

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Diana Daugerd

Matematiniai optimalaus investavimo modeliai

Mathematical Models of Optimal Investment

Baigiamasis magistro darbas

Taikomosios statistikos studijų programa, valstybinis kodas 621G31001

Statistinių metodų finansuose ir ekonomikoje specializacija

Statistikos studijų kryptis

Vilnius, 2013

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

TVIRTINU

Katedros vedėjas

(Parašas)

(Vardas, pavardė)

(Data)

Diana Daugerd

MATEMATINIAI OPTIMALAUS INVESTAVIMO MODELIAI
MATHEMATICAL MODELS OF OPTIMAL INVESTMENT

Baigiamasis magistro darbas

Taikomosios statistikos studijų programa, valstybinis kodas 621G31001

Statistinių metodų finansuose ir ekonomikoje specializacija

Statistikos studijų kryptis

Vadovas

(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė) (Parašas) (Data)

Konsultantas

(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė) (Parašas) (Data)

Konsultantas

(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė) (Parašas) (Data)

Lietuvių kalbos konsultantas

(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė) (Parašas) (Data)

Vilnius, 2013

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Statistikos studijų kryptis

Taikomosios statistikos studijų programa, valstybinis kodas 621G31001

Statistinių metodų finansuose ir ekonomikoje specializacija

TVIRTINU

Katedros vedėjas

(Parašas)

(Vardas, pavardė)

(Data)

**BAIGIAMOJO MAGISTRO DARBO
UŽDUOTIS**

.....Nr.

Vilnius

Studentei Dianai Daugerd

Baigiamojo darbo tema: Matematiniai optimalaus investavimo modeliai

patvirtinta 2012 m. spalio mėn 22 d. dekanų potvarkiu Nr. 355 fm

Baigiamojo darbo užbaigimo terminas 2013 m. birželio 10 d.

BAIGIAMOJO DARBO UŽDUOTIS:

Optimalaus portfelio sudarymui dažniausiai taikomas klasikinis Matkowitziaus modelis, kuris charakterizuojamas gražų vidurkiu, o rizikos matas yra gražų dispersija. Tačiau žinoma, kad dispersija šiuo atveju nėra geriausias rizikos matas, todėl kuriami ir kitokie investicijų portfelių sudarymo modeliai ar jų atmainos. Baigiamojo darbo tikslas:

- a) susipažinti su portfelių sudaryme naudojamais rizikos matais,
- b) sudaryti ir palyginti klasikinį Matkowitziaus ir sąlyginį rizikos vertės portfelius,
- c) portfelių modeliuose panaudoti robustinius kovariacijų matricos įvertinius,
- d) atlikti portfelių strategijos analizę.

Skaičiavimams naudojami realūs duomenys ir R kalbos pagrindu sukurta ekonometrinių skaičiavimų sistema Rmetrics.

Baigiamojo darbo rengimo konsultantas

(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė) (Parašas)

Vadovas

(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė) (Parašas)

Užduotį gavau

(Parašas)

(Vardas, pavardė)

(Data)

Anotacija

Pastaraisiais metais padidėjęs ekonominės situacijos nestabilumas lemia vis didesnę vertybinių popierių rinkos nepastovumą. Tai įtakoja augantį pagalbinių priemonių, palengvinančių investavimą, skaičių. Vienas naujausių projektų yra Rmetrics, kuris yra vystomas lygiagrečiai su atviro kodo R statistiniu paketu. Baigiamajame magistro darbe pristatomas Rmetrics pritaikymas optimizuojant investicijų portfelį. Investicijų portfelių optimizavimas nagrinėjamas klasikinio vidurkio ir dispersijos bei sąlyginės rizikos vertės modeliams. Analizuojamiems modeliams pritaikomos trys strategijos – mažiausios dispersijos, esant tam tikram iš anksto nustatytam vidurkiui, geriausio pelno ir rizikos santykio bei mažiausios galimos dispersijos.

Atsižvelgiant į pasirinkto laikotarpio įtaką portfelio rezultatui, šiame darbe nagrinėjami keturi robastiniai įvertiniai, t.y. mažiausio kovariacijų matricos determinanto, mažiausio elipsoidės tūrio, ortogonalizuotas Gnanadesikano ir Kettenringo bei kovariacijų matricos suglodinimo įvertinys. Nagrinėjant sąlyginės rizikos vertės modelį analizuojami portfelių pokyčiai keičiant pasiklivimo lygmens dydį. Sudarytiems portfeliams atliekama strategijų analizė, kurios metu pritaikytas aktyvų svorių glodinimas leidžiantis sumažinti operacijų išlaidas.

Šis darbas yra puikus pasiruošimas pradedančiajam investuotojui norinčiam išbandyti savo jėgas vertybinių popierių pasaulyje. Darbą sudaro 4 dalys: įvadas, teorinė dalis, eksperimentinė dalis bei išvados. Atskirai pridedamas literatūros sąrašas bei darbo priedas. Darbo apimtis – 70 p. teksto be priedų, 22 iliustr., 7 lent., 20 bibliografinių šaltinių.

Prasminiai žodžiai: portfelis, rizika, optimizavimas, robastiniai įvertiniai, strategijų analizė

Annotation

Increased uncertainty of economic situation, which is being observed over the last few years, leads to an increasing volatility in stock market. It impacts increasing number of supportive tools helping to invest easier. One of the latest projects is Rmetrics, which is being developed together with the open source R statistical package. The thesis presents application of Rmetrics for optimizing the investment portfolio. Investment portfolio optimization is applied to the classical mean-variance and conditional value at risk models. There are three strategies adapted to analyzed models, namely the smallest variance with a certain pre-set average, the best risk-return ratio and the smallest possible variance.

Taking into consideration the impact of chosen period on portfolio results, this paper suggests four robust estimates, i.e. minimum covariance determinant, minimum volume ellipsoid, orthogonalized Gnanadesikan-Kettenring and shrinkage estimator. Conditional value at risk model is examined with different values of confidence level analyzing the impact on portfolio results. Portfolio backtesting is applied including weights smoothing to reduce transaction costs.

This master thesis is a great preparation for a beginner in investing who wants to try himself in stock market. The paper consists of four parts: introduction, theoretical part, experimental part and conclusions. Both references and appendix are attached separately. Thesis consists of: 70 p. text without appendixes, 22 pictures, 7 tables, 20 bibliographical entries.

Keywords: portfolio, risk, optimization, robust estimators, backtesting

Turinys

1. Įvadas	6
2. Pagrindiniai optimalaus investavimo teorijos aspektai	7
2.1. Rizikos matai	7
2.2. Klasikinis Markowitziaus MV modelis	9
2.2.1. Minimalios rizikos vidurkio ir dispersijos portfelis	10
2.2.2. Rinkos kapitalo kreivė ir liestinės portfelis	11
2.2.3. Svarių apribojimai vidurkio ir dispersijos portfelyje	11
2.2.4. Maksimalios gražos vidurkio ir dispersijos portfelis	12
2.3. Robastiniai vidurkio ir kovariacijų matricos įvertiniai	12
2.3.1. Mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertinys MCD	13
2.3.2. Mažiausio elipsoidės tūrio įvertinys MVE	13
2.3.3. Ortogonalizuotas Gnanadesikano ir Kettenringo įvertinys OGK	13
2.3.4. Kovariacijų matricos suglodinimo įvertinys	13
2.4. Gražų normalumas	14
2.5. Vidutinio absoliutaus nuokrypio MAD modelis	14
2.6. Mažiausių dalinių momentų LPM modelis	16
2.7. Sąlyginės rizikos vertės CVaR modelis	17
2.7.1. CVaR modelio parametrai	18
2.8. Šiuolaikiniai portfelio optimizavimo įrankiai	19
2.8.1. Portfelio specifikacijos klasė	19
2.8.2. Portfelio duomenų klasė	21
2.8.3. Portfelio apribojimų klasė	22
2.8.4. Portfelio funkcijos	23
2.9. Strategijų analizavimas	23
3. Eksperimentinės dalies rezultatai	25
3.1. Trumpa duomenų analizė	25
3.2. MV portfelio optimizavimas	29
3.2.1. MV efektyvus portfelis	29
3.2.2. MV liestinės portfelis	36
3.2.3. MV mažiausios rizikos portfelis	41
3.3. Vidurkio ir dispersijos portfelio efektyvus frontas	44
3.4. CVaR portfelio optimizavimas	45
3.4.1. CVaR efektyvus portfelis	45
3.4.2. CVaR liestinės portfelis	50
3.4.3. CVaR mažiausios rizikos portfelis	53
3.5. CVaR portfelio efektyvus frontas	56
3.6. Portfelių strategijų analizė	57
3.6.1. MV portfelio strategijų analizė	57
3.6.2. CVaR portfelio strategijų analizė	63

4. Išvados	68
Bibliografija	70
Priedas	71

1. Įvadas

Klasikinio Markowitziaus optimalaus portfelio sudarymas remiasi vertybinių popierių grąžos vidurkio ir dispersijos analize. Tai reiškia, kad siekiama sudaryti tokį investicijų portfelį, kuris maksimizuotų grąžą, esant tam tikram rizikos lygiui, arba minimizuotų riziką, esant tam tikram norimo grąžos vidurkio lygiui.

Atsižvelgiant į reikšmingą priklausomybę nuo pasirinkto laiko intervalo, robustiniai metodai praktikoje įgavo svarbų vaidmenį. Šiame baigiamajame darbe pirmiausia nagrinėjamas klasikinis Markowitziaus vidurkio ir dispersijos modelis. Vėliau pereinama prie robustinių įvertinių.

Markowitzus yra laikomas modernios portfelio teorijos pradininku. Detalesnis šio modelio nagrinėjimas ir taikymas leido kitiems mokslininkams pastebėti Markowitziaus modelio spragas ir ieškoti kitų sprendimų. Vienas iš Markowitziaus modelio trūkumų yra dvipusis (simetrinis) rizikos matas. Markowitziaus modelyje yra nagrinėjami tiek teigiami, tiek neigiami nuokrypiai. Tačiau investuotojui yra svarbus tik nuokrypis į neigiamą pusę.

Įsitikinus tokių asimetrinių rizikos matų pranašumu, buvo atrasta daugybė vienpusių rizikos matų rūšių. Šiame darbe nagrinėjamas vienas naujausių ir dažniausiai praktikoje naudojamų sąlyginės rizikos vertės modelis su vienpusiu rizikos matu.

Šio baigiamojo darbo **tikslas** — ištirti moderniosios portfelio teorijos pritaikymą naudojant šiuolaikinius portfelio optimizavimo ir testavimo įrankius. Šiam tikslui pasiekti sprendžiami tokie **uždaviniai**:

- Ištirti dažniausiai naudojamus rizikos matus.
- Susipažinti su praktikoje taikomais robustiniais įvertiniais.
- Išanalizuoti nagrinėjamus duomenis naudojant aprašomosios statistikos metodus.
- Susipažinti su Rmetrics portfelio sudarymo ir optimizavimo ypatumais.
- Taikant naujausius metodus, sudaryti ir optimizuoti pasirinktus portfelius:
 - klasikinis vidurkio ir dispersijos portfelis (toliau — MV);
 - sąlyginės rizikos vertės portfelis (toliau — CVaR).
- Pasirinktiems portfeliams pritaikyti robustinius įvertinius:
 - mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertinys;
 - mažiausio elipsoidės tūrio įvertinys;
 - ortogonalizuotas Gnanadesikano ir Kettenringo įvertinys;
 - kovariacijų matricos suglodinimo įvertinys.
- Atlikti portfelio strategijų analizę.

Šiame darbe nagrinėjami 10 įmonių iš vertybinių popierių biržos NASDAQ duomenys. Nagrinėjamas laikotarpis nuo 2006-ųjų metų balandžio iki 2013-ųjų metų balandžio mėn.

2. Pagrindiniai optimalaus investavimo teorijos aspektai

Prieš pradedant nuodugniau aprašinėti ir analizuoti portfelius, pirmiausia verta išsiaiškinti pagrindines sąvokas, kurios yra neatsiejama investavimo teorijos dalis. Vienas tokių terminų yra rizikos matas, kuris atlieka vieną svarbiausių vaidmenų sudarant portfelį.

2.1. Rizikos matai

Investuotojų požiūriai į riziką gali labai skirtis. Vieni pasiruošę beatodairiškai rizikuoti tikėdamiesi kuo didesnio pelno neretai elgdamiesi atrodytų neracionaliai. Kitas kraštutinitumas — vengimas rizikos net jei tokia elgsena duos labai ribotą pelną. Tokie žmonės dažniausiai investuoja į obligacijas, kurios yra mažiausiai rizikinga vertybinių popierių rūšis. Visgi dažniausiai investuotojų požiūris į riziką pasiskirstęs tarp šių kraštutinitumų. Žemiau pateikiami keli dažnai praktikoje aptinkami rizikos matai [3].

- Standartinis nuokrypis ir dispersija

Klasikiniame Markowitziaus vidurkio ir dispersijos modelyje rizikos matas yra standartinis nuokrypis. Pagal apibrėžimą atsitiktinio dydžio X su vidurkiu μ standartinis nuokrypis yra išreikškiamas:

$$\sigma = \sqrt{E(X - \mu)^2}. \quad (1)$$

Tolydaus atsitiktinio dydžio X su pasiskirstymo tankiu $p(x)$ standartinis nuokrypis įgauna tokį pavidalą:

$$\sigma = \sqrt{\int (X - \mu)^2 p(x) dx}; \quad (2)$$

čia $\mu = \int xp(x) dx$.

Dažniausiai naudojamas toks standartinio nuokrypio įvertinys:

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad (3)$$

čia $x_1, \dots, x_n$ imtis, o $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ vidurkis su n realizacijų. Standartinis nuokrypis arba dispersija, kuri yra susieta su standartiniu nuokrypiu sąryšiu $\text{var}(X) = \sigma^2$, yra dažnai naudojamas rizikos matas, kai pasikliaunama paprasčiausiu matu.

Standartinis nuokrypis nurodo tiek teigiamus, tiek neigiamus nukrypimus nuo vidurkio. Tačiau neigiami nuokrypiai gali būti naudingi investuotojui. Taip atsitinka, kai jie yra didesni už tam tikrą slenkstį. Nagrinėjant tokį rizikos matą yra priimama prielaida, kad nagrinėjami duomenys yra normaliai pasiskirstę. Praktiškai ši sąlyga retai pasitvirtina, todėl ilgą laiką buvo ieškoma kitų alternatyvių rizikos matų portfelių optimizavimui.

- Vidutinis absoliutusias nuokrypis

Vienas tokių alternatyvių matų yra vidurkio absoliutusias nuokrypis (angl. mean absolute deviation — MAD). MAD yra geresnis rizikos matas tada, kai duomenyse yra išskirčių. Finansinėms rinkoms staigūs kritimai ir kilimai nėra retenybė, todėl praktikoje šis dydis neretai yra aptinkamas [10]. MAD galima apskaičiuoti pasinaudojus formule:

$$MAD = \frac{\sum |X - \mu|}{n}. \quad (4)$$

Čia n yra nagrinėjamų duomenų imties dydis, o μ — imties vidurkis.

- Mažiausi daliniai momentai

Momento sąvoką verta įvesti bendru atveju, t.y. paaiškinant n -eilės momento apibrėžimą. Jei X yra atsitiktinis dydis su sumine pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$ ir konstanta τ , tai n -eilės momentas yra:

$$\mu_{n,\tau}(F_X(x)) = E((X - \tau)^n) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \tau)^n dF_X(x). \quad (5)$$

Kai τ yra lygus vidurkiui, anksčiau pateiktas dydis vadinamas centriniu momentu. Pirmos eilės momentas yra nulis, o antros eilės momentas — dispersija. Žemiau pateikiamas normuotų centrinių momentų apibrėžimas:

$$\overline{\mu_{n,\tau}}(F_X(x)) = \frac{E((X - \tau)^n)}{\sigma^n}. \quad (6)$$

Čia σ^n yra n -eilės momento standartinis nuokrypis.

Analogiškai kaip ir dispersijos atveju, momentai atsižvelgia tiek į teigiamas, tiek į neigiamas reikšmes. Todėl buvo įvestas dalinių momentų apibrėžimas. Mažiausi daliniai momentai (angl. Lower Partial Moments — toliau LPM) nagrinėja n -eilės momentus, esančius žemiau pateiktos ribos τ . Pirmą kartą šį dydį apibrėžė 1977 m. Fishburnas [6].

Jei X yra atsitiktinis dydis su pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$ ir konstanta τ , tai mažiausi daliniai momentai yra:

$$LPM_{n,\tau}(F_X(x)) = E(\max(X - \tau, 0)^n) = \int_{-\infty}^{\tau} (x - \tau)^n dF_X(x). \quad (7)$$

Praktiškai turint m stebinių, LPM įvertinamas pasinaudojus formule:

$$LPM_{n,\tau,i} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m (\max(0, X_{i,t} - \tau))^n. \quad (8)$$

LPM yra rizikos matų šeima, priklausoma nuo τ ir n . τ , neretai įgauna reikšmę 0. Momentų eilės parinkimas leidžia investuotojui įvertinti riziką savo nuožiūra priklausomai nuo to, ar investuotojas yra labiau linkęs rizikuoti, ar kaip tik atvirkščiai vengia rizikos [18]. Kuo didesnis eilės skaičius n pasirenkamas, tuo didesni apribojimai skiriami nuokrypiams. Verta pastebėti, kad praktiškai sutinkamas ir toks rizikos matas kaip dalinė dispersija. Tai yra atskiras LPM variantas, kai dalinių momentų eilė yra 2.

- Sąlyginė vertės pokyčio rizika

Vertės pokyčio rizika (angl. Value at Risk — VaR) parodo, koks yra didžiausias laukiamas nuostolis su tam tikru pasiklovimo lygmeniu per tam tikrą laikotarpį. Praktikoje dažniausiai

pasirenkamas 0.95% pasiklivimo lygmuo. Tai reiškia, kad 5% atvejų nuostoliai sudarys dydį, kuris bus didesnis nei VaR. Esant tokiam pasiklivimo lygmeniui ieškoma reišmė yra:

$$VaR = -V_p(\mu_p + 1.645\sigma_p). \quad (9)$$

Čia μ_p ir σ_p yra portfelio vidurkis ir standartinis nuokrypis, atitinkamai, o V_p — portfelio einamasis uždavinys, išreikštas piniginiiais vienetais [11].

Pagal apibrėžimą, jei X - atsitiktinis dydis (nuostolis) su pasiskirstymo funkcija F_X , o $\alpha \in (0,1)$, tai $VaR_\alpha(X)$ yra mažiausias skaičius x , kuris su tikimybe $1 - \alpha$ yra didesnis nei nuostolis X . Matematiškai tai galima užrašyti taip:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X) &= \inf\{x \in R : P(X > x) \leq 1 - \alpha\} = \\ &= \inf\{x \in R : 1 - F_X(x) \leq 1 - \alpha\} = \\ &= \inf\{x \in R : F_X(x) \geq \alpha\} \end{aligned} \quad (10)$$

Detaliau išanalizavus VaR savybes paaiškėjo, kad dėl didelių trūkumų, tokių kaip negalėjimas apriboti pasiskirstymo funkcijos nepakenkiant algoritmo efektyvumui, pereita prie kito alternatyvaus rizikos mato — sąlyginės rizikos vertės (angl. Conditional Value at Risk — CVaR). Šis dydis apibrėžiamas kaip sąlyginis laukiamas nuostolis, esant sąlygai, kai nuostolis peržengs VaR ribą [20].

Kitaip tariant, užuot būtų žiūrima į tai, kas tikėtina gali įvykti, pasiūlyta atkreipti dėmesį į tai, kaip blogai bus, kai dydis jau viršys tam tikrą ribą. Pagal apibrėžimą, jei X — atsitiktinis nuostolis, o $\alpha \in (0,1)$, tai $CVaR_\alpha(X)$ galima išreikšti:

$$CVaR_\alpha(X) = E(X|X \geq VaR_\alpha(X)). \quad (11)$$

Verta pastebėti, kad kad nors VaR ir CVaR pagal užrašymą primena Var, kas reiškia Variance (dispersiją), tai nėra nei dispersija, nei iš viso momentas. Iš to išplaukia ir sąlyginai nesudėtinga šių charakteristikų interpretacija. Tai leidžia investuotojui įvertinti kaip blogai gali būti, susidarius nepalankioms aplinkybėms [7].

2.2. Klasikinis Markowitziaus MV modelis

1952 m. Markowitzus pristatė klasikinį vidurkio ir dispersijos (angl. Mean Variance — MV) modelį [13]. Šis modelis atsižvelgia į du pagrindinius rodiklius, t.y. laukiamos grąžos, kurios yra išreikštos pelno normų vidurkių vektoriumi, bei riziką, kurią aprašo pelno normų nuokrypių vektorius.

Modernioji portfelio teorija paaiškina, kaip racionalūs investuotojai, siekdami optimizuoti rizikingus portfelio aktyvus, išnaudoja diversifikavimą. Diversifikavimo svarba grindžiama posakiu, kad nepatariama dėti visų kiaušinių į vieną krepšį. Šios nerašytos taisyklės paisymas leidžia sumažinti riziką ir galimus nuostolius. Pagrindinės Markowitziaus modelio sudedamosios dalys yra atsitiktinės aktyvų grąžos, kurios į modelį įtraukiamos su tam tikrais svoriais. Portfelio vidurkis ir disperija yra apskaičiuojami remiantis turima duomenų imtimi.

Racionalus investuotojas siekia maksimizuoti laukiamą pelną ir minimizuoti riziką. Standartinis nuokrypis yra MV portfelio rizikos matas. Remiantis šiais pelno funkcijos tikslais, racionalus

investuotojas iš dviejų portfelių su vienodomis laukiamomis grąžomis visada išrinks tą, kuris yra mažiau rizikingas. Tarp vienodo rizikos lygio portfelių pranašesnis yra tas, kurio laukiama grąža didesnė. Kitaip tariant, investuotojas visada teiks pirmenybę tam portfeliui, iš kurio tikisi gauti didesnę pelną ir kuris yra mažiau rizikingas palyginti su kitais alternatyviais portfeliais.

Klasikinis Markovitziaus portfelis yra vadinamas vidurkio ir dispersijos portfelium. Vienas iš racionalaus investuotojo tikslų yra minimizuoti riziką esant tam tikram fiksuotam laukiamam pelnui. Rizikos matas šiuo atveju yra dispersija, o laukiamo pelno — vidurkis. Tokiu tikslu sudarytas portfelis yra vadinamas minimalios rizikos vidurkio ir dispersijos portfelium. Kita vertus, investuotojas gali būti suinteresuotas maksimizuoti grąžą, kai fiksuojamas tam tikras rizikos lygis. Toks portfelis vadinamas maksimalios grąžos vidurkio ir dispersijos portfelium.

2.2.1. Minimalios rizikos vidurkio ir dispersijos portfelis

Tegul ω yra į portfelį įtrauktų aktyvų svoriai, kurie yra neneigiami ir kurių suma yra 1. Minimalios rizikos vidurkio ir dispersijos portfelio optimizavimo uždavinys yra tokio uždavinio sprendinio radimas:

$$\begin{cases} \min_{\omega} \omega^T \hat{\Sigma} \omega, \\ \omega^T \hat{\mu} = \bar{r}, \\ \omega^T \mathbf{1} = 1. \end{cases} \quad (12)$$

Taigi uždavinio tikslas yra minimizuoti dispersijų riziką

$$\bar{\sigma}^2 = \omega^T \hat{\Sigma} \omega.$$

Čia $\hat{\Sigma}$ yra aktyvų kovariacijos įvertinys. Vektorius ω žymi investavimo svorius su sąlyga, kad $\omega^T \mathbf{1} = 1$. Laukiamai grąžai $\bar{r}$ iškeliamą sąlyga

$$\omega^T \hat{\mu} = \bar{r}.$$

Čia $\hat{\mu}$ yra p eilės vektorius nusakantis aktyvų laukiamas grąžas.

Markowitziaus portfelio modelis turi vienintelį sprendimą:

$$\omega^* = \hat{\mu} \omega_0^* + \omega_1^*.$$

Čia

$$\begin{aligned} \omega_0^* &= \frac{1}{\Delta} \left(B \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} - C \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \right) \\ \omega_1^* &= \frac{1}{\Delta} \left(C \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} - A \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \right) \\ \Delta &= AB - C^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Čia

$$\begin{aligned} A &= \hat{\mu}^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} \\ B &= 1^T \hat{\Sigma}^{-1} 1 \\ C &= 1^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}. \end{aligned} \tag{14}$$

Optimalaus portfelio su svoriais ω^* standartinis nuokrypis yra:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{\Delta} (\hat{\mu}B - 2\hat{\mu}C + A)\bar{r}} = \omega^T \hat{\mu}. \tag{15}$$

Taškų $\{\bar{\sigma}, \bar{r}\}$ išdėstymas sudaro hiperbolę. Hiperbolės ribose esantys taškai yra galimos vidurkio ir standartinio nuokrypio portfelio realizacijos. Hiperbolės linijos nurodo efektyvų frontą (viršutinės lubos) ir minimalios dispersijos išdėstymą (apatinės lubos).

Taškas, esantis ant efektyvaus fronto kreivės ir turintis mažiausią riziką, vadinamas globaliu minimalios dispersijos portfeliu. Šiuo atveju aktyvų svorių rinkinys yra:

$$\omega^* = \frac{\hat{\Sigma}^{-1} 1}{1^T \hat{\Sigma}^{-1} 1}. \tag{16}$$

2.2.2. Rinkos kapitalo kreivė ir liestinės portfelis

Įvairios rizikingo portfelio kombinacijos su laukiama grąža r_f gali būti pavaizduotos tiesė, kuri yra vadinama rinkos kapitalo kreivė (angl. The Capital Market Line —CML). Taškas, kuriame CML liečia efektyvų frontą, atitinka optimalios rizikos portfelį. Matematiškai tai galima išreikšti kaip maksimizavimo uždavinį:

$$\begin{aligned} \max_{\omega} h(\omega) &= \frac{\hat{\mu}^T \omega - r_f}{\omega^T \hat{\Sigma} \omega}, \\ \omega^T \hat{\mu} &= \bar{r}, \\ \omega^T \mathbf{1} &= 1, \forall \omega. \end{aligned} \tag{17}$$

Šio uždavinio sprendinys yra vadinamas Sharpo rodiklis, kurį 1994 m. pristatė Sharpas [19].

2.2.3. Svorių apribojimai vidurkio ir dispersijos portfelyje

Ankstesniuose skyreliuose aptarti modeliai yra naudojami, kai nėra galimas trumpalaikis vertybinių popierių skolinimas (angl. short selling). Tačiau praktikoje neretai aktyvų svoriams skiriami nuliniai apribojimai, t.y. svoriai gali įgyti tik neneigiamas reikšmes. Matematiškai kvadratinis minimizavimo uždavinys įgauna tokį pavidalą:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \omega^T \hat{\Sigma} \omega, \\ A\omega &\leq b. \end{aligned} \tag{18}$$

Jeigu $\hat{\Sigma}$ yra teigiamai apibrėžta matrica, tai Markowitziaus portfelio optimizavimo uždavinys

yra iškilaus optimizavimo uždavinys. Tenkinant minėtus reikalavimus, lokalus optimizavimo sprendinys yra ir globalus sprendinys.

