163–198.
37. Gross D. (ed. M.Basista and W.K.Nowacki). Recent results in the dynamics of stationary and running cracks. Modelling of damage and fracture processes in engineering materials. Warsaw: Institute of Fundamental Technological Research of Polish Academy of Sciences, 1999, p.1–56.
38. Guinea G.V., Planas J., Elices M. K_I evaluation by the displacement extrapolation technique. Engineering Fracture Mechanics, Vol 66, No 3. Pergamon, 2000, p. 243–255.
39. Guo W. Three-dimensional analyses of plastic constraint for through-thickness cracked bodies. Engineering Fracture Mechanics, Vol 62. Pergamon, 1999, p. 383–407.
40. Guo W., Dong, H., Lu M., Zhao X. The coupled effects of thickness and delamination on cracking resistance of X70 pipeline steel. International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol 79, 2002, p. 403–412.
41. Hult A.H., McClintoc F.A. Elastic-plastic stress and strain distribution around sharp Notches repeated shear. In: Actes du XIème Congres International de Mechanique Appliquee, 1957, p. 51–58.
42. Hutchinson J.W. Singular behaviour of the end of a tensile crack tip in a hardening material. J. Mech. Phys. of Solids, Vol 16 (1), 1968, p. 13–31.
43. Hwang C.G., Wawrzynek P.A., Ingraffea A.R. On the virtual crack extension method for calculating the derivatives of energy release rates for a 3D planar crack of arbitrary shape under mode-I loading. Engineering Fracture Mechanics, Vol 68, Pergamon, 2001, p. 25–947.
44. Irwin G.R. Analysis of stress and strains near the end of a crack transferring a plate. J. Appl. Mech., 24, 1957, p. 361–364.
45. Kačianauskas R. Computer Methods in Multilevel Modelling of Beams and Shells. Vilnius: Technika, 1995. 395 p.

46. Kačianauskas R., Stupak E., Kienzler R. Macroscopic finite element simulation of brittle-to-ductile failure of SENB specimen. *Mechanics (Mechanika)*, No 1 (33). Kaunas: Technologija, 2002, p. 11–16.
47. Kačianauskas R. Architecture of Finite Element Method Programs for Personal Computer. *Lithuanian Journal of Computational Mechanics*, Vol 33, 1994, p. 130–143.
48. Karihaloo B.L., Qiao Q.Z. Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review. *Computers and Structures*, Vol 81. Pergamon, 2003, p. 119–129.
49. Kienzler R., Herrmann G. *Mechanics in Material Space with Applications to Defect and Fracture Mechanics*. Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 2000. 289 p.
50. Kim Y., Zhu X.K., Chao Y.J. Quantification of constraint on elastic-plastic 3D crack front by the $J-A_2$ three-term solution. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 68, Pergamon, 2001, p. 895–914.
51. Kotousov A., Wang C.H. Fundamental solutions for the generalized plane strain theory. *International Journal of Engineering Science*, Vol 40, 2002, p. 1775–1790.
52. Kotousov A., Wang C.H. Three-dimensional stress constraint in an elastic plate with a notch. *International Journal of Solids and Structures*, Vol 39, No 16, 2002, p. 4311–4326.
53. Krishnaswamy S., Rosakis A.J., Ravichandran G. On the extent of dominance of asymptotic elasto-dynamic crack tip fields. Part II: Numerical investigation of three-dimensional and transient effects. *Journal of Applied Mechanics*, Vol 58, 1991, p. 95–103.
54. Krysl P., Belytschko T. The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, Vol 44, 1999, p. 767–800.
55. Kuang J.H., Chen Y.C. The effect of tip plastic energy on mixed-mode crack initiation. *International Journal of Fracture*, Vol 83, Kluwer Academic Publishers, 1997, p. 393–402.
56. Kwon S.W., Sun C.T. Characteristics of three-dimensional stress fields in plates with a through-the-thickness crack. *International Journal of Fracture*. No 104, Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 291–315.
57. Leonavičius M.K. *Mechaninis medžiagų irimas*. Vilnius: Technika, 2000. 77 p. (in Lithuanian)
58. Leung A.Y.T., Su R.K.L. A numerical study of singular stress field of 3D cracks. *Finite Elements in Analysis and Design*. No 18, 1995, p. 389–1994.
59. Li Z., Guo W., Kuang Z. Three-dimensional stress fields near notches finite thickness plates. *International Journal of Solids and Structures*, Vol 37, 2000, p. 7617–7631.

