



VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
STATYBOS FAKULTETAS
STATYBINĖS MECHANIKOS KATEDRA

Renalda Alutytė

**GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ SIJŲ SKERSPJŪVIO OPTIMIZACIJOS
ALGORITMAS**
**GEOMETRICALLY NONLINEAR BEAM CROSS - SECTION
OPTIMIZATION ALGORITHM**

Baigiamasis magistro darbas

Statinių konstrukcijų studijų programa, valstybinis kodas 62402T107
Statinių projektavimo ir optimizacijos kompiuterinės technologijos specializacija
Statybos inžinerijos mokslo kryptis

Vilnius, 2009

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

STATYBOS FAKULTETAS

STATYBINĖS MECHANIKOS KATEDRA

TVIRTINU

Katedros vedėjas

(Parašas)

prof. habil. dr. Juozas Atkočiūnas

(Vardas, pavardė)

(Data)

Renalda Alutytė

**GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ SIJŲ SKERSPJŪVIO OPTIMIZACIJOS
ALGORITMAS**

**GEOMETRICALLY NONLINEAR BEAM CROSS - SECTION
OPTIMIZATION ALGORITHM**

Baigiamasis magistro darbas

Statinių konstrukcijų studijų programa, valstybinis kodas 62402T107

Statinių projektavimo ir optimizacijos kompiuterinės technologijos specializacija

Statybos inžinerijos mokslo kryptis

Vadovas prof. dr. R. Karkauskas

(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

(Parašas)

(Data)

Konsultantas

(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

(Parašas)

(Data)

Konsultantas

(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

(Parašas)

(Data)

Vilnius, 2009

STATYBOS
Statybinis mechanikos

KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedējas

ros vedejas

(Parašas) - Juras Atlocevičius
(Vardas, pavardė)
2008.12.08
(Data)

UŽDUOTIS

2008-12-02 Nr.

Vilnius

Studenti (ei) Ronalds Adm Lytki
(Vardas, pavardė)

Baigiamojo darbo tema: *Germetiška nedrėgumų bei skerspjūvių optimizacinės algoritmas* (Vardas, pavardė)

patvirtinta 2008.m. gruodžio 09 d. dekanu potvarkiu Nr. 380 st

Baigiamojo darbo užbaigimo terminas 2009 m. birželio 10 d.

BAIGIAMOJO DARBO UŽDUOTIS:

BAIGIAMOJO DARBO UŽDUOTIS:

Tyrims aprašyti ir patikrinti formuluotes. Len-
kiamis ir kitais BEM modelin, tyrimu ir patikrinimais moky-
mų ypatumai. Tarpiniais skaičiavimais ir kitais skaičiavimais
algoritmus, tarpiniais skaičiavimais ir kitais skaičiavimais
patikrinti skaičiavimų ypatumus ir kitus ypatumus
modelin ir iteracines skaičiavimų algoritmus mokyti ypatumai
ir kitus ypatumus MATLAB'o aplinkoje. Skaičiavimų ypatumai

Baigiamojo darbo rengimo konsultantai:

Vadovas

P. Kuri
.....
(Paraša)

(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

prof., dr. Pomenes Karkauskas
(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

Užduotį gavau

Užduotį gavau
[Signature]
(Parašas)
Renaldas Alutys
(Vardas, pavardė)
2009 01 22
(Data)

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Statybos fakultetas

Statybinės mechanikos katedra

ISBN

ISSN

Egz. sk.

Data-....-....

Statinių konstrukcijų studijų programos baigiamasis magistro darbas

Pavadinimas **Geometriškai netiesinių sijų skerspjūvio optimizacijos algoritmas**

Autorius **Renalda Alutytė**

Vadovas prof. dr. **Romanas Karkauskas**

Kalba

☒ X

lietuvių

☐

užsienio

Anotacija

Darbe pateikiamas patobulintas lenkiamų geometriškai netiesinių sijų iki pilnojo plastiškojo suirimo skerspjūvių optimizavimo uždavinio algoritmas. Šio uždavinio matematinis modelis formuluojamas pagal ekstreminį energijos sklaidos minimumo principą, taikant matematinio programavimo teoriją. Algoritmas sudarytas, taikant iteracinius skaičiavimus. Kiekvieno optimizavimo ciklo metu, įrašos, nustatytos prieš tai vykusio optimizavimo ciklo tamprios netiesinės analizės metu, yra naudojamos naujos iteracijos optimaliems projektuojamiems parametrams nustatyti.

Naudojama antros eilės netiesinė analizė grindžiama tangentiniu standumo metodu. Pateikta sijinio elemento tangentinės standumo matricos sudarymo metodika, pasinaudojant matematiniu kompiuteriniu paketu MATLAB. Siūloma metodika yra iliustruojama skaitiniu pavyzdžiu.

Šia tema parengtas pranešimas Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijoje „Mokslas – Lietuvos ateitis“, 2009.

Darbą sudaro trys dalys: įvadas, strypinių konstrukcijų netiesinė analizė, geometriškai netiesinių tamprių plastinių sijų optimizacija ir analizė, skaitinis eksperimentas, išvados ir siūlymai, literatūros sąrašas.

Darbo apimtis – 61 p. teksto be priedų, 18 iliustr., 4 lent., 18 bibliografinių šaltinių.

Atskirai pridedami darbo priedai.

Prasminiai žodžiai: geometrinių netiesiškumas, optimizacija, plastiškasis suirimas, tangentinė standumo matrica.

Vilnius Gediminas Technical University

Civil engineering faculty

Structural mechanics department

ISBN

ISSN

Copies No.

Date-....-....

Structure construction study programme master thesis.

Title: **Geometrically nonlinear beam cross – section optimization algorithm**

Author **Renalda Alutytė**

Academic supervisor prof.dr. **Romanas Karkauskas**

Thesis language

☒

Lithuanian

☐

Foreign (English)

Annotation

A developed mathematical model and calculation algorithm for flexural geometrically nonlinear beam cross – section optimisation in the state prior to plastic collapse are presented. The employed values of structural elastic response are functionally related to the optimised parameters, therefore the problem is solved iteratively.

The beam element new tangent stiffness matrix formation procedure considered by internal forces excited different element alterations is presented. Efficiency of developed algorithm exemplified by steel beam elements cross-section optimal values calculation, obeyed by minimum volume requirements.

There is a report made in conference of young Lithuanian scientists – „Science – the muture of Lithuania“, 2009.

Structure: introduction, construction nonlinear analysis, geometrically nonlinear beam optimization and analysis , conclusions and suggestions, references.

Thesis consist of: 61 p. text without appendixes, 18 pictures, 4 tables, 18 bibliographical entries.

Appendixes included.

Keywords: geometrical nonlinearity, optimization, plastic collapse, tangent stiffness matrix.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS	7
LENTELIŲ SĄRAŠAS	7
PAGRINDINIAI ŽYMĖJIMAI.....	8
ĮVADAS	9
1. STRYPINIŲ KONSTRUKCIJŲ NETIESINĖ ANALIZĖ	10
1.1. Geometriškai netiesinių sistemų optimizacija. Bendrosios pastabos	10
1.2. Netiesinio uždavinio samprata	11
1.3. Tangentinė standumo matrica.....	12
1.3.1. Bendrosios žinios.....	12
1.3.2. Lenkiamas strypinis elementas	16
1.3.2.1. Formos funkcijos	16
1.3.2.2. Deformacijų aproksimacija mazginiais poslinkiais	20
1.3.2.3. Elemento tangentinė standumo matrica.....	22
1.4. Tangentinės standumo matricos sudarymo ypatumai.....	24
1.4.1. Mažų poslinkių elemento standumo matrica	24
1.4.2. Elemento geometrinė standumo matrica	26
1.4.3. Pradinių poslinkių matrica.....	32
1.5. Netiesinių uždavinių sprendimo metodai	34
1.6. Newton – Raphson apkrovos kontrolės metodas.....	36
2. GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ TAMPRIŲ PLASTINIŲ SIJŲ OPTIMIZACIJA IR ANALIZĖ	41
2.1. Tampiųjų plastinių lenkiamųjų strypinių konstrukcijų optimizacija paprastojo pakrovimo atveju	41
2.1.1. Bendrosios žinios.....	41
2.1.2. Pagrindinės sąvokos, prielaidos ir priklausomybės	42
2.2. Strypinės konstrukcijos optimizavimo matematinis modelis	45
2.3. Optimalios konstrukcijos analizės uždavinio matematinis modelis	50
3. SKAITINIS EKSPERIMENTAS	53
3.1. Konstrukcijos diskretinio modelio sudarymas	53
3.2. Skaičiavimo rezultatų analizė.....	56
IŠVADOS	60
LITERATŪROS SĄRAŠAS	61

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

2.1 pav. Kūnas ir jo diskretizavimas baigtiniais elementais	13
2.2 pav. Lenkiamas elementas lokalioje koordinačių sistemoje	16
2.3 pav. Tiesioginio metodo principinė schema	34
2.4 pav. Prieaugių metodo principinė schema (v – apkrovos prieaugis, i – iteracijos numeris) ..	34
2.5 pav. Newton-Raphson metodas.....	37
2.6 pav. Deformuoto būvio charakteristikų skaičiavimo algoritmo blok – schema	40
3.1 pav. Apkrovos ir poslinkių ryšio grafikas.....	41
3.2 pav. Idealiai tamprios plastinės medžiagos fizinis modelis – Prandtliaus diagrama.....	43
3.3 pav. Skerspjūvio optimizacijos ciklinio algoritmo schema.....	47
3.4 pav. Vienos optimizacijos iteracijos algoritmo schema	49
4.1 pav. Konstrukcijos skaičiuojamoji schema	53
4.2 pav. Konstrukcijos BEM diskretinis modelis.....	53
4.3 pav. Sijos elementų lokaliųjų poslinkių schema globaliojoje koordinačių sistemoje.....	55
4.4 pav. Plastinių lankstų susidarymo schema	57
4.5 pav. Momentų diagrama, kNm	57
4.6 pav. Įlinkių diagrama, mm.....	57
4.7 pav. Antro mazgo apkrovos ir poslinkių priklausomybės grafikas.....	58
4.8. pav. Penkto mazgo apkrovos ir poslinkių priklausomybės grafikas.....	59

LENTELIŲ SĄRAŠAS

4.1 lentelė. Priklausomybių koeficientai.....	54
4.2 lentelė. Poslinkių ryšio matrica C	54
4.3 lentelė. Sijos iteracinio skaičiavimo rezultatai.....	56
4.4 lentelė. Plastinių lankstų atsiradimas kintant apkrovai.	57

PAGRINDINIAI ŽYMĖJIMAI

σ_{pl} – takumo ribos įtempiai;

$\{ M \}$ – įrašų vektorius;

$\{ M_0 \}$ – ribinių momentų vektorius;

$[\Phi]$ – takumo sąlygų matrica;

$[A]$ – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica;

$\{ F \}$ – apkrovos vektorius;

Π – pilnutinė potencinė energija;

$[K_\tau]$ – tangentinė standumo matrica;

$\{ u_k \}$ – poslinkių vektorius;

$\{ \varepsilon \}$ – deformacijų vektorius;

χ – strypo ašies kreivis;

E – medžiagos tamprumo modulis;

A – elemento skerspjūvio plotas;

l – elemento ilgis;

$\{ \Delta F \}$ – apkrovos prieaugių vektorius;

$\{ \Delta u \}$ – globaliųjų poslinkių prieaugių vektorius;

k – statinio neišsprendžiamumo laipsnis;

K – kontūrų skaičius;

$\checkmark$ – lankstų skaičius;

$\{ M_r \}$ – liekamųjų įrašų vektorius;

$\{ M_e \}$ – tampriųjų įrašų vektorius;

$\{ u_r \}$ – liekamųjų poslinkių vektorius;

$\{ u_e \}$ – tampriųjų poslinkių vektorius;

$[\Gamma]$ – konfigūracijos matrica;

I – inercijos momentas;

W_{pl} – plastiškasis atsparumo momentas;

$[D]$ – pasiduodamumo matrica.

IVADAS

Pagrindinis tampriųjų plastinių geometriškai netiesinių sąjū optimizacijos tikslas yra nustatyti tokį konstrukcijos projektą, kuris tenkintų stiprumo, standumo, stabilumo sąlygas ir tam tikro ekonominio efekto reikalavimus.

Projektuojant stengiamasi, kad konstrukcija būtų ne tik optimali, bet ir saugi. Todėl siektina, kad jos skaičiuojamoji schema iš esmės nesikeistų, elementui ar jų grupei pasiekus ribinę būseną, t. y. konstrukcijos pilnoji ar dalinė irtis nebūtų pasiekta staiga. Todėl praktikoje plačiai naudojamos konstrukcinės laikančiosios schemas, sudarytos iš elementų, turinčių plastinių savybių. Tokie konstrukciniai elementai, pasiekę tampraus atsako ribą, toliau didinant apkrovimą, nesuyra staiga. Deformacijas lemiantys parametrai silpnėja, kai konstrukcijos apkrovimas toliau didinamas, kol susidaro plastiškoji irtis. Šis konstrukcijos netampraus atsako įvertinimas skaičiuojant konstrukcijas leidžia kurti ekonomišką konstrukcijas [18].

Išspręsti optimizacijos uždavinį, sujungiantį aukščiau išvardintas sąlygas (stiprumo, standumo, stabilumo, ekonomiškumo) į bendrą formuluotę yra gana sudėtinga. Šios uždavinio matematinis modelis formuluojamas pagal ekstreminį energijos sklaidos minimumo principą, taikant matematinio programavimo teoriją. Optimizacijos uždavinio skaičiavimo algoritmas atliekamas taikant iteracinius skaičiavimus. Kiekvieno optimizavimo ciklo metu, įrašos, nustatytos prieš tai vykusio optimizavimo ciklo tampriai plastinės netiesinės analizės metu, yra naudojamos naujiems optimaliems projektuojamiems parametrams nustatyti.

Antros eilės analizė taikoma tuomet, kai norima tiksliau nustatyti įtempių – deformacijų būvį. Ji grindžiama tangentiniu standumo metodu.

Darbo tikslai yra:

- tobulinti plieninių konstrukcijų (sijų) optimizacijos uždavinių matematinius modelius ir skaičiavimo algoritmus;
- įvertinant plieno netampriąsias savybes, konstrukcijos deformuoto būvio įtaką jos bendrajam standumui ir eksploatacinius reikalavimus;
- sudaryti tangentinę standumo matricą atsižvelgiant į vidinių jėgų sukeltus įvairius konstrukcijos elementų pokyčius;
- atlikti skaitinį eksperimentą.

1. STRYPINIŲ KONSTRUKCIJŲ NETIESINĖ ANALIZĖ

1.1. Geometriškai netiesinių sistemų optimizacija. Bendrosios pastabos

Optimalių ir saugių konstrukcijų projektavimo modeliavimas ir sėkminga skaitinė realizacija nuolat yra aktuali problema. Siekiama suprojektuoti optimalią konstrukciją mažinant jos laikomosios galios rezervą. Šio tikslo siekiama modeliuojant konstrukcijos geometrinę formą, išorės poveikius, adekvačiau aprašant patį konstrukcijos atsaką išorės poveikiams [18]. Seniau optimizavimo uždaviniai buvo sprendžiami intuityviai, vėliau – matematiniais metodais.

Akademikas A. Čyras sukūrė mechanikos mokyklą Lietuvoje, kurioje išskirtinis dėmesys buvo skiriamas matematinio programavimo metodų taikymui konstrukcijoms optimizuoti. Šis tyrimo metodas buvo novatoriškas ne tik Rytų Europoje, bet ir tuometinėje Sovietų Sąjungoje. Jo sukurta mokykla sėkmingai tęsia tyrimus ne tik Lietuvoje, bet ir užsienyje. Tarp jų atstovų paminėtini Vilniaus Gedimino technikos (VGTU) mokslininkai A. Čižas, R. Kačianauskas, R. Baušys, taip pat A. Borkowski, dirbantis Lenkijos mokslų akademijoje. Paminėtini ir VGTU Statybinės mechanikos katedros, kurią įkūrė A. Čyras, mokslininkų nuopelnai: J. Atkočiūno konstrukcijų prisitaikomumo srityje, S. Kalantos baigtinių elementų metodo ir jo algoritmų taikymo srityje, R. Karkauso geometrinio netiesiškumo įvertinimo ir iteracinių metodų taikymo srityje formuluojant ir realizuojant konstrukcijų skaičiavimo uždavinius [18].

Kompiuterinių technologijų plėtotė, matematikos, fizinių mokslų ir eksperimentinių tyrimų sintezė atveria naujas galimybes konstrukcijų analizės ir optimizavimo srityse. Tai savo ruožtu leidžia sukurti ekonomiškesnes konstrukcijas, adekvačiau perteikiant išorinius poveikius ir modeliuojant optimalių konstrukcijų atsaką.

Konstrukcijos elgsenai įtakos turi įvairūs veiksniai, bet jų visų negalime įvertinti statybinės mechanikos tiesinės teorijos metodais. Taigi, reikia pereiti prie žymiai platesnių ir sudėtingesnių netiesinės teorijos apibendrinimų. Sudarant optimizacijos uždavinį reikia: atsisakyti skaičiavimo pagal nedeformuotą būvį; įvertinti konstrukcijos geometrijos pasikeitimo įtaką į jos įtempių – deformacijų būvį; pereiti prie netiesinio įtempių – deformacijų ryšio ir įvertinti atsirandančias plastines deformacijas [10].