2.2.4. Maksimalios grąžos vidurkio ir dispersijos portfelis

Anksčiau aptartame minimalios rizikos portfelyje buvo siekiama minimizuoti riziką, esant tam tikram laukiamos grąžos lygiui. Maksimalios grąžos portfelio tikslas yra priešingas — čia siekiama maksimizuoti laukiamą pelną fiksavus tam tikrą rizikos lygį. Matematiškai toks maksimizavimo uždavinys įgauna tokį pavidalą:

$$\begin{aligned} \max_{\omega} \omega^T \hat{\mu} \\ A\omega \leq b \\ \omega^T \hat{\Sigma} \omega \leq \sigma. \end{aligned} \quad (19)$$

2.3. Robastiniai vidurkio ir kovariacijų matricos įvertiniai

Klasikiniame vidurkio ir dispersijos portfelio optimizavime atsižvelgiama ne tik į svorius, bet ir į riziką. Siekiant apčiuopiamai įvertinti rizikos įtaką, iškeliamas klausimas, kaip pasikeis portfelio rizikingumas, jei aktyvų svoriai bus sumažinti ar padidinti. Tokį pokytį galima išreikšti kaip:

$$\sigma = \sqrt{w^T \Sigma w} = \sum_i w_i \frac{d\sigma}{dw_i}. \quad (20)$$

Interpretacijos paprastumo dėlei anksčiau pateikta išraiška yra normuojama ir visi susumuoti nariai yra lygūs 1:

$$1 = \sum_i B_i = \sum_i w_i \frac{w_i}{\sigma} \frac{d\sigma}{dw_i}. \quad (21)$$

Pridėjus aptartus apribojimus, optimizavimo uždavinys įgauna tokį pavidalą:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \sum \omega, \\ \omega^T \hat{\mu} = \bar{r}, \\ \omega^T \mathbf{1} = 1, \\ B_i^{apat.} \leq \frac{\omega_i}{\sigma} \frac{d\sigma}{dw_i} \leq B_i^{virđ.} \end{aligned} \quad (22)$$

Tai padės išvengti maksimalių ir minimalių rizikos įnašų, atsirandančių iš pavienių aktyvų.

Vidurkio ir dispersijos portfeliai konstruojami naudojant imties vidurkį ir pelno normų kovariacinę matricą. Verta pastebėti, kad tokiais pagrindais grįsti portfeliai neretai yra nestabilūs. Nestabilumas kyla iš griežtai pasirinktų laiko intervalų, kurie sąlygoja reikšmingus svyravimus. Tokie svyravimai gali lemti labai didelius pokyčius svorių atžvilgiu, tačiau beveik nereikšmingus laukiamų grąžų pokyčius. Kuo mažiau laiko eilučių duomenų turima ir į kuo daugiau aktyvų atsižvelgiama konstruojant portfelį, tuo labiau nepastovūs yra nagrinėjami vidurkio ir kovariacijos įverčiai. Tai savo ruožtu priverčia dažnai pertvarkyti portfelio sandarą ir padidina transakcijų

išlaidas. Siekiant didesnio stabilumo praktikoje neretai naudojami robustiniai metodai. Žemiau pateikiami neretai praktikoje taikomi įvertiniai, kurie pritaikyti standartinei portfelio optimizavimo procedūrai įdiegtoje Rmetrics [19].

- `covMcdEstimator` — MCD, mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertinys;
- `mveEstimator` — MVE, mažiausio elipsoidės tūrio įvertinys;
- `covOGKEstimator` — Ortogonalizuotas Gnanadesikano-Kettenringo įvertinys;
- `shrinkEstimator` — kovariacijų matricos suglodinimo įvertinys.

2.3.1. Mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertinys MCD

Mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertinys (MCD) atsižvelgia į h realizacijų, kurių klasikinė kovariacijų matrica įgauna mažiausią determinantą. Čia $h > n/2$, o n - imties dydis. Norint optimizuoti MV portfelį reikia iškviešti funkciją `covMcdEstimator()`, kurioje aprašytas pageidaujamo įvertinio algoritmas. Verta pastebėti, kad algoritmas veikia ganėtinai lėtai, todėl portfelio optimizavimas užtrunka šiek tiek ilgiau nei taikant paprastą imties kovariacijų matricos įvertinį.

2.3.2. Mažiausio elipsoidės tūrio įvertinys MVE

Kitas alternatyvus klasikiniam vidurkio ir dispersijos modelio įvertiniui yra mažiausio elipsoidės tūrio įvertinys (MVE). Toks įvertis randamas atrenkant mažiausią tašką iš elipsoidės pavidalo sklaidos diagramų, kuriose yra daugiamatės normaliai pasiskirsčiusios imtys, kurios susideda iš nemažiau kaip pusės pradinių realizacijų. Iš tokių imties taškų skaičiuojami atitinkamai vidurkio ir kovariacijų matricos įvertiniai. Naudojant šiuos įvertinius, kiekvienai realizacijai, iš atrinktos imties, programa suskaičiuoja Mahalanobiso atkarpos ilgį. Tie taškai, kurie viršija 97.5 % reikšmingumo lygmens χ^2 pasiskirstymo reikšmių, laikomi išskirtimais. Mažiausio elipsoidės tūrio įvertinys Rmetrics aprašomas funkcija `mveEstimator()`.

2.3.3. Ortogonalizuotas Gnanadesikano ir Kettenringo įvertinys OGK

Ortogonalizuotas Gnanadesikano ir Kettenringo įvertinys (OGK) suskaičiuoja ortogonalizuotas kovariacijų matricos poras. Toks alternatyvus įvertinys buvo pasiūlytas dar 1997 ir nuodugniau ištirtas XXI amžiaus pradžioje. Rmetrics leidžia pritaikyti šį įvertinį pasinaudojus funkcija `covOGKEstimator()`.

2.3.4. Kovariacijų matricos suglodinimo įvertinys

Kovariacijų matricos suglodinimo įvertinys randamas nagrinėjant iškilią empirinių įvertinių kombinacijas su tam tikru pasirinktu tikslu. Tai gali būti pavyzdžiui diagonalinė matrica. Vienas iš pagrindinių kovariacijų matricos suglodinimo įvertinio privalumų yra tai, kad jis visada yra teigiamai apibrėžtas. Rmetrics leidžia panaudoti šį įvertinį paleidus `shrinkEstimator()` funkciją.

2.4. Gražų normalumas

Klasikinis vidurkio ir dispersijos modelis reikalauja, kad nagrinėjamos grąžos turėtų normalųjį skirstinį. Pagal apibrėžimą, požymio X skirstinys yra normalusis, arba kitaip dar vadinamas Gauso, jei jo tikimybinių tankio funkciją f_X galima nusakyti formule:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right). \quad (23)$$

Čia μ_X ir σ_X yra X teorinis vidurkis ir standartinis nuokrypis.

Vienas iš grafinių normalumo tikrinimo būdų yra kvantilinio grafiko (angl. Normal Q-Q Plot) nubrėžimas. Jei nagrinėjama imtis yra iš normaliosios populiacijos, beveik visi taškai, su nedidelėmis paklaidomis, turi būti ant grafike išbrėžtos tiesės, kuri eina per pirmą ir trečią kvantilį.

Vienas populiariausių formalių testų normalumui tikrinti yra Shapiro testas. Šio testo nulinė hipotezė H_0 yra ta, kad imtis paimta iš normaliosios populiacijos su alternatyva H_1 , kad iš kitos populiacijos. Kai p -reikšmė yra didesnė už tam tikrą pasirinktą reikšmingumo lygmenį, dažniausiai 0.05, tai nėra pagrindo atmesti normalumo hipotezės [9].

Kai nagrinėjamos grąžos yra normaliai pasiskirsčiusios MV portfelio teorija gali būti naudojama. Tačiau jeigu taip nėra, siekiant tikslesnių rezultatų, modelį reikėtų modifikuoti. Sekančiuose skyreliuose pristatomi alternatyvūs modeliai nereikalaujantys grąžų normališkumo.

2.5. Vidutinio absoliutaus nuokrypio MAD modelis

1991 m. Konno ir Yamazaki pristatė vidutinio absoliutaus nuokrypio modelį (angl. mean absolute deviation (MAD) model) [14]. Naujas modelis buvo pasiūlytas ieškant alternatyvos klasikiniam vidurkio ir dispersijos modeliui. Naujame MAD modelyje tikslo funkcijoje dispersija keičiama vidurkio absoliučiuoju nuokrypiu. Tokiu būdu pereinama iš netiesinio programavimo uždavinio prie tiesinio. MAD modelis išlaiko visas teigiamas klasikinio vidurkio ir dispersijos modelio savybes ir turi kelias papildomas savybes.

- MAD modelyje neatsižvelgiama į aktyvų pelno normų kovariacinę matricą. Tokiu būdu išvengiama ir paklaidų atsirandančių dėl jos vertinimo;
- tiesinio programavimo uždavinio sprendimas yra paprastesnis ir greitesnis nei kvadratinio programavimo;
- MAD portfelį sudaro mažiau aktyvų, o tai savo ruožtu sumažina operacijų kaštus.

Racionalaus investuotojo priimami sprendimai dažniausiai yra paremti nagrinėjamos duomenų imties informacija. Nagrinėjant imties informaciją, MAD ir MV modelių apibrėžimai sąlygoja skirtingus duomenų rinkinius. Šiuos skirtingus duomenų rinkinius galima interpretuoti kaip skirtingas visos informacijos įvėrčius. Skirtumas tarp šių dviejų modelių atsiranda dėl atsižvelgimo į skirtingas imties statistikas ir pasikliovimo skirtinga informacija gaunama iš nagrinėjamos duomenų imties [2].

Kaip jau anksčiau buvo minėta, MV modelyje naudojamas imties vidurkių vektorius ir imties kovariacijų matrica. Tuo tarpu MAD modelyje atsižvelgiama į imties vidurkių vektorių bei į imties realizacijų pelno normų vektorių. Verta pastebėti, kad tuo atveju, kai nagrinėjamų grąžų

skirstinys yra normalusis, vidurkio absoliutusias nuokrypis teoriškai yra ekvivalentas MV modelyje nagrinėjamai dispersijai.

Tegul ω yra į portfelį įtrauktų aktyvų svoriai, kurių suma yra 1. MAD portfelio optimizavimo uždavinys susiveda į tokio uždavinio sprendinio radimą:

$$\min E \left| \sum_{j=1}^n r_j \omega_j - E \sum_{j=1}^n r_j \omega_j \right|, \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^n E r_j \omega_j \geq \rho, \quad (25)$$

$$\omega^T \mathbf{1} = 1. \quad (26)$$

Čia r_j yra j -ojo aktyvo laukiama grąža, ω_j j -ojo aktyvo svoris, o ρ nurodo mažiausią laukiamą pelną. r_j reikšmė randama:

$$r_j = \sum_{t=1}^T \frac{r_{jt}}{T}. \quad (27)$$

Čia t ($t = 1, 2, \dots, T$) yra nagrinėjamo laiko intervalo momentai. Tikslą funkciją galima aproksimuoti užrašius:

$$E \left[\left| \sum_{j=1}^n r_j \omega_j - E \left[\sum_{j=1}^n r_j \omega_j \right] \right| \right] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) \omega_j \right|. \quad (28)$$

Pažymėjus

$$a_{jt} = r_{jt} - r_j, \quad (29)$$

MAD modelis įgauna tokį pavidalą:

$$\min \frac{\sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n a_{jt} \omega_j \right|}{T}, \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^n r_j \omega_j \geq \rho, \quad (31)$$

$$\omega^T \mathbf{1} = 1. \quad (32)$$

Aukščiau pateiktas modelis yra ekvivalentus tiesinio programavimo modeliui:

$$\min \frac{\sum_{t=1}^T y_t}{T}, \quad (33)$$

$$y_t + \sum_{j=1}^n a_{jt} \omega_j \geq 0, t = 1, \dots, T, \quad (34)$$

$$y_t - \sum_{j=1}^n a_{jt} \omega_j \geq 0, t = 1, \dots, T, \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^n r_j \omega_j \geq \rho, \quad (36)$$

$$\omega^T \mathbf{1} = 1. \quad (37)$$

Taigi, kaip jau anksčiau buvo minėta, MAD modelio atveju išvengiama kovariacijų matricos vertinimo. Ne mažiau svarbų MAD modelio privalumą XX amžiaus pradžioje pabrėžė Byrne ir Lee, kurie teigė, kad MAD modelis yra mažiau jautrus išskirtims negu MV modelis [14].

2.6. Mažiausių dalinių momentų LPM modelis

Šiame skyrelyje pristatomas dar vienas kriterijus portfelio sudarymui. Mažiausių dalinių momentų metodas matuoja neigiamą nuokrypį nuo pasirinkto fiksuoto taško. Nepaslaptis, kad vieni investuotojai yra linkę labiau rizikuoti, o kiti vengia rizikos. Šio modelio privalumas yra tas, kad atsižvelgiama į investuotojo požiūrį į riziką.

Kaip jau anksčiau buvo minėta, klasikinis Markowitziaus vidurkio ir dispersijos modelis reikalauja nagrinėjamų duomenų normalaus pasiskirstymo. Kai ši sąlyga nėra tenkinama, nagrinėjami alternatyvūs modeliai su skirtingais rizikos matais. Vienas jų yra LPM modelis. Nagrinėdami šį modelį, investuotojai atsižvelgia ne į vidurkį ir dispersiją, o į vidurkį ir mažiausius dalinius momentus.

Vienas pagrindinių MV modelio trūkumų yra tai, kad dispersija atsižvelgia tiek į teigiamus, tiek į neigiamus nuokrypius. Tačiau investuotojui svarbu maksimizuoti teigiamus nuokrypius, o ne minimizuoti juos. Vienas iš LPM modelio privalumų yra tai, kad nagrinėjant šį modelį išvengiama teigiamų nuokrypių minimizavimo.

Dar vienas LPM modelio privalumas yra tai, kad investuotojas gali pasirinkti momentų eilę. MV modelyje dispersija yra antros eilės momentas, kurios nebegalima keisti, nors duomenys gali reikauti ir kitokio pasiskirstymo. Be to, MV modelyje nagrinėjama kvadratinė naudingumo funkcija. LPM modelis leidžia pasirinkti norimą laipsnį.

Praktikoje sprendžiant LPM portfelio optimizavimo neapsieinama be papildomos sąvokos įvedimo. Tai yra bendri mažiausi daliniai momentai (angl. co-lower partial moments — toliau CLPM). Perėjimas prie CLPM yra reikalingas dėl didesnio kiekio aktyvų nagrinėjimo. Dalinės dispersijos atveju CLPM i-ojo ir j-ojo aktyvų randami pasinaudojus formule:

$$CLPM_{2,\tau,i,j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \tau)(X_j - \tau)d_i. \quad (38)$$

Čia $d_i = 1$, kai i-asis aktyvas yra žemiau nustatyto lygio τ . Analogiškai, CLPM j-ojo ir i-ojo randami tokiu būdu:

$$CLPM_{2,\tau,j,i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_j - \tau)(X_i - \tau)d_j. \quad (39)$$

Kai j-asis aktyvas žemiau nustatytos ribos τ , tai $d_j = 1$. Toks sąryšis, kai $n=2$, pirmą kartą buvo pristatytas dar 1972 m. Hogano ir Warrenso darbuose [8]. 1991 m. Nawrockis apibendrino ankstesnius teiginius ir suformulavo LPM tokiu būdu [18]:

$$LPM_{n,\tau,i,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_i \omega_j CLPM_{i,j,n-1} \text{ ir} \quad (40)$$

$$CLPM_{n-1,\tau,i,j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\max(0, \tau - X_{i,t}))^{n-1} (\tau - X_{j,t}) \quad (41)$$

Bendru atveju CLPM nėra simetriniai. Iš to seka, kad

$$CLPM_{n-1,\tau,i,j} \neq CLPM_{n-1,\tau,j,i}, \text{ kai } i \neq j. \quad (42)$$

1991 m. Nawrockis parodė, kad CLPM nagrinėjamas kaip simetrinio mato duoda pakankamai gerus rezultatus ir paprastesnius skaičiavimus [18]. Tai reiškia, kad dviejų aktyvų CLPM galima išreikšti kaip:

$$CLPM_{n,\tau,i,j} = (*LPM_{n,\tau,i} * LPM_{n,\tau,j})^{\frac{1}{n}} \rho_{i,j}. \quad (43)$$

Čia $\rho_{i,j}$ yra koreliacijos koeficientas tarp i -ojo ir j -ojo aktyvo. Pasinaudojus įvestais apibrėžimais, LPM galima išreikšti tokiu būdu:

$$LPM_{n,\tau,p} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j CLPM_{n-1,\tau,i,j} = w^T L w. \quad (44)$$

Čia indeksas p nurodo LPM portfelį, o matrica L yra:

$$L = \begin{pmatrix} CLPM_{n-1,\tau,1,1} & \cdots & CLPM_{n-1,\tau,1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CLPM_{n-1,\tau,m,1} & \cdots & CLPM_{n-1,\tau,m,m} \end{pmatrix}.$$

Tokiu būdu portfelio optimizavimo uždavinys įgauna tokią matematinę išraišką:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \omega^T L \omega, \\ \omega^T \hat{\mu} &= \bar{r}, \\ \omega^T \mathbf{1} &= 1. \end{aligned} \quad (45)$$

2.7. Sąlyginės rizikos vertės CVaR modelis

Neabejotinai rizika yra vienas svarbiausių faktorių, į kuriuos investuotojas turi atsižvelgti. Vienas iš dažnai naudojamų alternatyvių rizikos matų yra sąlyginės rizikos vertė (angl. Conditional Value at Risk — CVaR). Šis rizikos matas neretai yra vadinamas *mean excess loss*, *mean shortfall*, *tail Value at Risk* ar tiesiog *VaR* [7]. CVaR yra sąlyginis laukiamas nuostolis su tam tikru pasiklovimo lygmeniu, kuris yra didesnis nei VaR. Pirmasis pristatęs CVaR kaip alternatyvų rizikos matą 2000-aisiais buvo Pflug [20].

Konstruojant CVaR portfelį atsižvelgiama į du kintamuosius: į svorių vektorių ω ir atsitiktines grąžas r . Nuostolių funkciją pažymėjus $f(\omega, r)$ išrenkamas portfelis W iš X galimų portfelių. Priimama prielaida, kad vektoriaus r tikimybinių tankio funkcija yra išreiškiama $p(r)$. Tam tikram vektoriui w yra konstruojama pasiskirstymo funkcija su nuostoliu priklausančiu nuo vektoriaus w .

$$\Psi(w, \gamma) = \int_{f(w,r) \leq \gamma} p(r) dr \quad (46)$$

Su tam tikru reikšmingumo lygmeniu α , portfelio W VaR_α yra:

$$VaR_\alpha(w) = \min \gamma \in R : \Psi(w, \gamma) \geq \alpha. \quad (47)$$

Panašiai aprašomas ir portfelio W $CVaR_\alpha$:

$$CVaR_\alpha(w) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{f(w,r) \leq VaR_\alpha(w)} f(w,r)p(r) dr \quad (48)$$

Pasinaudojus įvestais pažymėjimais, CVaR optimizavimo uždavinys įgauna tokį pavidalą:

$$\begin{aligned} \min_w CVaR_\alpha(w) \\ \omega^T \hat{\mu} &= \bar{r} \\ \omega^T \mathbf{1} &= 1 \end{aligned} \quad (49)$$

Iš tikrųjų $CVaR_\alpha$ ir VaR_α minimizavimas nėra ekvivalentūs uždaviniai. Kadangi $CVaR_\alpha$ apibrėžimas apima VaR_α funkciją, naudoti ją ir tuo pačiu metu optimizuoti yra sunku. Todėl praktikoje naudojama pagalbinė funkcija:

$$F_\alpha(w, \gamma) = \gamma + \frac{1}{1-\alpha} \int_{f(w,r) \geq \gamma} (f(w,r) - \gamma)p(r) dr \quad (50)$$

Aukščiau pateiktą išraišką galima pertvarkyti į naują pavidalą:

$$F_\alpha(w, \gamma) = \gamma + \frac{1}{1-\alpha} \int (f(w,r) - \gamma)^+ p(r) dr . \quad (51)$$

Čia $z^+ = \max(z, 0)$. Pastaroji funkcija turi kelias svarbias savybes, kurios yra naudingos VaR_α ir $CVaR_\alpha$ skaičiavimams:

- $F_\alpha(w, \gamma)$ yra γ iškila funkcija,
- $VaR_\alpha(w)$ minimizuojanti $F_\alpha(w, \gamma)$ reikšmė,
- funkcijos $F_\alpha(w, \gamma)$ minimumas yra $CVaR_\alpha(w)$.

Iš pateiktų savybių išplaukia, kad $CVaR_\alpha$ galima optimizuoti optimizavus funkciją $F_\alpha(w, \gamma)$ svorių ω ir VaR γ atžvilgiu. Jei nuostolių funkcija $f(w, r)$ yra iškila, tai $F_\alpha(w, \gamma)$ irgi yra iškila funkcija. Tokiu būdu gaunamas portfelių rinkinys W irgi yra išgaubtas, o optimizavimo uždavinys susiveda į suglodintos iškilos funkcijos optimizavimą. Tokiam uždaviniui spręsti, R paketas turi įdiegtus įrankius. Tais atvejais, kai funkcija $f(w, r_s)$ yra tiesinė w atžvilgiu su tiesiniais apribojimais, optimizavimo uždavinys yra tiesinis ir gali būti išspręstas simplekso metodu ar kitu alternatyviu tiesinio programavimo algoritmu.

2.7.1. CVaR modelio parametrai

Panašiai kaip ir anksčiau aprašytame vidurkio ir dispersijos modelio atveju, R pakete yra įdiegti įrankiai leidžiantys nagrinėti CVaR portfelius. Šio portfelio aprašymas susideda iš trijų dalių, kurios yra labai artimos klasikiniam vidurkio ir dispersijos modelio atveju.

Pirmiausia pateikiami laiko eilučių tipo duomenys. Pereinant prie kito žingsnio, t.y. portfelio specifikacijos, verta atkreipti dėmesį, kad priešingai nei vidurkio ir dispersijos modelio atveju, portfelio tipas turi būti nurodytas papildomai. Klasikiniame variante tai nėra būtina, nes programa pagal nutylėjimą parenka parametrus reikiamus vidurkio ir dispersijos modeliui. Norint nagrinėti kitus portfelius — būtina papildomai nurodyti portfelio tipą.

Reikšmingumo lygmenį, kuris įeina į portfelio specifikaciją, galima nurodyti ir kitą negu yra nustatytas pagal nutylėjimą. Reikšmingumo lygmuo α pagal nutylėjimą yra lygus 0.05.

Kaip jau anksčiau buvo minėta, CVaR modelio optimizavimas yra tiesinio programavimo uždavinys, todėl šiam uždaviniui spręsti naudojamas tiesinio programavimo sprendimo įrankis iš paketo *Rglpk()*.

Trečiame žingsnyje nurodomi portfelio apribojimai. Dažniausiai taikomas apribojimas yra svorių pasiskirstymas tarp nulio ir vienetų ir jų suma lygia vienetui. Tai taip vadinamas „LongOnly“ apribojimas. Verta pastebėti, kad R pakete yra suteiktos galimybės uždėti ir kitus apribojimus. Tai gali būti pavyzdžiui galimybė skolintis, viršutinių ir apatinių rėžių nustatymas ir įvairūs tiesiniai lygybės ir nelygybės apribojimai.

2.8. Šiuolaikiniai portfelio optimizavimo įrankiai

Portfelio optimizavimas sulaukė didžiulio susidomėjimo iš įvairių sričių specialistų ir mėgėjų. Apie tai byloja daugybė naujų modelių pasiūlytų po klasikinio Markowitziaus modelio. Esant nemažai teorinės informacijos, imtasi naujovių įdiegimo praktiniuose paketuose. Vienas iš lengviausiai prieinamų paketų yra R. Ši atviro kodo programa yra nemokama, todėl atsiranda vis daugiau gerbėjų ir naudotojų. Šiame skyriuje bus pristatyti šiuolaikiniai metodai įdiegti R statistiniame pakete, leidžiantys nesudėtingai sudaryti optimalius portfelius, tenkinančius įvairius investuotojo reikalavimus.

R pakete įdiegtos funkcijos leidžia optimizuoti aktyvų portfelį. Šių funkcijų tikslas yra nustatyti aktyvų svorius minimizuojant riziką esant tam tikram laukiamam pelnui, arba rasti svorius maksimizuojant pelną su tam tikru priimtiniu rizikos lygiu. Prieš atliekant portfelio optimizavimą, svarbu yra sukurti aplinką, kurioje aprašomas portfelis ir nurodomi visi reikiami parametrai ir reikšmės, kurie yra būtini portfelio optimizavimui. R pakete yra sudarytos klasės, kurios aprašo portfelio aplinką apimančios portfelį aprašančių parametrų specifikaciją, duomenų pasirinkimą ir aprašymą bei apribojimų rinkinį, kuriuo išreiškiami investuotojo reikalavimai.

2.8.1. Portfelio specifikacijos klasė

Portfelio specifikacijos procesas susideda iš kelių dalių. Pirmiausia investuotojas turi nuspręsti, kurį modelį norės pritaikyti. Tai gali būti klasikinis Markowitziaus vidurkio ir dispersijos modelis, vidurkio ir CVaR modelis ar kuris nors kitas modelis. Nustačius pageidaujamą modelį, pereinama prie parametrų nustatymo. Tai apima tokius parametrus kaip laukiamas pelnas, laukiama leistina rizika, taškų skaičius efektyviam frontui nubrėžti ir t.t. Trečiame žingsnyje aprašomi parametrų optimizavimo variantai. Tai apima optimizavimo būdo nustatymą, pzv. tiesinis, kvadratinis ar netiesinis.

R pakete visi nustatymai aprašantys portfelio specifikaciją yra klasėje `fPORTFOLIOSPEC`. Šios klasės objektas turi keturias sudedamąsias dalis: `@model`, `@portfolio`, `@optim` ir `@messages`. Pirmasis narys `@model` apima informaciją apie modelio tipą. Antrasis — `@portfolio` — apima portfelio informaciją ir rezultatus. Trečias narys `@optim` aprašo pasirinktą sprendimo būdą panaudotą optimizavimui. Paskutinis narys — `@message` — apima sąrašą galimų pasirenkamų pranešimų.

Pagal nutylėjimą pradiniai parametrai įvesti klasikiniam vidurkio ir dispersijos optimizavimui. Norint sudaryti kitą modelį, pavyzdžiui vidurkio ir CVaR, reikia nurodyti bent jau modelio tipą

bei sprendimo būdą reikalingą optimizavimui. Visas modelyje nurodytus nustatymus galima keisti atitinkamai pritaikant pagal keliamus reikalavimus. Tarp nustatymų yra modelio tipas, tikslo funkcija, kurią siekiama optimizuoti, vidurkio ir kovariacijos įverčiai bei laisvai pasirenkami modelio parametrai.

Įrašas `$type` iš `@model` sąrašo aprašo modelio tipą. Galimi keli modelio pasirinkimai:

- „MV“ — Klasikinis Markowitziaus vidurkio ir dispersijos portfelis (ang. mean-variance),
- „CVaR“ — vidurkio ir CVaR portfelis (ang. mean-conditional Value at Risk),
- „QLPM“ — vidurkio kvadratinų mažiausių dalinių momentų portfelis (ang. mean-quadratic lower partial moment),
- „SPS“ — Stone, Pedersen ir Satchell tipo modelis,
- „MAD“ — vidurkio absoliutusias nuokrypio portfelis (ang. mean-absolute-deviance).

Funkcijos `setType()` pritaikymas leidžia pakeisti modelio tipą į pageidaujamą. Svarbus yra ir kitas argumentas `optimize` iš `@model` sąrašo, kuris leidžia pasirinkti iš tokių opcijų:

- „minRisk“ — minimizuoja riziką esant tam tikram laukiamam pelno lygiui,
- „maxReturn“ — maksimizuoja laukiamą pelną pri nustatyto rizikos lygio,
- „objRisk“ — leidžia pasirinkti alternatyvią tikslo funkciją, pavyzdžiui maksimizuoja Sharpe ratio.

Analogiškai kaip ir modelio tipo pakeitime, aukščiau išvardintus nustatymus galima pakeisti su funkcija `setOptimize()`.

Priklausomai nuo pasirinkto modelio, galima redaguoti ir kitus papildomus parametrus esančius sąrašo `$params`. Šis sąrašas apima parametras `alpha`, kuris pagal nutylėjimą yra CVaR modelio reikšmingumo lygmuo lygus 0.05. Čia taip pat yra aprašytas parametras `a`, kuris pagal nutylėjimą yra 1 ir yra skirtas kvadratinų mažiausių dalinių momentų portfeliui optimizuoti. Galima taipogi įvesti ir kitus pasirenkamus parametrus. Nustatymai keičiami pasinaudojus funkcija `setModelParams()`.