60. Ma F., Sutton M.A., Deng X. Plane strain mixed mode crack-tip stress fields characterized by a triaxial stress parameter and a plastic deformation extent based characteristic length. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol 49, No 12, Pergamon, 2001, p. 2921–2953.
61. Meslinas N., Žiliukas A. Daugiasluoksnių konstrukcijų stiprumo ir irimo kriterijai. *Mechaninė technologija: mokslo darbai / KauNo techNo logijos universitetas*, Vol 29. Kaunas: Technologija, 2001, p. 78–85. (In Lithuanian)
62. Miannay D.P. *Fracture Mechanics*. New-York, Springer, 1998. 337 p.
63. Moës N., Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 69, Pergamon, 2002, p. 813–833.
64. Murthy K.S.R.K., Mukhopadhyay M. Adaptive finite element analysis of mixed-mode crack problems with automatic mesh generator. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol 49, Wiley, 2000, p. 1087–1100.
65. Nakamura T., Parks D. M. Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate. *Journal of Applied Mechanics*, Vol 55, 1988, p. 805–813.
66. Newman J.C., Jr. James M.A., Zerbst U. A review of the CTOA/CTOD fracture criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 70, Pergamon, 2003, p. 371–385.
67. Nikishkov G.P., Alturi S.N. Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack by the equivalent domain integral method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol 24, 1987, p. 1801–1821.
68. Orowan E. Energy criteria of fracture. *Welding Journal*, Vol 10, 1955, p. 157–160.
69. Panontin T.L., MakiNo A., Williams J.F. Crack tip opening displacement estimation formulae for C(T) specimens. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 67, No 3. Pergamon, 2000, p. 293–301.
70. Papadopoulos G.A. The stationary value of the third stress invariant as a local fracture parameter (Det.-criterion). *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 27, Pergamon, 1987, p. 643–652.
71. Paris P. C., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws, *Journal of Basic Engineering*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1963, p.528–534.
72. Peng D., Jones R., Pitt S. Implementation of a new algorithm for evaluating 3D fracture. *International Journal of Fracture*, Vol 113, Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 57–75.
73. Prabhu S., Lambros J. Effect of mode mixity on K-dominance and three dimensionality in cracked plates. *International Journal of Fracture*, Vol 104, Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 51–69.
74. Raju I. S., Shivakumar K. N. An equivalent domain integral method in the two-dimensional analysis of mixed mode crack problems, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 37, No 4, 1990, p. 707-725.

75. Rice J.R. A path independent integral and the approximation analysis of strain concentration by Notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, Vol 35, 1968, p. 379–386.
76. Rice J.R., Rosengren G.F. Plain strain deformation near a crack tip in a power law hardening material. *J. Mech. Phys. of Solids*, Vol 16 (1), 1968, p. 1–12.
77. Rimovskis S., Daunys M. Analysis of low cycle strength and durability of steel 45 at pure bending. *Mechanika*, Nr. 1 (39). Kaunas: Technologija, 2003, p. 5-10.
78. Rosakis A.J. and Ravi-Chander K. On crack tip stress state. An experimental evaluation of three-dimensional effects. *International Journal Solids and Structures*, Vol 22, 1986, p. 121–134.
79. Sedmak S. (ed. M.P.Wnuk). On J Integral and J_{IC} material testing (with special reference to welded structures). In: *Nonlinear Fracture Mechanics, CISM Courses and lectures, N 314*, Wien–NewYork: Springer, 1990, p. 293–316.
80. Shih C.F. Small-scale yielding analysis of mixed mode plain-strain crack problems. In: *Fracture analysis*, ASTM STP 560, 1974, p. 187–210.
81. Shivakumar K.N., Tan P.V. Jr. Newmann J.C.. A virtual crack-closure technique for calculating stress intensity factors for cracked three dimensional bodies. *International Journal of Fracture*, Vol 36, Kluwer Academic Publishers, 1988, p. 43–50.
82. Siegmund T., Brocks W. A numerical study on the correlation between the work of separation and the dissipation rate in ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 67, No 2, Pergamon, 2000, p. 139–154.
83. Sih G.C. Strain-energy density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, Vol 10, Kluwer Academic Publishers, 1974, p. 305–322.
84. Spyrakos C, Raftoyiannis J. . *Linear and Nonlinear Finite Element Analysis in Engineering Practice. Includes Examples with ALGOR ACCUPAK / VE.* – Pittsburg: Algor Inc. Publishing division, 1997. 497 p.
85. Spyrakos C. *Finite Element Modeling in Engineering Practice. Includes Examples with ALGOR.* – Pittsburg: Algor Inc. Publishing division, 1994. 322 p.
86. Standard test method for plane-strain fracture toughness of metallic materials. American Special Requirements for the Testing of Bend specimens. Annual book of ASTM standards ASTM E 399, 1997.
87. Stupak E., Kačianauskas R. Adaptive FE analysis for crack propagation in SENB specimen. In proceedings of 1st CEACM Conference on Computational Mechanics, 15th International Conference “CMM–2003 Computer Methods in Mechanics”, 2003 June 3–6, Gliwice/Wisla, Poland, (Eds. T. Burczyński, P. Fedeliński, E. Majchrzak(CD-ROM)). Silesian Technical University, Gliwice, Poland, 2003, 7 p.