Pastaruosius tris dešimtmečius gana intensyviai buvo plėtojama konstrukcijų optimizacijos teorija, metodai ir skaičiavimo algoritmai bei jų integracija su šiuolaikinėmis kompiuterinio modeliavimo ir automatizuoto projektavimo sistemomis. Pažymėtina, kad einamuoju metu pasirodė darbai, kuriuose taikomi genetiniai algoritmai, pagrįsti biologinių principų įdiegimu į konstrukcijų optimizacijos problemų realizacijos kompiuterines

technologijas [12]. Patrauklus šių algoritmų bruožas yra jų suderinamumas su diskretine optimizacija, jie nereikalauja projektuotojų nemėgstamų funkcijų išvestinių, kurios labai plačiai taikomos klasikiniuose optimizacijos metoduose [10].

Atlikti skaičiavimai leidžia teigti, kad konstrukcijų optimizacijos metodika, kurioje vienu metu panaudojama matematinio programavimo teorija, ekstreminiai energiniai principai ir medžiagos netampriosios savybės yra viena iš efektyviausių [1 – 6, 13]. Svarbu atkreipti dėmesį, kad optimizacijos rezultatai pagal plastiškojo suirimo kriterijų ne visuomet yra lemiami, nes optimalios konstrukcijos ribinis tinkamumo būvis gali būti prarastas net ir nepasiekus plastiškosios suirties dėl per didelių netampriųjų deformacijų ir atsirandančių poslinkių. Būtina pažymėti, kad optimalios konstrukcijos standumas neužtikrina normalaus jos funkcionavimo, nes dažniausiai optimizacijos uždavinio apribojimų sąlygos formuluojamos neatsižvelgiant į Statybos techninio reglamento [16] reikalavimus.

Darbe sudaromas netiesinio optimizacijos uždavinio skaičiavimo algoritmas, suformuojama skaičiavimams atlikti reikalinga tangentinė standumo matrica, atliekama konstrukcijos optimizacija iki pilnojo plastiškojo suirimo įvertinant geometrinį netiesiškumą, pasinaudojus simboliniu matematiniu paketu „MATLAB“. Siūloma metodika yra iliustruojama sijų, veikiamų vertikalųjų jėgų, skaičiavimu.

1.2. Netiesinio uždavinio samprata

Netiesiniu vadiname tokį uždavinį, kurio baigtinių elementų formuluotėje lygties kairioji pusė, t.y. vidinės jėgos, negali būti užrašytos $[K_\tau]\{u_e\}$ pavidalu, o reikia naudoti sudėtingesnes formules [8]. Antros eilės analizė taikoma tuomet, kai norima tiksliau nustatyti įtempių – deformacijų būvį. Nagrinėjant konstrukcijų stabilumą visuomet būtina atlikti antros eilės analizę, kadangi konstrukcijai tampant nepastoviai sistemos geometrija smarkiai skiriasi nuo nedeformuotos sistemos geometrijos [7].

Konstrukcijos vidinių savybių sąlygoti netiesiškumai paprastai skiriami į dvi pagrindines grupes – fizinius ir geometrinius. Fiziniai netiesiškumai yra sąlygoti netiesinių medžiagos savybių. Geometriniai netiesiškumai sąlygoti netiesinio ryšio tarp poslinkių ir deformacijų. Žinoma, fiziniai ir geometriniai netiesiškumai konstrukcijoje gali pasireikšti tuo pačiu metu, kaip paprastai ir būna. Tačiau, norint išsiaiškinti kaip jie aprašomi baigtinių elementų metodu, metodiniais sumetimais šie netiesiškumų tipai nagrinėjami atskirai [6].

Netiesinė analizė vykdoma naudojant iteracijų procedūrą – taikomas žingsninis metodas. Iteracinio skaičiavimo esmė tokia, kad sistemos deformuota geometrija, gauta $n-1$ iteracijoje, naudojama n iteracijos pusiausvyros lygtims formuoti.

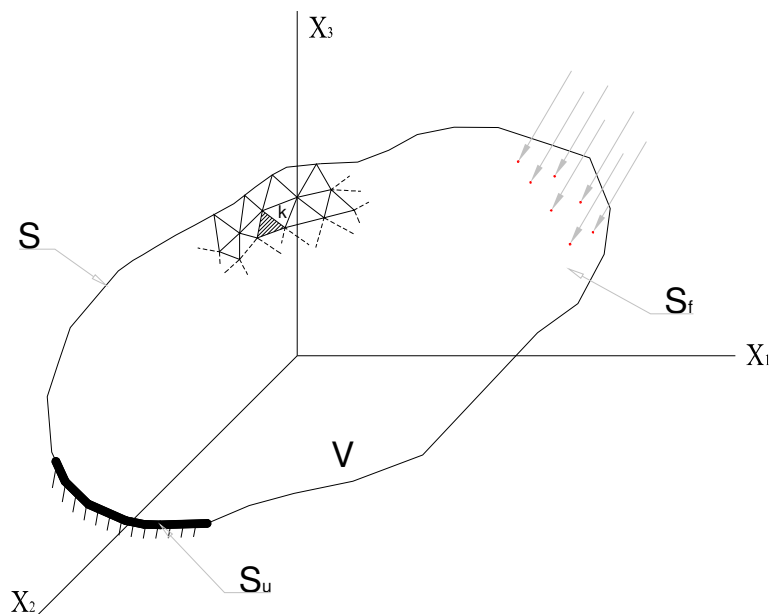
Geometrinis netiesiškumas ypač svarbus aukštiesiems ir liauniems rėmams ir esant didelėms vertikalioms jėgoms. Dažniausiai jis vertinamas naudojant ekscentriškųjų elementų stabilumo funkcijas ekscentriškųjų elementų metode arba geometrinio standumo matricą baigtinių elementų metode.

1.3. Tangentinė standumo matrica

1.3.1. Bendrosios žinios

Sudarant baigtinių elementų metodo (BEM) tangentinę standumo matricą naudosime pilnutinės diskretizuoto kūno potencinės energijos Π stacionarumo sąlygą [15], t. y. pirmąją funkcionalo Π variaciją, kuri yra lygi nuliui: $\delta\Pi = 0$.

Nagrinėjamas kūnas, kurio tūris V yra apribotas uždaru paviršiumi S . Kūnas yra suskaidomas į baigtinį skaičių elementų k , kaip pavaizduota 1 paveikslėlyje. Išorinės jėgos, veikiančios elemento taškus, yra paskirstytos tūrinės jėgos $\{g(\mathbf{x})\} = [g_1(x_1, x_2, x_3) \ g_2(x_1, x_2, x_3) \ g_3(x_1, x_2, x_3)]^T$, paviršiaus S dalyje S_f veikiančios paviršinės paskirstytos jėgos $\{q(\mathbf{x})\} = [q_1(x_1, x_2, x_3) \ q_2(x_1, x_2, x_3) \ q_3(x_1, x_2, x_3)]^T$ ir elementų tarpusavio sąveikos mazginės jėgos $\{F(\mathbf{x})\} = [F_1(x_1, x_2, x_3) \ F_2(x_1, x_2, x_3) \ F_3(x_1, x_2, x_3)]^T$. Kūno paviršiaus dalyje S_u baigtinių elementų bet kurio taško poslinkiai $\{u(\mathbf{x})\} = [u_1(x_1, x_2, x_3) \ u_2(x_1, x_2, x_3) \ u_3(x_1, x_2, x_3)]^T$ yra apriboti, t.y. $\{u(\mathbf{x})\} = 0$. Taigi, šiame paviršiuje elemento taškus veikia reakcijos $\{r(\{x\})\}$.



2.1 pav. Kūnas ir jo diskretizavimas baigtiniais elementais

Tamprumo teorijos uždaviniuose pilnutinė potencinė energija Π susideda iš potencinės energijos (vidinių jėgų potencialo) U ir potencinės išorinių jėgų energijos (išorinių jėgų potencialo) Ω :

$$\Pi = U + \Omega \quad (2.1)$$

Potencinę kūno deformavimo energiją nulemia paskirų baigtinių elementų potencinė deformavimo energija, t. y.:

$$U = \sum_{k=1}^s U_k \quad (2.2)$$

čia s – baigtinių elementų skaičius; U_k – įtempto ir deformuoto baigtinio elemento potencinė energija, išreiškiama taip:

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \{\epsilon_k(\mathbf{x})\}^T \{\sigma_k(\mathbf{x})\} dV_k \quad (2.3)$$

Išorinių jėgų potencialą nulemia išorinių jėgų darbas, atliktas paskirų elementų bet kurio taško poslinkiuose $\{u(\mathbf{x})\} = [u_1(x_1, x_2, x_3) \ u_2(x_1, x_2, x_3) \ u_3(x_1, x_2, x_3)]^T$ ir mazginių taškų poslinkiuose, apibūdinamų vektoriumi $\{u_k\}^T$:

$$\Omega_k = - \int_{V_k} \{u(\mathbf{x})\}^T \{g(\mathbf{x})\} dV_k - \int_{S_{f,k}} \{u(\mathbf{x})\}^T \{q(\mathbf{x})\} dS_k - \int_{V_k} \{u_k\}^T \{F_k\} dV_k. \quad (2.4)$$

Taigi, pilnutinė potencinė energija Π lygi vidinių ir išorinių jėgų darbui, atliktam gražinant deformuotą kūną į jo pirmykštį nedeformuotą kūno būvį (bet nenukraunant, t.y. nepašalinant išorinių jėgų). Todėl išorinės jėgos atlieka neigiamą galimą darbą, t.y. išraiškoje (2.4) nėra daugiklio $\frac{1}{2}$. Tokiu būdu diskretizuoto elemento pilnutinė potencinė energija Π_k bus gauta susumavus paskirų baigtinių elementų vidinių ir išorinių jėgų potencialus (2.3) ir (2.4):

$$\begin{aligned} \Pi_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \{\varepsilon_k(\mathbf{x})\}^T \{\sigma_k(\mathbf{x})\} dV_k - \int_{V_k} \{u(\mathbf{x})\}^T \{g(\mathbf{x})\} dV_k - \\ - \int_{S_{f,k}} \{u(\mathbf{x})\}^T \{q(\mathbf{x})\} dS_k - \int_{V_k} \{u_k\}^T \{F_k\} dV_k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pasinaudojus pilnutinės potencinės energijos stacionarumo sąlygomis (*Lagranžo variaciniu principu*)

$$\delta \Pi_k = 0,$$

gaunamos baigtinio elemento pusiausvyros lygtys, parašytos mazginiais poslinkiais:

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial \{u_k\}} = 0,$$

arba

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \{u_k\}} \left(\frac{1}{2} \int_{V_k} \{\varepsilon_k(\mathbf{x})\}^T \{\sigma_k(\mathbf{x})\} dV_k \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial \{u_k\}} \left(\int_{V_k} \{u(\mathbf{x})\}^T \{g(\mathbf{x})\} dV_k + \int_{S_{f,k}} \{u(\mathbf{x})\}^T \{q(\mathbf{x})\} dS_k + \int_{V_k} \{u_k\}^T \{F_k\} dV_k \right) = 0. \end{aligned}$$

Ši lygtis yra baigtinio elemento pusiausvyros netiesinė lygtis, kadangi ir įtempių funkcija $\sigma_k(\mathbf{x})$ taip pat yra išreiškiama poslinkiais $\{u_k\}$. Bendruoju atveju šią lygtį galime užrašyti taip:

$$\{\Psi_k(\{u_k\})\} - \{F_{gk}\} - \{F_{qk}\} - \{F_k\} = 0. \quad (2.6)$$

čia $\{F_{gk}\}$ – elemento mazginių jėgų vektorius, sąlygotas paskirstytųjų tūrinių jėgų; $\{F_{gk}\}$ – elemento mazginių jėgų vektorius, sąlygotas paskirstytųjų paviršinių jėgų;

$$\{\Psi_k(\{u_k\})\} = \int_{V_k} \left\{ \frac{\partial \{\varepsilon_k(\mathbf{x})\}}{\partial \{u_k\}} \right\}^T \cdot \{\sigma_k(\mathbf{x})\} dV_k, \quad (2.6a)$$

o jos išvestinė

$$\frac{\partial \{\Psi_k(\{u_k\})\}}{\partial \{u_k\}} = [K_\tau(\{u_k\})] \quad (2.7)$$

yra vadinama baigtinio elemento **tangentine standumo matrica**. Matome, kad elemento tangentinės standumo matricos fizinė prasmė yra netiesinės elemento pusiausvyros lygties (2.6) pirmasis dėmuo – JAKOBIO matrica, apskaičiuota esant žinomiems mazginiams poslinkiams $\{u_k\}$. Reikia pažymėti, kad kvadratinės matricos $[K_\tau(\{u_k\})]$ matmuo priklauso nuo elemento mazginių poslinkių vektoriaus $\{u_k\}$ ilgio. Jos eilutės narius gauname diferencijuojant (2.7) pagal vieną iš vektoriaus $\{u_k\}$ komponentų:

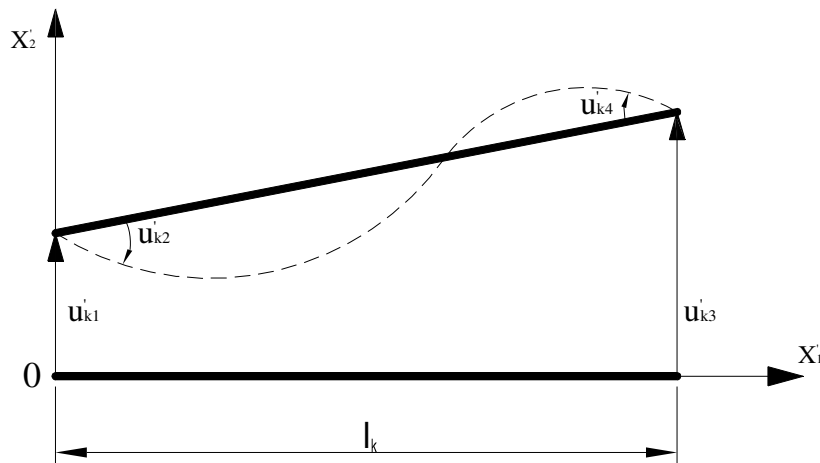
$$[K_\tau(\{u_k\})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{\Psi_k(\{u_k\})\}}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} \int_{V_k} \left\{ \frac{\partial \{\varepsilon_k(\mathbf{x})\}}{\partial u_1} \right\}^T \{\sigma_k(\mathbf{x})\} dV_k \\ \frac{\partial \{\Psi_k(\{u_k\})\}}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} \int_{V_k} \left\{ \frac{\partial \{\varepsilon_k(\mathbf{x})\}}{\partial u_2} \right\}^T \{\sigma_k(\mathbf{x})\} dV_k \\ \frac{\partial \{\Psi_k(\{u_k\})\}}{\partial u_3} = \frac{\partial}{\partial u_3} \int_{V_k} \left\{ \frac{\partial \{\varepsilon_k(\mathbf{x})\}}{\partial u_3} \right\}^T \{\sigma_k(\mathbf{x})\} dV_k \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Geometriniai netiesiškumai yra sąlygoti netiesinės poslinkių ir deformacijų priklausomybės. Vadinasi, šios matricos (2.8) reikšmė netiesiogiai priklauso nuo mazginių poslinkių $\{u_k\}$. Nuo jų priklauso deformacijų $\{\varepsilon_k(\mathbf{x})\}$ reikšmė, o nuo šios savo ruožtu priklauso įtempių $\{\sigma_k(\mathbf{x})\}$ reikšmė. Toliau elemento tangentinė standumo matrica, apskaičiuota esant žinomoms $\{u_k\}$ reikšmėms, transformuojama į globalinę koordinačių sistemą. Po to surenkama viso kūno tangentinė standumo matrica pagal įprastines standumo matricos surinkimo taisykles.

1.3.2. Lenkiamas strypinis elementas

1.3.2.1. Formos funkcijos

Nagrinėsime sijinių konstrukcijų elementą plokštumoje (2.2 pav.). Deformuojant siją, jos elementai gali pasislinkti atstumais, žymiai viršijančiais jo matmenis. Tuo pačiu priimsime, kad paties elemento forma ir ilgis nekinta, t.y. deformacijos lieka nedidelės. Elementas yra veikiamas tik lenkimo deformacijų.



2.2 pav. Lenkiamas elementas lokaliajame koordinatinių sistemoje

Lenkiamo elemento mazginių poslinkių vektorius bus parašomas elemento galų vertikaliais ir kampiniais poslinkiais (2.2 pav.):

$$\{u'_k\} = [u'_{k1} \quad u'_{k2} \quad u'_{k3} \quad u'_{k4}]^T.$$

Šio vektoriaus komponentai u'_{k1} ir u'_{k3} yra elemento mazginių taškų linijiniai poslinkiai, kurių teigiamos kryptys sutampa su lokalinės ašies x'_2 kryptimi. Komponentai u'_{k2} ir u'_{k4} yra kampiniai posūkiai, kurių teigiamos kryptys sutampa su laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi. Taigi, šis elementas lokaliajoje koordinatinių sistemoje $x'_1 0 x'_2$ turi keturis laisvumo laipsnius ir jo bet kurio taško linijinis poslinkis (įlinkis) $u_k(x)$ bus aprašomas netiesine funkcija. Jai aproksimuoti dažniausiai naudojami Ermito polinomiali. Jų nežinant, bet kurio taško įlinkių funkcijos $u_k(x)$ interpoliavimui per elemento mazginius taškus, Ermito polinomus galima gauti interpoliacines funkcijas parenkant tam tikro polinomo pavidalu.