Kita `fPORTFOLIOSPEC` klasės sudedamoji dalis yra `@portfolio`. Čia patalpinti visi parametrai nustatymai, tokie kaip svoriai, tikslo pelnas ir rizika ar taškų skaičius efektyvaus portfelio braižymui. Nustatymų pakeitimus galima atlikti pasinaudojus tokių funkcijų kaip `setWeights()`, `setTargetReturn()` ar `setTargetRisk()` pagalba. Tai labai pravartu norint nagrinėti pavyzdžiui tolygų portfelį, į kurį įeina visi aktyvai vienodomis dalimis.

Nagrinėjamos klasės parinktis `@optim` apima sprendimo būdo pasirinkimą. Pagal nutylėjimą pasirinktas kvadratinio uždavinio programavimas, kurį atitinka funkcija `solveRquadprog()`, nes tai atitinka klasikinio Markowitziaus modelio tikslo funkcijos optimizavimo uždavinį. Tačiau priklausomai nuo nagrinėjamo modelio, šį nustatymą galima pakeisti pavyzdžiui į tiesinį programavimą surinkus funkciją `solveRglpk()`.

Klasė `fPORTFOLIOSPEC` apima ir `@message` parinktį. Ši parinktis turi sąrašo tipo objektą, į kurį optimizavimo proceso metu galima įrašinėti įvairius pranešimus.

Reikia pastebėti, kad labai svarbu yra teisingai parinkti įvairius nustatymus. Pavyzdžiui sprendžiant vidurkio ir dispersijos portfelio optimizavimo uždavinį negalima pasirinkti tiesinio programavimo, nes uždavinys reikalauja kvadratinio.

Žemiau pateikiamas aukščiau aptartų parinkčių pavyzdys.

```

> mySpec<-portfolioSpec()
> setType(mySpec)<-"MV"
> setWeights(mySpec)<-c(1,1,1,1)/4
> getWeights(mySpec)
[1] 0.25 0.25 0.25 0.25
> getOptimize(mySpec)
[1] "minRisk"
> setTargetReturn(mySpec)<-0.25
> getTargetReturn(mySpec)
[1] 0.25
> setTargetRisk(mySpec)<-0.4
> getTargetRisk(mySpec)
[1] 0.4

```

2.8.2. Portfelio duomenų klasė

Portfelio optimizavimui duomenys pateikiami laiko eilučių pavidalo. Norint apskaičiuoti grąžas iš turimų aktyvų kainų užtenka pasinaudoti funkcijos `returns()` pagalba. Vertybinio popieriaus grąža apskaičiuojama pasinaudojus žemiau pateikta formule:

$$r = \frac{p_1 - p_0}{p_0}, \quad (52)$$

čia r — grąža per investicijų laikotarpį, p_1 — vertybinio popieriaus kaina laikotarpio pabaigoje, o p_0 — pradinė vertybinio popieriaus kaina.

Pagrindinės duomenų klasės sudedamosios dalys: `@data` ir `@statistics`. Pirmoji parinktis `@data` saugo laiko eilučių duomenis, aktyvų skaičių ir jų pavadinimus. Juos galima pamatyti surinkus `series`, `nAssets` ir `names`, atitinkamai.

Kita parinktis, `@statistics`, esanti duomenų klasėje saugo nagrinėjamų duomenų vidurkį ir kovariacinę matricą. Tiksliau sakant, čia saugomi ir imties vidurkis `mean` ir kovariacinė matrica `Cov`, bei papildomai saugomi alternatyvūs šių dydžių parametrai, t.y. vidurkio įvertis `mu` ir kovariacijos matricos įvertis `Sigma`. Yra galimi keli minėtų dydžių įvertiniai, kurios nurodo kintamasis `estimator`. Visus šiuos dydžius galima išvesti į ekraną surinkus funkciją `getStatistics()` ir nurodžius skliausteliuose nagrinėjamų duomenų sąrašą.

Žemiau pateikiamas pavyzdys su trimis aktyvais:

```

> mvminriskSpec <-portfolioSpec()
> mvminriskPortfolio <- minriskPortfolio(
+ data=pvz,
+ spec=mvminriskSpec,
+ constraints="LongOnly")
> getStatistics(mvminriskPortfolio)
$mean
      AMZN      AAPL      CROX
0.1541231 0.1368000 0.1251189

$Cov

```

```

      AMZN      AAPL      CROX
AMZN 8.490435 3.082220 3.968378
AAPL 3.082220 5.481954 3.535273
CROX 3.968378 3.535273 28.926726

$estimator
[1] "covEstimator"

$mu
      AMZN      AAPL      CROX
0.1541231 0.1368000 0.1251189

$Sigma
      AMZN      AAPL      CROX
AMZN 8.490435 3.082220 3.968378
AAPL 3.082220 5.481954 3.535273
CROX 3.968378 3.535273 28.926726

```

2.8.3. Portfelio apribojimų klasė

Portfelio apribojimai yra aprašomi `fPFOLIOCON` objektų. Šie objektai apima visus apribojimų nustatymus, kurie yra reikalingi portfelio optimizavimui. Čia galima aprašyti ir svorių apribojimą nuo 0 iki 1 pasirinkus „LongOnly“. Tokiu būdu trumpalaikiai skolinimai nėra galimi. Priešingu atveju pasirenkama „Short“ ir toliau galima uždėti dar daugiau apribojimų tokių kaip minimalus ar maksimalus svoris, tačiau šiame darbe apsiribojama „LongOnly“ parinktimi. Šis apribojimas jau buvo pateiktas ankstesniame skyrelyje esančiame pavyzdyje. Žemiau pateikiamas „LongOnly“ parinktės pavyzdys:

```

> longConstraints<-"LongOnly"
> portfolioConstraints(pvz,mvminriskSpec,longConstraints)

Title:
Portfolio Constraints

Lower/Upper Bounds:
      AMZN AAPL CROX
Lower    0    0    0
Upper    1    1    1

Equal Matrix Constraints:
      ceq      AMZN      AAPL      CROX
Return  NA  0.1541231  0.1368  0.1251189
Budget  -1 -1.0000000 -1.0000 -1.0000000

```

2.8.4. Portfelio funkcijos

Importavus nagrinėjamus duomenis, aprašius portfelio nustatymus bei nurodžius apribojimus, galima pereiti prie portfelio optimizavimo. Pagrindinės portfelio optimizavimo funkcijos yra:

- `feasiblePortfolio` — grąžina portfelį pagal pateiktus svorius;
- `efficientPortfolio` — grąžina portfelį su mažiausia rizika, esant tam tikram iš anksto apibrėžtam laukiamam pelnui;
- `maxratioPortfolio` — grąžina portfelį su geriausiu pelno ir rizikos santykiu;
- `tangencyPortfolio` — `maxratioPortfolio` sinonimas;
- `minriskPortfolio` — grąžina portfelį su mažiausia įmanoma rizika;
- `minvariancePortfolio` — `minriskPortfolio` sinonimas;
- `maxreturnPortfolio` — grąžina portfelį su didžiausiu pelnu, esant tam tikram iš anksto nustatytam rizikos lygiui;
- `portfolioFrontier` — apskaičiuoja portfelius esančius ant efektyvaus fronto kreivės.

Pagal nutylėjimą efektyvus fronto laukiamas pelnas yra išreiškiamas standartiniu nuokrypiu. Tačiau galima nagrinėti ir imties vidurkį su sąlygine Value at Risk. R pakete įdiegtos `frontierPlot()` ir kitos add-on funkcijos leidžia keisti efektyvaus fronto vaizdą priklausomai nuo pasirinktų parametrų.

2.9. Strategijų analizavimas

Strategijų analizavimas yra viena iš svarbių portfelio valdymo dalių. Tokia analizė naudojama norint palyginti kelis statistinius modelius. Strategijų analizavimas leidžia analizuoti, kaip atrodytų portfelis nagrinėjant istorinius duomenis. Pagrindinė prielaida yra ta, kad bet kuri strategija, kuri istoriniame laikotarpyje atnešė teigiamų rezultatų, tikėtina pasitvirtins ir ateityje [19].

Strategijų analizavimo rezultatai pateikia statistikas, kurios nusako strategijų efektyvumą. Verta pastebėti, kad gaunami rezultatai labai priklauso nuo pasirinkto periodo ir jame įvykusių reikšmingų įvykių, turinčių įtaką duomenų elgesiui. Dėl šios priežasties praktikoje patariama analizuoti ilgesnį periodą užtikrinant, kad atsižvelgiama į skirtingus duomenis veikiančius veiksnus.

Naujesnėse nei 2.15 R paketo versijose įdiegta yra funkcija `portfolioBacktesting()` skirta strategijų analizavimui. Visi strategijų analizavimui reikalingi nustatymai aprašyti klasėje `fPFOLIOBACKTEST`. Žemiau pateikiami šios klasės elementai:

```
> showClass("fPFOLIOBACKTEST")
Class "fPFOLIOBACKTEST" [package "fPortfolioBacktest"]

Slots:

Name:   windows strategy smoother messages
Class:  list      list      list      list
```

Norint pritaikyti šią funkciją, reikia nustatyti, kurie aktyvai bus analizuojami remiantis tam tikru nustatytu aktyvu, kuris bus laikomas atsparos tašku.

Ne mažiau svarbu yra ir tai, kad istoriniai duomenys yra labai susiję su tuo metu įvykusiais rinkos pokyčiais. Norint į tai atsižvelgti, praktikoje naudojamas svorių glodinimas. R pakete naudojama funkcija `portfolioSmoothing()`. Pagal nutylėjimą, funkcija naudoja eksponentinį slenkančio vidurkio glodinimą. Žemiau pateikiami visi pradiniai įdiegti nustatymai:

```
> formals(portfolioBacktest)
$windows
list(windows = "equidistWindows", params = list(horizon = "12m"))

$strategy
list(strategy = "tangencyStrategy", params = list())

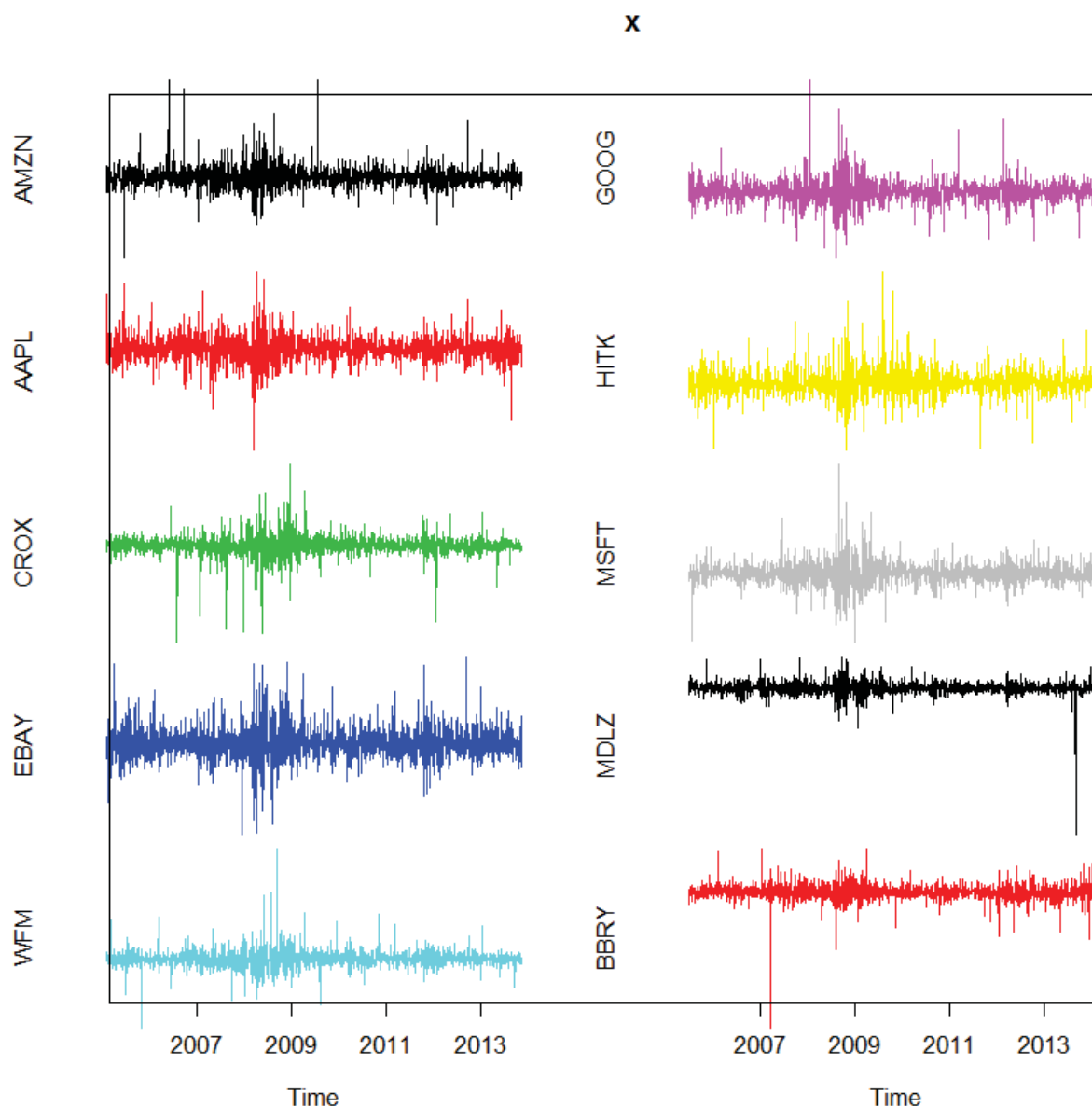
$smoother
list(smoother = "emaSmoother", params = list(doubleSmoothing = TRUE,
      lambda = "3m", skip = 0, initialWeights = NULL))

$messages
list()
```

3. Eksperimentinės dalies rezultatai

3.1. Trumpa duomenų analizė

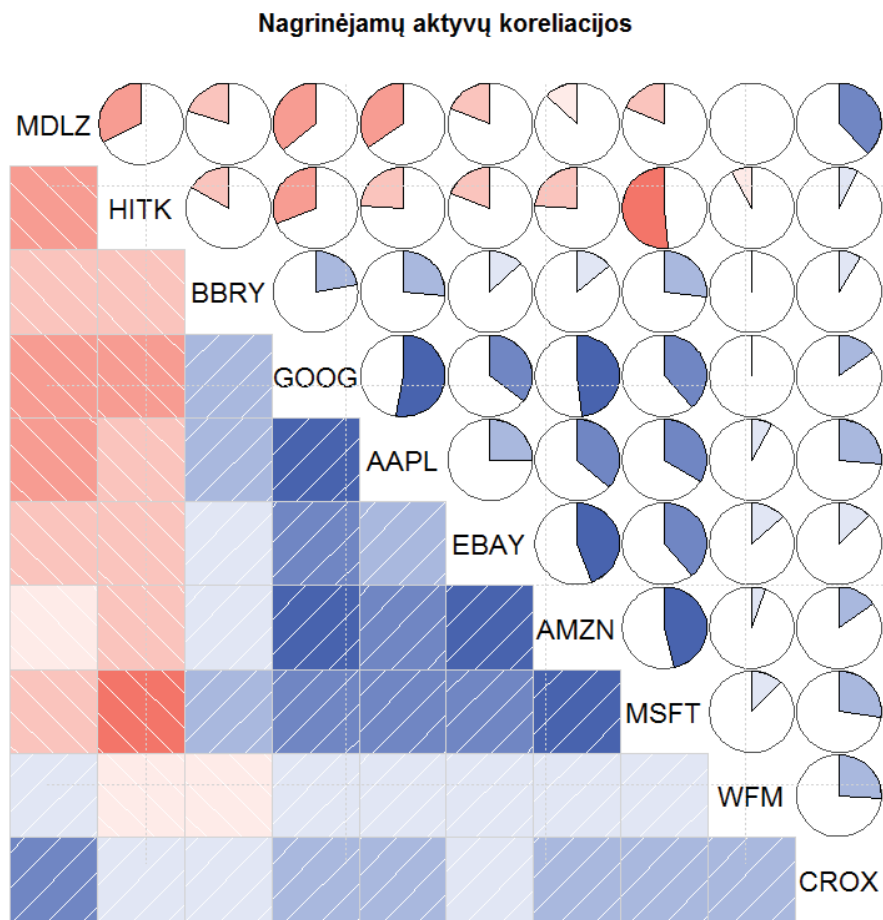
Žemiau pateiktuose grafikuose pavaizduotos nagrinėjamų aktyvų gražų laiko eilutės. Iš pateiktų grafikų matoma, kad ne visoms įmonėms būdingi reikšmingi svyravimai ekonominės krizės metais. MDLZ ir BBRY patyrė didžiausius svyravimus atitinkamai 2013 ir 2007 m.



1 pav. Nagrinėjamų gražų laiko eilutės

Sudarant aktyvų poerfelį labai svarbu atsižvelgti į jo diversifikaciją. Tai padeda sumažinti riziką, kad bus patirti labai dideli nuostoliai sušlubavus tam tikros rinkos stabilumui ar vystymuisi. Dėl šios priežasties pasirinkti aktyvai yra iš skirtingų sričių. Vienas iš populiariausių jų tarpusavio priklausomybės matų yra koreliacijos matrica. Žemiau pateiktame grafike mėlyna spalva reiškia

teigiamą koreliaciją, o rožinė — neigiamą. Stipriausia neigiama priklausomybė pasižymi aktyvų pora HITK-MSFT. Didžiausias teigiamas sąryšis yra tarp poros GOOG - AAPL. Žemiau pateiktos korelacių dydžiai nurodo, kad tarp daugumos aktyvų koreliacija neviršija 0.5.



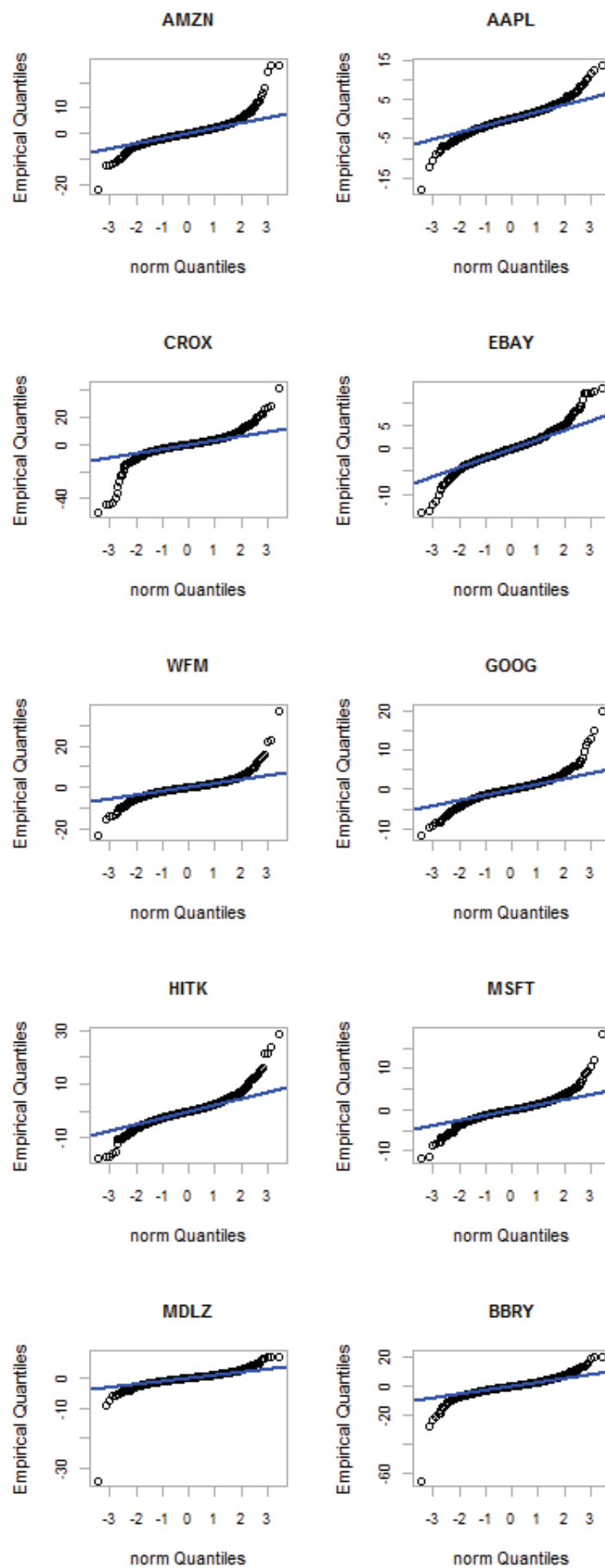
2 pav. Gražų koreliacijos

Prieš pradėdant optimizuoti portfelį, reikia nuspręsti kokią strategiją pritaikyti. Nuo to priklauso ir gaunami aktyvų svoriai, nes kiekvienas aktyvas pasižymi skirtingomis savybėmis. Tam tikras aktyvas gali būti ir labai pelningas ir nerizikingas, o kitas gali būti ir nepelningas, ir rizikingas. Aktyvų skaitinės charakteristikos leidžia prognozuoti, kurie aktyvai turėtų būti svarbiausi renkantis tam tikrą, pavyzdžiui mažiausios dispersijos, strategiją. Žemiau pateikiamos pagrindinės aktyvų charakteristikos.

Seka	Vidurkis	Dispersija	Asimetrijos koef.	Eksceso koef.
AMZN	0.154	8.49	1.29	15.13
AAPL	0.137	5.48	-0.06	5.05
CROX	0.125	28.93	-1.39	19.30
EBAY	0.051	6.10	0.28	4.36
WFM	0.057	8.45	1.40	24.14
GOOG	0.062	4.19	0.69	10.79
HITK	0.070	11.88	0.86	8.23
MSFT	0.020	3.49	0.51	10.81
MDLZ	0.014	2.47	-5.84	127.75
BBRY	-0.006	16.15	-2.56	43.35

1 lentelė. Pagrindinės aktyvų charakteristikos

Nagrinėjant klasikinį Markowitziaus modelį priimama prielaida, kad nagrinėjami duomenys turi normalųjį skirstinį. Žemiau pateikiami dešimties sekų kvantilių grafikai.



3 pav. Kvantilių grafikai

Gražų seka	p-reikšmė	Gražų seka	p-reikšmė
AMZN	1.164258e-35	GOOG	1.496703e-32
AAPL	1.624338e-23	HITK	7.760975e-31
CROX	3.421253e-41	MSFT	4.393972e-32
EBAY	1.351805e-24	MDLZ	2.303973e-45
WFM	4.525726e-39	BBRY	1.246530e-38

2 lentelė. Shapiro testo rezultatai

Iš anksčiau pateiktų grafikų pastebimas duomenų normalaus skirstinio nebuvimas. Formaliai tuo galima įsitikinti pasinaudojus Shapiro testu. Žemiau pateiktos kiekvienos nagrinėjamų gražų sekos p-reikšmės.

3.2. MV portfelio optimizavimas

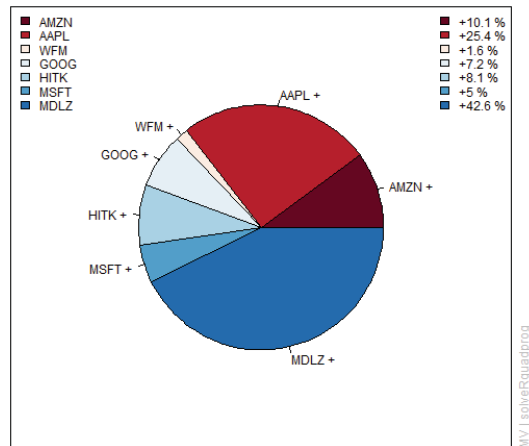
Šiame skyrelyje bus nagrinėjamas klasikinis Markowitziaus vidurkio ir dispersijos portfelis. Kaip žinia, portfelio optimizavimas nėra vienareikšmiškai apibrėžiamas. Investuotojas gali siekti maksimizuoti pelną nepaisant to, kokia didelė bus rizika, arba atvirkščiai investuoti kuo saugiau minimizuojant riziką. Neatmetami ir tarpiniai variantai. Tolimesni poskyriai skirti skirtingų MV modelio tikslo funkcijų nagrinėjimui.

3.2.1. MV efektyvus portfelis

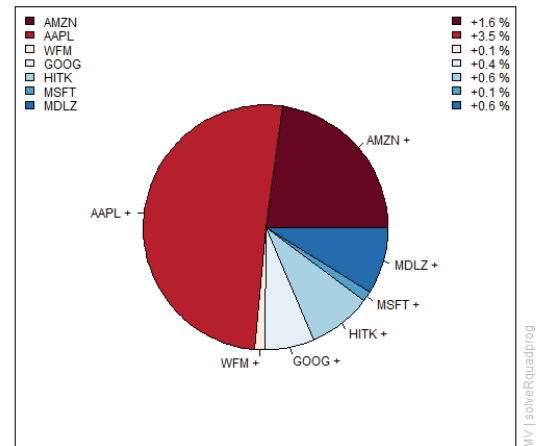
Mažiausios rizikos efektyvus portfelis randamas nurodžius norimą laukiamą pelną. Šis kintamasis yra laisvai pasirenkamas. Praktikoje pastebima, kad neretai portfelis su vienodais aktyvų svoriais duoda gerus ar bent jau ne daug prastesnius rezultatus. Todėl šiame darbe laukiamas pelnas nusakomas tolygaus portfelio vidurkiu.

Žemiau pateiktos skritulinės diagramos nurodo tokio portfelio svorius išreikštais procentais bei aktyvų įnašus į portfelio pelną.

Weights
Minimalios rizikos MV portfelio svoriai



Weighted Returns
Minimalios rizikos MV portfelio grąžų įnašas



4 pav. Efektyvus portfelis

Žemiau pateikiamas Rmetrics sukurto portfelio skaitiniai rezultatai.

```

Title:
MV Efficient Portfolio
Estimator:      covEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1007 0.2538 0.0000 0.0000 0.0164 0.0725 0.0806 0.0498 0.4263 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1326 0.3181 0.0000 0.0000 0.0157 0.0707 0.0810 0.0408 0.3411 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.0683 0.0683 1.4299 1.4299

```

Iš aukščiau pateiktų rezultatų matoma, kad efektyvaus portfelio pelnas yra lygus 0.0683, o rizika — 1.4299. Atsižvelgiant į tai, kad vienas svarbiausių veiksnių įtakančių portfelio sandarą, ir tuo pačiu pelningumą, yra pasirinktas laikotarpis, toliau nagrinėjama, kaip kis MV efektyvaus portfelio sandara panaudojus skirtingus robustinius kovariacijų matricos įvertinius.