88. Stupak E., Kačianauskas R. Adaptyviųjų baigtinių elementų tinklų taikymas įtempimų būviui nustatyti ties koncentratoriais. *Mechanics (Mechanika)*, Nr 4 (24). Kaunas: Technologija, 2000, p. 31–36.
89. Sukumar N., Moës N., Moran B., Belytschko T. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol 48. Wiley, 2000, p. 1549–1570.
90. Sutton M.A., Boone M.L., Ma F., Helm J.D. A combined modeling–experimental study of the crack opening displacement fracture criterion for characterization of stable crack growth under mixed mode I/II loading in thin sheet materials. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 66, No 2, Pergamon, 2000, p. 171–185.
91. Sze K.Y., Wu Chang–Chun, Huang Ying–Qing. Upper and lower bounds for evaluation of Nonlinear fracture parameters. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 62, No 2, Pergamon, 1999, p. 185–201.
92. Tenek L.T., Argyris J. *Finite Element Analysis for Composite Structures*. Kluwer Academic Publisher, 1998. 352 p.
93. Theocaris P.S., Andrianopoulos N.P. The Mises elastic–plastic boundary as the core region in fracture criteria. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 16, Pergamon, 1982, p. 425–432.
94. Tradegard A., Nilsson F., Ostlund S.. FEM–remeshing technique applied to crack growth problems. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engrg.*, Vol 160, Elsevier, 1998, p. 115–131.
95. Yang B., Ravi–Chandar K. Evaluation of elastic T–stress by the stress difference method. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 64, Pergamon, 1999, p. 589–605.
96. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol 24, Wiley, 1987, p. 337–357.
97. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method*. Fifth edition. London: McGraw–Hill, 2000. 1440 p.
98. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, Part 1: The recovery technique. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol 33, Wiley, 1992, p. 1331–1364.
99. Žiliukas A. *Deformuojamų kūnų mechanika. Tamprumo ir plastiškumo teorija. Irimo mechanika*. Kaunas: Technologija, 1994. 220 p.
100. Žiliukas A. *Medžiagų mechanika*. Kaunas: Technologija, 2001. 598 p.
101. Žiliukas A., N. Meslinas. Model of Fracture with Elastic – plastic Tile. *Mechanics (Mechanika)*, Nr 1 (39). Kaunas: Technologija, 2003, p 11–15
102. Даунис М.А. Прочность и долговечность при малоцикловом нестационарном нагружении. Вильнюс: Мокслас, 1989. 256 с. (in Russian)

103. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. Москва: Наука, 1980. 256 с. (in Russian)
104. Панасюк В.В., Андрейкин А.Е., Партон В.С. Основы механики разрушения материалов.: Справ. пособие “Механика разрушения и прочность материалов“, (Под ред. Панасюка В.В.) Киев: Наукова думка, 1988. Т.1–488 с., Т.2–619с. (in Russian)
105. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Пособие. Москва: Наука, 1998. 712 с. (in Russian)