Žinome, kad lenkiamo strypo išlenktos ašies formos tinkama aproksimuojančioji funkcija yra kubinis polinomas:

$$u_k(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [P] \cdot \{a\}. \quad (2.9)$$

Šios įlinkių (poslinkių) funkcijos interpoliacijos taškai yra elemento mazginiai taškai $x = 0$ ir $x = l$, kuriuose yra duotos ne tik įlinkio funkcijos (2.9) reikšmės, bet ir jo pirmosios išvestinės (kampiniai poslinkiai):

$$\varphi_k(x) = -\frac{du_k(x)}{dx} = -(a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2) \quad (2.10)$$

Irašę į funkcijas (2.9) ir (2.10) elemento mazginių taškų koordinates, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\left. \begin{aligned} u_k(x=0) &= u'_{k1} = a_0, \\ \varphi_k(x=0) &= u'_{k2} = -a_1, \\ u_k(x=l) &= u'_{k3} = a_0 + a_1 \cdot l + a_2 \cdot l^2 + a_3 \cdot l^3, \\ \varphi_k(x=l) &= u'_{k4} = -a_1 - 2a_2 \cdot l - 3a_3 \cdot l^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Matricinėje – vektorinėje formoje lygybių sistema (2.11) yra užrašoma taip:

$$\begin{Bmatrix} u'_{k1} \\ u'_{k2} \\ u'_{k3} \\ u'_{k4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

arba trumpiau

$$\{u'_k\} = [C] \cdot \{a\}. \quad (2.12a)$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname polinomo koeficientų išraiškas per elemento mazginių taškų poslinkius:

$$\begin{aligned}a_0 &= u'_{k1}, \\a_1 &= u'_{k2}, \\a_2 &= -\frac{3}{l^2}u'_{k1} + \frac{2}{l}u'_{k2} + \frac{3}{l^2}u'_{k3} + \frac{1}{l}u'_{k4}, \\a_3 &= \frac{2}{l^3}u'_{k1} - \frac{1}{l^2}u'_{k2} - \frac{2}{l^3}u'_{k3} - \frac{1}{l^2}u'_{k4}.\end{aligned}$$

Užrašę matricomis, turime:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^3} & \frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & -\frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u'_{k1} \\ u'_{k2} \\ u'_{k3} \\ u'_{k4} \end{Bmatrix} = [C]^{-1} \{u'_k\} \quad (2.13)$$

Šias polinomo koeficientų išraiškas įstatę į (2.9) gauname elemento bet kurio taško linijinio poslinkio (įlinkio) išraišką per šio elemento mazginių taškų poslinkius:

$$u_k\{x\} = u'_{k1} - u'_{k2} \cdot x + \left(-\frac{3}{l^2}u'_{k1} + \frac{2}{l}u'_{k2} + \frac{3}{l^2}u'_{k3} + \frac{1}{l}u'_{k4}\right) \cdot x^2 + \left(\frac{2}{l^3}u'_{k1} - \frac{1}{l^2}u'_{k2} - \frac{2}{l^3}u'_{k3} - \frac{1}{l^2}u'_{k4}\right) \cdot x^3$$

Sutraukę panašius narius gauname:

$$u_k(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right)u'_{k1} + \left(-x + \frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}\right)u'_{k2} + \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right)u'_{k3} + \left(\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}\right)u'_{k4}. \quad (2.14)$$

Šių operacijų matricinė forma, įvertinus aukščiau vartotus žymėjimus, parašoma taip:

$$u_k(x) = [P] \cdot [C]^{-1} \cdot \{u'_k\} = [N_k(x)] \cdot \{u'_k\} \quad (2.14a)$$

arba

$$u_k(x) = N_1(x) \cdot u'_{k1} + N_2(x) \cdot u'_{k2} + N_3(x) \cdot u'_{k3} + N_4(x) \cdot u'_{k4}.$$

čia

$$[N_k(x)] = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)]$$

yra vadinama elemento formos funkcijų matrica, kurios nariai yra Ermito kubiniai polinomai:

$$\left. \begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3, \\ N_2(x) &= -x + \frac{2}{l}x^2 - \frac{1}{l^2}x^3, \\ N_3(x) &= \frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3, \\ N_4(x) &= \frac{1}{l}x^2 - \frac{1}{l^2}x^3. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Lenkiamo elemento formos funkcijų matricai $[N_k(x)]$ apskaičiuoti, pakanka tiesiog užprogramuoti (2.14) formulę. Šios paprogramės sistemoje MATLAB fragmentas gali būti toks:

```
% LENKIAMO ELEMENTO FORMOS FUNKCIJŲ MATRICOS Nk(x)
FORMAVIMAS
% L - elemento ilgis, x - bet kurio mazgo koordinatė
% [C] - poslinkių funkcijos interpoliavimo taškų koordinačių matrica
(2.12)
% [P] - polinomo kintamųjų matrica (2.9)
Syms L x
C = [1 0 0 0; 0 -1 0 0 ;
      1 L L^2 L^3; 0 -1 -2*L -3L^2]
P = [1 x x^2 x^3]
% Formos funkcijų matrica skaičiavimas
N = P*inv(C)
```

1.3.2.2. Deformacijų aproksimacija mazginiais poslinkiais

Nagrinėjame palyginti didelių poslinkių atveją, kai maksimalaus įlinkio ir skerspjūvio charakteringojo matmens (skerspjūvio aukščio h) santykis tenkina šias ribas: $\frac{1}{5} \leq \frac{u_{max}}{h} \leq 5$.

Tuomet ryšys tarp deformacijų ir poslinkių yra netiesinis. Monografijoje [1] yra išvestos šio ryšio formulės bet kokios formos erdviniam apibendrintos formos elementui kreivalinijinėje ortogonalioje koordinačių sistemoje. Jos susieja elemento viduriniojo paviršiaus deformacijas su šio paviršiaus taškų poslinkiais. Šias priklausomybes galime panaudoti ir lenkiamos strypinės sistemos elementui, tarus, kad kreivalinijinės koordinatės sutampa su stačiakampe Dekarto koordinačių sistema. Šiuo atveju ašys $\alpha_1 = x_1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = x_2$. Jas lydinčios pirmos kvadratinės formos koeficientų funkcijos $A_1 = 1$ ir $A_2 = 1$, o kreivio spinduliai $R_1 = R_2 = \infty$. Tuomet strypo ašies išilginė deformacija

$$\Delta_{11} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{u_3}{R_1} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{1}{A_1 R_1} u_1 + \frac{u_1}{2 R_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{2 A_1^2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2.$$

Mes jau padarėme prielaidą, kad strypo ilgis nekinta, tai reiškia, kad $u_1 = 0$. Tuomet gauname (įvertinus tai, kad u_3 tampa įlinkių funkcija $u(x)$):

$$\Delta_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2.$$

Esant palyginti dideliems poslinkiams strypo ašies kreivis

$$\chi_{11} = \frac{1}{A_1 R_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2 R_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1^3} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1}{A_1 A_2^2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}$$

Kirchhofo – Lavo (plokščių pjūvių) teorijoje suminė išilginė deformacija bus gaunama taip:

$$\varepsilon = \Delta_{11} + y \cdot \chi_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 + y \cdot \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

čia y – atstumas nuo strypo neutraliosios linijos.

Paprastumo dėlei nagrinėjamas strypinis elementas, kurio simetrinio skerspjūvio plotis b , aukštis h , ilgis l . Tariame, kad elementas yra veikiamas tik tarpelementinėmis sąveikos jėgomis $\{F_k\}$. Tuomet strypinio elemento pusiausvyros lygtis (2.6) įgaus tokį pavidalą:

$$\{\Psi_k(u_k)\} - \{F_k\} = 0, \quad (2.17)$$

o elemento vidinių jėgų vektorius (2.6a) bus užrašomas taip:

$$\{\Psi_k(u_k)\} = b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \{u\}} \right\}^T \cdot \sigma \cdot dx_1 \cdot dx_2. \quad (2.18)$$

Toliau vidinių jėgų vektoriaus dešiniąją pusę išreiškiame elemento mazginių taškų poslinkiais, įrašę į deformacijų ε išraišką (2.16) poslinkių aproksimacijos funkcijas (2.14). Tam tikslui skaičiuojame išvestines:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left([N_k(x)] \{u'_k\} \right) = [C_1(x)] \cdot \{u'_k\}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left([C_1(x)] \cdot \{u'_k\} \right) = [C_2(x)] \cdot \{u'_k\}, \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^T \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \{u'_k\}^T \cdot [C_1(x)]^T \cdot [C_1(x)] \cdot \{u'_k\} = \{u'_k\}^T \cdot [C_3(x)] \cdot \{u'_k\} \quad (2.21)$$

$$[C_1(x)] = \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^2}x + \frac{6}{l^3}x^2 & -1 + \frac{4}{l}x - \frac{3}{l^2}x^2 & \frac{6}{l^2}x - \frac{6}{l^3}x^2 & \frac{2}{l}x - \frac{3}{l^2}x^2 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$[C_2(x)] = \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}x & \frac{4}{l} - \frac{6}{l^2}x & \frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3}x & \frac{2}{l} - \frac{6}{l^2}x^2 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Gauname deformacijų funkciją, išreikštą mazginiais poslinkiais:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \{u'_k\}^T \cdot [C_3(x)] \cdot \{u'_k\} + y [C_2(x)] \cdot \{u'_k\} \quad (2.24)$$

Poslinkių funkcijos išvestinių skaičiavimui patartina naudoti MATLAB sistemos simbolinius skaičiavimus. Šios paprogramės teksto fragmentas gali būti toks:

```

% Poslinkių formos funkcijų išvestinių (2.19), (2.20), (2.21)
%SKAIČIAVIMAS
Syms L x
C1 = diff(N)
C2 = diff(C1)
C1t = C1;
C3 = C1t*C1

```

1.3.2.3. Elemento tangentinė standumo matrica

Išrašę (2.24) išraišką į (2.18), elemento vidinių jėgų vektorius užrašomas taip:

$$\begin{aligned}
\{\Psi_k(u)\} &= b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial \{u\}} \left(\frac{1}{2} \{u'_k\}^T \cdot [C_3(x)] \cdot \{u'_k\} + y[C_2(x)] \cdot \{u'_k\} \right)^T \sigma dx dy = \\
&= b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot \{u'_k\} \cdot \sigma dx dy + b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l y[C_2(x)]^T \cdot \sigma dx dy = \\
&= b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \left([C_3(x)]^T \cdot \{u'_k\} + y[C_2(x)]^T \right) \cdot \sigma dx dy
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Panaudoję 1.3.1 skyrelyje išdėstytą metodiką (2.7), užrašome elemento standumo matricą tokiu pavidalu:

$$\begin{aligned}
[K_\tau(u)] &= \frac{\partial \{\Psi_k(u)\}}{\partial \{u\}} = b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial \{u\}} \left([C_3(x)]^T \{u'_k\} + y[C_2(x)]^T \right) \cdot \sigma dx dy = \\
&= b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot \sigma dx dy + b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \left([C_3(x)]^T \cdot \{u'_k\} + y[C_2(x)]^T \right) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \{u\}} dx dy =
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Iš sąlygų $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ir (1.24) įtempiai elemente išreiškiami mazginiais poslinkiais:

$$\sigma = \frac{1}{2} E \{u'_k\}^T [C_3(x)] \cdot \{u'_k\} + y \cdot E [C_2(x)] \cdot \{u'_k\} \tag{2.27}$$

čia E – medžiagos tamprumo modulis. Gautos įtempimų funkcijos (2.27) dešinėje pusėje pirmasis narys yra pastovus dydis elemento skerspjūvyje, o antrasis – proporcingas atstumui y nuo neutraliosios linijos.

Skaiciuojame įtempimų funkcijos (1.27) išvestinę:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \{u\}} = E \left[\left\{ u'_k \right\}^T \cdot [C_3(x)] + y \cdot E[C_2(x)] \right]. \quad (2.28)$$

Išrašę (2.28) išraišką į (2.26), elemento tangentinę standumo matricą užrašome taip:

$$\begin{aligned} [K_\tau(u)] &= b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l [C_3(x)] \cdot \sigma \cdot dx dy + b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l \left([C_3(x)]^T \left\{ u'_k \right\} + \right. \\ &\quad \left. + y [C_2(x)]^T \right) \cdot E \cdot \left(\left\{ u'_k \right\}^T [C_3(x)] + y [C_2(x)] \right) dx dy = \\ &= \underbrace{Eb \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l y^2 [C_2(x)]^T [C_2(x)] \cdot dx dy}_{\text{matrica } [K'_e]} + \underbrace{b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l [C_3(x)] \cdot \sigma dx dy}_{\text{matrica } [K'_g]} + \\ &+ \underbrace{Eb \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l \left([C_3(x)]^T \cdot \left\{ u'_k \right\} [C_2(x)] \cdot y + y [C_2(x)]^T \left\{ u'_k \right\}^T [C_3(x)] + [C_3(x)]^T \left\{ u'_k \right\} \left\{ u'_k \right\}^T [C_3(x)] \right) \cdot dx dy}_{\text{matrica } [K'_u]} = \\ &= [K'_e] + [K'_g] + [K'_u]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Čia vienu brūkšniu pažymėtas integralas yra matrica $[K'_e]$, dviem – matrica $[K'_g]$ ir trim – matrica $[K'_u]$. Akivaizdu, kad didelių poslinkių strypo elemento tangentinė standumo matrica geometrijos kitimo požiūriu susideda iš trijų matricų. Pirmoji iš jų, t.y. $[K'_e]$ sutampa su mažų poslinkių elemento standumo matrica. Antroji – $[K'_g]$ yra vadinama *geometrine standumo matrica*. Trčioji matrica, $[K'_u]$, vadinama *pradinių poslinkių matrica*. Toliau aptarsime jų sudarymo ypatumus.

1.4. Tangentinės standumo matricos sudarymo ypatumai

1.4.1. Mažų poslinkių elemento standumo matrica

Pasitelkus (2.29) formulę, mažų poslinkių elemento standumo matrica, (nuo geometrijos kitimo nepriklausanti), užrašoma taip:

$$[K'_e] = Eb \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l y^2 [C_2(x)]^T [C_2(x)] dx dy \quad (2.30)$$

Atlikę pointegraliniame reiškinyje algebrinius veiksmus turime:

$$[K'_e] = Eb \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \int_0^l \begin{bmatrix} \left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right)^2 & \left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right)\left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) & \left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right)\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) \\ \left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right)\left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) & \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)^2 & \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) \\ \left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right)\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right)^2 \\ \left(\frac{-6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right)\left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) & \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)\left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right)\left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \\ \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)\left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) & \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right)^2 & \end{bmatrix} dx.$$

Suintegravę gauname mažų poslinkių lenkiamo strypinio elemento standumo matricą lokallioje koordinatų sistemoje:

$$[K'_e] = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

čia

$$I = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = b \left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

yra skerspjūvio ašinis inercijos momentas.

Mažų poslinkių elemento standumo matricą galima gauti tiesiog užprogramavus (2.30) formulę sistemoje MATLAB. Šių skaičiavimų programos teksto fragmentas atrodytų taip:

```
% Mažų poslinkių elemento standumo matricos sudarymas pagal
(2.30)
% E - tamprumo modulis
% I - inercijos momentas
% L - elemento ilgis
Syms L, x, E, I
C2t = C2.';
Ke = int(C2t*C2, 0, L)
Kel = E*I*Ke
```

1.4.2. Elemento geometrinė standumo matrica

Didelių poslinkių lenkiamo skerspjūvio elemento geometrinė standumo matrica, kaip pažymėta (2.29) išraiškoje, yra užrašoma taip:

$$[K'_g] = b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot \sigma dx dy. \quad (2.32)$$

Ši matrica nusako normalinių įtempių $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ įtaką lenkiamo strypo standumui. Didelių poslinkių lenkiamo strypo normaliniai įtempiai (2.27) susideda iš pastovių elemento skerspjūvyje tempimo ar gniuždymo įtempių

$$\frac{1}{2} E \{u'_k\}^T [C_3(x)] \{u'_k\} = \sigma_1 \quad (2.33)$$

ir lenkimo įtempių, kintančių elemento skerspjūvyje pagal tiesinį dėsnį

$$E[C_2(x)] \{u'_k\} = \sigma_2. \quad (2.34)$$

Įrašę (2.33) ir (2.34) išraiškas į (2.27) ir (2.32), geometrinę standumo matricą užrašome taip:

$$\begin{aligned} [K'_g] &= b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \cdot dy \int_0^l [C_3(x)] dx + b \int_{-h/2}^{h/2} y dy \cdot \sigma_2 \int_0^l [C_3(x)] dx = \\ &= b y \Big|_{-h/2}^{h/2} \cdot \sigma_1 \int_0^l [C_3(x)] dx + b \frac{y^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2} \cdot \sigma_2 \int_0^l [C_3(x)] dx = \\ &= bh\sigma_1 \cdot \int_0^l [C_3(x)] dx + b \left(\frac{h^2}{8} - \frac{h^2}{8} \right) \cdot \int_0^l [C_3(x)] dx = bh\sigma_1 \int_0^l [C_3(x)] dx. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Atlikę pointegraliniame reiškinyje algebrinius veiksmus, turime, kad:

$$[K'_g] = bh\sigma_1 \int_0^l \begin{bmatrix} \left(\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right)^2 & \left(\frac{-6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right)\left(-1 - \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right)\left(\frac{-6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right)\left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right) \\ \left(\frac{-6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right)\left(-1 + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right)\left(-1 + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right)^2 & \left(-1 + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right)\left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right) \\ \left(\frac{-6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right)\left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right) & \left(-1 + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right)\left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right) & \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right)^2 \\ \left(\frac{-6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right)\left(\frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right) & \left(-1 + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right)\left(\frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right) & \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right)\left(\frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right) \\ & \left(\frac{-6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right)\left(\frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right) \\ & \left(-1 + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right)\left(\frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right) \\ & \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right)\left(\frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right) \\ & \left(\frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Suintegravę gauname didelių poslinkių lenkiamo elemento geometrinę standumo matricą lokaliajoje koordinačių sistemoje:

$$[K'_g] = A\sigma_1 \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15l} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30l} \\ -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30l} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15l} \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