- MV efektyvus portfelis su mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertiniu

Pakeitus paprastąjį imties įvertinį robustiniu mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertiniu, gaunami tokie rezultatai:

```

Title:
MV Efficient Portfolio
Estimator:      covMcdEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:    LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1463 0.2333 0.0000 0.0000 0.0000 0.0880 0.0151 0.0000 0.5173 0.0000

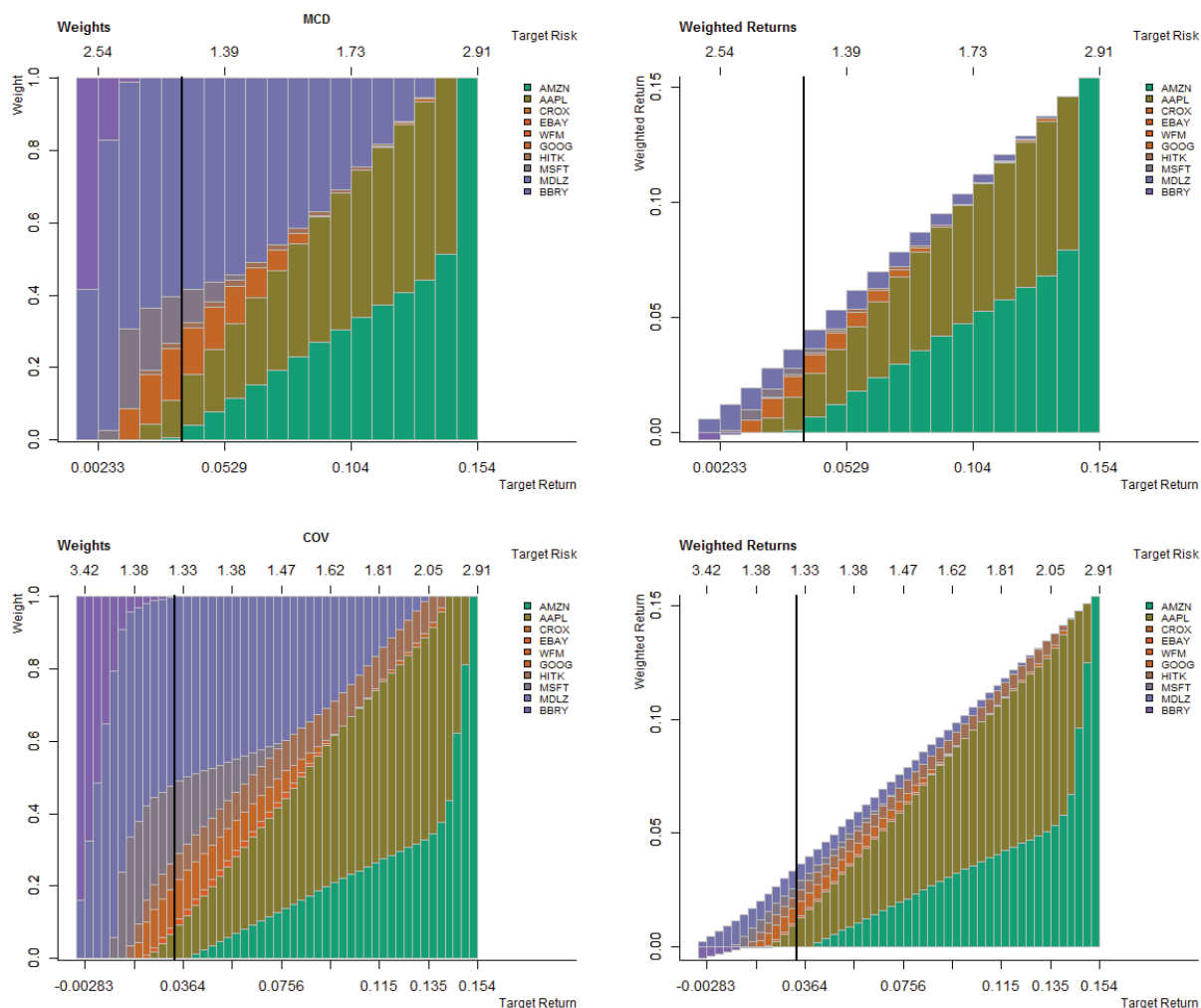
Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1996 0.2721 0.0000 0.0000 0.0000 0.0832 0.0095 0.0000 0.4356 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.0683 0.0683 1.4567 1.0793

```

Iš rezultatų suvestinės matoma, kad robustinio įvertinio taikymas leido sumažinti portfelio dispersiją. Portfelio rizika sumažėjo iki 1.0795.

Žemiau pateikiamas grafinis aktyvų svorių ir jų įnašo į portfelį palyginimas. Pirmiausia pavaizduojamas portfelis su robustiniu įverčiu, o apačioje — be jo. Grafike juoda vertikali linija žymi efektyvaus fronto mažiausios rizikos tašką. Tai atramos taškas, nuo kurio rizika didėja grafike tiek į kairę pusę mažinant pelną, tiek į dešinę — jį didinant.



5 pav. Efektyvus portfelis su mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertiniu

Iš šių grafikų matoma, kad pasinaudojus robustiniu įvertiniu, sumažėjo jautrumas duomenų išskirtims. Tai pasižymi retesniais svorių perskirstymais nei standartiniu atveju.

- MV efektyvus portfelis su mažiausio elipsoidės tūrio įvertiniu

Teorijoje yra nagrinėjama daug įvairių robustinių įvertinių. Dabar nagrinėjama, kaip pakis MV efektyvaus portfelio rezultatai pritaikius mažiausio elipsoidės tūrio įvertinį. Gaunami tokie rezultatai:

```
Title:
MV Efficient Portfolio
Estimator:      mveEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1527 0.2383 0.0000 0.0000 0.0000 0.0528 0.0181 0.0000 0.5381 0.0000
```

Covariance Risk Budgets:

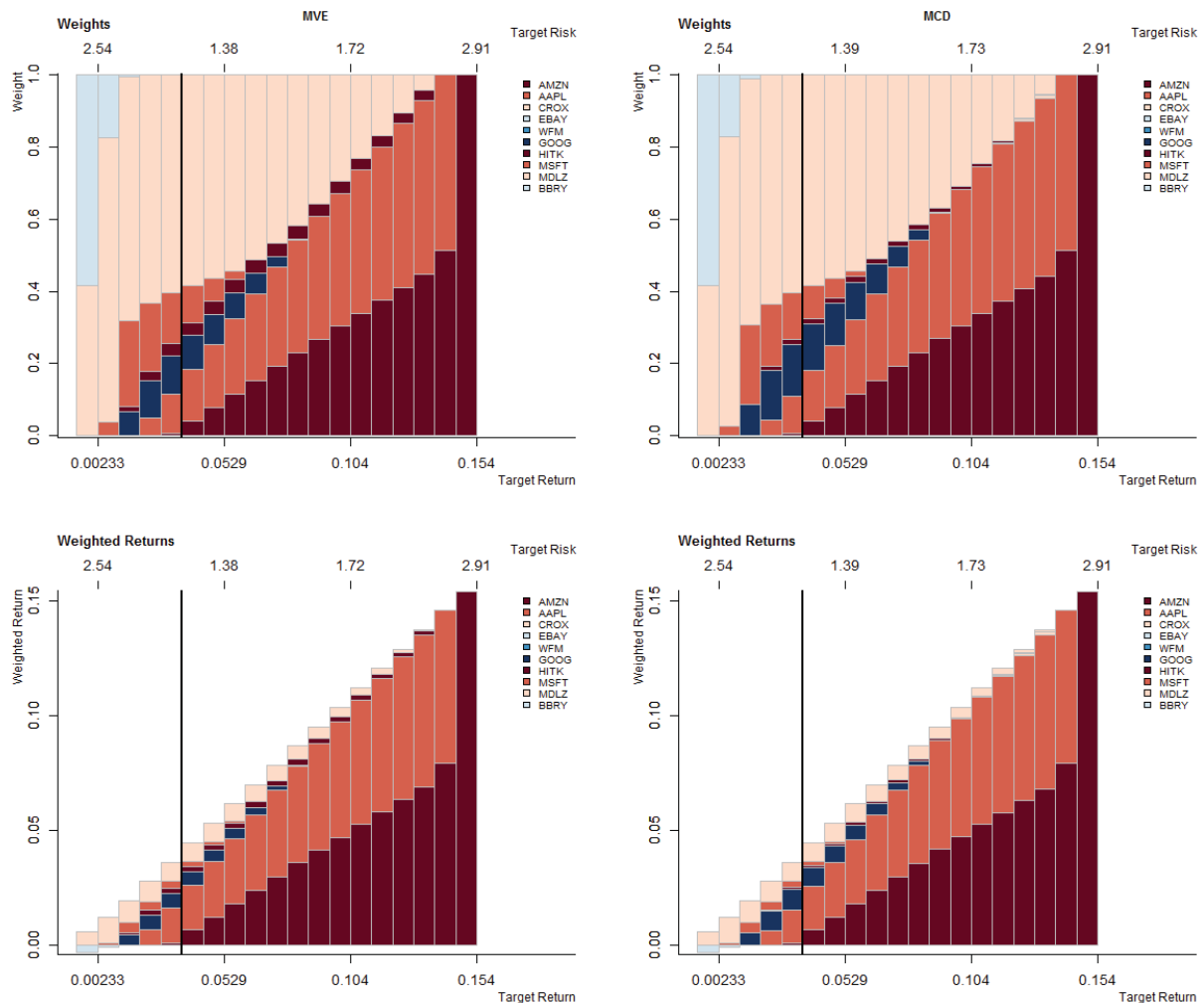
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.2074	0.2745	0.0000	0.0000	0.0000	0.0476	0.0115	0.0000	0.4590	0.0000

Target Return and Risks:

mean	mu	Cov	Sigma
0.0683	0.0683	1.4590	1.0096

Matoma, kad pritaikius mažiausio elipsoidės tūrio įvertinį portfelio rizika yra mažesnė nei paprasčiausiu atveju netaikant robustinių metodų. Šiuo atveju portfelio rizika yra šiek tiek mažesnė nei anksčiau nagrinėto portfelio atveju ir dabar yra lygi 1.0096.

Palyginimui nubraižomi nagrinėjamų portfelių su robustiniais įvertiniais svoriai ir jų įnašai į portfelio pelną. Kairiame stulpelyje pateikiami MV portfelio su mažiausio elipsoidės tūrio įvertiniu, o dešinėje — MV portfelio su mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertiniu.



6 pav. Efektyvus portfelis su mažiausio elipsoidės tūrio įvertiniu

Pateikti grafikai rodo, kad naudojami robustiniai įvertiniai duoda labai panašius rezultatus. Šiuo atveju efektyvus portfelis su mažiausio elipsoidės tūrio įvertiniu laikomas pranašesniu dėl

mažesnės portfelio rizikos.

- MV efektyvus portfelis su ortogonalizuotu Gnanadesikano ir Kettenringo įvertiniu

Toliau nagrinėjamas dar vienas praktikoje naudojamas robustinis įvertinys — ortogonalizuotas Gnanadesikano ir Kettenringo įvertinys. Pritaikius šį įvertinį gaunami tokie rezultatai:

```
Title:
MV Efficient Portfolio
Estimator:      covOGKEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

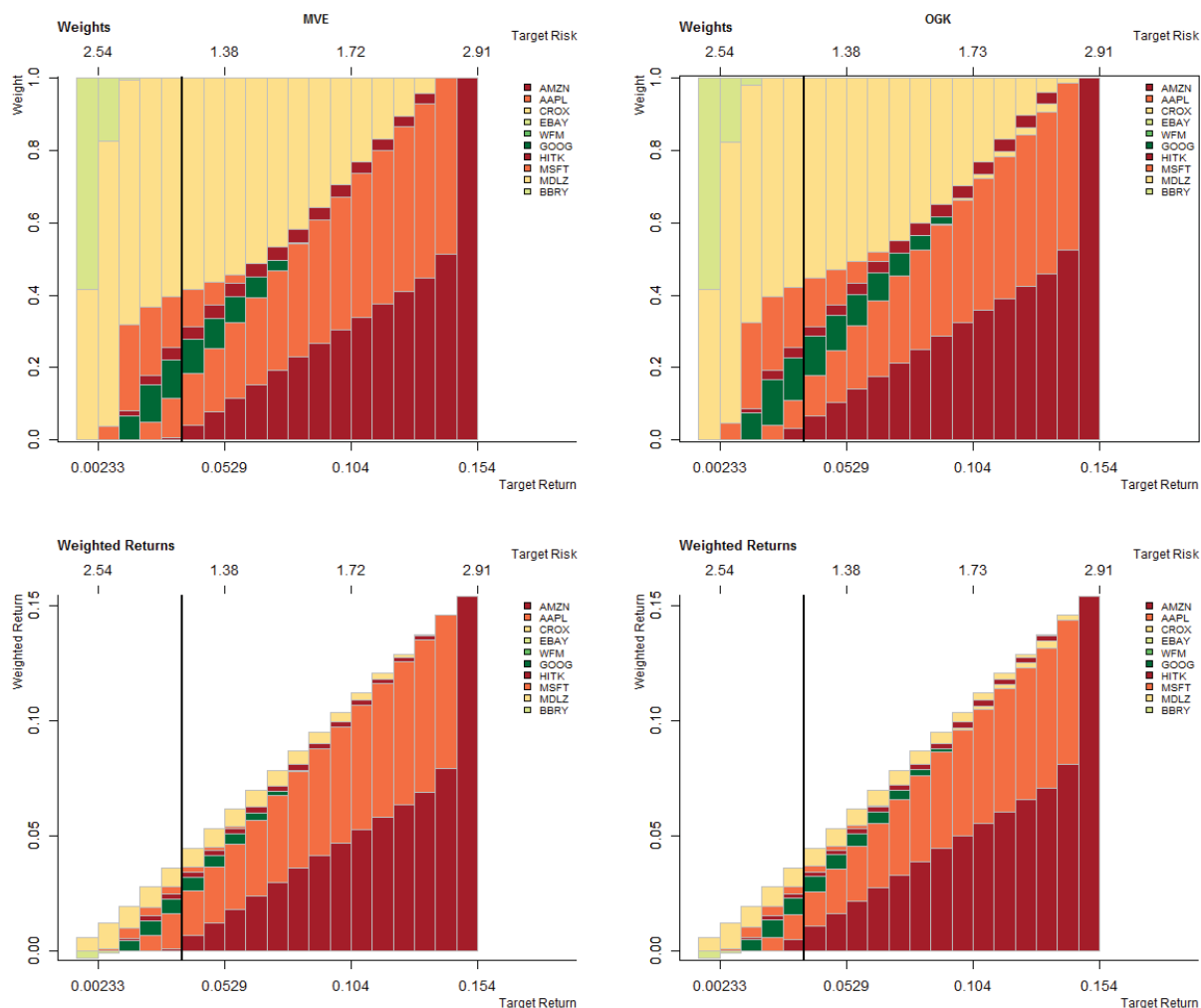
Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1697 0.2007 0.0000 0.0000 0.0000 0.0795 0.0322 0.0320 0.4859 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.2445 0.2289 0.0000 0.0000 0.0000 0.0757 0.0232 0.0255 0.4022 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.0683 0.0683 1.4530 1.1518
```

Aukščiau pateikta rezultatų suvestinė rodo, kad su ortogonalizuotu Gnanadesikano ir Kettenringo įvertiniu portfelio rizika yra šiek tiek didesnė nei anksčiau nagrinėtuose dviuose portfeliuose, tačiau mažesnė nei standartiniu atveju.

Žemiau pateikiamas dviejų portfelių: kolkas geriausio MVE ir dabar nagrinėjamo OGK palyginimas.



7 pav. Efektyvus portfelis su ortogonalizuotu Gnanadesikano-Kettenringo įvertiniu

Nors iš pirmo žvilgsnio rezultatai atrodo panašūs, pastebimas kitoks svorių paskirstymas ties minimalios rizikos vertikalios linijos. Kol kas geriausias rezultatas, t.y. portfelis su mažiausia rizika yra gaunamas pritaikius mažiausio elipsoidės tūrio įvertinį.

- MV efektyvus portfelis su kovariacijų matricos suglodinimo įvertiniu

Toliau pristatomas paskutinis šiame darbe nagrinėjamas robustinis kovariacijų matricos suglodinimo įvertinys. Pritaikius šį įvertinį gaunami tokie rezultatai:

```
Title:
MV Efficient Portfolio
Estimator:      shrinkEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1011 0.2521 0.0000 0.0000 0.0175 0.0747 0.0804 0.0515 0.4228 0.0000
```

Covariance Risk Budgets:

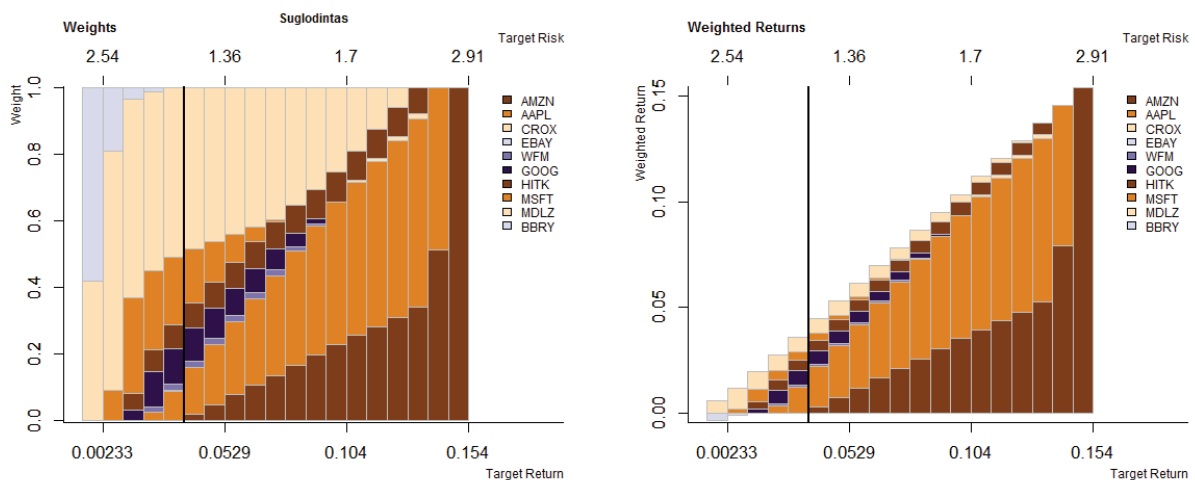
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.1335	0.3159	0.0000	0.0000	0.0168	0.0732	0.0809	0.0424	0.3373	0.0000

Target Return and Risks:

mean	mu	Cov	Sigma
0.0683	0.0683	1.4299	1.4255

Aukščiau pateikti rezultatai rodo, kad nagrinėjamas įvertinys neatnešė tokių gerų rezultatų kaip jau aptarti robastiniai įveriniai. Nors portfelio rizika yra mažesnė nei standartiniu atveju, visgi šis robastinis įvertinys yra mažiau naudingas.

Žemiau pateikti nagrinėjamo modelio svoriai bei jų įnašas į portfelio pelną.



8 pav. Efektyvus portfelis su kovariacijų matricos sugludinimo įvertiniu

3.2.2. MV liestinės portfelis

Ankstesniame skyrelyje buvo nagrinėjama viena iš galimų strategijų — minimalios rizikos strategija. Šiame skyrelyje nagrinėjamas liestinės portfelis. Šis portfelis dar apibūdinamas kaip geriausio pelno ir rizikos santykio portfelis. Priešingai nei minimalios rizikos atveju, čia nereikia pateikti laukiamo pelno, todėl galima tikėtis didesnių skirtumų tarp modelių su įvairiais robastiniais įvertiniais.

Pirmiausia sudaromas paprastas MV liestinės portfelis. Gaunami tokie rezultatai:

Title:

MV Max Return/Risk Ratio Portfolio

Estimator: covEstimator

Solver: solveRquadprog

Optimize: minRisk

Constraints: LongOnly

Portfolio Weights:

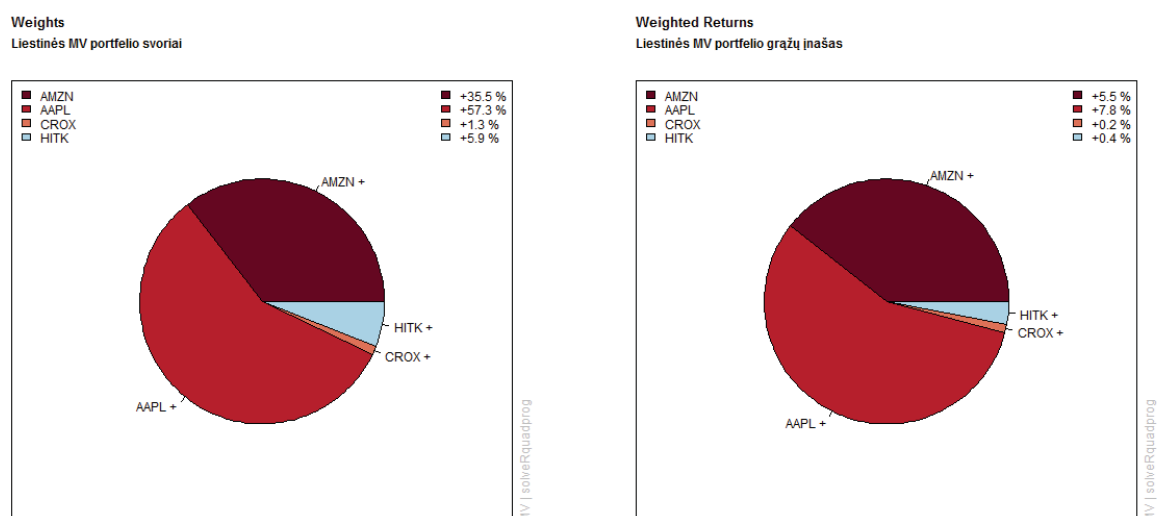
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.3549	0.5733	0.0127	0.0000	0.0000	0.0000	0.0591	0.0000	0.0000	0.0000
Covariance Risk Budgets:									
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.3939	0.5648	0.0115	0.0000	0.0000	0.0000	0.0297	0.0000	0.0000	0.0000
Target Return and Risks:									
mean	mu	Cov	Sigma						
0.1388	0.1388	2.1071	2.1071						

Šiuo atveju gaunamas tiek didesnis pelnas, tiek didesnė rizika. Žemiau pateiktoje lentelėje yra pagrindinių portfelio charakteristikų palyginimas.

Portfelis	Pelnas	Rizika
Efektyvus	0.0683	1.4299
Liestinės	0.1388	2.1071

3 lentelė. MV efektyvus ir MV liestinės portfelių palyginimas

Žemiau pateikiami MV liestinės portfelio svorių ir jų įnašų į portfelio pelną grafikai.



9 pav. Liestinės portfelis

Pastebima, kad pagal nagrinėjamą strategiją optimalų portfelį sudaro 4 iš 10 aktyvų, du iš kurių sudaro daugiau nei 90 %. Mažiausios rizikos portfelio atveju portfelį sudarė 7 aktyvai.

Tokie rezultatai gaunami netaikant robustinių metodų. Toliau nagrinėjama, kaip pasikeis liestinės portfelio rezultatai pritaikius įvairius robustinius įvertinius.

- MV liestinės portfelis su mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertiniu

Pritaikius šį įvertinį, liestinės portfelis įgauna tokius parametrus:

```

Title:
MV Max Return/Risk Ratio Portfolio
Estimator:      covMcdEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.4787 0.5117 0.0096 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.5476 0.4447 0.0077 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

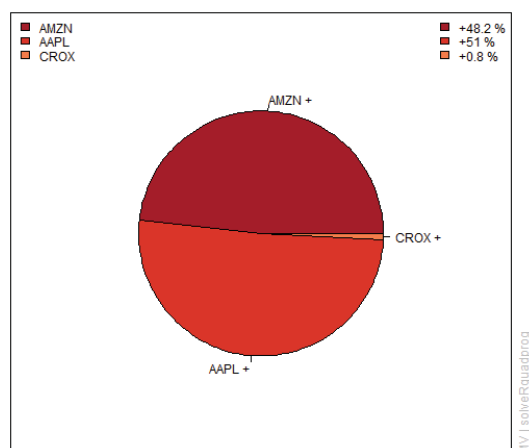
Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.1450 0.1450 2.2282 1.6997

```

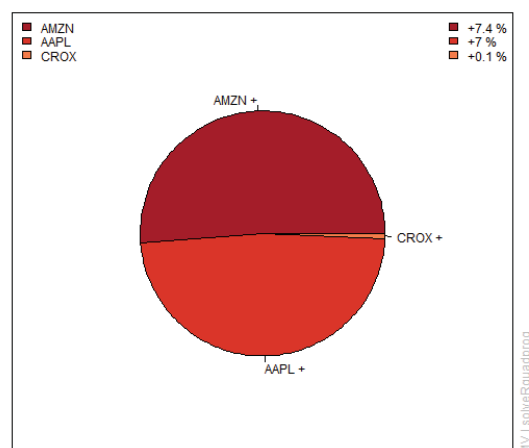
Pastebima, kad dabar portfelį sudaro tik trys aktyvai. Atsižvelgiant į tai, kad robustiniai įvertiniai pašalina išskirtis, galima daryti išvadą, kad anksčiau HITK aktyvas į portfelį buvo įtrauktas atsitiktinai, t.y. nagrinėjamas laikotarpis lėmė jo įtraukimą. Lyginant šį portfelį su paprastu liestinės portfelio pastebimas ir portfelio pelno padidėjimas, ir rizikos sumažėjimas. Tai patvirtina robustinių metodų taikymo svarbą.

Naujo portfelio svoriai ir jų įnašas į portfelio pelną pateikiami žemiau esančiuose grafikuose.

Weights
Liestinės MV portfelio svoriai



Weighted Returns
Liestinės MV portfelio grąžų įnašas



10 pav. Liestinės portfelis su mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertiniu

- MV liestinės portfelis su mažiausio elipsoidės tūrio įvertiniu

Pritaikius šį įvertinį, liestinės portfelis įgauna tokius parametrus:

```
Title:
MV Max Return/Risk Ratio Portfolio
Estimator:      mveEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.4953 0.5010 0.0038 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.5691 0.4280 0.0029 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.1453 0.1453 2.2397 1.6267
```

Lyginant su MCD robustinio įvertinio taikymu, MVE duoda ne tik panašius, bet vidurkio ir dispersijos prasme, geresnius rezultatus. Pastebima, kad kaip ir anksčiau portfelį sudaro tie patys trys aktyvai, tačiau pirmų dviejų aktyvų svoriai beveik susilygino.

- MV liestinės portfelis su ortogonalizuotu Gnanadesikano-Kettenringo įvertiniu

Toliau tikrinama kaip pakis portfelio pelnas ir rizika atsižvelgiant į kitą robustinį įvertinį. Pritaikius ortogonalizuotą Gnanadesikano-Kettenringo įvertinį, liestinės portfelis įgauna tokius parametrus:

```
Title:
MV Max Return/Risk Ratio Portfolio
Estimator:      covOGKEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.4989 0.4682 0.0241 0.0000 0.0000 0.0000 0.0088 0.0000 0.0000 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.5803 0.3954 0.0212 0.0000 0.0000 0.0000 0.0031 0.0000 0.0000 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.1446 0.1446 2.2309 1.8034
```

Aukščiau pateikti rezultatai rodo, kad šiame portfelyje padidėjo CROX aktyvo dalis. Nors gauti rezultatai yra geresni nei paprasto liestinės portfelio atveju, anksčiau aptarti robustiniai įvertiniai buvo naudingesni portfelio pelno ir rizikos prasme.

- MV liestinės portfelis su kovariacijų matricos suglodinimo įvertiniu

Galiausiai patikrinama, kaip pakis liestinės portfelio parametrai pritaikius kovariacijų matricos suglodinimo įvertinį. Gaunami tokie rezultatai:

```
Title:
MV Max Return/Risk Ratio Portfolio
Estimator:      shrinkEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

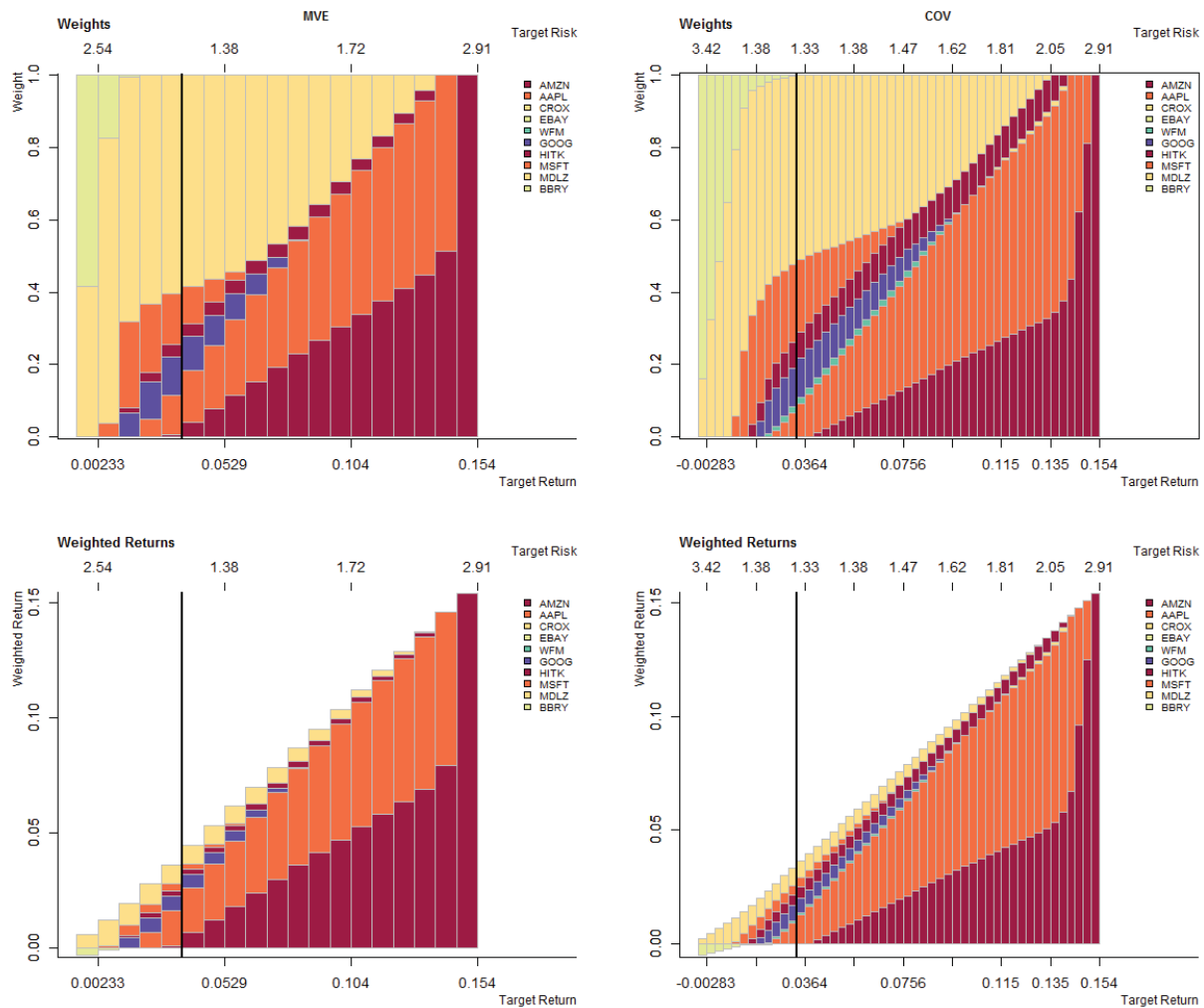
Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.3550 0.5715 0.0137 0.0000 0.0000 0.0000 0.0597 0.0000 0.0000 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.3945 0.5629 0.0125 0.0000 0.0000 0.0000 0.0302 0.0000 0.0000 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.1388 0.1388 2.1064 2.1021
```

Analogiškai kaip ir minimalios rizikos portfelio atveju, glodinimo įvertiniu paremtas portfelis mažiausiai skiriasi nuo paprasto liestinės portfelio. Priešingai nei kitų trijų robustinių įvertinių paremtuose portfeliuose, dabar portfelį sudaro keturi aktyvai, o ne trys. Tai paaiškina ir tokius artimus paprastam liestinės portfeliui rezultatus.