čia A – elemento skerspjūvio plotas. Pažymėsime, kad geometrinės standumo matricos išraiškoje (2.37) vartojama pastovi elemento skerspjūvyje normalinių įtempių dedamoji σ_1 yra apskaičiuojama pagal formulę (2.33). Šiuo atveju šis normalinis įtempis yra koordinačių x funkcija. Jis gali būti apskaičiuojamas dviem būdais. Pirmuoju – tai skaitiškai integruojant elemento ilgyje l . Tam tikslui suvidurkintą elemente įtempio σ_1 reikšmę galime gauti

panaudojant sistemoje MATLAB keturių taškų Gauso formulę. Programos teksto fragmentas šiam skaičiavimui yra toks [8]:

```
% ELEMENTO ILGYJE SUVIDURKINTAS DIDELIŲ POSLINKIŲ SĄLYGOTAS
ĮTEMPIS  $\sigma_1$ 

% ukl - žinomas elemento mazginių poslinkių lokaliojoje
sistemoje vektorius

% C1 - matrica, sudaryta iš poslinkių funkcijos išvestinių
(2.19)

% DC - duotų konstantų masyvas
% DC(1) - elemento ilgis L
% DC(2) - tamprumo modulis E
% DC(3) - skerspjūvio plotas A
DC=[];E=DC(1); A=DC(2);
L=DC(3); ukl=[];
SV=0;
x=L/2+0.339981*L/2;
SV=SV+0.652145*ukl'*C1'*C1*ukl;
X=L/2-0.339981*L/2;
SV=SV+0.652145*ukl'*C1'*C1*ukl;
X=L/2+0.8611363*L/2;
SV=SV+0.347855*ukl'*C1'*C1*ukl;
X=L/2-0.8611363*L/2;
SV=SV+0.347855*ukl'*C1'*C1*ukl;
SV=SV*L/2;
sigma1=SV*E/2;
Kg1=A*sigma1*[6/5/L    -1/10    -6/5/L    -1/10;
               -1/10    2/15/L    1/10     -1/30/L;
               -6/5/L    1/10     6/5/L     1/10;
               -1/10    -1/30/L    1/10     2/15/L];
```

Antruoju būdu elemento ilgyje pastovų įtempį σ_1 galime gauti analitiškai integruojant elemento ilgyje l (2.33) formulės kairiąją pusę, t.y.:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} E \int_0^l \{u'_k\}^T [C_3(x)] \{u'_k\} dx = \frac{1}{2} E \{u'_k\}^T \int_0^l [C_3(x)] dx \cdot \{u'_k\}.$$

Suintegravę gauname:

$$[\sigma_1] = \frac{1}{2} E \cdot \{u'_k\}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix} \cdot \{u'_k\}, \quad (2.38)$$

čia l – elemento ilgis, $\{u'_k\}$ – žinomas elemento mazginių poslinkių vektorius.

Geometrinės standumo matricos formavimas pagal (2.37) arba (2.38) formules yra atliekamas, kai skaičiavimo patogumo sumetimais vartojama pastovi (suvidurkinta) elemento skerspjūvio įtempių dedamoji σ_1 . Atsisakius pastovaus įtempio elemento ilgyje koncepcijos, didelių poslinkių elemento geometrinę standumo matricą formuojame analitiškai integruojant (2.32) formulę. Tam tikslui į (2.32) įrašome įtempių funkcijos σ analitinę išraišką mazginiais poslinkiais (2.27) ir gauname:

$$\begin{aligned}
[K'_g] &= b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot \left(\frac{1}{2} E \{u'_k\}^T [C_3(x)] \cdot \{u'_k\} + y E [C_2(x)] \right) dx dy = \\
&= \frac{1}{2} E b \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_0^l [C_3(x)] \cdot \{u'_k\} \cdot [C_3(x)] \{u'_k\} dx + E b \int_{-h/2}^{h/2} y dy \int_0^l [C_3(x)] [C_2(x)]^T \{u'_k\} dx = \\
&= \frac{1}{2} E b h \int_0^l [C_3(x)] \{u'_k\} \cdot [C_3(x)] \{u'_k\} dx,
\end{aligned}
\tag{2.39}$$

nes globaliojoje (2.38) formulės išraiškoje integruodami antrojo integralo narius, padauginčius iš kintamojo y , gauname nulį.

Kai elemento mazginiai poslinkiai $\{u'_k\}$ yra žinomi, matricą $[K'_g]$ gauname, atlikę (2.38) formulės simbolinius skaičiavimus MATLAB terpėje. Programos tekstas yra toks:

```

% GEOMETRINĖS MATRICOS PAGAL FORMULĘ (2.39) SKAIČIAVIMAS
% naudojame simbolinių perdirbimų kompiuterinę programą
% C1 - poslinkių funkcijos išvestinė (1.19)
syms x, L, u1, u2, u3, u4, E, A
C1=[-G*x/L^2+6*x^2/L^3, -1+4*x/L-3*x^2/L^2,
     6*x/L^2-6*x^2/L^3, 2*x/6-3*x^2/L^2];
C1t=C1.';
U=[u1; u2; u3; u4];
Ut=u.';
% u - mazginių poslinkių vektorius lokalliojoje sistemoje
% Skaičiuojame įtempių funkcijos (2.27) reikšmę
Sigma=0.5*E*ut*C1t*C1*u;
% Čia (2.27) formulės antrojo nario nėra, kadangi
integruodami narius, padauginčius iš kintamojo y, gauname
nulius, kaip parodyta (2.39).
% Skaičiuojame elemento geometrinę standumo matricą
Kg1=int(0.5*E*A*sigma*(C1t*C1), 0, L)
% Galimas ir toks veiksmas
% Kg1=int(0.5*E*A*ut*C1t*C1*u*(C1t*C1), 0, L)

```

Suskaičiuota geometrinės matricos simbolinė išraiška:

$$\begin{aligned}
[K_g'] &= [3/70 * E * A / l^3 * (u_2^2 * l^2 - 6 * u_2 * l * u_1 + 6 * u_2 * l * u_3 + 24 * u_1^2 - 48 * u_3 * u_1 - \\
&6 * u_4 * l * u_1 + 24 * u_3^2 + 6 * u_3 * u_4 * l + u_4^2 * l^2), \\
&1/280 * E * A / l^2 * (u_2^2 * l^2 + 24 * u_2 * l * u_1 - 24 * u_2 * l * u_3 - 2 * u_2^2 * l^2 * u_4 - 36 * u_1^2 + 72 * u_3 * u_1 - \\
&36 * u_3^2 - u_4^2 * l^2), \quad -3/70 * E * A / l^3 * (u_2^2 * l^2 - 6 * u_2 * l * u_1 + 6 * u_2 * l * u_3 + 24 * u_1^2 - \\
&48 * u_3 * u_1 - 6 * u_4 * l * u_1 + 24 * u_3^2 + 6 * u_3 * u_4 * l + u_4^2 * l^2), \\
&-1/280 * E * A / l^2 * (u_2^2 * l^2 + 2 * u_2 * l^2 * u_4 + 36 * u_1^2 - 72 * u_3 * u_1 - \\
&24 * u_4 * l * u_1 + 36 * u_3^2 + 24 * u_3 * u_4 * l - u_4^2 * l^2)] \\
&[1/280 * E * A / l^2 * (u_2^2 * l^2 + 24 * u_2 * l * u_1 - 24 * u_2 * l * u_3 - 2 * u_2^2 * l^2 * u_4 - 36 * u_1^2 + 72 * u_3 * u_1 - \\
&36 * u_3^2 - u_4^2 * l^2), 1/420 * E * A / l * (12 * u_2^2 * l^2 + 3 * u_2 * l * u_1 - 3 * u_2 * l * u_3 - \\
&3 * u_2^2 * l^2 * u_4 + 18 * u_1^2 - 36 * u_3 * u_1 - 3 * u_4 * l * u_1 + 18 * u_3^2 + 3 * u_3 * u_4 * l + u_4^2 * l^2), \\
&-1/280 * E * A / l^2 * (u_2^2 * l^2 + 24 * u_2 * l * u_1 - 24 * u_2 * l * u_3 - 2 * u_2^2 * l^2 * u_4 - 36 * u_1^2 + 72 * u_3 * u_1 - \\
&36 * u_3^2 - u_4^2 * l^2), \quad -1/840 * E * A * (3 * u_2^2 * l + 6 * u_2 * u_1 - 6 * u_2 * u_3 - \\
&4 * u_2 * u_4 * l + 6 * u_4 * u_1 - 6 * u_3 * u_4 + 3 * u_4^2 * l)] \\
&[-3/70 * E * A / l^3 * (u_2^2 * l^2 - 6 * u_2 * l * u_1 + 6 * u_2 * l * u_3 + 24 * u_1^2 - 48 * u_3 * u_1 - \\
&6 * u_4 * l * u_1 + 24 * u_3^2 + 6 * u_3 * u_4 * l + u_4^2 * l^2), \\
&-1/280 * E * A / l^2 * (u_2^2 * l^2 + 24 * u_2 * l * u_1 - 24 * u_2 * l * u_3 - 2 * u_2^2 * l^2 * u_4 - 36 * u_1^2 + 72 * u_3 * u_1 - \\
&36 * u_3^2 - u_4^2 * l^2), \quad 3/70 * E * A / l^3 * (u_2^2 * l^2 - 6 * u_2 * l * u_1 + 6 * u_2 * l * u_3 + 24 * u_1^2 - \\
&48 * u_3 * u_1 - 6 * u_4 * l * u_1 + 24 * u_3^2 + 6 * u_3 * u_4 * l + u_4^2 * l^2), \\
&1/280 * E * A / l^2 * (u_2^2 * l^2 + 2 * u_2 * l^2 * u_4 + 36 * u_1^2 - 72 * u_3 * u_1 - \\
&24 * u_4 * l * u_1 + 36 * u_3^2 + 24 * u_3 * u_4 * l - u_4^2 * l^2)] \\
&[-1/280 * E * A / l^2 * (u_2^2 * l^2 + 2 * u_2 * l^2 * u_4 + 36 * u_1^2 - 72 * u_3 * u_1 - \\
&24 * u_4 * l * u_1 + 36 * u_3^2 + 24 * u_3 * u_4 * l - u_4^2 * l^2), \\
&-1/840 * E * A * (3 * u_2^2 * l + 6 * u_2 * u_1 - 6 * u_2 * u_3 - 4 * u_2 * u_4 * l + 6 * u_4 * u_1 - 6 * u_3 * u_4 + 3 * u_4^2 * l), \\
&1/280 * E * A / l^2 * (u_2^2 * l^2 + 2 * u_2 * l^2 * u_4 + 36 * u_1^2 - 72 * u_3 * u_1 - \\
&24 * u_4 * l * u_1 + 36 * u_3^2 + 24 * u_3 * u_4 * l - u_4^2 * l^2), 1/420 * E * A / l * (u_2^2 * l^2 - \\
&3 * u_2 * l * u_1 + 3 * u_2 * l * u_3 - 3 * u_2^2 * l^2 * u_4 + 18 * u_1^2 - 36 * u_3 * u_1 + 3 * u_4 * l * u_1 + 18 * u_3^2 - \\
&3 * u_3 * u_4 * l + 12 * u_4^2 * l^2)]
\end{aligned}$$

1.4.3. Pradinių poslinkių matrica

Trečioji (2.29) formulės matrica aprašo didelių poslinkių elemento formos pasikeitimą deformavimosi metu. Ji vadinama pradinių poslinkių matrica arba didelių poslinkių matrica ir užrašoma taip:

$$\begin{aligned}
 [K'_u] &= Eb \int_{-h/2}^{h/2} y dy \cdot \int_0^l [C_3(x)]^T \{u'_k\} [C_2(x)] dx + Eb \int_{-h/2}^{h/2} y dy \cdot \int_0^l [C_2(x)]^T \{u'_k\} [C_3(x)] dx + \\
 &\quad + Eb \int_{-h/2}^{h/2} dy \cdot \int_0^l [C_3(x)]^T \{u'_k\} \{u'_k\}^T [C_3(x)] dx = \\
 &= Eb \left(\frac{h^2}{8} - \frac{h^2}{8} \right) \cdot \int_0^l \left([C_3(x)]^T \{u'_k\} [C_2(x)] + [C_2(x)]^T \{u'_k\} [C_3(x)] \right) dx + \\
 &\quad + Eb \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) \cdot \int_0^l [C_3(x)]^T \{u'_k\} \{u'_k\}^T [C_3(x)] dx = \\
 &= Ebh \int_0^l [C_3(x)]^T \{u'_k\} \{u'_k\}^T [C_3(x)] dx.
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

Iš išraiškų (2.33) ir (2.34) matyti, kad geometrinės ir pradinių poslinkių matricų išraiškos yra tokios pačios, tik pradinių poslinkių matrica yra dvigubai didesnė nei geometrinė. Simbolinių skaičiavimų MATLAB terpėje programos tekstas bus toks pats.

Tangentinės standumo matricos *transformacija* iš lokaliųjų komponentų į globaliuosius yra atliekama įprastu keliu. Tam tikslui lokalliojoje koordinačių sistemoje sudaroma elemento krypties kosinusų matrica $[T_{ab}]$ ir gaunama elemento tangentinė standumo matrica globaliojoje sistemoje:

$$[K_\tau] = [T_{ab}]^T \cdot [K'_\tau] \cdot [T_{ab}], \tag{2.35}$$

$$[T_{ab}] = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tangentinės standumo matricos $[K_r']$ formuojamos kiekvienam elementui, vėliau sujungiamos ir gaunama visos sistemos tangentinė standumo matrica $[K_r]$. Pastaroji matrica yra inkorporuojama į prieaugiais užrašytas pusiausvyros lygtis:

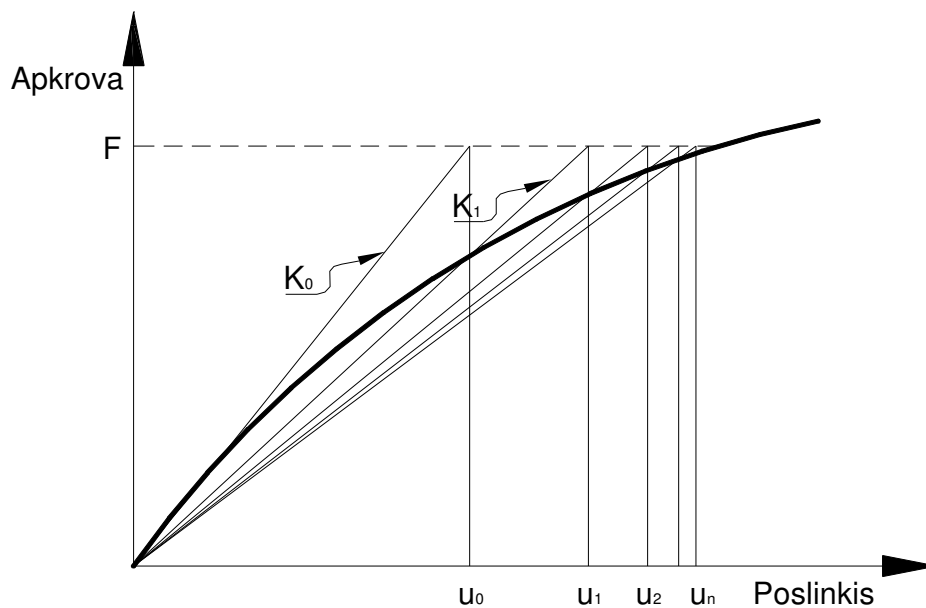
$$[K_r] \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F}. \quad (2.36)$$

čia $\Delta \mathbf{F}$ ir $\Delta \mathbf{u}$ m -mačiai visos konstrukcijos mazginės apkrovos prieaugių ir globaliųjų poslinkių prieaugių vektoriai.

1.5. Netiesinių uždavinių sprendimo metodai

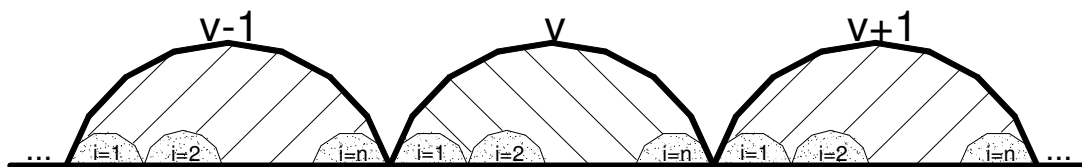
Netiesinių uždavinių sprendimas baigtinių elementų metodu gali būti atliekamas, taikant įvairias metodikas. Išskirsime dvi metodų grupes: tiesioginiai metodai ir prieaugių metodai.

Tiesioginiuose metoduose suskaičiuojamas tik vienas galutinis sprendinys, nekreipiant dėmesio į visą deformavimo istoriją. Sprendimas atliekamas iteracijomis, kiekvienoje iteracijoje tikslinant nežinomojo vektoriaus reikšmę [7]. Skaičiavimas pradedamas priėmus pradinį standumą ir atliekamas iki tol, kol pasiekiamas pasirinktas (poslinkių vektorius) tikslumas (2.3 pav.).