Taigi, iš visų robustinių įvertinių geriausi rezultatai gaunami su MVE įvertiniu. Žemiau pateikiamas MVE ir paprasto liestinės portfelio grafinis palyginimas.



11 pav. MV liestinės portfelis su MVE įvertiniu ir be jo

3.2.3. MV mažiausios rizikos portfelis

Žinoma, kad nuo pasirinktos strategijos priklauso ir portfelio sandara. Tačiau, netgi norint minimizuoti riziką, tą galima daryti įvairiai. Anksčiau buvo nagrinėtas tas rizikos minimizavimo atvejis, kai buvo iš anksto apibrėžiamas laukiamas pelnas. Tuo tarpu šiame skyrelyje ieškomas portfelis su mažiausia įmanoma rizika nenurodant jokio užsibrėžto laukiamo pelno.

Ne paslaptis, kad kuo mažesnė rizika, tuo ir laukiamas pelnas dažniausiai būna mažesnis. Tą patvirtina ir žemiau pateikti mažiausios rizikos portfelio rezultatai.

```
Title:
MV Minimum Risk Portfolio
Estimator:      covEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
```

```

0.0000 0.0763 0.0000 0.0000 0.0165 0.1075 0.0704 0.2099 0.5178 0.0017

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0000 0.0763 0.0000 0.0000 0.0165 0.1075 0.0704 0.2099 0.5178 0.0017

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.0343 0.0343 1.3323 1.3323

```

Tiek portfelio pelnas, tiek ir rizika yra mažiausi iš visų iki šiol nagrinėtų portfelių. Žemiau pateikiamas trumpas portfelių, be robustinių įvertinių, palyginimas.

Portfelis	Pelnas	Rizika
Efektyvus	0.0683	1.4299
Liestinės	0.1388	2.1071
Mažiausios dispersijos	0.0343	1.3323

4 lentelė. Trijų MV portfelių palyginimas

Toliau nagrinėjama, kaip pakis portfelio rezultatai pritaikius robustinius metodus.

- MV mažiausios rizikos portfelis su mažiausio kovariacijų matricos determinanto įvertiniu

Pritaikius šį įvertinį, liestinės portfelis įgauna tokius parametrus:

```

Title:
MV Minimum Risk Portfolio
Estimator:      covMcdEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0000 0.0518 0.0000 0.0000 0.0000 0.1390 0.0113 0.1674 0.6305 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0000 0.0451 0.0000 0.0000 0.0000 0.1318 0.0067 0.1512 0.6652 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.0286 0.0286 1.3586 0.9665

```

Nors teoriškai mažiausios rizikos portfelis turi pateikti portfelio sandarą su mažiausia įmanoma rizika, robustiniai metodai pajėgūs sumažinti ją dar labiau. Deja, portfelio pelnas irgi sumažėjo. Verta pastebėti, kad mažiausios rizikos portfelyje svarbiausias kriterijus yra mažiausia dispersi-

ja, todėl MDLZ aktyvas čia atlieka labai svarbų vaidmenį. Anksčiau nagrinėtuose modeliuose jo praktiškai nebuvo.

- MV mažiausios rizikos portfelis su mažiausio elipsoidės tūrio įvertiniu

Pritaikius šį įvertinį, gaunami tokie rezultatai:

```
Title:
MV Minimum Risk Portfolio
Estimator:      mveEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0000 0.0586 0.0000 0.0000 0.0000 0.1318 0.0077 0.1664 0.6356 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0000 0.0513 0.0000 0.0000 0.0000 0.1235 0.0044 0.1497 0.6711 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.0289 0.0289 1.3606 0.9066
```

Aukščiau pateikti rezultatai rodo, kad galima sudaryti portfelį su dar mažesne dispersija. Įdomu yra tai, kad MVE robustinis įvertinys ne tik sumažino portfelio riziką, bet ir lyginant su MCE portfelium truputį padidino pelną.

- MV mažiausios rizikos portfelis su ortogonalizuotu Gnanadesikano-Kettenringo įvertiniu

Pritaikius šį įvertinį, gaunami tokie rezultatai:

```
Title:
MV Minimum Risk Portfolio
Estimator:      covOGKEstimator
Solver:         solveRquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0006 0.0496 0.0000 0.0000 0.0000 0.1281 0.0253 0.1973 0.5990 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0007 0.0443 0.0000 0.0000 0.0000 0.1232 0.0174 0.1876 0.6269 0.0000

Target Return and Risks:
```

mean	mu	Cov	Sigma
0.0289	0.0289	1.3477	1.0484

Porfolio pelnas yra lygiai toks pat koks ir buvo gautas taikant MVE robastinį įvertinį. Tačiau portfelio su ortogonalizuotu Gnanadesikano-Kettenringo įvertiniu rizika padidėjo. Dabar ji yra 1.0484.

Galiausiai patikrinama kaip atrodys mažiausios rizikos portfelis su kovariacijų matricos suglodinimo įvertiniu. Remiantis anksčiau gautais rezultatais galima numanyti, kad rezultatai turėtų būti labai artimi paprastam mažiausios rizikos portfeliui ir prastesni už portfelius su kitais robastiniais metodais.

- MV mažiausios rizikos portfelis su kovariacijų matricos suglodinimo įvertiniu

Pritaikius šį įvertinį, gaunami tokie rezultatai:

Title:										
MV Minimum Risk Portfolio										
Estimator:		shrinkEstimator								
Solver:		solveRquadprog								
Optimize:		minRisk								
Constraints:		LongOnly								
Portfolio Weights:										
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY	
0.0000	0.0766	0.0000	0.0009	0.0175	0.1084	0.0702	0.2094	0.5148	0.0021	
Covariance Risk Budgets:										
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY	
0.0000	0.0769	0.0000	0.0009	0.0176	0.1088	0.0703	0.2097	0.5137	0.0021	
Target Return and Risks:										
mean	mu	Cov	Sigma							
0.0345	0.0345	1.3323	1.3286							

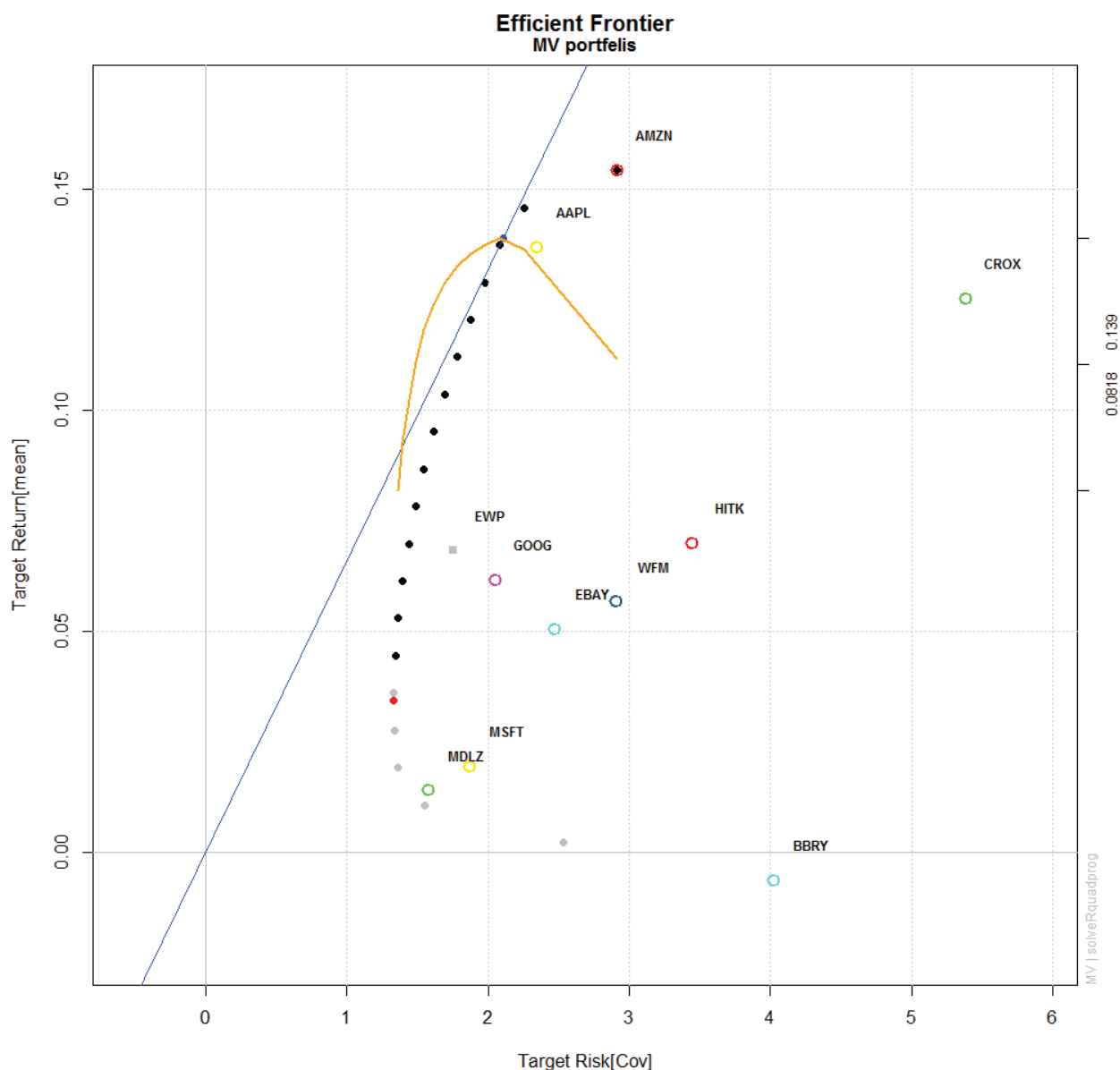
Gauti rezultatai patvirtina ankstesnį spėjimą apie rezultatų panašumą. Rezultatai yra labai artimi paprastam minimalios rizikos portfeliui. Verta pastebėti, kad šį portfelį sudaro didžiausias iki šios gautas aktyvų skaičius. Tik du aktyvai neįtraukti į portfelį.

3.3. Vidurkio ir dispersijos portfelio efektyvus frontas

Portfelio vidurkis ir dispersija yra du pagrindiniai jo gerumo matai. Yra daugybė būdų paskirstyti aktyvų svorius taip, kad jie kuo labiau tenkintų investuotojo tikslus. Visi taškai esantys žemiau portfelio efektyvaus fronto sudaro aibę tokių galimų portfelių. Visgi renkantis optimalų variantą investuotojas pasirinks tašką, esantį ant efektyvaus fronto.

Žemiau esančiame grafike pavaizduota aibė galimų portfelių ir efektyvus frontas nurodantis optimalius portfelių variantus. Grafike taip pat pažymėtas tolygus portfelis EWP. Kaip matoma toks paprasčiausias paskirstymas yra labai arti efektyvaus fronto. Tai leidžia manyti, kad nebūtinai

tai, kas paprasta, turi būti neteisinga. Oranžinė kreivė yra vadinama Sharpo kreive. Ją sudaro Sharpo indeksų taškai, kurie nurodo geriausius vidurkio ir dispersijos santykius. Dešinėje pusėje pateikiami konkretūs Sharpo indeksų intervalai. Oranžinis taškas esantis žemiau AAPL aktyvo žymi geriausio vidurki-dispersijos santykio portfelį. Raudonas taškas virš MDLZ aktyvo žymi mažiausios dispersijos portfelį.



12 pav. Klasikinio MV modelio efektyvus frontas

3.4. CVaR portfelio optimizavimas

3.4.1. CVaR efektyvus portfelis

Vienas iš naujesnių rizikos matų yra CVaR. Šis dydis pradėtas taikyti praktikoje tada, kai pabandyta pažiūrėti į riziką kitaip. Vietoj anksčiau nagrinėtų rizikos mažinimų atvejų pereita prie

blogiausio atvejo nagrinėjimo, t.y. tirti kaip bus blogai, jei jau bus nepalankūs rezultatai.

CVaR modelyje galima pasirinkti pasiklivimo lygmenį. Dažniausiai praktikoje taikomi 0.05 ir 0.01. Toliau nagrinėjama, kaip pasikeis portfelio vidurkis ir dispersija keičiant reikšmingumo lygmenį (įtraukiant ir 0.01 reikšmingumo lygmens atvejį) ir investavimo strategiją.

- CVaR efektyvus portfelis su 0.1 reikšmingumo lygmeniu

Žemiau pateikiami rezultatai kai pasiklivimo lygmuo yra 0.1, o pasirinkta strategija — efektyvus portfelis. Šiuo atveju efektyvus portfelis reiškia optimalų portfelį su pageidaujamu iš anksto nustatytu pelnu, kuris nusakytas tolygaus portfelio vidurkiu.

```
Title:
Cvar Efficient Portfolio
Estimator:      covEstimator
Solver:         solveRglpk
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1405 0.2269 0.0000 0.0000 0.0000 0.0309 0.0920 0.0051 0.5045 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1882 0.2609 0.0000 0.0000 0.0000 0.0275 0.0949 0.0038 0.4248 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.0683 0.0683 1.4411 1.4411
```

- CVaR efektyvus portfelis su 0.05 reikšmingumo lygmeniu

Pakeitus reikšmingumo lygmenį į 0.05, gaunami tokie rezultatai:

```
Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1222 0.2281 0.0000 0.0000 0.0078 0.0219 0.1350 0.0257 0.4592 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1572 0.2617 0.0000 0.0000 0.0070 0.0192 0.1685 0.0192 0.3671 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.0683 0.0683 1.4463 1.4463
```

Aukščiau pateikti rezultatai rodo, kad sumažinus reikšmingumo lygmenį, portfelio dispersija šiek tiek padidėja ir dabar yra 1.4463. Toliau nagrinėjama, kaip pasikeis portfelio dispersija dar labiau sumažinus pasiklivimo lygmenį iki 0.01.

- CVaR efektyvus portfelis su 0.01 reikšmingumo lygmeniu

Gaunami tokie rezultatai:

```
Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0000 0.3169 0.0000 0.0000 0.1397 0.0000 0.1400 0.2793 0.1241 0.0000

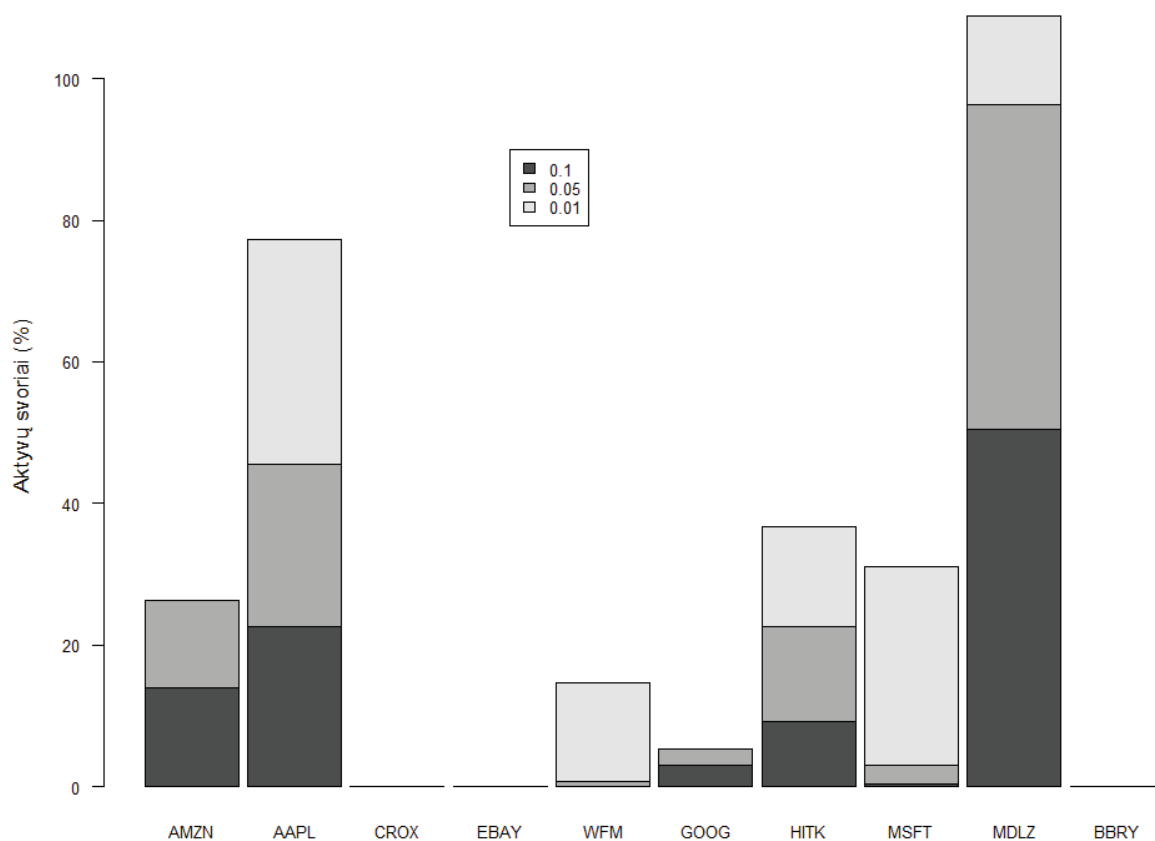
Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY   WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0000 0.3766 0.0000 0.0000 0.1632 0.0000 0.1572 0.2434 0.0596 0.0000

Target Return and Risks:
  mean    mu    Cov  Sigma
0.0683 0.0683 1.5810 1.5810
```

Portfelio dispersija dar labiau padidėjo. Taip yra dėl to, kad sugriežtinami reikalavimai. Pastaruoju atveju vos vienas iš 100 stebinių gali viršyti CVaR reikšmę.

Žemiau pateikiami portfelių svoriai. Grafikas leidžia pastebėti, kurios aktyvų sekos pasižymėjo didesniais nuokrypiais nuo vidurkio. Kuo mažesnis reikšmingumo lygmuo, tuo tokių aktyvų dalis portfelyje mažesnė. Trijų iš dešimties aktyvų nei vienu atveju nėra optimalu įtraukti.

Aktyvų svoriai atsižvelgiant į CVaR modelio reikšmingumo lygį



13 pav. CVaR efektyvus portfelis

Toliau nagrinėjama, kaip pasikeis portfelių sandara, kai bus pritaikyti robustiniai metodai.

- CVaR efektyvus portfelis su 0.1 reikšmingumo lygmeniu ir MCD robustiniu įvertiniu

Gaunami tokie rezultatai:

```

Title:
Cvar Efficient Portfolio
Estimator:      covMcdEstimator
Solver:         solveRglpk
Optimize:       minRisk
Constraints:    LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1405 0.2269 0.0000 0.0000 0.0000 0.0309 0.0920 0.0051 0.5045 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY

```

```
0.1882 0.2609 0.0000 0.0000 0.0000 0.0275 0.0949 0.0038 0.4248 0.0000
```

Target Return and Risks:

```
mean    mu    Cov  Sigma
0.0683  0.0683 1.4411 1.0929
```

Iš aukščiau pateiktų rezultatų matoma, kad robustinio įvertinio įtraukimas leido sumažinti portfelio dispersiją. Toliau nagrinėjama, kaip pasikeis portfelio sandara ir dispersija, kai reikšmingumo lygmuo bus mažesnis.

- CVaR efektyvus portfelis su 0.05 reikšmingumo lygmeniu ir MCD robustiniu įvertiniu

Gaunami tokie rezultatai:

Portfolio Weights:

```
AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1222 0.2281 0.0000 0.0000 0.0078 0.0219 0.1350 0.0257 0.4592 0.0000
```

Covariance Risk Budgets:

```
AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.1572 0.2617 0.0000 0.0000 0.0070 0.0192 0.1685 0.0192 0.3671 0.0000
```

Target Return and Risks:

```
mean    mu    Cov  Sigma
0.0683  0.0683 1.4463 1.1252
```

Sumažinus reikšmingumo lygmenį iki 0.05 portfelio dispersija dar labiau padidėjo, bet buvo mažesnė nei netaikant robustinio įvertinio.

- CVaR efektyvus portfelis su 0.01 reikšmingumo lygmeniu ir MCD robustiniu įvertiniu

Gaunami tokie rezultatai:

Portfolio Weights:

```
AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0000 0.3169 0.0000 0.0000 0.1397 0.0000 0.1400 0.2793 0.1241 0.0000
```

Covariance Risk Budgets:

```
AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0000 0.3766 0.0000 0.0000 0.1632 0.0000 0.1572 0.2434 0.0596 0.0000
```

Target Return and Risks:

```
mean    mu    Cov  Sigma  CVaR  VaR
0.0683  0.0683 1.5810 1.2742 5.5813 3.9765
```

Kaip ir buvo galima tikėtis, portfelio dispersija padidėjo. Verta pastebėti, kad pritaikius robustinę įvertinę portfelio dispersija sumažėjo, tačiau aktyvų svorių paskirstymas nepakito lyginant su atitinkamais CVaR efektyviais portfeliais be robustinių metodų.

- CVaR efektyvus portfelis su MVE, OKG ir suglodinimo robastiniais įvertiniais

Įtraukus skirtingus robastinius įvertinius į CVaR efektyvaus portfelio nagrinėjimą, gaunami vienodi svorių paskirstymai. Norint palyginti anksčiau nagrinėtą MV efektyvų portfelį su robastiniais metodais su CVaR atitinkamais portfeliais, pastariesiems irgi pritaikomi atitinkami robastiniai metodai, kurie paveikia portfelio dispersiją. Žemiau esančioje lentelėje pateikiami portfelių dispersijos su atitinkamais reikšmingumo lygmenimis:

Robastinis įvertinys	Reikšmingumo lygmuo	Rizika
MVE	0.1	0.9711
MVE	0.05	1.0485
MVE	0.01	1.1846
OGK	0.1	1.1688
OGK	0.05	1.1953
OGK	0.01	1.3535
Suglodinimo	0.1	1.4375
Suglodinimo	0.05	1.4424
Suglodinimo	0.01	1.5764

5 lentelė. CVaR efektyvaus portfelio su robastiniais įvertiniais pagrindinės charakteristikos

Lentelėje pateikti rezultatai rodo, kad analogiškai kaip ir anksčiau, mažinant reikšmingumo lygmenį didinama portfelio dispersija. Reikšmingumo lygmens pasirinkimas labai įtakoja portfelio pranašumą lyginant su klasikiniu MV portfeliu. Mažiausia dispersija CVaR atveju gaunama pasirinkus MVE robastinį įvertinį ir 0.1 reikšmingumo lygmenį. Tuo tarpu sumažinus reikšmingumo lygmenį iki 0.01 — kiekvieno robastinio įvertinio atveju gaunama didesnė dispersija nei klasikinio MV portfelio atveju.

3.4.2. CVaR liestinės portfelis

Šiame skyrelyje nagrinėjama kita strategija, t.y. optimizuojant portfelį ieškoma geriausio pelno-rizikos santykio. Analizuojamas portfelių sandaros pasikeitimas keičiant tris reikšmingumo lygmenis.

- CVaR liestinės portfelis su 0.1 reikšmingumo lygmeniu

Gaunami tokie rezultatai:

```
Title:
Cvar Tangency Portfolio
Estimator:      covEstimator
Solver:         solveRglpk
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
```

AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.4737	0.4835	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0429	0.0000	0.0000	0.0000
Covariance Risk Budgets:									
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.5565	0.4250	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0185	0.0000	0.0000	0.0000
Target Return and Risks:									
mean	mu	Cov	Sigma						
0.1421	0.1421	2.1800	2.1800						

Pagal naująją strategiją optimalus portfelis susideda vos iš trijų aktyvų. Toliau nagrinėjama, kaip pasikeis portfelio vidurkis ir dispersija, mažinant reikšmingumo lygmenį.

- CVaR liestinės portfelis su 0.05 reikšmingumo lygmeniu

Gaunami tokie rezultatai:

Portfolio Weights:									
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.4155	0.5225	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0620	0.0000	0.0000	0.0000
Covariance Risk Budgets:									
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.4804	0.4889	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0307	0.0000	0.0000	0.0000
Target Return and Risks:									
mean	mu	Cov	Sigma						
0.1399	0.1399	2.1293	2.1293						

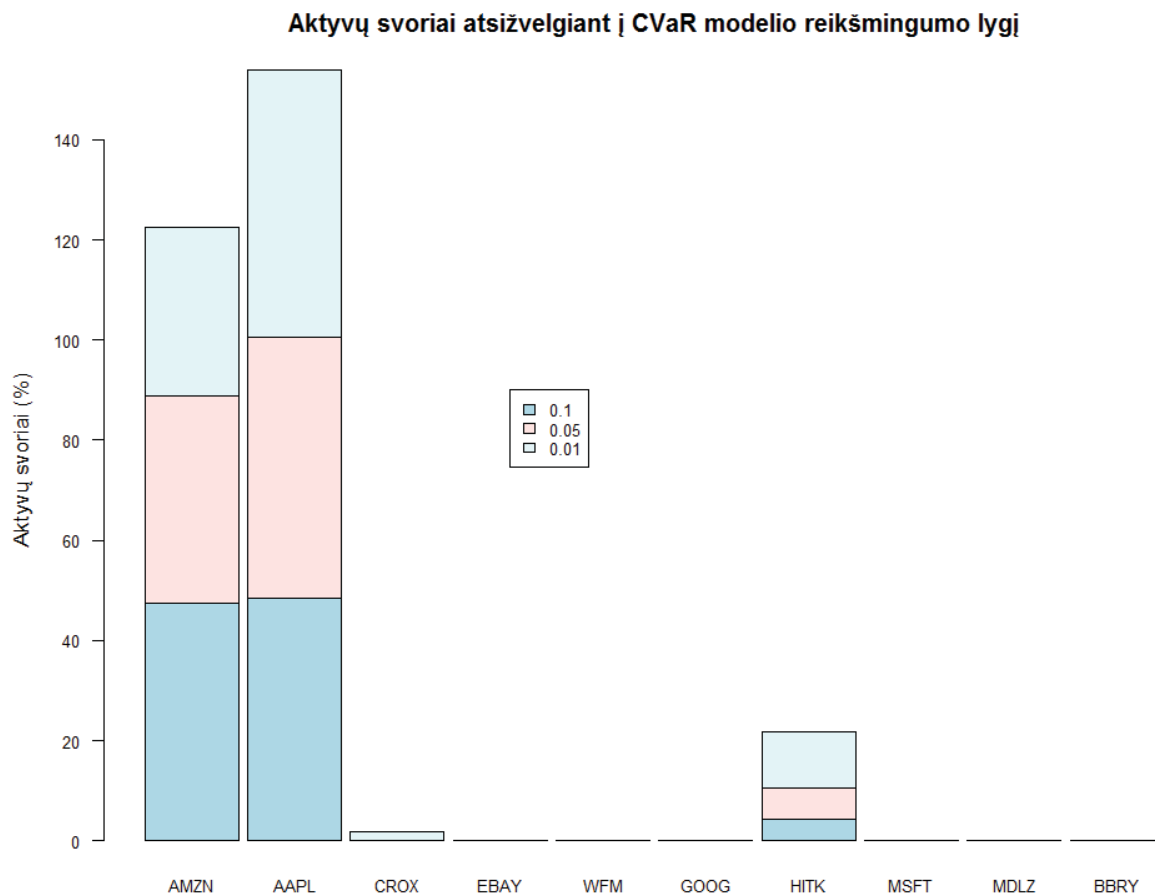
Aukščiau pateikti rezultatai rodo, kad priešingai nei efektyvaus portfelio atveju, reikšmingumo lygmens sumažinimas sumažino ir portfelio dispersiją. Tačiau portfelio vidurkis irgi neišvengiamai sumažėjo.