2.3 pav. Tiesioginio metodo principinė schema

Prieaugių metoduose skaičiavimai atliekami žingsniniu metodu. Žingsniniai metodai, grindžiami apkrovos prieaugių seka. Tuomet konstrukcijos įtempto - deformuoto būvio iteracijos gale gauti parametrai yra naudojami kitos iteracijos uždaviniui. Visoje apkrovimo sekoje yra sprendžiami tiesiniai uždaviniai ir po baigtinio skaičiaus iteracijų yra pasiekiamas sprendinys [7]. Prieaugių metodas leidžia nustatyti ne tik galutinę fizinės būsenos tašką, bet ir jo susidarymo istoriją (2.4 pav.).



2.4 pav. Prieaugių metodo principinė schema (v – apkrovos prieaugis, i – iteracijos numeris)

Išskiriami keturi netiesinių sistemų sprendimo algoritmai:

- apkrovos kontrolės metodas;
 - paprastas pakrovos prieaugių metodas;
 - Newton - Raphson metodas;
- poslinkių kontrolės metodas;
- arkos ilgio kontrolės metodas;
- darbų kontrolės metodas.

Paprastų apkrovos prieaugių metode į nesąryšį tarp vidinių ir išorinių jėgų nekreipiama dėmesio. Per vieną apkrovos prieaugį nėra iteracijų. Pagrindinis metodo privalumas – paprastas taikymas, tačiau per kiekvieną žingsnį kaupiasi paklaidos, kurios gali būti didelės netiesinėse sistemose.

Apkrovos kontrolės *Newton – Raphson metode* kiekviename apkrovos prieaugio žingsnyje daromos iteracijos eliminuoti nesubalansuotas jėgas. Šios paklaidos atsiranda ištiesinant uždavinį, t.y. standumų matrica formuojama pagal paskutinės iteracijos rezultatus. Jei nesubalansuotos jėgos nebus mažinamos, skaičiavimo rezultatai gali labai skirtis nuo tikrojo būvio. Iteracijos baigiamos, kai pasiekiamas užsiduotas įrašų ir poslinkių tikslumas.

Poslinkių kontrolės metode yra priimami poslinkių prieaugiai. Jie didinami iki tol, kol pasiekiamas pridėta apkrova. Reikšmė suteikiama tik vienam poslinkiui, nes sistema yra netiesinė ir poslinkiai kinta netiesiškai. Iteracijos kartojamos kol gaunamas sprendinio konvergavimas. Poslinkio numerio ir jo reikšmės pasirinkimas labai nulemia sprendinio konvergavimą.

Arkos ilgio kontrolės metode, kaip ir poslinkių kontrolės metode, apkrovos prieaugis nėra žinomas. Prie poslinkio kontrolės metodo lygčių papildomai dar užrašoma ir statmenumo lygtis (ja apribojamas žingsnių skaičius).

Darbų kontrolės metode parenkamas apkrovos prieaugis. Pusiausvyros paklaidos iteracijose nustatomos naudojant darbų lygtį.

Atliekant skaičiavimus bus naudojamas Newton - Raphson apkrovos kontrolės metodas, kuris plačiau ir aptariamas.

1.6. Newton – Raphson apkrovos kontrolės metodas

Netiesinių lygčių sistemos sprendimui naudosime Newton-Raphson iteracinį apkrovos kontrolės metodą [10, 11, 14], kadangi apkrovos - poslinkių kreivė yra iškilą funkcija. Konstrukcijos optimizacija atliekama nepasiekus visiško plastiškojo suirimo. Dėl šios priežasties tangentinė standumo matrica negali būti nulinė: $[K_\tau] \neq 0$.

Aptarsime Newton – Raphson metodą, kurio principinė schema yra parodyta 2.5 pav. Joje parodyti konstrukcijos netiesinę elgseną charakterizuojantieji dydžiai. Taikant šį metodą, apkrovos vektorius $\{F\}$ yra skaidomas į dalis ir kiekvieno žingsnio metu didinamas tam tikru prieaugiu $\{\Delta F_v\}$ (2.5 pav.). Kiekvieno apkrovos prieaugio žingsnyje v daromos iteracijos i , eliminuoti nesubalansuotas jėgas $\{F_c\}_v^i$. Jos atsiranda dėl nesubalansuotų mazgo vidinių ir išorinių jėgų (2.5 pav.):

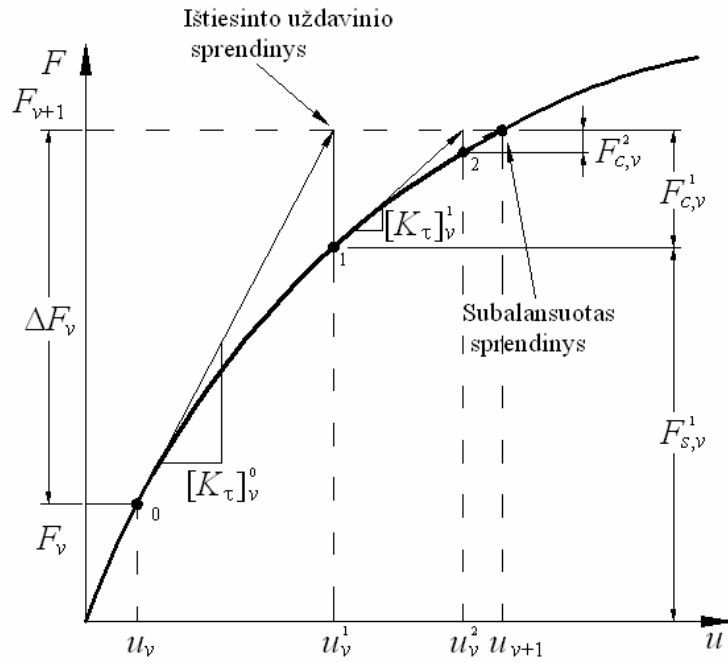
$$\{F_c\}_v^i = \{F\}_{v+1} - \{F_s\}_v^i. \quad (2.37)$$

čia $\{F_c\}_v^i$ – nesubalansuotų mazginių jėgų vektorius v -tojo žingsnio i -tosios iteracijos gale; $\{F\}_{v+1}$ – mazgo išorinių jėgų vektorius v -tojo žingsnio gale; $\{F_s\}_v^i$ – mazginių vidinių jėgų vektorius v -tojo žingsnio i -tosios iteracijos gale.

Šios paklaidos atsiranda ištiesinant uždavinį, t. y. standumo matrica formuojama naudojant prieš tai buvusios iteracijos metu gautus rezultatus.

Aptarsime vieno apkrovos prieaugio (žingsnio) iteracinio skaičiavimo metodiką.

Darome prielaidą, kad globaliųjų poslinkių vektorius $\{u\}_v$ ir apkrovos lygis $\{F\}_v$ nagrinėjamojo žingsnio v pradžioje yra žinomi. Tuomet v -tojo apkrovos žingsnio metu skaičiavimai atliekami vykdant tokias operacijas:



2.5 pav. Newton-Raphson metodas

1. Nustatomas naujas apkrovos lygio vektorius

$$\{F\}_{v+1} = \{F\}_v + \{\Delta F\},$$

čia $\{\Delta F\}$ yra apkrovos prieaugių vektorius.

2. Suformuojama v apkrovimo žingsnio i -tosios iteracijos konstrukcijos tangentinė standumo matrica $[K_\tau]_v^i$ (iš paskirų elementų tangentinių standumo matricų (2.35)) ir nustatomas jos determinantas. Jeigu determinantas yra neigiamas, teigiam, kad konstrukcija yra geometriškai judri ir skaičiavimai baigiami. Jeigu determinantas yra teigiamas, sudaromos prieauginės pusiausvyros lygtys (2.36) nesubalansuotoms mazginėms jėgoms $\{F_c\}_v^i$ skaičiuoti:

$$[K_\tau]_v^i \{\Delta u\}_v^i = \{F_c\}_v^i. \quad (2.38)$$

3. Sprendžiama tiesinių lygčių sistema (2.38) ir gaunamas vykdomojo v žingsnio i -tosios iteracijos globaliųjų poslinkių prieaugių vektorius:

$$\{\Delta u\}_v^i = \left([K_\tau]_v^i \right)^{-1} \{F_c\}_v^i. \quad (2.39)$$

4. Skaičiuojami nauji globalieji mazgų poslinkiai. Tam tikslui prie nuo nesubalansuotų mazginių jėgų gautųjų poslinkių prieaugių (2.39) pridedamos ankstesnėje iteracijoje gautosios globaliųjų poslinkių reikšmės:

$$\{u\}_v^i = \{u\}_v^{i-1} + \{\Delta u\}_v^i. \quad (2.40)$$

5. Skaičiuojamos naujos mazgų koordinatės:

$$\{x_v\}_v^i = \{x\}_v^{i-1} + \{u\}_v^i. \quad (2.41)$$

Toliau skaičiuojami nauji elementų ašies pasvirimo krypčių kosinusai, sudaromos elementų koordinačių transformavimo matricos $[T_{ab}]_v^i$ ir fiktyvioji pusiausvyros lygčių matrica $[\bar{A}]_v^i$ iš paskirų baigtinių elementų pusiausvyros lygčių matricų $[A'_{ab}]_v^i$.

Tam tikslui užrašome elemento apkrovos prieaugio v -ojo žingsnio i -tosios iteracijos pusiausvyros lygtis tarp elemento galų ir lokaliųjų mazginių jėgų:

$$[A'_{ab}]_v^i \cdot \{S_{ab}\} = \{F_k'\}.$$

Čia pusiausvyros lygčių koeficientų matrica yra tokia:

$$[A'_{ab}]_v^i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

6. Nustatomi elementų vidinių jėgų prieaugių dydžiai

$$\{\Delta S_{ab}\}^i = [k]_v^i \left([A'_{ab}]_v^i \right)^T [T_{ab}]_v^i \{\Delta u_{ab}\}_v^i, \quad (2.43)$$

$$[k]_v^i = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}.$$

Sudaromas globaliųjų vidinių jėgų prieaugių vektorius:

$$\{\Delta S\}_v^i = \{\Delta S_{1,v}^i, \Delta S_{2,v}^i, \dots, \Delta S_{ab,v}^i, \dots, \Delta S_{s,v}^i\}^T,$$

čia S – yra baigtinių elementų skaičius.

7. Skaičiuojami konstrukcijos elementų vidinių mazginių jėgų prieaugiai:

$$\{\Delta \bar{F}_s\}_v^i = [\bar{A}]_v^i [\Delta S]_v^i.$$

8. Nustatomas globalusis mazginių jėgų prieaugių vektorius

$$\{\Delta F_s\}_v^i = [C]^T [\Delta \bar{F}_s]_v^i, \quad (2.44)$$

čia $[C]$ – lokaliųjų ir globaliųjų mazginių poslinkių ryšio matrica. Ją sudaro vienetai arba nuliai.

9. Skaičiuojamos v apkrovos prieaugio žingsnio i -tosios iteracijos pabaigos suminės elementų mazginės jėgos ir įrašos :

$$\{F_s\}_v^i = \{F_s\}_v^{i-1} + \{\Delta F_s\}_v^i, \quad (2.45)$$

$$\{S\}_v^i = \{S_s\}_v^{i-1} + \{\Delta S\}_v^i. \quad (2.46)$$

10. Skaičiuojamos nesubalansuotas (kompensacines) mazginės jėgos (2.37).

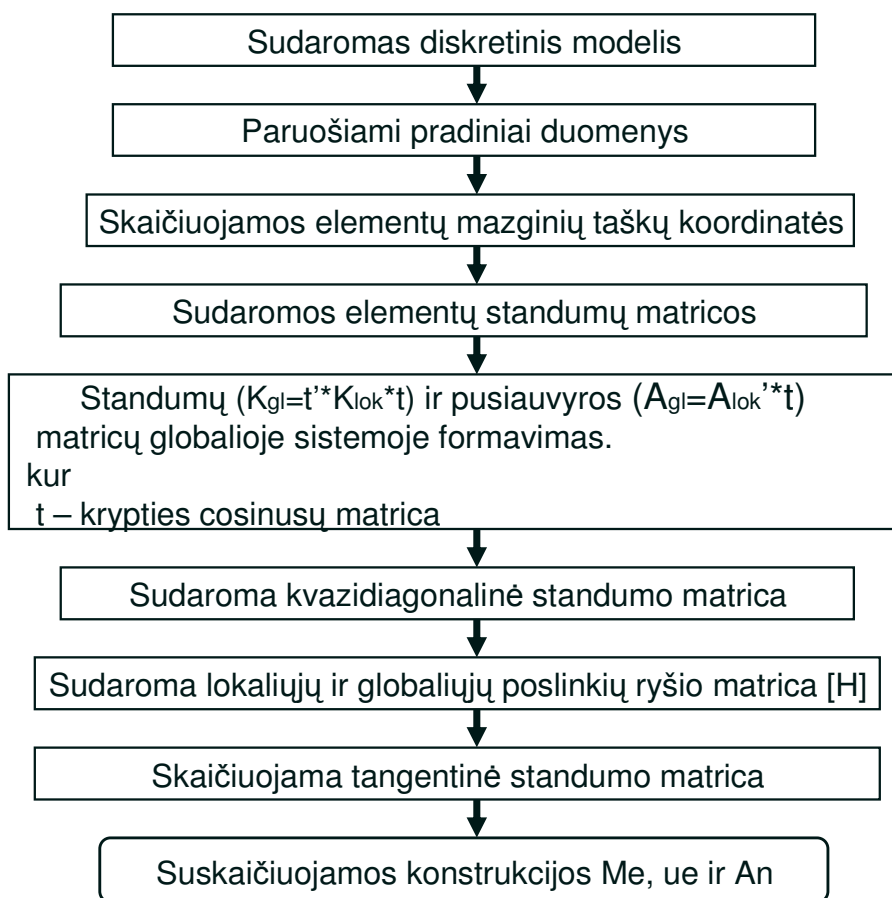
11. Tikrinama pasirinkto tikslumo konvergencijos sąlyga:

$$\{F_c\}_v^i - \{F_c\}_v^{i-1} \leq \text{eps?}$$

Jei ši sąlyga netenkinama, toliau vykdomas žingsninis skaičiavimas, t. y. kartojamas skaičiavimas aprašytas 1 – 10 operacijose.

Iteracinis ciklas baigiamas, kai nesubalansuotų jėgų vektorius $\{F_c\}_v$ yra labia mažas arba kai tenkinamas pasirinktas tikslumas $\{F_c\}_v^i - \{F_c\}_v^{i-1} \leq \text{eps}$? Po to gaunami konstrukcijos deformuoto būvio visi reikalingi parametrai ir pusiausvyros lygčių koeficientų matrica $\{A_n\} = [C][\bar{A}]_v$, atitinkanti tam tikrą apkrovos lygį $\{F\}$.

Tamprios netiesinės analizės skaičiavimai atliekami programa MATLAB. Skaičiavimo algoritmas pavaizduotas 2.6 pav.



2.6 pav. Deformuoto būvio charakteristikų skaičiavimo algoritmo blok – schema

Uždavinio vykdomasis „M.failas“ ir skaičiavimo rezultatai pateikti 1 priede.

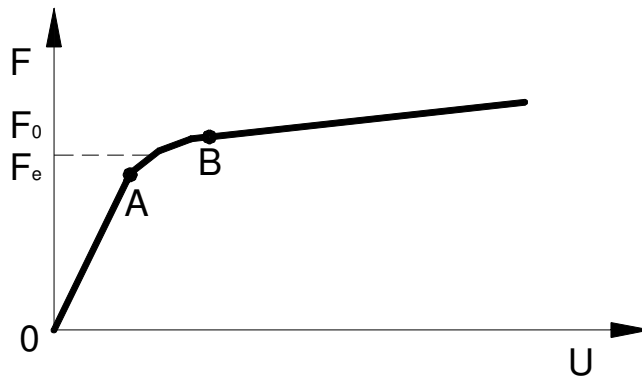
2. GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ TAMPRIŲ PLASTINIŲ SIJŲ OPTIMIZACIJA IR ANALIZĖ

2.1. Tampiųjų plastiųjų lenkiamųjų strypinių konstrukcijų optimizacija paprastojo pakrovimo atveju

2.1.1. Bendrosios žinios

Įvertinant konstrukcijos medžiagos plastiškąsias savybes galima daug tiksliau nustatyti jos darbą įvairiais apkrovimo etapais ir sukurti žymiai racionalesnį projektą. Tuo tikslu reikia matematiškai aprašyti konstrukcijos darbą jos deformavimosi metu. Tampiųjų plastiškos sistemos darbą galima paaiškinti atlikus ryšio tarp apkrovos ir apibendrintų poslinkių kokybinę analizę.

Deformuojamoji konstrukcija gali būti įvairiose darbo stadijose ir kiekvienai iš jų galima sudaryti įvairius skaičiavimo uždavinius (3.1 pav.).



3.1 pav. Apkrovos ir poslinkių ryšio grafikas

Šiame grafike: OA – tampiųjų stadija; AB – plastiškų deformacijų stadija, kuri tęsiasi iki taško B. Toliau atsiranda be galo dideli poslinkiai ir deformacijos, praktiškai nesikeičiant apkrovos reikšmei [9]. *Pirmasis konstrukcijos, kaip tampiųjų sistemos, darbo etapas* yra iš labiausiai išnagrinėtų kietojo deformuojamojo kūno mechanikos uždavinių. Šio uždavinio skaičiavimo rezultatai reikalingi įvertinant konstrukcijos medžiagos plastiškąsias savybes.

Antrasis konstrukcijos darbo etapas priklauso uždaviniams, kuriuose įvertinamos medžiagos plastiškosios savybės iki visiško plastiško suirimo arba visapusiško stiprėjimo.

Tokie uždaviniai vadinami analizės uždaviniais. Jie būdingi tiek idealiai plastiškai, tiek ir stiprėjančiai sistemai.

Trečiasis konstrukcijos darbo etapas yra plastiškasis suirimas. Tokie uždaviniai vadinami konstrukcijos laikomosios galios nustatymo uždaviniais. Šis idealiai tamprios plastiškos sistemos ribinis būvis aprašomas ekstreminiais energetiniais principais, apibūdinančiais didžiausią išorinės apkrovos reikšmę.

Visi trys išvardinti konstrukcijų skaičiavimo uždaviniai sprendžiami, kai yra žinoma konstrukcijos forma ir fizinių parametrų pasiskirstymas.

Be šių uždavinių yra ir kiti, kuriuose nustatomas ir konstrukcijos įtempių - deformacijų būvis, ir jos parametrai. Tokie uždaviniai vadinami kietojo deformuojamojo kūno optimizacijos uždaviniais. Optimizacijos uždaviniai formuluojami įvairiems tamprios plastiškos sistemos būviams, t. y. visiško arba nevysiškai plastiško suirimo atvejams.

2.1.2. Pagrindinės sąvokos, prielaidos ir priklausomybės

Reta medžiaga pasiekia savo laikomąją galią tamprioje stadijoje. Dažniausiai medžiagos suyra pasiekusios didžiausią laikomąją galią plastinėje stadijoje. Todėl skaičiuojant konstrukcijas kaip tampriai „dirbančias“, negalima tiksliai nustatyti jų laikomosios galios ir patikimumo. Vadinasi, nustatant ribines įrašas, reikia įvertinti konstrukcijos darbą ir tamprioje, ir plastinėje stadijose. Tai yra *tamprios plastinės sistemos sąvoka*.

Atsiradus konstrukcijoje plastinėms deformacijoms, visa sistema arba atskiros jos dalys pereina į plastinę būklę. Norint apskaičiuoti tokios sistemos įtempius ir deformacijas, negalima taikyti plačiai naudojamos tampriųjų sistemų skaičiavimo teorijos, nes negalioja:

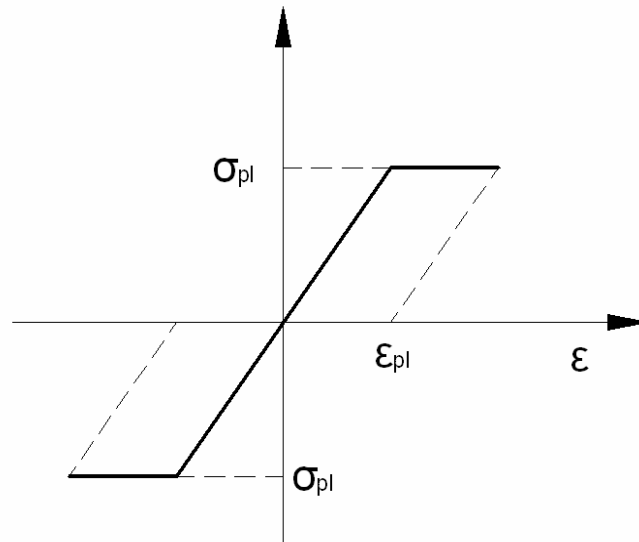
- a) tiesinė priklausomybė tarp įtempimų ir deformacijų (*Huko dėsnis*);
- b) jėgų nepriklausomo veikimo (superpozicijos) principas;
- c) savitai formuluojami ekstreminiai energetiniai principai.

Vadinasi reikia aptarti tamprių plastinių sistemų pagrindines prielaidas ir priklausomybes, kuriomis grindžiami šie skaičiavimo metodai.

Pagrindinės prielaidos:

- 1) apkrova – kvazistatinė, atitinkanti paprastąjį apkrovimą;
- 2) konstrukcijos medžiaga – idealiai tampri plastinė;

Pagal šią prielaidą medžiagoje atsiradus tam tikro dydžio įtempiams, deformacijos didėja neribotai, o ją nukrovus gaunamos liekamosios deformacijos (3.2 pav.).



3.2 pav. Idealiai tamprios plastinės medžiagos fizinis modelis – Prandtlis diagrama

Šios diagramos pasvirusioji dalis vaizduoja medžiagos darbą tamprioje būklėje, horizontalioji reiškia idealaus plastiškumo sąlygas, kai plastinės deformacijos neapibrėžtai didėja, esant pastoviems takumo ribos įtempiams σ_{pl} ;

- 3) konstrukcijos elementų skerspjūviai parenkami idealios formos. Išskyrus tuos atvejus, kai elementų skerspjūvio forma iš anksto nurodyta.

Strypo skerspjūvio, pažymėto pjūviu j , įtempių būvis apibūdinamas įrašų vektoriumi:

$$\{S_j\} = (M_j)^T \quad (3.1)$$

Jo laikomoji galia nusakoma ribine įraša. *Ribinė įraša* – tai tokia įtempių atstojamoji, kai, esant vienai deformacijų rūšiai, įtempiai visame skerspjūvyje pasiekia takumo ribą. Strypas tokios įrašos kryptimi gali laisvai deformuotis, nes skerspjūvis netenka ryšio, atitinkančio šią įrašą.

Lenkiamas stačiakampio skerspjūvio elementas plastiškai suyra, kai įtempiai viršutinėje ir apatinėje skerspjūvio dalyse pasiekia takumo ribą. Šie įtempiai yra priešingo ženklo, ir jų atstojamųjų lenkimo momentas:

$$M_0 = \left(\sigma_s b \frac{h}{2} \right) \frac{h}{2} = \sigma_s \frac{bh^2}{4} = \sigma_s W_{pl} \quad (3.2)$$

Tai ir yra ribinė įraša, kurią, kai elementas lenkiamas, tiesiog vadiname ribiniu momentu. Jis yra skaliarinis dydis ir visuomet teigiamas, nes strypo stiprumas nepriklauso nuo to, į kurią pusę jį lenkiame.

Idealus skerspjuvis – tai tokios idealizuotos formos skerspjuvis, kurio plotas sutelktas taip, kad galėtų labiausiai priešintis atitinkamai deformacijai. Lenkimo atveju idealus skerspjuvis yra tas, kurio plotas sutelktas kuo toliau nuo neutraliosios ašies. Artimas idealiam skerspjuviui yra dvitėjinis profiliuotis. Lenkimo momentą tokiaime pjūvyje labiausiai atlaiko lentynos.

Taigi, lenkiamo strypo idealaus skerspjuvio ribinis momentas:

$$M_0 = \sigma_s b h' h, \quad (3.3)$$

čia h – atstumas nuo neutraliosios ašies iki lentynų centrų; h' – skerspjuvio lentynų storis.

Veikiant skerspjuvyje ribiniam momentui, strypo galai pasirinktame pjūvyje plastiškai deformuojasi ir dėl to gali laisvai pasisukti bet kokio didumo kampų. Strypo skerspjuvis šiuo atveju įgyja tam tikrų lanksto savybių. Todėl jis vadinamas *plastiškuoju lankstu*. Toks lankstas perduoda visą ribinį momentą ir leidžia laisvai pasisukti bet kokių kampų tik veikiančio lenkimo momento kryptimi.

Tamprios plastiškos sistemos fizinės priklausomybės yra takumo sąlygos. Takumo sąlyga išreiškiamas reikalavimas, kad skerspjuvyje veikiančių įrašų bet kurie deriniai neturi viršyti jo apibendrintos ribinės įrašos.

Takumo sąlygų matricinė forma:

$$[\Phi]\{M\} \leq \{M_0\}, \quad (3.4)$$

čia $[\Phi]$ – takumo sąlygų matrica; $\{M\}$ – apibendrinta įraša, suprantama kaip lenkimo momentas; $\{M_0\}$ – apibendrinta ribinė įraša, suprantama kaip ribinis lenkimo momentas.

Be fizinių priklausomybių yra dar dvi pagrindinės priklausomybės: pusiausvyros ir geometrinės lygtys.

Pusiausvyros (statikos) lygtys:

$$[A]\{S\} = \{F\}, \quad (3.5)$$

arba

$$\begin{aligned} a_{11}S_1 + a_{12}S_2 + \dots + a_{1n}S_n &= F_1; \\ a_{21}S_1 + a_{22}S_2 + \dots + a_{2n}S_n &= F_2; \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}S_1 + a_{m2}S_2 + \dots + a_{mn}S_n &= F_m; \end{aligned}$$

čia $[A]$ – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica; $\{F\}$ – apkrovos vektorius.

Geometrinės lygtys:

$$[A]^T \{u\} = \{q\} \quad (3.6)$$

arba

$$\begin{aligned} b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1m}u_m &= q_1; \\ b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2m}u_m &= q_1; \\ &\dots\dots\dots \\ b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nm}u_m &= q_1; \end{aligned}$$

2.2. Strypinės konstrukcijos optimizavimo matematinis modelis

Konstrukcijos kaip geometriškai netiesinės sistemos optimizacijos uždavinys yra formuluojamas tokiu būdu. *Konstrukcijos pradinė konfigūracija, veikianti išorinė apkrova ir uždavinio tikslo funkcija (jos optimalumo kriterijus) yra žinomi. Reikia rasti tokį strypų skerspjūvių plotų A (ribinių įrašų M_0) pasiskirstymą, kuris tenkintų minimalaus tūrio konstrukcijos optimalumo kriterijų, kai atskiri jos elementai deformuojasi netiesiškai.* Optimizacijos uždavinio apribojimai turi atspindėti sąlygas, apibūdinančias konstrukcijos tikrąjį įtempių ir deformacijų būvį, kai atskiri jos elementai patiria plastiškąsias deformacijas, tačiau visa konstrukcija plastiškai nesuyra. Konstrukcijos tikrojo įtempių ir deformacijų būvio parametrai yra nustatomi, panaudojus energijos sklaidos minimumo ekstreminį energinį principą. Šio paminėtos sąlygos riboja laisvą plastiškųjų deformacijų plitimą, todėl optimalios konstrukcijos elementuose atsiranda ir netiesinės tampriosios, ir plastiškosios deformacijos, sukeliamos liekamųjų įrašų $\{M_r\}$ ir liekamųjų poslinkų $\{u_r\}$. Taigi optimali konstrukcija yra nepasiekusi visiško plastiškojo suirimo.

Konstrukcijos skerspjūvių parametrų optimizacijos uždavinio, įvertinus paminėtus apribojimus, matematinis modelis baigtinių elementų metodu terminais yra užrašomas taip [1, 10]:

rasti

$$\min \{L\}^T \{M_0\}, \quad (3.7)$$

kai

$$[\Gamma]\{M_0\} - [\Phi_c]\{M_r\} \geq [\Phi_c]\{M_e\}, \quad (3.8)$$

$$[A_n]\{M_r\} = \{F\} - [A_n]\{M_e\}, \quad (3.9)$$

$$\{M_0\} \geq \{M_{0,cr}^{\min}\}. \quad (3.10)$$

čia 3.7 – tikslo funkcija, 3.8 – takumo sąlygos, 3.9 – pusiausvyros lygtys, 3.10 – konstrukciniai apribojimai.

Antros eilės analizės tampraus atsako dydžiai $\{M_e\}$, nustatyti paskutiniame apkrovos žingsnyje, atlikus paskutinę iteraciją, yra naudojami šiame matematiname modelyje, t. y. $\{M_e\} = \{M\}_v^i$. Jie savo ruožtu funkciškai priklauso nuo konstrukcijos optimizuojamų parametrų. Tiesioginis šios funkcijinės priklausomybės įvedimas į optimizacijos uždavinio matematinio modelio sąlygas (3.8) ir (3.9) iš esmės komplikuos uždavinio netiesiškumą ir jo skaitmeninę realizaciją. Šis kelias nepriimtinas ir problemos praktinei realizacijai siūlomas iteracinis metodas. Kiekvienoje iteracijoje tampraus atsako dydžiai yra nustatomi, atsižvelgiant į nustatytus optimizacijos uždavinio parametrus. Iteracinis optimizacijos procesas baigiamas, pasiekus pasirinktą tikslumą.

Kaip jau buvo pažymėta aukščiau, optimizacijos uždavinyje (3.7)–(3.10) būtina žinoti funkcijinį ryšį tarp tampraus atsako dydžių ir optimizuojamų skerspjūvio parametrų, nuo kurių priklauso ribinių įrašų dydžiai, pavyzdžiui, ribinio lenkimo momento $M_0 = \sigma_y W_{pl}$ reikšmė. Taigi jų jungiamasis ryšys turi rodyti funkcinį ryšį su skerspjūvio plotu A . Standartinių dvitėjų atveju šis ryšys reikiamai tiksliai aproksimuojamas laipsninėmis funkcijomis:

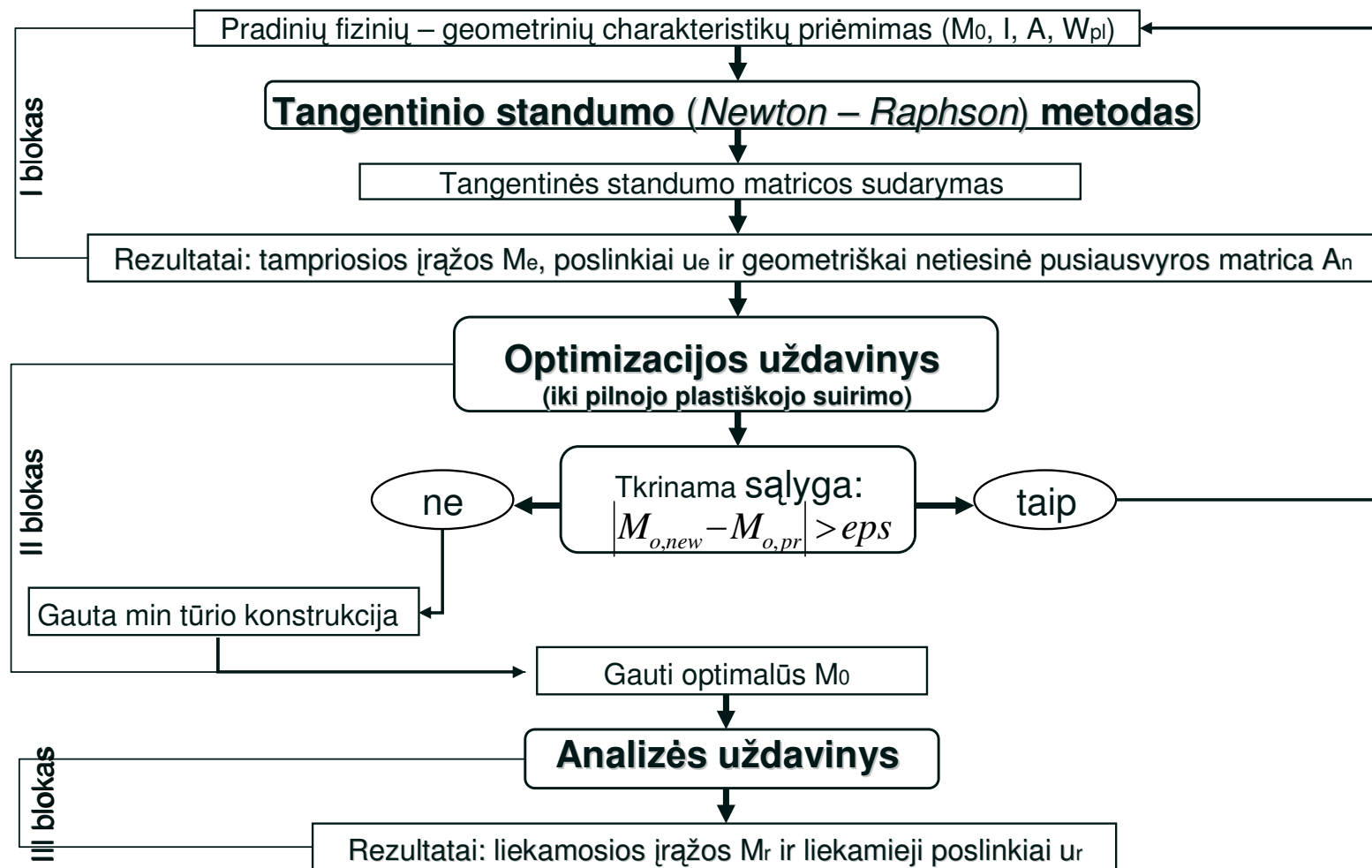
$$I = a_1 A^{b_1}, W_{pl} = a_3 A^{b_3}. \quad (3.11)$$

čia a_1, b_1, a_3 ir b_3 yra koeficientai, kurių dydžiai priklauso nuo standartinio profiliuoto tipo.