- CVaR liestinės portfelis su 0.01 reikšmingumo lygmeniu

Gaunami tokie rezultatai:

Portfolio Weights:									
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.3365	0.5325	0.0187	0.0000	0.0000	0.0000	0.1123	0.0000	0.0000	0.0000
Covariance Risk Budgets:									
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.3788	0.5288	0.0182	0.0000	0.0000	0.0000	0.0742	0.0000	0.0000	0.0000
Target Return and Risks:									
mean	mu	Cov	Sigma						
0.1349	0.1349	2.0562	2.0562						

Analogiška portfelio elgsena stebima dar labiau sumažinus reikšmingumo lygmenį iki 0.01. Tiek portfelio dispersija, tiek jo vidurkis sumažėjo. Šiuo atveju optimalųjį portfelį sudaro ne trys, o keturi aktyvai. Žemiau pateikiami svorių paskirstymai liestinės portfelyje priklausomai nuo pasirinkto reikšmingumo lygmens.



14 pav. CVaR liestinės portfelis

Toliau nagrinėjami portfelio parametrų, t.y. vidurkio ir dispersijos, pasikeitimai įvedus robustinius įvertinius.

- CVaR liestinės portfelis su MCD, MVE, OGK ir suglodinimo robustiniais įvertiniais

Žemiau pateiktoje lentelėje nurodomi portfelių vidurkiai ir dispersijos atsižvelgiant į skirtingus robustinius įvertinius ir reikšmingumo lygmenis.

Robastinis įvertinys	Reikšmingumo lygmuo	Vidurkis	Rizika
MCD	0.1	0.1421	1.6743
MCD	0.05	0.1399	1.6482
MCD	0.01	0.1349	1.6243
MVE	0.1	0.1421	1.5144
MVE	0.05	0.1399	1.4906
MVE	0.01	0.1349	1.5434
OGK	0.1	0.1421	1.7780
OGK	0.05	0.1399	1.7601
OGK	0.01	0.1349	2.0518
Suglodinimo	0.1	0.1421	2.1727
Suglodinimo	0.05	0.1399	2.1251
Suglodinimo	0.01	0.1349	2.0518

6 lentelė. CVaR liestinės portfelio su robastiniais įvertiniais pagrindinės charakteristikos

Iš aukščiau pateiktos lentelės matoma, kad du iš keturių nagrinėjamų robastinių įvertinių išsiskiria dispersijos trendu. Bendru atveju reikšmingumo lygmens mažinimas duoda mažesnę dispersiją. Tačiau atsižvelgiant į robastinius metodus, tokia priklausomybė nepasitvirtina MVE ir OGK atvejais.

3.4.3. CVaR mažiausios rizikos portfelis

Šiame skyrelyje nagrinėjama kita strategija, t.y. optimizuojant portfelį ieškoma mažiausios galimos dispersijos. Analizuojamas portfelių sandaros pasikeitimas keičiant tris reikšmingumo lygmenis.

- CVaR Mažiausios rizikos portfelis su 0.1 reikšmingumo lygmeniu

Gaunami tokie rezultatai:

```

Title:
  Cvar Minimum Risk Portfolio
Estimator:      covEstimator
Solver:         solveRglpk
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio Weights:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0396 0.0429 0.0000 0.0000 0.0000 0.0624 0.0706 0.1283 0.6561 0.0000

Covariance Risk Budgets:
  AMZN  AAPL  CROX  EBAY  WFM  GOOG  HITK  MSFT  MDLZ  BBRY
0.0412 0.0350 0.0000 0.0000 0.0000 0.0526 0.0654 0.1071 0.6988 0.0000

```

Target Return and Risks:			
mean	mu	Cov	Sigma
0.0325	0.0325	1.3619	1.3619

Palyginimui nagrinėjami dar du portfeliai su skirtingais reikšmingumo lygmenimis.

- CVaR mažiausios rizikos portfelis su 0.05 reikšmingumo lygmeniu

Gaunami tokie rezultatai:

Portfolio Weights:									
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.0130	0.0722	0.0000	0.0000	0.0000	0.0307	0.0980	0.1967	0.5655	0.0238

Covariance Risk Budgets:									
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.0136	0.0670	0.0000	0.0000	0.0000	0.0267	0.1099	0.1846	0.5723	0.0260

Target Return and Risks:			
mean	mu	Cov	Sigma
0.0323	0.0323	1.3460	1.3460

Gauti rezultatai rodo, kad reikšmingumo lygmens sumažinimas sąlygojo nedidelį portfelio vidurkio sumažėjimą. Be to, šį kartą į optimalųjį portfelį įtraukiamas ir BBRY aktyvas. Toliau nagrinėjamas trečias atvejis, kai reikšmingumo lygmuo yra 0.01.

- CVaR mažiausios rizikos portfelis su 0.01 reikšmingumo lygmeniu

Gaunami tokie rezultatai:

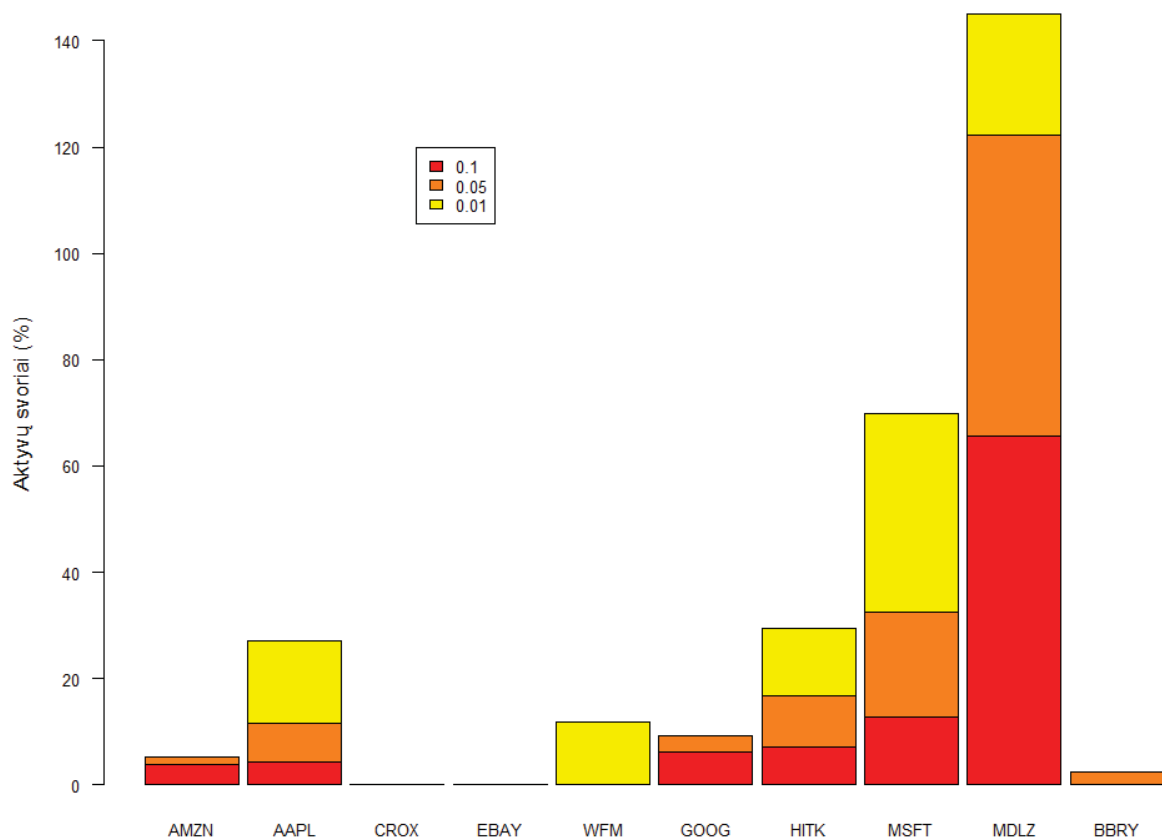
Portfolio Weights:									
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.0000	0.1569	0.0000	0.0000	0.1174	0.0000	0.1251	0.3725	0.2281	0.0000

Covariance Risk Budgets:									
AMZN	AAPL	CROX	EBAY	WFM	GOOG	HITK	MSFT	MDLZ	BBRY
0.0000	0.1699	0.0000	0.0000	0.1461	0.0000	0.1474	0.3900	0.1466	0.0000

Target Return and Risks:			
mean	mu	Cov	Sigma
0.0474	0.0474	1.4595	1.4595

Nors šiuo atveju portfelio dispersija padidėjo, portfelio vidurkis taip pat padidėjo daugiau nei viena šimtąja dalimi. Žemiau pateikiamas grafinis portfelio aktyvų svorių paskirstymas atsižvelgiant į reikšmingumo lygmenis.

Aktyvų svoriai atsižvelgiant į CVaR modelio reikšmingumo lygį



15 pav. CVaR mažiausios rizikos portfelis

Optimizuojant portfelį vadovaujantis mažiausios rizikos strategija, pastebima MDLZ aktyvo svarba. Tokia reikšminga šio aktyvo dalis portfelyje paaiškinama jo maža dispersija nagrinėjamu laikotarpiu.

Toliau palyginimui nagrinėjami robustiniai įvertiniai ir portfelio parametrų pasikeitimas priklausomai ir nuo reikšmingumo lygmens parinkimo.

- CVaR mažiausios rizikos portfelis su MCD, MVE, OGK ir suglodinimo robustiniais įvertiniais

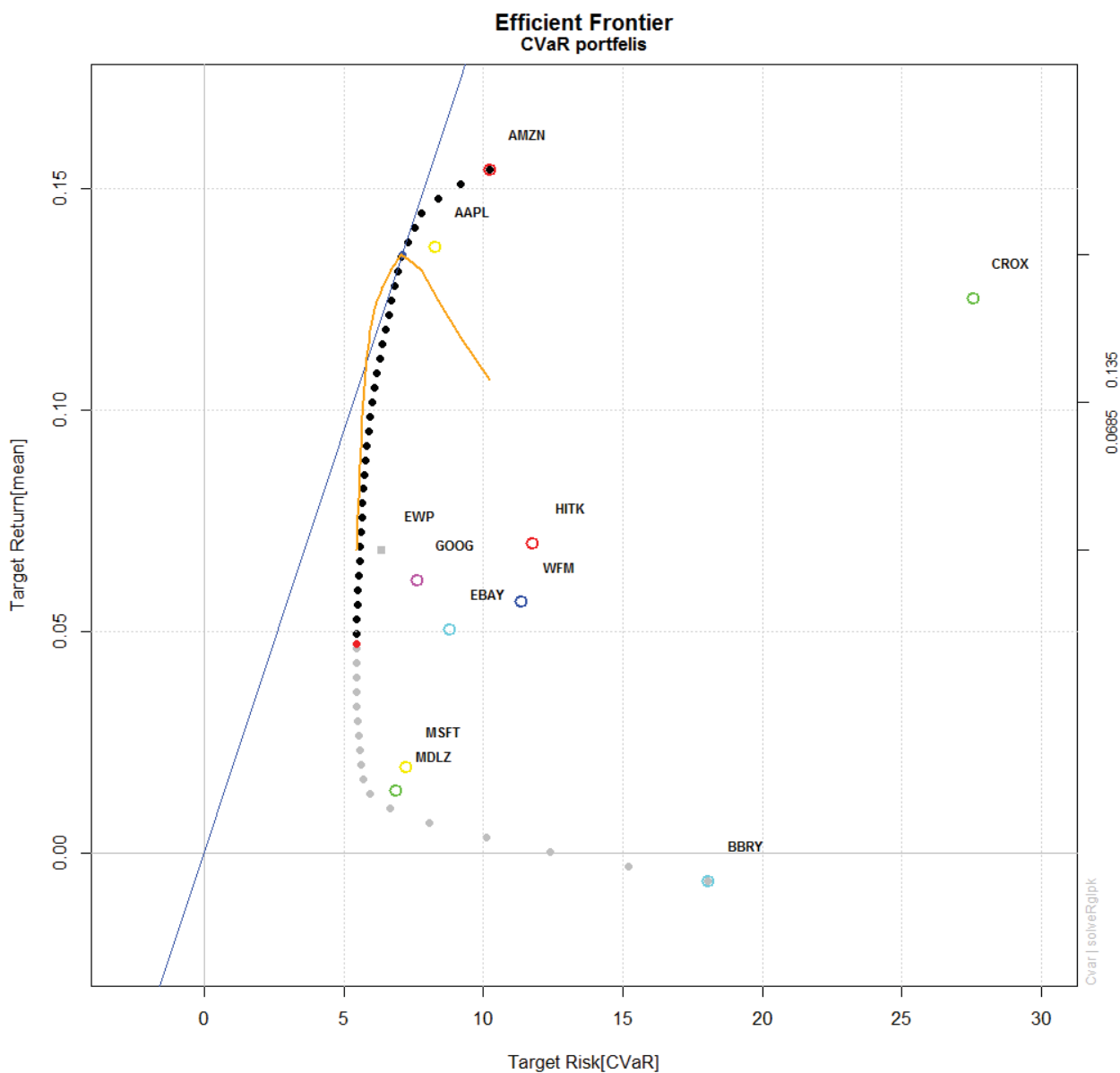
Žemiau pateiktoje lentelėje nurodomi portfelių vidurkiai ir dispersijos atsižvelgiant į skirtingus robustinius įvertinius ir reikšmingumo lygmenis.

Robastinis įvertis	Reikšmingumo lygmuo	Vidurkis	Rizika
MCD	0.1	0.0325	0.9931
MCD	0.05	0.0323	1.008
MCD	0.01	0.0474	1.154
MVE	0.1	0.0325	0.9019
MVE	0.05	0.0323	0.9475
MVE	0.01	0.0474	1.087
OGK	0.1	0.0325	1.0652
OGK	0.05	0.0323	1.0777
OGK	0.01	0.0474	1.2226
Suglodinimo	0.1	0.0325	1.3591
Suglodinimo	0.05	0.0323	1.3428
Suglodinimo	0.01	0.0474	1.4551

7 lentelė. CVaR mažiosios rizikos portfelio su robastiniais įvertiniais pagrindinės charakteristikos

3.5. CVaR portfelio efektyvus frontas

Žemiau esančiame grafike pavaizduota aibė galimų portfelių ir efektyvus frontas nurodantis optimalius portfelių variantus. Grafike taip pat pažymėtas tolygus portfelis EWP. Kaip matoma toks paprasčiausias paskirstymas yra labai arti efektyvaus fronto. Oranžine spalva pavaizduota kreivė yra vadinama Sharpo kreive. Ją sudaro Sharpo indeksų taškai, kurie nurodo geriausius pelno ir rizikos santykius. Dešinėje pusėje pateikiami konkretūs Sharpo indeksų intervalai. Oranžinis taškas esantis žemiau AAPL aktyvo žymi geriausio vidurkio ir dispersijos santykio portfelį. Raudonas taškas virš MDLZ aktyvo žymi mažiausios dispersijos portfelį. Verta pastebėti, kad priešingai nei vidurkio ir dispersijos portfelio atveju, čia x ašis rodo ne dispersiją, o CVaR dydį.



16 pav. CVaR modelio efektyvus frontas

3.6. Portfelijų strategijų analizė

Portfelio strategijų analizė yra viena portfelio valdymo sudedamųjų dalių. Strategijų analizė atliekama įvairių modelių palyginimui.

3.6.1. MV portfelio strategijų analizė

Šiame skyrelyje nagrinėjamos trys MV portfelio investavimo strategijos:

- mažiausia dispersija esant tam tikram pelno lygiui
- geriausias pelno ir rizikos santykis
- mažiausia galima dispersija

Pirmiausia nagrinėjamas efektyvus portfelis. Strategijų analizė remiasi naujų portfelių sudarymu. Nauji portfeliai sudaromi kiekvieno mėnesio pradžioje per tam tikrą laikotarpį. Šiame darbe nagrinėjamas 2 m. laikotarpis. Verta pastebėti, kad labai svarbų vaidmenį atlieka pasirinktas laiko intervalas. Tuo įsitikinti galima nagrinėjant MV efektyvaus portfelio aktyvų svorius. Žemiau pateikiami keli pirmi trijų aktyvų įrašai.

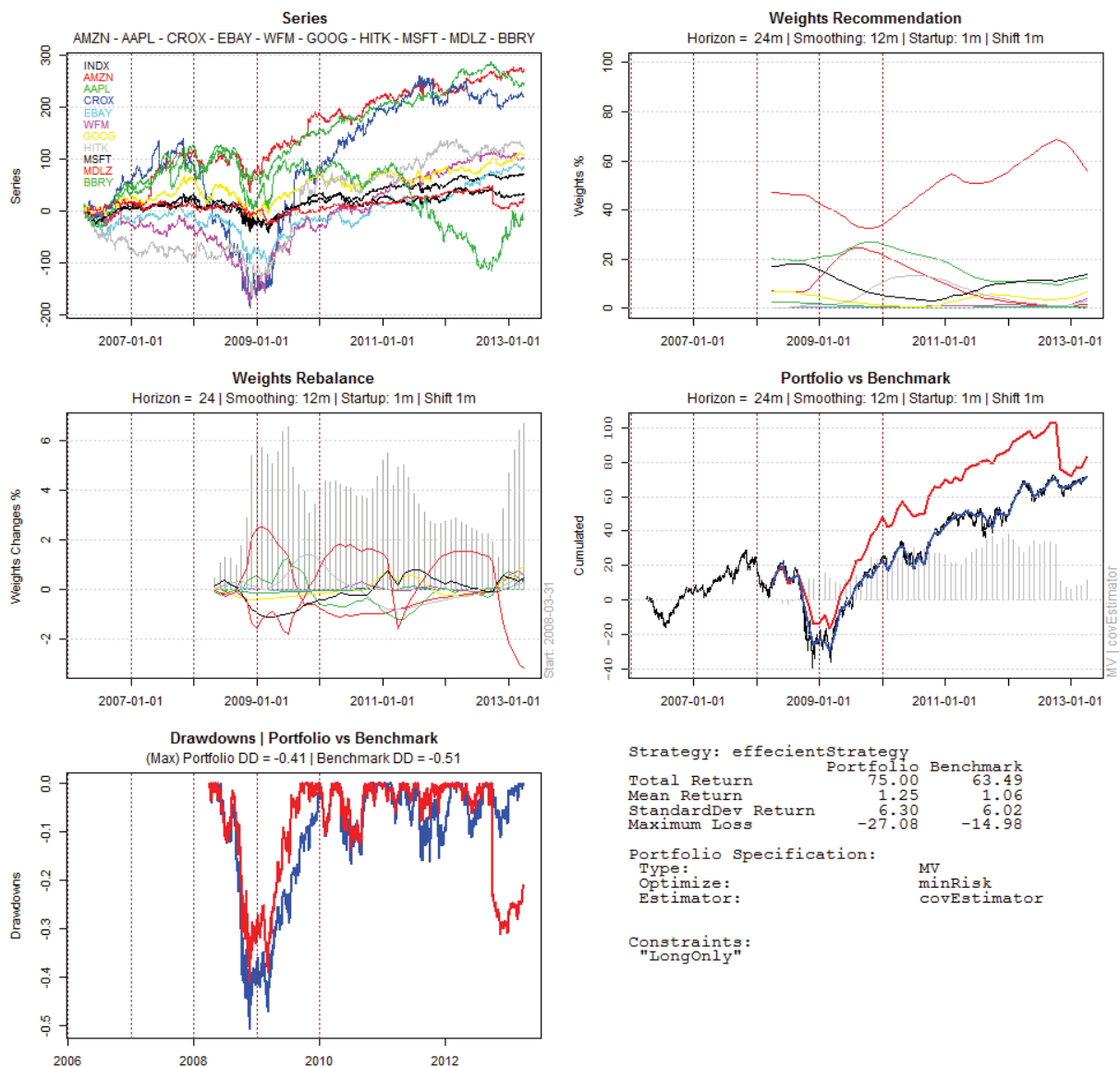
\$weights	AMZN	AAPL	EBAY
2008-03-31	0.069370576	0.20083650	0.0000000000
2008-04-30	0.049385973	0.15054342	0.0207156778
2008-05-31	0.025230087	0.13963871	0.0262127557
2008-06-30	0.026576942	0.21911761	0.0274916288
2008-07-31	0.084945695	0.17793510	0.0357982353
2008-08-31	0.087698530	0.22084795	0.0096701723
2008-09-30	0.245796489	0.16722974	0.0000000000
2008-10-31	0.293187434	0.35606011	0.0000000000
2008-11-30	0.704929549	0.29507045	0.0000000000
2008-12-31	0.514863524	0.29369663	0.0000000000

Atsižvelgiant į tai, kad pardavimų ir pirkimų operacijos yra apmokestintos, tokie didžiuliai svyravimai sąlygoja didesnes išlaidas. Konstruojant portfelį 2008 m. spalį AMZN sudarytų 29 % visų aktyvų. Tuo tarpu lapkritį nagrinėjamo aktyvo dalis sudarytų jau 70 %. Dėl tokių papildomų išlaidų praktikoje naudojamas suglodinimas. Palyginimui pateikiami to paties laikotarpio aktyvų svoriai pritaikius suglodinimą:

\$smoothWeights	AMZN	AAPL	EBAY
2008-03-31	0.069370576	0.20083650	0.0000000000
2008-04-30	0.068897568	0.19964613	0.0004903119
2008-05-31	0.067525355	0.19737356	0.0014501789
2008-06-30	0.065573690	0.19626111	0.0027537866
2008-07-31	0.064634853	0.19503087	0.0044692559
2008-08-31	0.064508554	0.19476110	0.0058205900
2008-09-30	0.068708965	0.19391632	0.0066503478
2008-10-31	0.077029460	0.19714920	0.0070870301
2008-11-30	0.097848279	0.20178153	0.0072319439
2008-12-31	0.122624243	0.20727367	0.0071645284

Ryškiausiai suglodinimo privalumas papildomų išlaidų sumažinimo atžvilgiu pastebimas AMZN aktyvo atveju. Šio aktyvo suglodinti svoriai neviršija 13 % 2008 m.

Efektyvaus portfelio strategijos analizė geriausiai atsiskleidžia grafiniu pavidalu. Žemiau pateikiami keli nagrinėjamos strategijos analizės aspektai.



17 pav. MV modelio efektyvaus portfelio strategijos analizė

Iš aukščiau pateiktos rezultatų suvestinės matoma, kad pasirinkus nagrinėjamą strategiją 2008 m. kovo m. portfelio grąža būtų maždaug 75 %, lyginant su 63 % grąža, jei būtų investuojama į INDX aktyvą. Verta priminti, kad INDX aktyvas yra NASDAQ vertbinių popierių biržos indeksų seka, kuri yra nagrinėjama kaip atskaitos taškas palyginimui ir rinkos elgsenos pavaizdavimui. Nors portfelio grąža yra didesnė nei INDX grąža, nagrinėjama strategija sumažina portfelio diversifikavimą. Šiuo atveju didžiausia rizika atitenka MDLZ aktyvui. Mažesnis portfelio diversifikavimas paaikšina beveik dvigubai didesnę maksimalų nuostolį. Toliau pateikiami metiniai rezultatai:

Net Performance % to 2013-03-31:

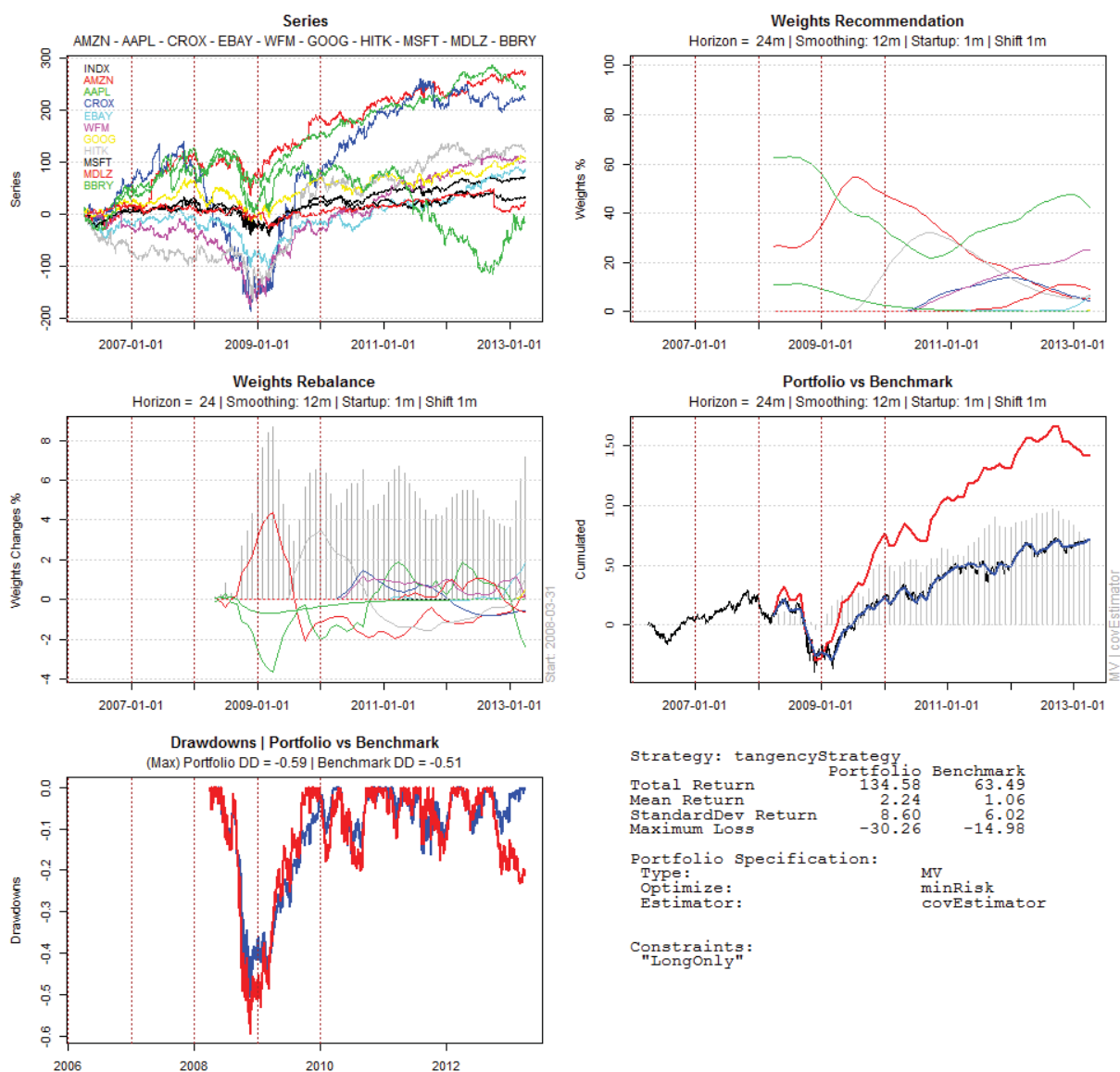
	1 mth	3 mths	6 mths	1 yr	3 yrs	5 yrs	3 yrs p.a.	5 yrs p.a.
Portfolio	6.37	11.23	-19.77	-12.65	14.10	NA	4.50	NA
Benchmark	2.91	5.94	1.17	3.48	22.53	NA	7.01	NA

Net Performance % Calendar Year:

	2008	2009	2010	2011	2012	YTD Total	
Portfolio	-21.33	61.91	20.96	17.87	-15.64	11.23	75.00
Benchmark	-30.57	46.41	19.48	5.50	16.73	5.94	63.49

Aukščiau pateikti rezultatai rodo, kad nors daugelį metų portfelio elgsena buvo geresnė nei INDX, 2012 m. situacija labai pasikeitė. Tai nurodo permainas nagrinėjamose rinkose ir sumažina pasitikėjimą šios strategijos patikimumu.