Akivaizdu, kad tiesioginis gautų funkcijų panaudojimas, formuojant matematinio modelio (3.7)–(3.10) apribojimus duos labai sudėtingus reiškinius. Analogiška situacija bus taip pat gauta formuojant takumo sąlygų matricą $[\Phi_c]$. Standartinių plieninių dvitėjinio profiliuoto sijų skaičiuojamojo j -tojo pjūvio takumo sąlygos yra tokios :

$$\left. \begin{array}{l} M_j \leq M_{0j}, \\ -M_j \leq M_{0j}. \end{array} \right\}$$

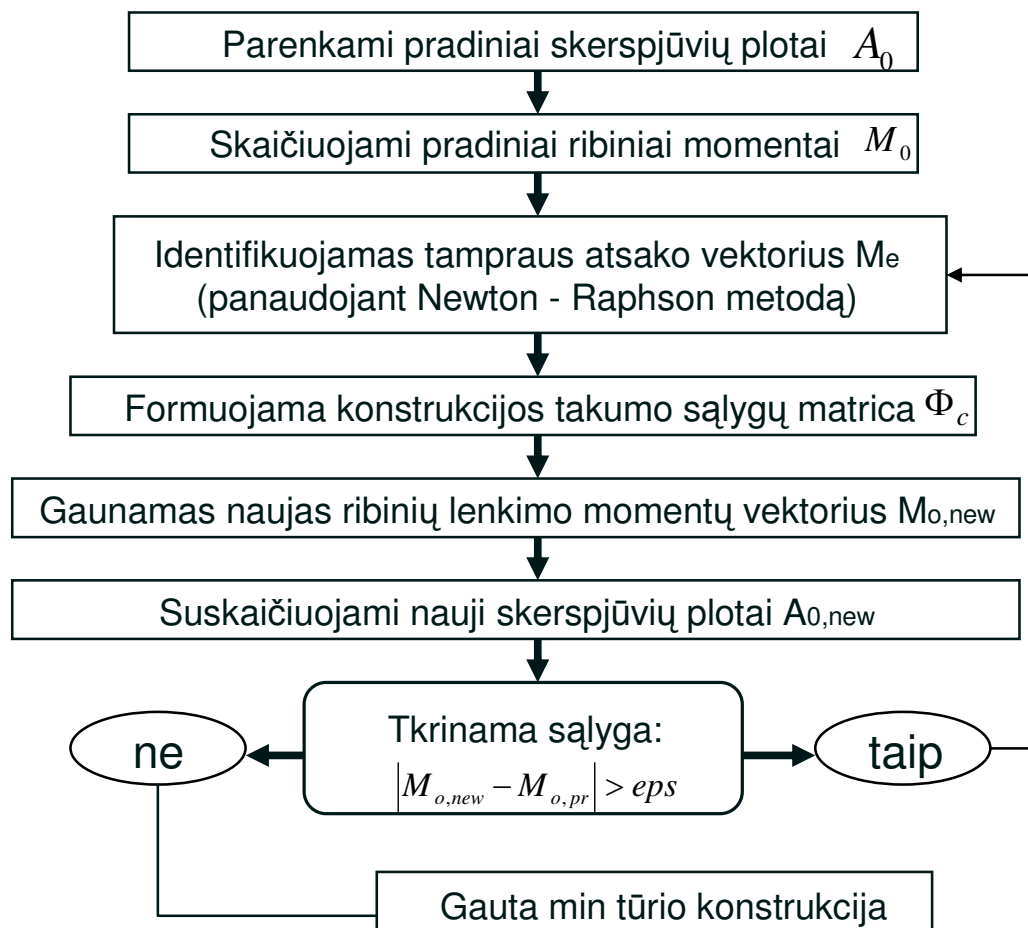
Minimalaus tūrio konstrukcijos uždavinio (3.7)–(3.10) sprendimą atliksime, vykdydami optimizacijos ciklus. Kiekviename cikle uždavinio (3.7)–(3.10) sudarymui naudosime tampraus atsako dydžius, kurie gaunami atlikus antros eilės analizę. Jį išsprendę gauname einamojo optimizacijos ciklo konstrukcijos elementų ribinių lenkimo momentų optimalias reikšmes ir joms atitinkančius skerspjūvio plotus A ir inercijos momentus I . Su šiais parametrais yra sudaroma nauja tangentinė standumo matrica ir atliekama naujo ciklo antros eilės analizė (3.3 pav.).



3.3 pav. Skerspjūvio optimizacijos ciklinio algoritmo schema

Konstrukcijos iš plieninių valcuotų profiliuotųjų viena optimizacijos iteracija sudaryta iš tokių skaičiavimo operacijų (3.4 pav):

1. Laisvai parenkamos pradinės skaičiuojamųjų elementų skerspjūvių plotų vektoriaus $\{A_0\}$ reikšmės;
 2. Skaičiuojamos pradinių ribinių momentų $M_0^{pr} = \sigma_y \cdot a_3 \cdot A_0^{b_3}$ reikšmės;
 3. Pagal pradinius ribinius momentus M_0 , panaudojus Newton-Raphson metodą, identifikuojamas tampraus atsako vektorius M_e , nustatomi konstrukcijos deformuoto būvio parametrai, atitinkantys pasirinktą apkrovos lygį $\{F\}$ ir pusiausvyros lygčių koeficientų matrica $[A_n] = [C][\bar{A}]_v$;
 4. Suformuojama visos konstrukcijos takumo sąlygų matrica $[\Phi_c]$ pasirinktame apkrovos lygyje;
 5. Sprendžiamas minimalaus tūrio konstrukcijos tiesinio matematinio programavimo uždavinys (3.7)–(3.10), kurio skaičiavimo rezultatas yra naujas ribinių lenkimo momentų vektorius M_0^{new} ;
 6. Gaunami nauji strypų skerspjūvių plotai $A_{new} = \left(M_0^{new} / \sigma_y \cdot a_3\right)^{1/b_3}$;
 7. Tikrinama sąlyga: ar ribinių lenkimo momentų skirtumo absoliutinė reikšmė yra didesnė už tam tikrą pasirinktą mažą skaičių eps , t.y. tikrinama, ar $\left|M_0^{new} - M_0^{pr}\right| > eps$?
- jei taip** – tai $A_{nauji} = A_0$, o $M_0^{naujos} = M_0^{pr}$ ir skaičiavimas kartojamas nuo trečio punkto operacijos;
- jei ne** – tai gauta minimalaus tūrio konstrukcija ir vykdomi tolimesni skaičiavimai.



3.4 pav. Vienos optimizacijos iteracijos algoritmo schema

Uždavinio vykdomasis „*M.failas*“ ir skaičiavimo rezultatai pateikti 2 priede.

2.3. Optimalios konstrukcijos analizės uždavinio matematinis modelis

Uždavinio formulavimas: *konstrukcijos, kurios visi fiziniai parametrai ir išorinė apkrova iš anksto yra žinomi, įrašų ir poslinkių nustatymas nepasiekus konstrukcijos plastiškojo suirimo yra vadinamas analizės uždaviniu.*

Šiame uždavinyje konstrukcijos įtempių būvis apibūdinamas tikrųjų įrašų vektoriumi $\{M\}$, liekamųjų įrašų vektoriumi $\{M_r\}$ ir tampraus sprendinio įrašų vektoriumi $\{M_e\}$.

Analizės uždavinio matematinis modelis atitinka tokį energinį ekstreminį principą:

Iš visų statiškai leistinų liekamųjų įrašų vektorių sistemoje, nepasiekusioje plastiško suirimo, tikrasis yra tas, kuriam esant liekamųjų įrašų vektoriaus $\{M_r\}$ tamprusis potencialas įgauna minimalią reikšmę [9].

Tamprusis potencialas savo skaitine reikšme yra ekvivalentiškas potencinei energijai:

$$U = \frac{1}{2} \{M_r\}^T \cdot \Theta_{re} \quad (3.12)$$

čia įrašę tamprios sistemos fizikinį dėsnį $\Theta_{re} = DM_r$, gausime papildomo deformavimo energiją, išreikštą liekamųjų įrašų kvadratine forma:

$$U = \frac{1}{2} \{M_r\}^T \cdot [D] \cdot \{M_r\}, \quad (3.13)$$

čia $[D]$ – konstrukcijos pasiduodamumo matrica, sudaryta iš visų konstrukcijos elementų pasiduodamumo matricų.

Šio uždavinio matematinis modelis:

$$\begin{aligned} \text{Rasti} \quad & \min \frac{1}{2} \{M_r\}^T \cdot [D] \cdot \{M_r\}, \\ \text{kai} \quad & [\Phi_c] \cdot \{M_r\} \leq \{M_o\} - [\Phi_c] \cdot \{M_e\}, \\ & [A_n] \cdot \{M_r\} = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Šiuo atveju pusiausvyros lygčių koeficientų matrica ir takumo sąlygų koeficientų matrica išlieka tokios pačios. Tikrųjų įrašų vektorius:

$$\{M\} = \{M_r\} + \{M_e\}. \quad (3.15)$$

Pagrindinis ieškomasis dydis yra tikrųjų įrašų vektorius:

$$\{M\} = [M_1, M_2, \dots, M_n]^T. \quad (3.16)$$

Be šio vektoriaus, įtempimų būviui nustatyti imsime dar du vektorius:

- tampraus sprendinio įrašų vektorių

$$\{M_e\} = [M_{e1}, M_{e2}, \dots, M_{en}]^T. \quad (3.17)$$

Tampraus sprendinio vektorius $\{M_e\}$ yra toks vektorius, kuris atitinka duotos sistemos tamprią būklę. Jis gaunamas išsprendus duotą sistemą tampraus skaičiavimo metodu:

$$\{S_e\} = [K][A]^T ([A][K][A]^T)^{-1} \{F\} = [a]\{F\}, \quad (3.18)$$

- liekamųjų įrašų vektorių. Jo fizikinę prasmę galima paaiškinti tuo, kad nukrovus plastiškai deformuotą sistemą, ji liks deformuota. Vadinasi, kai apkrova nulinė, konstrukcijoje yra liekamosios įrašos.

$$\{S_r\} = [S_{r1}, S_{r2}, \dots, S_{rm}]^T \quad (3.19)$$

Liekamųjų įrašų ir tampraus sprendinio įrašų vektorių suma sudaro tikrąjį įrašų vektorių $\{S\}$.

Deformuotą sistemos būvį charakterizuoja *tikrųjų poslinkių vektorius*:

$$\{u\} = \{u_e\} + \{u_r\} \quad (3.20)$$

čia $\{u_e\}$ – tampraus sprendinio poslinkių vektorius, $\{u_r\}$ – liekamųjų poslinkių vektorius.

Deformuoto būvio charakteristikomis, be poslinkių, yra ir jų išvestiniai dydžiai – deformacijos. Tarp jų galioja priklausomybė:

$$\Theta = \Theta_e + \Theta_r \quad (3.21)$$

čia Θ_e – tampriosios deformacijos, Θ_r – liekamosios deformacijos.

Taigi, norint nustatyti tikrąsias įrašas ir tikruosius poslinkius, analizės uždavinyje *nežinomaisiais galima laikyti liekamąsias įrašas ir poslinkius*. Šie dydžiai nustatomi pagal ekstreminius energetinius principus.

Elemento pasiduodamumo matrica kai įvertinami tik lenkimo momentai yra :

$$[D_k] = \begin{bmatrix} \frac{l_k}{3(EI)_k} & -\frac{l_k}{6(EI)_k} \\ -\frac{l_k}{6(EI)_k} & \frac{l_k}{3(EI)_k} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

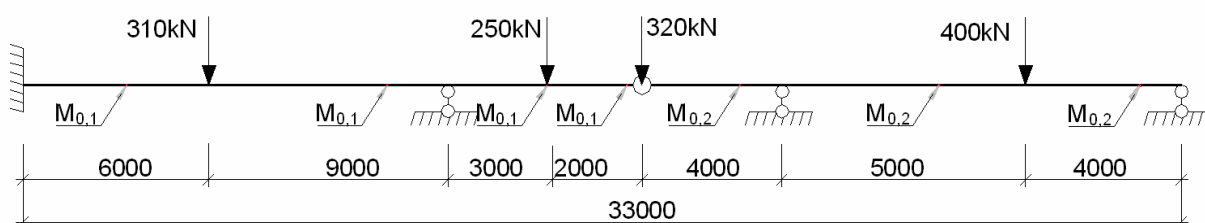
Uždavinio vykdomasis „M.failas“ ir skaičiavimo rezultatai pateikti 3 priede.

3. SKAITINIS EKSPERIMENTAS

3.1. Konstrukcijos diskretinio modelio sudarymas

Siekiant realizuoti aptartą metodiką buvo nagrinėjama daugiaatramė lenkiama sija (4.1 pav.), apkrauta vertikaliomis apkrovomis. Konstrukcija sudaryta iš dvi skirtingas ribines įrąžas turinčių sijų. Strypų medžiaga – plienas, kurio takumo riba $\sigma_y = 235$ MPa, tamprumo modulis $E = 206$ Gpa. Ribinės įrąžos aprašomos nežinomais lenkimo momentais (4.1 pav.):

$$\{M_0\} = \{M_{0,1}, M_{0,2}\}^T. \quad (4.1)$$



4.1 pav. Konstrukcijos skaičiuojamoji shema

Konstrukcijos diskretinis modelis (4.2 pav.) parenkamas atsižvelgiant į jos skaičiuojamąją schemą (4.1 pav.). Skaičiavimuose visi elementai aproksimuojami lenkiamaisiais elementais. Šiuo atveju visų elementų įtempių būvį apibūdins galuose veikiantys lenkimo momentai.

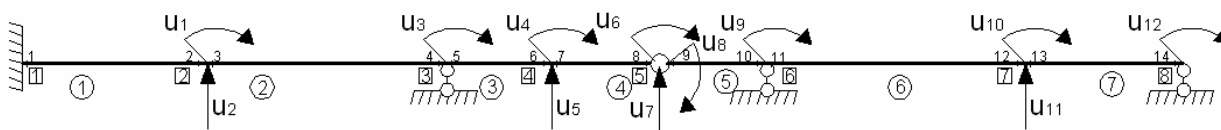
Įrąžų vektorius:

$$\{M\} \equiv \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}\}^T. \quad (4.2)$$

Konstrukcijos statinio neišsprendžiamumo laipsnis:

$$k = 3K - \check{s} = 3 \cdot 3 - 7 = 2,$$

čia k – statinio neišsprendžiamumo laipsnis; K – kontūrų skaičius; $\check{s}$ – lankstų skaičius.



4.2 pav. Konstrukcijos BEM diskretinis modelis

Sijos elementai yra iš valcuotųjų dvitėjų profiliuotųjų, kurių skerspjūviai atitinka IPE Europos standartą. Jų skerspjūvių geometrinių charakteristikų pradinių duomenų modeliavimui taikome 4.1 lentelėje pateiktas koeficientų reikšmes.

4.1 lentelė. Priklausomybių koeficientai

Profiliuotis	a_1	b_1	a_3	b_3
IPE	0,7885	2,3210	0,8411	1,6572

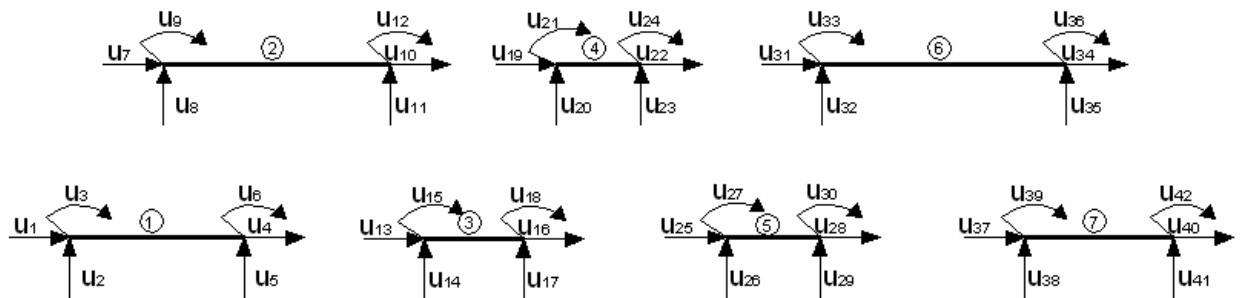
Aptarsime pusiausvyros lygčių sudarymo bendruosius principus baigtinių elementų metodo (BEM) diskretiniam modeliui. Pusiausvyros lygčių koeficientų matricos A išraiškoje ($A = C^T \bar{A}$) yra dvi savarankiškos matricos. $\bar{A}$ – sudaroma iš atskirų elementų pusiausvyros sąlygų, o C – logiškai siejant atskirų baigtinių elementų mazginių taškų poslinkius su diskretinio konstrukcijos modelio globaliaisiais poslinkiais (4.2 lent.).

4.2 lentelė. Poslinkių ryšio matrica C

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
u_1												
u_2												
u_3												
u_4												
u_5		1										
u_6	1											
u_7												
u_8		1										
u_9	1											
u_{10}												
u_{11}												
u_{12}			1									
u_{13}												
u_{14}												
u_{15}			1									
u_{16}												
u_{17}					1							
u_{18}				1								
u_{19}												
u_{20}					1							

u_{21}				1								
u_{22}												
u_{23}							1					
u_{24}						1						
u_{25}												
u_{26}							1					
u_{27}								1				
u_{28}												
u_{29}												
u_{30}									1			
u_{31}												
u_{32}												
u_{33}									1			
u_{34}												
u_{35}											1	
u_{36}									1			
u_{37}												
u_{38}											1	
u_{39}									1			
u_{40}												
u_{41}												
u_{42}												1

Siekiant geriau suprasti matricos C struktūrą, sudaryta diskrečių sijos elementų lokaliųjų poslinkių schema (4.3 pav.), kurioje $u_1...u_{12}$ pažymėti globalieji poslinkiai, o $u_1...u_{42}$ – lokalieji poslinkiai. Jei nagrinėjamo elemento mazginio taško lokalusis poslinkis sutampa su diskretinio modelio mazgo globaliuoju poslinkiu, tame langelyje rašomas 1, o kituose – 0 (reškia, kad elemento mazgo poslinkis atitinkama kryptimi yra suvaržytas).



4.3 pav. Sijos elementų lokaliųjų poslinkių schema globaliojoje koordinatinių sistemoje

3.2. Skaičiavimo rezultatų analizė

Atlikus lenkiamos geometriškai netiesinės sijos skerspjūvių optimizaciją (pagal šiame darbe aprašytą metodiką), nepasiekus visiško plastiškojo suirimo, gauta minimalaus tūrio konstrukcija. Optimizacijos uždavinio skaičiavimo rezultatai pateikti 4.3 lentelėje.