Toliau palyginimui pateikiami geriausio pelno ir rizikos santykio strategijos analizės rezultatai:



18 pav. MV modelio liestinės portfelio strategijos analizė

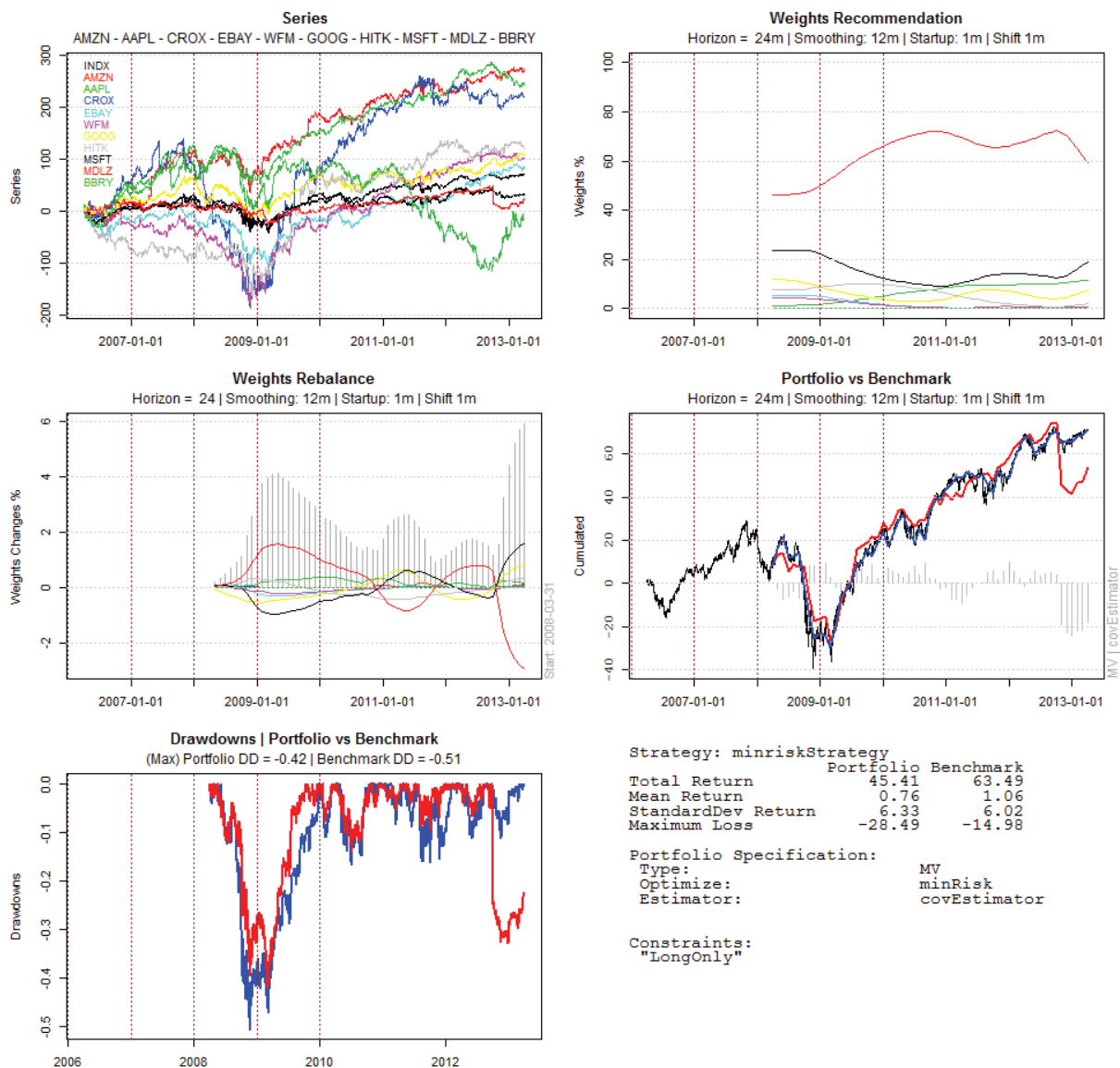
Portfelio, sudaryto remiantis nagrinėjama strategija, grąža yra kelis kartus didesnė negu INDX aktyvo. Be to, šis portfelis, lyginant su anksčiau aptartu efektyviu portfeliu, yra geriau diversifi-

kuotas. Pastebima, kad svorių perskirstymas yra didesnis nei efektyvaus portfelio atveju, tačiau nėra didesnis nei 5 %. Tai praktikoje laikoma racionalių sprendimu.

Net Performance % to 2013-03-31:								
	1 mth	3 mths	6 mths	1 yr	3 yrs	5 yrs	3 yrs p.a.	5 yrs p.a.
Portfolio	0.92	-6.60	-22.63	-12.97	36.47	NA	10.92	NA
Benchmark	2.91	5.94	1.17	3.48	22.53	NA	7.01	NA
Net Performance % Calendar Year:								
	2008	2009	2010	2011	2012	YTD	Total	
Portfolio	-35.53	104.06	30.03	23.67	18.95	-6.60	134.58	
Benchmark	-30.57	46.41	19.48	5.50	16.73	5.94	63.49	

Aukščiau pateikti metiniai duomenys leidžia aiškiau pastebėti, kad efektyvus portfelis davė pras-tesnius rezultatus tik nagrinėjamo laikotarpio pradžioje. Kelių pastarųjų metų teigiami portfelio rezultatai leidžia manyti, kad ši strategija yra pakankamai patikima.

Galiausiai pateikiama mažiausios galimos dispersijos strategijos analizė:



19 pav. MV modelio mažiausios dispersijos portfelio strategijos analizė

Remiantis šia strategija, portfelio grąža yra mažesnė nei INDX. Tai verčia suabejoti portfelio patikimumu. Pastebima, kad portfelis yra prastai diversifikuotas. Didžiausią portfelio dalį dėl mažiausios dispersijos sudaro MDLZ aktyvas.

Net Performance % to 2013-03-31:

	1 mth	3 mths	6 mths	1 yr	3 yrs	5 yrs	3 yrs p.a.	5 yrs p.a.
Portfolio	6.82	12.19	-20.68	-13.36	13.72	NA	4.38	NA
Benchmark	2.91	5.94	1.17	3.48	22.53	NA	7.01	NA

Net Performance % Calendar Year:

2008	2009	2010	2011	2012	YTD Total
------	------	------	------	------	-----------

Portfolio	-24.13	44.02	13.24	17.32	-17.22	12.19	45.41
Benchmark	-30.57	46.41	19.48	5.50	16.73	5.94	63.49

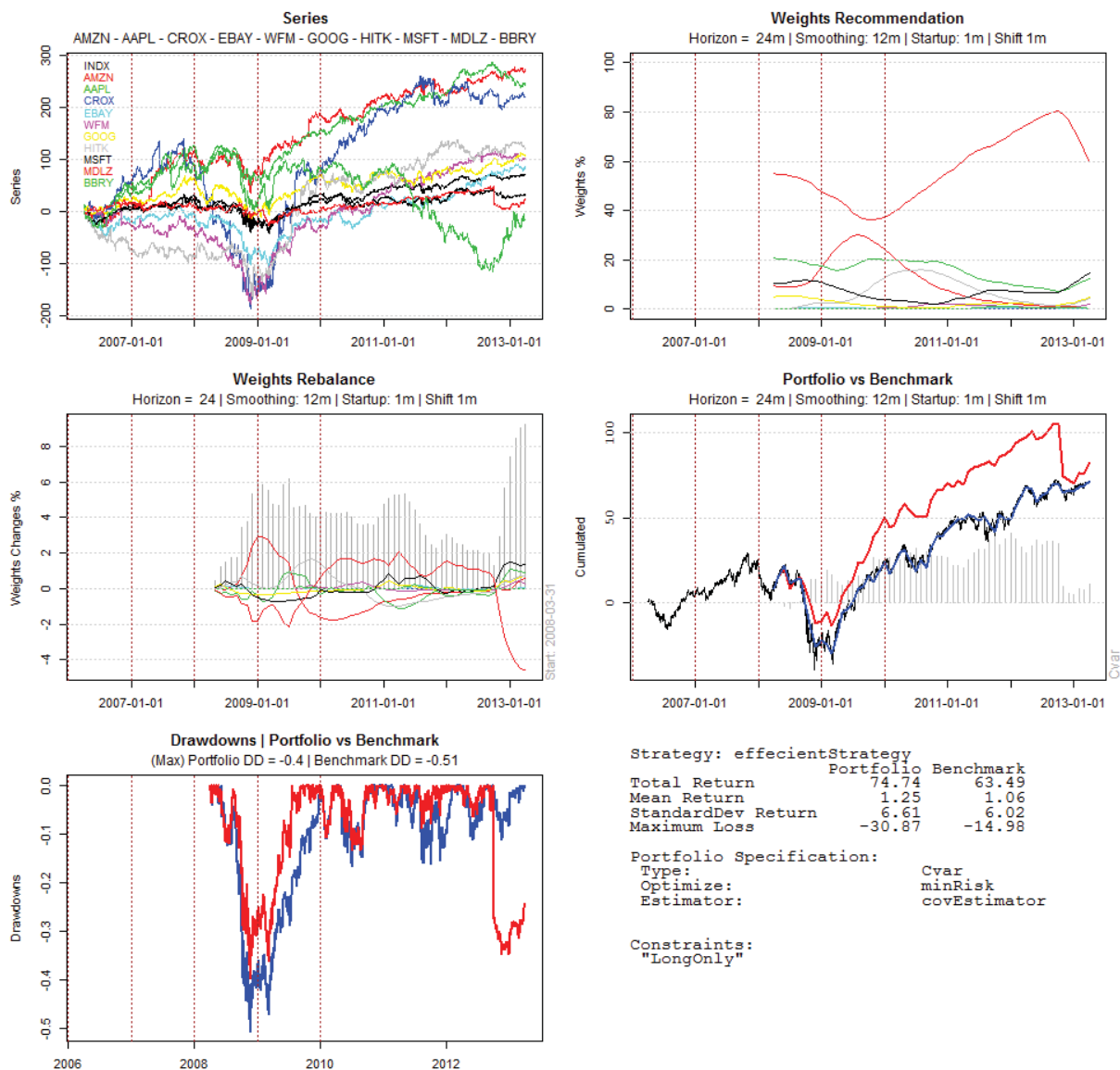
Nagrinėjamos strategijos trūkumas yra tai, kad vienas aktyvas (MDLZ) turi lemiamą įtaką portfelio grąžai. Nors pasirinkta strategija davė pakankamai artimus rezultatus lyginant su INDX aktyvu, visgi 2012 m. rezultatai suprastėjo ir galiausiai bendras portfelio rezultatas yra prastesnis nei INDX. Tai nurodo portfelio nepatikimumą.

3.6.2. CVaR portfelio strategijų analizė

Šiame skyrelyje nagrinėjamos trys CVaR portfelio investavimo strategijos:

- mažiausia dispersija esant tam tikram pelno lygiui
- geriausias pelno ir rizikos santykis
- mažiausia galima dispersija

Pirmiausia nagrinėjamas efektyvus portfelis.



20 pav. CVaR modelio efektyvaus portfelio strategijos analizė

Pateikti rezultatai rodo, kad šiuo atveju diversifikavimas yra pakankamai mažas. Lyginant su MV efektyviu portfeliu didžiausias nuostolis šiuo atveju yra didesnis. Visgi pastebima, kad ekonominio sunkmečio metu portfelis davė geresnius rezultatus nei INDX aktyvas.

Net Performance % to 2013-03-31:

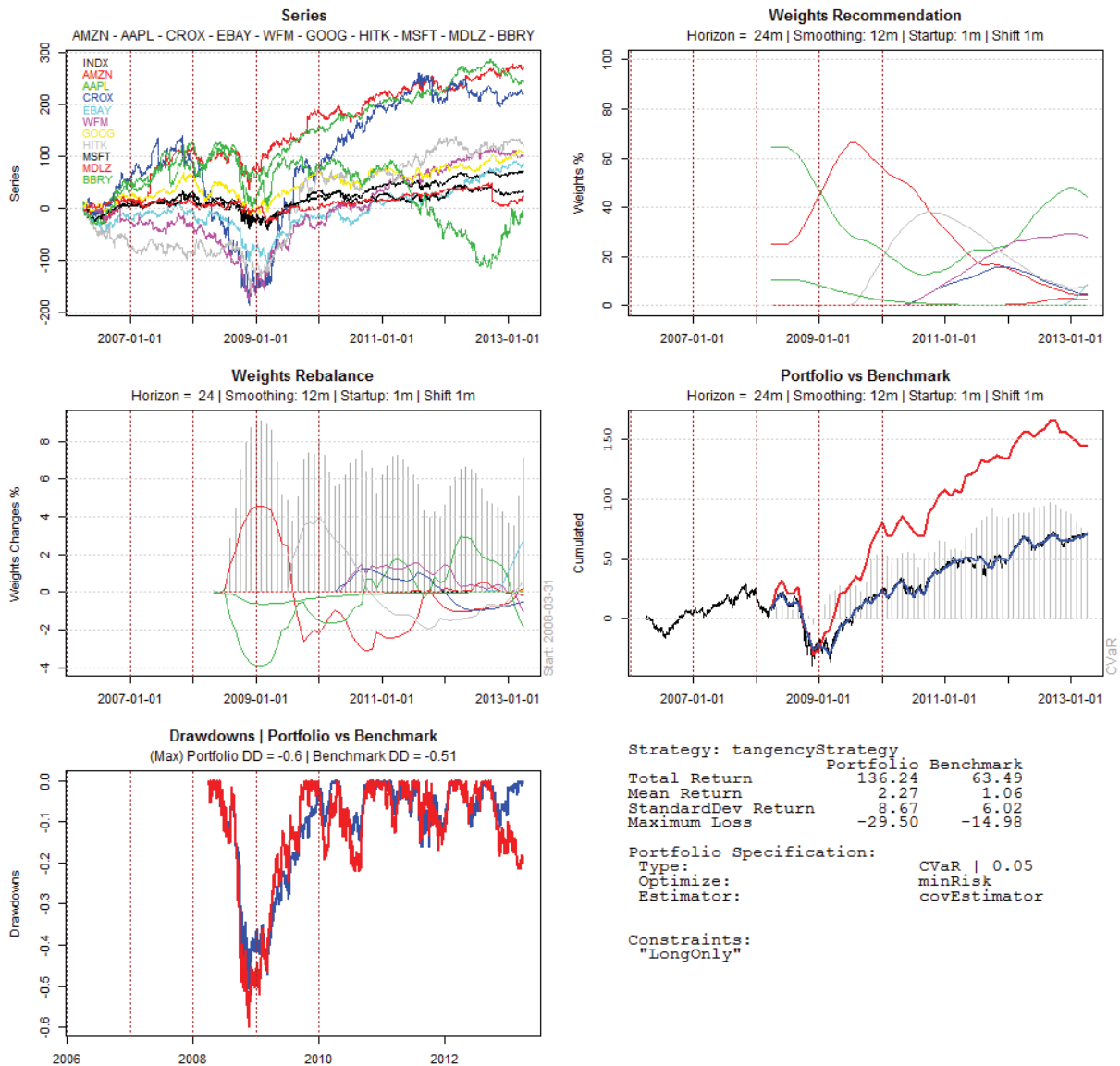
	1 mth	3 mths	6 mths	1 yr	3 yrs	5 yrs	3 yrs p.a.	5 yrs p.a.
Portfolio	6.78	12.46	-22.30	-14.39	13.34	NA	4.26	NA
Benchmark	2.91	5.94	1.17	3.48	22.53	NA	7.01	NA

Net Performance % Calendar Year:

	2008	2009	2010	2011	2012	YTD Total
Portfolio	-18.66	61.30	19.47	19.66	-19.49	12.46 74.74

Benchmark	-30.57	46.41	19.48	5.50	16.73	5.94	63.49
-----------	--------	-------	-------	------	-------	------	-------

Nors beveik visus nagrinėjamus metus portfelio rezultatai buvo geresni nei INDX aktyvo, 2012 m. situacija pasikeitė. Prastesni paskutinių metų rezultatai leidžia suabejoti šia strategija. Palyginimui pateikiama geriausio pelno ir rizikos santykio strategijos analizė:



21 pav. CVaR modelio liestinės portfelio strategijos analizė

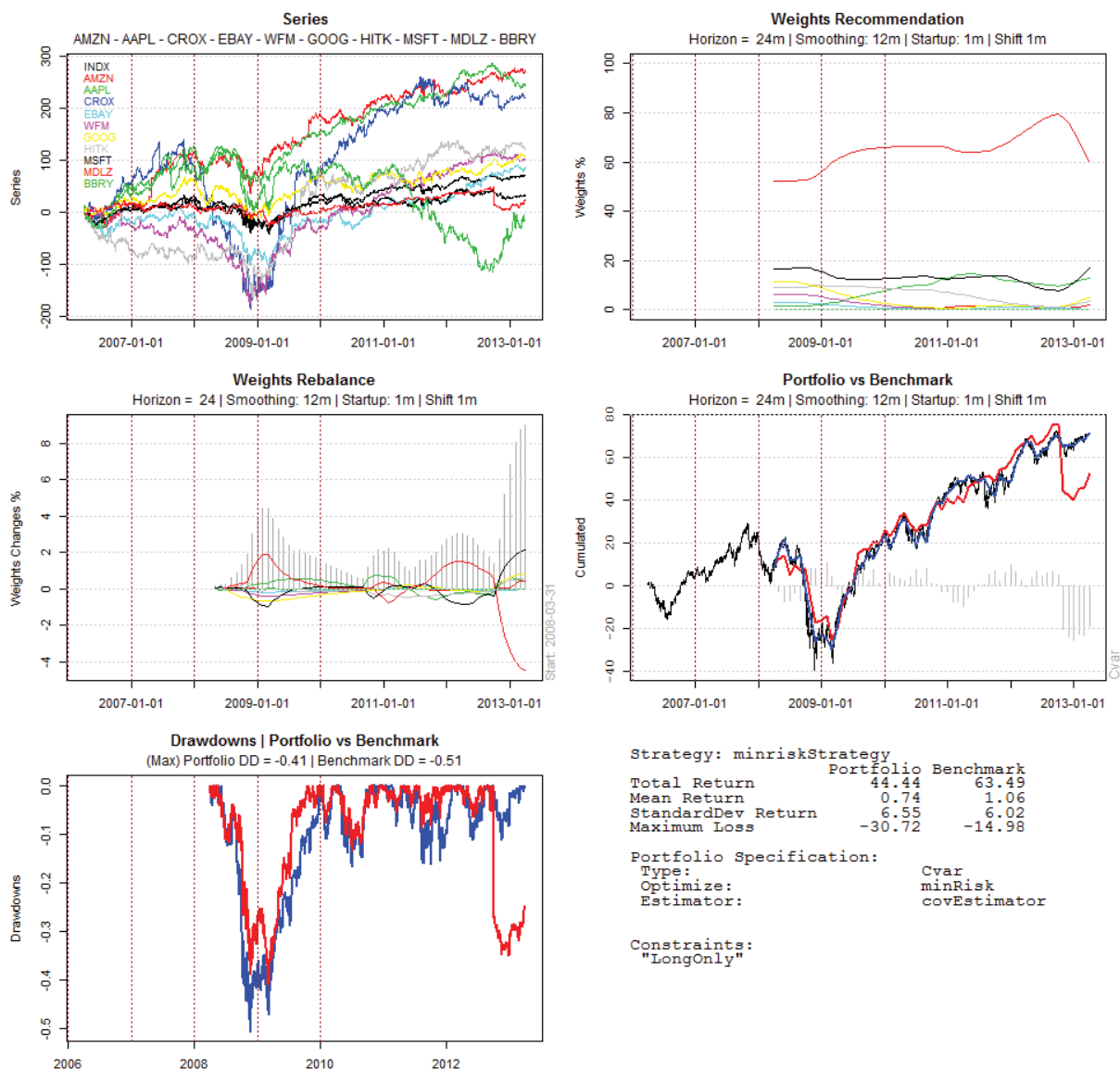
Panašiai kaip ir MV liestinės portfelio atveju portfelio grąža yra didesnė nei INDX aktyvo. Nors portfelio aktyvų svorių kaita yra didesnė lyginant su ankstesne strategija, visgi nėra išskirtinai didelė.

Net Performance % to 2013-03-31:

	1 mth	3 mths	6 mths	1 yr	3 yrs	5 yrs	3 yrs p.a.	5 yrs p.a.
Portfolio	0.03	-8.43	-21.25	-11.88	38.43	NA	11.45	NA

Benchmark	2.91	5.94	1.17	3.48	22.53	NA	7.01	NA
Net Performance % Calendar Year:								
	2008	2009	2010	2011	2012	YTD	Total	
Portfolio	-33.68	106.24	27.01	25.94	19.16	-8.43	136.24	
Benchmark	-30.57	46.41	19.48	5.50	16.73	5.94	63.49	

Verta pastebėti, kad nors ir didžiausias nuostolis sunkmečio laikotarpiu pastebimas nagrinėjamo portfelio atveju, portfelio grąžos kaita kiekvienais metais buvo labai artima INDX aktyvo grąžos pokyčiui. Galiausiai pateikiami mažiausios galimos dispersijos analizės rezultatai:



22 pav. CVaR modelio mažiausios dispersijos portfelio strategijos analizė

Ši strategija pasižymi stabilumu. Per visus nagrinėjamus metus aktyvų, įtrauktų į portfelį, svoriai kito mažiausiai. Išskirtis yra 2012 m. pabaiga, kada MDLZ aktyvo svoris pastebimai sumažėjo. Lyginant portfelio ir INDX grąžų kaitą galima pastebėti, kad rezultatai yra labai panašūs išskyrus 2013 m., kada INDX aktyvo grąža buvo didesnė.

Net Performance % to 2013-03-31:								
	1 mth	3 mths	6 mths	1 yr	3 yrs	5 yrs	3 yrs p.a.	5 yrs p.a.
Portfolio	6.80	12.17	-22.90	-14.92	13.09	NA	4.19	NA
Benchmark	2.91	5.94	1.17	3.48	22.53	NA	7.01	NA
Net Performance % Calendar Year:								
	2008	2009	2010	2011	2012	YTD Total		
Portfolio	-23.92	42.22	14.48	17.64	-18.15	12.17	44.44	
Benchmark	-30.57	46.41	19.48	5.50	16.73	5.94	63.49	

Nors grąžų kaita per visą nagrinėjamą laikotarpį buvo panaši tiek portfelio, tiek INDX aktyvo atveju, galutinė portfelio grąža yra 19 % mažesnė. Didžiausią įtaką padarė rinkos pokyčiai 2012 m. Tai leidžia manyti, kad artimiausiu metu nagrinėjama strategija gali pradėti būti nuostolinga, todėl tenka suabejoti jos patikimumu.

4. Išvados

Šio baigiamojo darbo tikslas buvo ištirti moderniosios portfelio teorijos pritaikymą naudojant šiuolaikinius portfelio optimizavimo ir testavimo įrankius. Teorinėje darbo dalyje aptarti keli dažnai praktikoje naudojami rizikos matai bei pristatytos Rmetrics funkcijos bei nustatymai naudojami portfelio optimizavimui ir strategijų analizei.

Vienas iš svarbių portfelio pelną lemiančių veiksnių yra nagrinėjamo laikotarpio pasirinkimas. Atsižvelgint į tai, pasirinktiems modeliams MV ir CVaR buvo išnagrinėta robustinių įvertinių įtaka galutiniams portfelio rezultatams. Robastiniai įvertiniai buvo pritaikyti visiems trimis nagrinėtiems portfelio tipams, t.y. mažiausios dispersijos su tam tikru vidurkiu, liestinės bei mažiausios galimos dispersijos. Visiems trimis portfelio tipams glodinimo įvertinys buvo mažiausiai naudingas. Jo pritaikymas tik nežymiai pagerino atitinkamo modelio be robustinio įvertinio rezultatus. Geriausi rezultatai tiek MV, tiek CVaR modelio atveju buvo gauti taikant MVE įvertinį.

Klasikinio MV portfelio atveju taikant efektyvaus portfelio strategiją vienas iš dešimties nagrinėjamų NASDAQ vertybinių popierių biržos aktyvų MDLZ užėmė daugiau nei 50 % portfelio dalies. Robastinių įvertinių įtraukimas sumažino šio aktyvo svorį tokiu būdu portfelio diversifikavimas padidėjo. Verta pastebėti, kad kartu su didesniu diversifikavimu, sumažėjo ir portfelio rizika.

MV liestinės portfelio rezultatai labiausiai išsiskyrė iš kitų nagrinėjamų portfelio. Optimizuojant geriausio pelno ir rizikos portfelį gautas žymiai didesnis pelnas nei efektyvaus portfelio atveju, tačiau dispersija nepadidėjo proporcingai. Tai nurodo šio portfelio pranašumą. Verta pastebėti, kad taikant MVE įvertinį gautas ir didesnis portfelio pelnas, ir mažesnė dispersija lyginant su kitais MV liestinės modeliais.

Priešingai nei MV liestinės portfelio atvejais, mažiausios rizikos portfeliuose robustiniai įvertiniai mažino tiek pelną, tiek ir riziką. Vienintelė išskirtis yra glodinimo įvertinys, tačiau jis beveik nesiskyrė nuo portfelio rezultatų be robustinių įvertinių. Taigi, mažiausios galimos dispersijos atveju robustinių įvertinių taikymas nėra naudingas.

Nagrinėjant CVaR modelį buvo atsižvelgiama į pasiklivimo lygmens pakeitimą, todėl visi modeliai buvo sudaryti su trimis pasiklivimo lygmenimis: 0.01, 0.05 ir 0.1. Portfelio rezultatų priklausomybė nuo pasirinkto pasiklivimo lygmens geriausiai pastebima CVaR efektyvaus portfelio atveju. Esant fiksuotam portfelio pelnui, didinant pasiklivimo lygmenį portfelio rizika mažėjo. Tuo tarpu CVaR liestinės portfelio atveju pasiklivimo lygmens didinimas sąlygojo tiek didesnę riziką, tiek ir didesnę pelną.

Bendru atveju taikant CVaR mažiausios galimos dispersijos strategiją pasiklivimo lygmens didinimas lėmė portfelio dispersijos sumažėjimą taikant robustinius įvertinius. Įdomu yra tai, kad taikant glodinimo įvertinį arba netaikant jokio įvertinio mažiausia dispersija šios strategijos atveju gaunama, kai pasiklivimo lygmuo yra 0.05.

Kadangi portfelio gerumo matai, t.y. pelnas ir rizika, priklauso nuo nagrinėjamo laikotarpio pasirinkimo, šiame darbe buvo atlikta strategijų analizė. Nagrinėjami portfeliai buvo lyginami su atskaitos seka — NASDAQ vertybinių popierių biržos indeksų seka. Prasčiausi rezultatai buvo gauti taikant mažiausios galimos dispersijos strategiją. Šiuo atveju portfelio galutinė grąža buvo mažesnė nei INDX grąža. Nors visais nagrinėtais atvejais sunkmečio laikotarpiu didžiausi portfelio nuostoliai buvo beveik du kartus didesni nei INDX atveju, didžiausia galutinė grąža gauta taikant

liestinės portfelio strategiją. Tai pasiteisino tiek MV, tiek ir CVaR modelio atveju.

Šio darbo rezultatai leido įsitikinti, kad nėra nieko tokio kaip nemokami pietūs. Norint gauti didesnį pelną, tenka labiau rizikuoti. Verta pastebėti, kad šie du portfelio rodikliai nekinta proporcingai. Dėl šios priežasties liestinės portfelis yra optimaliausias pasirinkimas. Taikant MVE robastrinį įvertinį gaunamas dar geresnis rezultatas. Atlikta portfelių strategijų analizė patvirtino liestinės portfelio strategijos patikimumą. Nors tarp portfelių strategijų rezultatai pastebimai skyrėsi, nagrinėjant portfelių tipus, t.y. MV ir CVaR, tokių išskirtinumų nepastebėta. Atsižvelgiant į MV modelio paprastumą, tolimesniam investavimui siūloma taikyti MV liestinės modelį.

Literatūra

- [1] Best M. Portfolio Optimization. 2010
- [2] Bower B., Wentz P. Portfolio Optimization: MAD vs Markowitz. 2005
- [3] Byrne P., Lee S. Different Risk Measures: Different Portfolio Compositions? 2004
- [4] Farias Ch., Vieira W., Santos M. Portfolio selection models: comparative analysis and application to the Brazilian stock market. 2004
- [5] Hill R. Portfolio Theory and Investment Analysis. 2010
- [6] Hoe L., Hafizah J., Zaidi I. An empirical comparison of different risk measures in portfolio optimization. 2010
- [7] Kabašinskas A. Finansinių rinkų statistinė analizė ir statistinio modeliavimo metodai. 2007
- [8] Kong L. The UPM/LPM Framework on Portfolio Performance Measurement and Optimization. 2006
- [9] Lapinskas R. Taikomosios statistikos kursas su R. 2010
- [10] Peter A. Risk Measures. 2003
- [11] Puelz A. Value-at-Risk Based Portfolio Optimization. 2001
- [12] Rutkauskas A., Žilinskij G. Finansinio sverto naudojimas aktyviai valdant investicijų portfelį. 2010
- [13] Scherer B., Martin D. Introduction to Modern Portfolio Optimization With NuOPT and S-PLUS. 2005
- [14] Simaan Y. Estimation Risk in Portfolio Selection: The Mean Variance Model Versus the Mean Absolute Deviation Model. 1997
- [15] Surgailis D. Finansų ekonometrija. 2008
- [16] Takashi H., Hiroaki I. Robust Portfolio Selection Problems Including Uncertainty Factors. 2008
- [17] West G. An Introduction to Modern Portfolio Theory: Markowitz, CAP-M, APT and Black-Litterman. 2006
- [18] Wojt A. Portfolio Selection and Lower Partial Moments. 2009
- [19] Wurtz D., Chalabi Y., Chen W., Ellis A. Portfolio Optimization with R/Rmetrics. 2009
- [20] Zhu L., Coleman T., Yuying L. Min-max robust and CVaR robust mean-variance portfolios. 2009

Priedas

R kodas:

```
library(fPortfolio)
library(fPortfolioBacktest)

pelno_norma=matrix(0,1761,10)
for(j in 1:10){
  for (i in 2:1760){
    pelno_norma[i,j]=(data4[i,j]/data4[i-1,j]-1)*100}}
pelno_norma=as.timeSeries(pelno_norma[-1,])
colnames(pelno_norma)=c("AMZN","AAPL","CROX","EBAY","WFM","GOOG","HITK",
"MSFT","MDLZ","BBRY")

ewSpec <- portfolioSpec()
nAssets <- ncol(pelno_norma)
setWeights(ewSpec) <- rep(1/nAssets, times=nAssets)
ewPortfolio <- feasiblePortfolio(data=pelno_norma, spec=ewSpec,
constraints="LongOnly")
ewPortfolio

mvefficientSpec <-portfolioSpec()
setTargetReturn(mvefficientSpec) <- getTargetReturn (ewPortfolio@portfolio)
["mean"]
mvefficientPortfolio <- efficientPortfolio(data=pelno_norma,
spec=mvefficientSpec, constraints="LongOnly")
mvefficientPortfolio

par(mfrow = c(1, 2))
col=divPalette(ncol(pelno_norma), "RdBu")
weightsPie(mvefficientPortfolio,radius=0.6,col=col)
mtext(text="Minimalios rizikos MV portfelio svoriai",side=3, line=1.5,font=2,
cex=0.7,adj=0)
weightedReturnsPie(mvefficientPortfolio,radius=0.6,col=col)
mtext(text="Minimalios rizikos MV portfelio a\u017eugr i\u0161naas",side=3, line=1.5,
font=2,cex=0.7,adj=0)

mvefficientSpec1<-portfolioSpec()
setEstimator(mvefficientSpec1)<-"covMcdEstimator"
setTargetReturn(mvefficientSpec1) <- getTargetReturn (ewPortfolio@portfolio)
["mean"]
mvefficientPortfolio1 <- efficientPortfolio(data=pelno_norma,
spec=mvefficientSpec1, constraints="LongOnly")
mvefficientPortfolio1

par(mfrow = c(2, 2))
col=qualiPalette(30,"Dark")
weightsPlot(covMcdFrontier,mtxt=FALSE,col=col)
```

```

text<-"MCD"
mtext(text,side=3,line=3,font=2,cex=0.7)
boxL()
weightedReturnsPlot(covMcdFrontier,mtext=FALSE,col=col)
boxL()
longSpec<-portfolioSpec()
setNFrontierPoints(mvefficientSpec)<-20
longFrontier<-portfolioFrontier(data=pelno_norma,spec=longSpec)
weightsPlot(longFrontier,mtext=FALSE,col=col)
boxL()
text<-"COV"
mtext (text, side=3, line=3, font=2, cex=0.7)
weightedReturnsPlot(longFrontier,mtext=FALSE, col=col)
boxL()

mvefficientSpec2 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvefficientSpec2)<-"mveEstimator"
setTargetReturn(mvefficientSpec2) <- getTargetReturn (ewPortfolio@portfolio)
["mean"]
mvefficientPortfolio2 <- efficientPortfolio(data=pelno_norma,
spec=mvefficientSpec2, constraints="LongOnly")
mvefficientPortfolio2

setNFrontierPoints(mvefficientSpec2)<-20
mveFrontier2<-portfolioFrontier(data=pelno_norma,spec=mvefficientSpec2)
tailoredFrontierPlot(mveFrontier2, mText="MVE robastinis MV portfelis",
risk="Sigma")

par(mfrow = c(2, 2))
col=divPalette(6,"RdBu")
weightsPlot(mveFrontier2,col=col,mtext=FALSE)
text<-"MVE"
mtext (text, side=3, line=3, font=2, cex=0.7)
boxL()
weightsPlot(covMcdFrontier,mtext=FALSE,col=col)
text<-"MCD"
mtext (text, side=3, line=3, font=2, cex=0.7)
boxL()
weightedReturnsPlot(mveFrontier2,mtext=FALSE,col=col)
boxL()
weightedReturnsPlot(covMcdFrontier,mtext=FALSE, col=col)
boxL()

mvefficientSpec3 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvefficientSpec3)<-"covOGKEstimator"
setTargetReturn(mvefficientSpec3) <- getTargetReturn (ewPortfolio@portfolio)
["mean"]
mvefficientPortfolio3 <- efficientPortfolio(data=pelno_norma,
spec=mvefficientSpec3, constraints="LongOnly")

```

```

mvefficientPortfolio3

setNFrontierPoints(mvefficientSpec3)<-20
covOGKFrontier<-portfolioFrontier(data=pelno_norma,spec=mvefficientSpec3)
tailoredFrontierPlot(covOGKFrontier, mText="OGK robastinis MV portfelis",
risk="Sigma")

par(mfrow = c(2, 2))
col=divPalette(6,"RdYlGn")
weightsPlot(mveFrontier2,mtext=FALSE,col=col)
text<-"MVE"
mtext (text, side=3, line=3, font=2, cex=0.7)
boxL()
weightsPlot(covOGKFrontier,col=col,mtext=FALSE)
text<-"OGK"
mtext (text, side=3, line=3, font=2, cex=0.7)
weightedReturnsPlot(mveFrontier2,mtext=FALSE,col=col)
boxL()
weightedReturnsPlot(covOGKFrontier,mtext=FALSE,col=col)
boxL()

mvefficientSpec4 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvefficientSpec4)<-"shrinkEstimator"
setTargetReturn(mvefficientSpec4) <- getTargetReturn (ewPortfolio@portfolio)
["mean"]
mvefficientPortfolio4 <- efficientPortfolio(data=pelno_norma,
spec=mvefficientSpec4, constraints="LongOnly")
mvefficientPortfolio4

setNFrontierPoints(mvefficientSpec4)<-20
shrinkFrontier<-portfolioFrontier(data=pelno_norma,spec=mvefficientSpec4)
tailoredFrontierPlot(shrinkFrontier, mText="Suglodintas robastinis MV
portfelis", risk="Sigma")
par(mfrow = c(1, 2))
col=divPalette(6,"PuOr")
weightsPlot(shrinkFrontier,mtext=FALSE,col=col)
text<-"Suglodintas"
mtext (text, side=3, line=3, font=2, cex=0.7)
boxL()
weightedReturnsPlot(shrinkFrontier,mtext=FALSE,col=col)
boxL()

effecientStrategy<-function (data, spec = portfolioSpec(),
constraints = "LongOnly", backtest = portfolioBacktest())
{strategyPortfolio <- efficientPortfolio(data, spec, constraints)
strategyPortfolio}
effecientStrategy(pelno_norma, mvefficientSpec, "LongOnly",
portfolioBacktest())

```

```

BSpec <-portfolioSpec()
BConstraints<-"LongOnly"
BBacktest<-portfolioBacktest()
setStrategyFun(BBacktest)<-"effecientStrategy"
setWindowsHorizon(BBacktest)="24m"
BFormula<- INDX ~ AMZN + AAPL + CROX + EBAY + WFM + GOOG + HITK + MSFT +
MDLZ + BERY

BPortfolios<-portfolioBacktesting(formula=BFormula,
data=BData, spec=mvefficientSpec, constraints=BConstraints,
backtest=BBacktest,trace=FALSE)
BPortfolios

setSmootherLambda(BBacktest)<-"12m"
BSmoothPortfolios<-portfolioSmoothing(object=BPortfolios,backtest=BBacktest)
BSmoothPortfolios

netPerformance(BSmoothPortfolios)
backtestPlot(BSmoothPortfolios, cex=0.9, font=1,family="mono")

mvmaxratioSpec <-portfolioSpec()
mvmaxratioPortfolio <- maxratioPortfolio( data=pelno_norma,
spec=mvmaxratioSpec, constraints="LongOnly")
mvmaxratioPortfolio

par(mfrow = c(1, 2))
col=divPalette(ncol(pelno_norma), "RdBu")
weightsPie(mvmaxratioPortfolio,radius=0.6,col=col)
mtext(text="ėLiestins MV portfelio svoriai",side=3, line=1.5,font=2,cex=0.7,
adj=0)
weightedReturnsPie(mvmaxratioPortfolio,radius=0.6,col=col)
mtext(text="ėLiestins MV portfelio ąžųgr įšnaas",side=3, line=1.5,font=2,
cex=0.7,adj=0)

mvmaxratioSpec1 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvmaxratioSpec1)<-"covMcdEstimator"
mvmaxratioPortfolio1 <- maxratioPortfolio( data=pelno_norma,
spec=mvmaxratioSpec1, constraints="LongOnly")
mvmaxratioPortfolio1

par(mfrow = c(1, 2))
col=divPalette(ncol(pelno_norma), "RdYlBu")
weightsPie(mvmaxratioPortfolio1,radius=0.6,col=col)
mtext(text="ėLiestins MV portfelio svoriai",side=3, line=1.5,font=2,cex=0.7,
adj=0)
weightedReturnsPie(mvmaxratioPortfolio1,radius=0.6,col=col)
mtext(text="ėLiestins MV portfelio ąžųgr įšnaas",side=3, line=1.5,font=2,
cex=0.7,adj=0)

```

```

mvmaxratioSpec2 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvmaxratioSpec2)<-"mveEstimator"
mvmaxratioPortfolio2 <- maxratioPortfolio( data=pelno_norma,
spec=mvmaxratioSpec2, constraints="LongOnly")
mvmaxratioPortfolio2

mvmaxratioSpec3 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvmaxratioSpec3)<-"covOGKEstimator"
mvmaxratioPortfolio3 <- maxratioPortfolio( data=pelno_norma,
spec=mvmaxratioSpec3, constraints="LongOnly")
mvmaxratioPortfolio3

mvmaxratioSpec4 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvmaxratioSpec4)<-"shrinkEstimator"
mvmaxratioPortfolio4 <- maxratioPortfolio( data=pelno_norma,
spec=mvmaxratioSpec4, constraints="LongOnly")
mvmaxratioPortfolio4

par(mfrow = c(2, 2))
col=divPalette(6,"Spectral")
weightsPlot(mveFrontier2,mtext=FALSE,col=col)
text<-"MVE"
mtext (text, side=3, line=3, font=2, cex=0.7)
boxL()
longSpec2<-portfolioSpec()
setNFrontierPoints(mvmaxratioSpec)<-20
longFrontier2<-portfolioFrontier(data=pelno_norma,spec=longSpec2)
weightsPlot(longFrontier2,col=col,mtext=FALSE)
text<-"COV"
mtext (text, side=3, line=3, font=2, cex=0.7)
weightedReturnsPlot(mveFrontier2,mtext=FALSE,col=col)
boxL()
weightedReturnsPlot(longFrontier2,mtext=FALSE,col=col)
boxL()

BSpec <-portfolioSpec()
BConstraints<-"LongOnly"
BBacktest<-portfolioBacktest()
setWindowsHorizon(BBacktest)="24m"
BFormula<- INDX ~ AMZN + AAPL + CROX + EBAY + WFM + GOOG + HITK + MSFT +
MDLZ + BBRV

BPortfolios<-portfolioBacktesting(formula=BFormula,
data=BData, spec=BSpec, constraints=BConstraints,
backtest=BBacktest,trace=FALSE)

setSmootherLambda(BBacktest)<-"12m"
BSmoothPortfolios<-portfolioSmoothing(object=BPortfolios,backtest=BBacktest)

```

```

netPerformance(BSmoothPortfolios)
backtestPlot(BSmoothPortfolios, cex=0.9, font=1,family="mono")

mvminriskSpec <-portfolioSpec()
mvminriskPortfolio <- minriskPortfolio( data=pelno_norma, spec=mvminriskSpec,
constraints="LongOnly")
mvminriskPortfolio

mvminriskSpec1 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvminriskSpec1)<-"covMcdEstimator"
mvminriskPortfolio1 <- minriskPortfolio( data=pelno_norma,
spec=mvminriskSpec1, constraints="LongOnly")
mvminriskPortfolio1

mvminriskSpec2 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvminriskSpec2)<-"mveEstimator"
mvminriskPortfolio2 <- minriskPortfolio( data=pelno_norma,
spec=mvminriskSpec2, constraints="LongOnly")
mvminriskPortfolio2

mvminriskSpec3 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvminriskSpec3)<-"covOGKEstimator"
mvminriskPortfolio3 <- minriskPortfolio( data=pelno_norma,
spec=mvminriskSpec3, constraints="LongOnly")
mvminriskPortfolio3

mvminriskSpec4 <-portfolioSpec()
setEstimator(mvminriskSpec4)<-"shrinkEstimator"
mvminriskPortfolio4 <- minriskPortfolio( data=pelno_norma,
spec=mvminriskSpec4, constraints="LongOnly")
mvminriskPortfolio4

par(mfrow = c(1, 1))
longFrontier<-portfolioFrontier (pelno_norma,mvSpec)
print(longFrontier)
longFrontier<-portfolioFrontier(pelno_norma)
plot(longFrontier)
mvFrontier<-portfolioFrontier(data=pelno_norma,
spec=mvefficientSpec,
constraints="LongOnly")
tailoredFrontierPlot(mvFrontier,mText="MV portfelis")

minriskStrategy<-function (data, spec = portfolioSpec(),
constraints = "LongOnly", backtest = portfolioBacktest())
{strategyPortfolio <- minriskPortfolio(data, spec, constraints)
strategyPortfolio}
minriskStrategy(pelno_norma, mvminriskSpec, "LongOnly",portfolioBacktest())

BSpec <-portfolioSpec()

```

```

BConstraints<-"LongOnly"

BBacktest<-portfolioBacktest()
setStrategyFun(BBacktest)<-"minriskStrategy"
setWindowsHorizon(BBacktest)="24m"
BFormula<- INDX ~ AMZN + AAPL + CROX + EBAY + WFM + GOOG + HITK + MSFT +
MDLZ + BBRY

BPortfolios<-portfolioBacktesting(formula=BFormula,
data=BData, spec=mvminriskSpec, constraints=BConstraints,
backtest=BBacktest,trace=FALSE)
BPortfolios

setSmootherLambda(BBacktest)<-"12m"
BSmoothPortfolios<-portfolioSmoothing(object=BPortfolios,backtest=BBacktest)
BSmoothPortfolios

netPerformance(BSmoothPortfolios)
backtestPlot(BSmoothPortfolios, cex=0.9, font=1,family="mono")

CVaRSpec<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec)<-"Cvar"
setAlpha(CVaRSpec)<-0.01
setSolver(CVaRSpec)<-"solveRglpk"
setTargetReturn(CVaRSpec)<-getTargetReturn(ewPortfolio@portfolio)["mean"]
CVaRPortfolio<-efficientPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec,
constraints="LongOnly")
CVaRPortfolio
barplot(t(mat1), main="ŲAktyv svoriai žatsivelgiant į CVaR
modelio šreikmingumo įlygmen", ylab="ŲAktyv svoriai (%)",
col=gray.colors(3), space=0.1, cex.axis=0.8, las=1,
names.arg=c("AMZN","AAPL","CROX","          EBAY","WFM"," GOOG","HITK","MSFT",
"MDLZ","BBRY"), cex=0.8)
legend(4, 90, legend =leq.txt, cex=0.8, fill=gray.colors(3))

CVaRSpec<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec)<-"Cvar"
setEstimator(CVaRSpec)<-"covMcdEstimator"
setAlpha(CVaRSpec)<-0.01
setSolver(CVaRSpec)<-"solveRglpk"
setTargetReturn(CVaRSpec)<-getTargetReturn(ewPortfolio@portfolio)["mean"]
CVaRPortfolio<-efficientPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec,
constraints="LongOnly")
CVaRPortfolio

CVaRSpec<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec)<-"Cvar"
setEstimator(CVaRSpec)<-"mveEstimator"
setAlpha(CVaRSpec)<-0.01

```

```

setSolver(CVaRSpec)<-"solveRglpk"
setTargetReturn(CVaRSpec)<-getTargetReturn(ewPortfolio@portfolio)["mean"]
CVaRPortfolio<-efficientPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec,
constraints="LongOnly")
CVaRPortfolio

CVaRSpec<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec)<-"Cvar"
setEstimator(CVaRSpec)<-"covOGKEstimator"
setAlpha(CVaRSpec)<-0.01
setSolver(CVaRSpec)<-"solveRglpk"
setTargetReturn(CVaRSpec)<-getTargetReturn(ewPortfolio@portfolio)["mean"]
CVaRPortfolio<-efficientPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec,
constraints="LongOnly")
CVaRPortfolio

CVaRSpec<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec)<-"Cvar"
setEstimator(CVaRSpec)<-"shrinkEstimator"
setAlpha(CVaRSpec)<-0.01
setSolver(CVaRSpec)<-"solveRglpk"
setTargetReturn(CVaRSpec)<-getTargetReturn(ewPortfolio@portfolio)["mean"]
CVaRPortfolio<-efficientPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec,
constraints="LongOnly")
CVaRPortfolio

CVaRSpec2<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec2)<-"Cvar"
setAlpha(CVaRSpec2)<-0.01
setSolver(CVaRSpec2)<-"solveRglpk"
CVaRPortfolio2<-tangencyPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec2,
constraints="LongOnly")
CVaRPortfolio2

CVaRSpec2<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec2)<-"Cvar"
setEstimator(CVaRSpec2)<-"covMcdEstimator"
setAlpha(CVaRSpec2)<-0.01
setSolver(CVaRSpec2)<-"solveRglpk"
CVaRPortfolio2<-tangencyPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec2,
constraints="LongOnly")
CVaRPortfolio2

CVaRSpec2<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec2)<-"Cvar"
setEstimator(CVaRSpec2)<-"mveEstimator"
setAlpha(CVaRSpec2)<-0.01
setSolver(CVaRSpec2)<-"solveRglpk"
CVaRPortfolio2<-tangencyPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec2,

```

```

constraints="LongOnly")
CVarPortfolio2

CVarSpec2<-portfolioSpec()
setType(CVarSpec2)<-"Cvar"
setEstimator(CVarSpec2)<-"covOGKEstimator"
setAlpha(CVarSpec2)<-0.01
setSolver(CVarSpec2)<-"solveRglpk"
CVarPortfolio2<-tangencyPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVarSpec2,
constraints="LongOnly")
CVarPortfolio2

CVarSpec2<-portfolioSpec()
setType(CVarSpec2)<-"Cvar"
setEstimator(CVarSpec2)<-"shrinkEstimator"
setAlpha(CVarSpec2)<-0.01
setSolver(CVarSpec2)<-"solveRglpk"
CVarPortfolio2<-tangencyPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVarSpec2,
constraints="LongOnly")
CVarPortfolio2

CVarSpec3<-portfolioSpec()
setType(CVarSpec3)<-"Cvar"
setAlpha(CVarSpec3)<-0.01
setSolver(CVarSpec3)<-"solveRglpk"
CVarPortfolio3<-minriskPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVarSpec3,
constraints="LongOnly")
CVarPortfolio3

CVarSpec3<-portfolioSpec()
setType(CVarSpec3)<-"Cvar"
setEstimator(CVarSpec3)<-"covMcdEstimator"
setAlpha(CVarSpec3)<-0.01
setSolver(CVarSpec3)<-"solveRglpk"
CVarPortfolio3<-minriskPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVarSpec3,
constraints="LongOnly")
CVarPortfolio3

CVarSpec3<-portfolioSpec()
setType(CVarSpec3)<-"Cvar"
setEstimator(CVarSpec3)<-"mveEstimator"
setAlpha(CVarSpec3)<-0.01
setSolver(CVarSpec3)<-"solveRglpk"
CVarPortfolio3<-minriskPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVarSpec3,
constraints="LongOnly")
CVarPortfolio3

CVarSpec3<-portfolioSpec()
setType(CVarSpec3)<-"Cvar"

```

```

setEstimator(CVaRSpec3)<-"covOGKEstimator"
setAlpha(CVaRSpec3)<-0.01
setSolver(CVaRSpec3)<-"solveRglpk"
CVaRPortfolio3<-minriskPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec3,
constraints="LongOnly")
CVaRPortfolio3

CVaRSpec3<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec3)<-"Cvar"
setEstimator(CVaRSpec3)<-"shrinkEstimator"
setAlpha(CVaRSpec3)<-0.01
setSolver(CVaRSpec3)<-"solveRglpk"
CVaRPortfolio3<-minriskPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec3,
constraints="LongOnly")
CVaRPortfolio3

CVaRSpec<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec)<-"Cvar"
setAlpha(CVaRSpec)<-0.01
setSolver(CVaRSpec)<-"solveRglpk"
setTargetReturn(CVaRSpec)<-getTargetReturn(ewPortfolio@portfolio)["mean"]
CVaRPortfolio<-efficientPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec,
constraints="LongOnly")
print(CVaRPortfolio)

cvarFrontier<-portfolioFrontier(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec,
constraints="LongOnly")
tailoredFrontierPlot(cvarFrontier,mText="CVaR portfelis",risk="CVaR")

CVaRSpec4<-portfolioSpec()
setType(CVaRSpec4)<-"Cvar"
setAlpha(CVaRSpec4)<-0.05
setSolver(CVaRSpec4)<-"solveRglpk"
setTargetReturn(CVaRSpec4)<-2
CVaRPortfolio4<-maxreturnPortfolio(data=pelno_norma,spec=CVaRSpec4,
constraints="LongOnly")
CVaRPortfolio4

effecientStrategy<-function (data, spec = portfolioSpec(),
constraints = "LongOnly", backtest = portfolioBacktest())
{strategyPortfolio <- efficientPortfolio(data, spec, constraints)
strategyPortfolio}
effecientStrategy(pelno_norma, CVaReffSpec, "LongOnly",portfolioBacktest())

CData<-BData
CSpec<-portfolioSpec()
setType(CSpec)<-"CVaR"
setSolver(CSpec)<-"solveRglpk"

```

```

CConstraints<-"LongOnly"
CBacktest<-portfolioBacktest()
setStrategyFun(CBacktest)<-"efficientStrategy"
setWindowsHorizon(CBacktest)="24m"
CFormula<-INDX ~ AMZN + AAPL + CROX + EBAY + WFM + GOOG + HITK + MSFT +
MDLZ + BBRY

CPortfolios<-portfolioBacktesting (formula=CFormula, data=CData,
spec=CVaReffSpec,constraints=CConstraints,backtest=CBacktest,
trace=FALSE)

setSmootherLambda(CBacktest)<-"12m"
CSmoothPortfolios<-portfolioSmoothing(object=CPortfolios,backtest=CBacktest,
trace=FALSE)
backtestPlot(CSmoothPortfolios,cex=0.9, font=1,family="mono")

netPerformance(CSmoothPortfolios)
backtestPlot(CSmoothPortfolios, cex=0.9, font=1,family="mono")

CData<-BData
CSpec<-portfolioSpec()
setType(CSpec)<-"CVaR"
setSolver(CSpec)<-"solveRglpk"

CConstraints<-"LongOnly"
CBacktest<-portfolioBacktest()
setWindowsHorizon(CBacktest)="24m"
CFormula<-INDX ~ AMZN + AAPL + CROX + EBAY + WFM + GOOG + HITK + MSFT +
MDLZ + BBRY

CPortfolios<-portfolioBacktesting (formula=CFormula, data=CData,
spec=CSpec,constraints=CConstraints,backtest=CBacktest,
trace=FALSE)

setSmootherLambda(CBacktest)<-"12m"
CSmoothPortfolios<-portfolioSmoothing(object=CPortfolios,backtest=CBacktest,
trace=FALSE)
backtestPlot(CSmoothPortfolios,cex=0.9, font=1,family="mono")

netPerformance(CSmoothPortfolios)
backtestPlot(CSmoothPortfolios, cex=0.9, font=1,family="mono")

minriskStrategy<-function (data, spec = portfolioSpec(),
constraints = "LongOnly",
      backtest = portfolioBacktest())
{
  strategyPortfolio <- minriskPortfolio(data, spec, constraints)
  strategyPortfolio}
minriskStrategy(pelno_norma, CVaRSpec3, "LongOnly",portfolioBacktest())

```

```

CData<-BData
CSpec<-portfolioSpec()
setType(CSpec)<-"CVaR"
setSolver(CSpec)<-"solveRglpk"

CConstraints<-"LongOnly"
CBacktest<-portfolioBacktest()
setStrategyFun(CBacktest)<-"minriskStrategy"
setWindowsHorizon(CBacktest)="24m"
CFormula<-INDX ~ AMZN + AAPL + CROX + EBAY + WFM + GOOG + HITK + MSFT +
MDLZ + BBRY

CPortfolios<-portfolioBacktesting (formula=CFormula, data=CData,
spec=CVaRSpec3,constraints=CConstraints,backtest=CBacktest,
trace=FALSE)

setSmootherLambda(CBacktest)<-"12m"
CSmoothPortfolios<-portfolioSmoothing(object=CPortfolios,backtest=CBacktest,
trace=FALSE)
backtestPlot(CSmoothPortfolios,cex=0.9, font=1,family="mono")

netPerformance(CSmoothPortfolios)
backtestPlot(CSmoothPortfolios, cex=0.9, font=1,family="mono")

```