4.3 lentelė. Sijos iteracinio skaičiavimo rezultatai

Iteracijos nr.	M_{01} (<i>kNm</i>)	M_{02} (<i>kNm</i>)	$L^T M_0$
0	400,0	400,0	29844
1	558,0	1437,2	29800
2	558,0	1433,8	29800
3	558,0	1433,8	29800
	A_1 (<i>cm</i> ²)	A_2 (<i>cm</i> ²)	V (<i>cm</i> ³)
<i>Reikalingi:</i>	120,86	213,59	5193,87
<i>Parinkti:</i>	134,0	2x116 = 232,0	5696,0

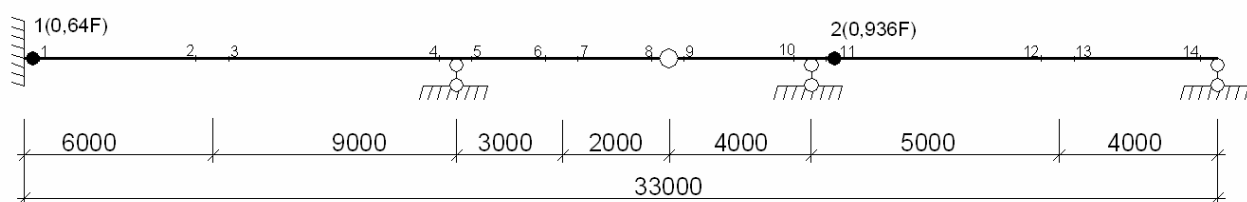
Parinkti optimalūs skerspjūviai: $M_{0,1}$ = IPE 550, $M_{0,2}$ = 2xIPE500 (optimizacija atlikta neribojant poslinkių) [17]. Optimalus konstrukcijos projektas, atitinkantis užsiduotą tikslumą pasiektas po trijų iteracijų. Konstrukcijos minimalus tūris yra 5696,0 cm³.

Apie gautų rezultatų patikimumą sprendžiame iš tampriosios plastinės analizės uždavinio sprendinio. Buvo atlikta optimalios konstrukcijos elgsenos visoje apkrovimo istorijoje analizė. Nuo duotos apkrovos konstrukcija dirba tamptai plastiškai. Pirmieji plastiniai lankstai konstrukcijoje atsiranda esant 0,64F apkrovai. Plastinių lankstų susidarymo schema pateikta 4.4 pav. Didinant apkrovą iki F, galima stebėti kur ir prie kokios apkrovos toliau vystosi plastiniai lankstai. Maksimalus poslinkis yra sijos 2 mazgo. Jis kinta nuo 7,5 cm iki 13,58 cm. Analizės rezultatai pateikti 4.4 lent. (mazgo Nr. žiūrėti 4.2 pav.).

Taip pat pateikti 2 (4.5 pav.) ir 5 (4.6 pav.) mazgų apkrovos ir poslinkių priklausomybių grafikai. Grafikuose pateiktas plastinių lankstų atsiradimas (pagal 4.4 lent. duomenis).

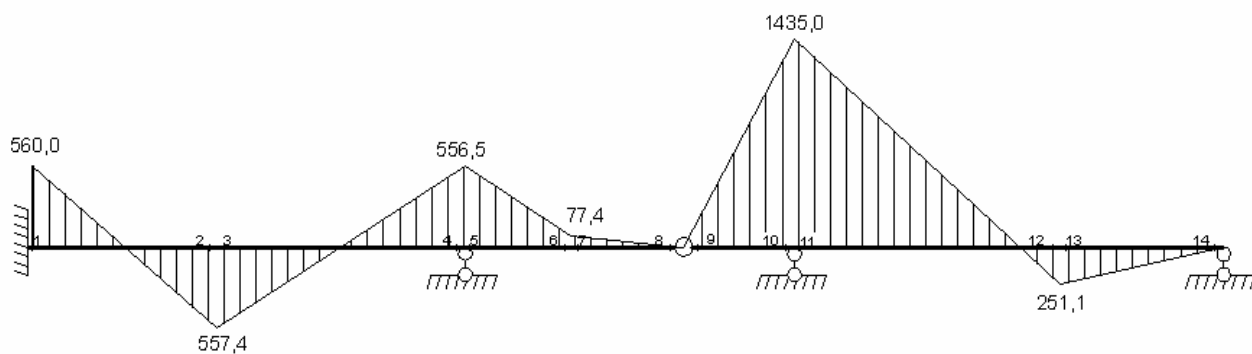
4.4 lentelė. Plastinių lankstų atsiradimas kintant apkrovai

$N \times F$	Atsivėrusių lankstų skaičius	Pjūvio Nr.	2 mazgo poslinkis, mm	5 mazgo poslinkis, mm
0,6	0	-	-70,335	-22,33
0,64	1	1	-75,039	-23,82
0,7	1	1	-85,505	-26,08
0,75	1	1	-94,227	-27,97
0,8	1	1	-102,948	-29,85
0,85	1	1	-111,670	-31,74
0,9	1	1	-120,391	-33,62
0,936	2	1, 11	-126,638	-35,3
1,0	2	1, 11	-135,579	-57,06

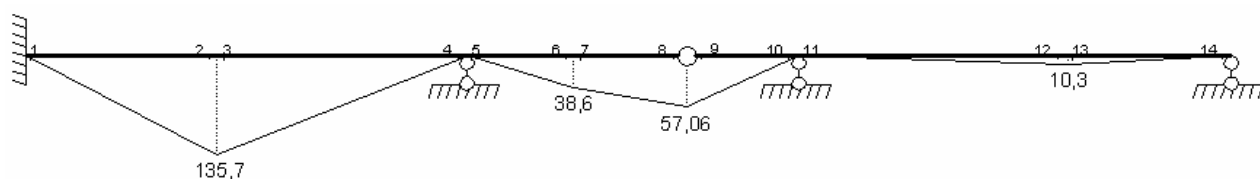


4.4 pav. Plastinių lankstų susidarymo schema

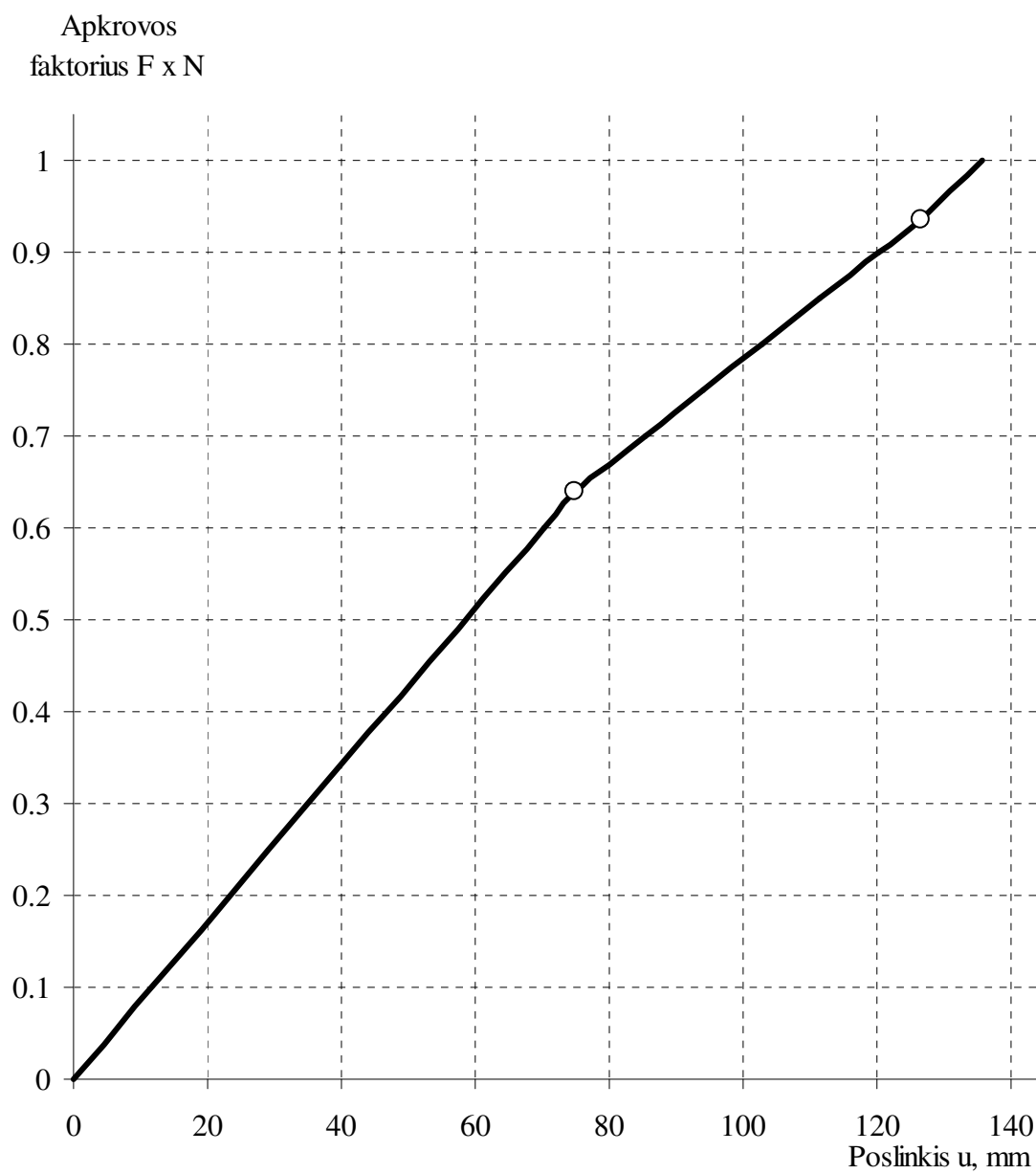
Su parinktais skerspjūviais atlikus analizės uždavinį, suskaičiuojamos tikrosios įrąžų bei poslinkių reikšmės ir nubraižomos momentų ir įlinkių diagramos.



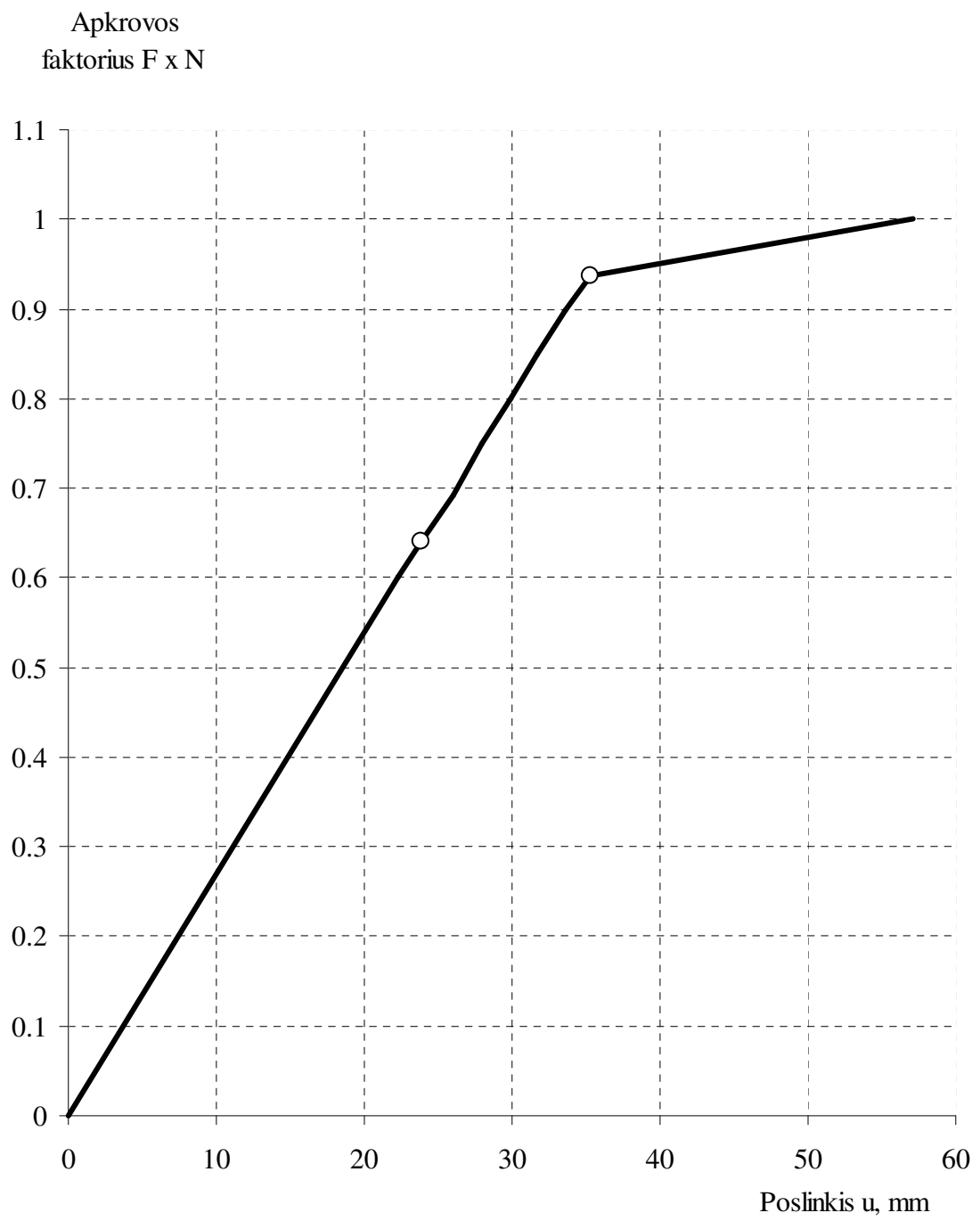
4.5 pav. Momentų diagrama, kNm



4.6 pav. Įlinkių diagrama, mm



4.7 pav. Antro mazgo apkrovos ir poslinkių priklausomybės grafikas



4.8. pav. Penkto mazgo apkrovos ir poslinkių priklausomybės grafikas

IŠVADOS

1. Pirmą kartą konstrukcijos optimizacijai ribinės pusiausvyros būvyje buvo panaudota geometriškai netiesinės sistemos skaičiavimo koncepcija.
2. Pasiūlyta nauja geometrinės ir mažų poslinkių matricos sudarymo metodika, panaudojant MATLAB paketo simbolinius skaičiavimus. Gautos šių matricų analitinės išraiškos.
3. Sudarytas optimizacijos uždavinio iteracinio skaičiavimo algoritmas, kuriame tamprus atsako dydžiai gaunami panaudojant *Newton-Raphson* apkrovos kontrolės metodą.
4. Pagal pateiktą metodiką atliktas skaitinis eksperimentas

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. Čyras, A.; Borkowski, A.; Karkauskas, R. Theory and methods of optimization of rigid-plastic systems. Vilnius: Technika, 2004. 354 p.
2. Čyras, A. Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures. Chichester: Ellis Horwood Lim., 1983. 121 p.
3. Kalanta, S. New formulations of optimization problems of elasto-plastic bar structures under displacements constraints. *Mechanika*, 1997, Vol 4, No 11, p. 11–16.
4. Karkauskas, R. Analysis of non-holonomic behaviour of geometrically nonlinear elastic-plastic framed structures. *Mechanika*, 1997, Vol 4, No 11, p. 11–16.
5. Karkauskas, R., Norkus, A. Truss optimization under stiffness, stability constraints and random loading. *Mechanics Research Communications*, 2006, Vol 33, p. 177–189.
6. Norkus, A.; Karkauskas, R. On direct and stepped optimization problems of flexural steel frame and their numerical realization considering strength and stiffness conditions. *Mechanika*, 2005, Vol 5, No 5, p. 41–50
7. Daniūnas, A. Paskaitų konspektas. Rankraštis, 2009
8. Barauskas, R. Baigtinių elementų metodo pagrindai. Kaunas: Technologija, 1998. 375 p.
9. Čyras, A. Statybinė mechanika. – V.: Mokslas, 1990
10. Karkauskas, R. 2007. Optimisation of geometrically non-linear elastic-plastic structures in the state prior to plastic collapse. *Journal of civil engineering and management: international research and achievements..* Vol. VIII, no. 3 p. 183-192
11. Kalinauskas, R. 2008. Darbas su programų paketu Matlab7. Technika, 35 p.
12. Karkauskas, R. 2004. Optimization of Elastic-Plastic Geometrically Nonlinear Light-Weight Structures under Stiffness and Stability Constraints. *Journal of Civil Engineering and Management*, Vol X, No 2, p. 97–106.
13. Karkauskas, R. 1998. Tampriai plastinių geometriškai netiesinių strypinių konstrukcijų analizė. *Statyba [Civil Engineering]*, IV t., Nr. 4, 36–42.
14. Belytscho, T.; Liu, W. 2000. Nonlinear finite elements for continua and structures. John Wiley & Sons Ltd., 300 p.
15. Atkočiūnas, J.; Nagevičius, J., Tamprumo teorijos pagrindai. Vilnius: Technika, 2004. 528 p
16. STR 2.05.08:2005. Plieninių konstrukcijų projektavimas. Vilnius: 2005
17. Profil ARBED. Plieninių skerspjūvių sortimentas.
18. Netampriųjų konstrukcijų analizės ir optimizavimo metodai ir konstrukcijų projektavimas [žiūrėta 2008 balandžio 10 d.]. Prieiga per internetą: <http://neris.mii.lt/mt/straipsniai/200605/netamp.doc>.