



VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
STATYBOS FAKULTETAS
STATYBOS TECHNOLOGIJOS IR VADYBOS KATEDRA

Simonas Malakas

**RESURSŲ POREIKIO ATSKIRIEMS STATYBOS
ETAPAMS ANALIZĖ
NEED OF RESOURCES ANALYSIS FOR
SEPARATE BUILDING STAGES**

Baigiamasis magistro darbas

Statybos valdymo studijų programa, valstybinis kodas 62102T112

Statybos technologijos ir vadybos specializacija

Statybos inžinerijos mokslo studijų kryptis

Vilnius, 2007

Vilniaus Gedimino technikos universitetas
Statybos fakultetas
Statybos technologijos ir vadybos katedra

Magistro baigiamasis darbas

RESURSŲ POREIKIO ATSKIRIEMS STATYBOS ETAPAMS ANALIZĖ

Simonas Malakas

Kalba: lietuvių

ANOTACIJA

Baigiamojo darbo tikslas – gyvenamosios statybos pavyzdžiu matematiškai apibrėžti resursų poreikio piniginėmis lėšomis priklausomybę nuo statybos stadijos.

Nagrinėjamas objektas – Vilniaus mieste pastatyti daugiabučiai namai nuo 2004 iki 2007 metų. Analizei yra paimta 16 daugiabučių namų finansinių grafikų duomenys.

Resursų poreikio atskiriems statybos etapams analizė yra atliekama taikant regresinę analizę.

Baigiamąjį darbą sudaro tokios dalys: lentelių sąrašas, poveikslų sąrašas, turinys, įvadas, resursų poreikio atskiriems statybos etapams atliktų tyrimų apžvalga, regresinė analizė, duomenys skaičiavimams, resursų poreikio atskiriems statybos etapams analizė, metodikos praktinio taikymo uždavinys, išvados, literatūros sąrašas, 9 priedai. Darbo apimtis – 65 psl., 26 paveikslai, 15 lentelių.

Vilnius Gediminas Technical University
Faculty of Civil Engineering
Department of Construction Technology and Management

Final work for Master Degree

NEED OF RESOURCES ANALYSIS FOR SEPARATE BUILDING STAGES

Simonas Malakas

Language: English

SUMMARY

The objective of the final work is to identify resource needs in terms of money for separate building (private housing) stages.

The object under the research is blocks of flats built in Vilnius during the period 2004 – 2007. Financial graphics data of 16 blocks of flats is analysed.

Need of resources analyses for separate building stages is carried out by applying regressive analysis.

The final work consists of list of tables, pictures, content, introduction, need of resources for separate building stages research review, regressive analysis, calculation for data, resource analysis, practical activities, conclusions, list of literature, 9 attachments. The amount of work is 62 pages, 26 pictures and 15 tables.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS.....	5
PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS.....	6
ĮVADAS.....	7
1. RESURSŲ POREIKIO ATSKIRIEMS STATYBOS ETAPAMS ATLIKTŲ TYRIMŲ APŽVALGA.....	8
2. REGRESINĖ ANALIZĖ.....	10
2. 1. Įvadas į koreliacinę regresinę analizę.....	10
2.1.1. Ryšių rūšys ir formos.....	10
2.1.2. Koreliacinio ryšio tyrimo būdai.....	12
2. 2. Regresinės analizės metodai.....	12
2. 2. 1. Regresijos bendras supratimas.....	14
2. 2. 2. Porinė regresija.....	19
2. 2. 3. Dauginė regresija.....	21
2. 2. 4. Matriciniai skaičiavimai regresinėje analizėje.....	23
2. 3. Ryšio glaudumo rodikliai.....	24
2. 3. 1. Koreliacinio ryšio glaudumo rodikliai.....	24
2. 3. 2. Neparametriniai ryšio glaudumo rodikliai.....	27
2. 4. Regresijos algoritmo sudarymas.....	30
2. 4. 1. Viena faktoris algoritmas.....	31
2. 4. 2. Daugiafaktoris algoritmas.....	34
2. 5. Koreliacinės regresinės analizės aprašymas taikant kompiuterines programas.....	38
2. 5. 1. Koreliacinė regresinė analizė Exceliu.....	38
2. 5. 2. Koreliacinė regresinė analizė taikant Maple.....	39
3. DUOMENYS SKAIČIAVIMAMS.....	41
4. RESURSŲ POREIKIO ATSKIRIEMS STATYBOS ETAPAMS ANALIZĖ.....	47
4. 1. Empirinė regresijos linija.....	47
4. 2. Analitinė ryšio išraiška.....	50
5. METODIKOS PRAKTINIO TAIKYMO UŽDAVINYS.....	56
6. IŠVADOS.....	61
LITERATŪRA.....	62
PRIEDAI.....	65

LENTELIŲ SĄRAŠAS

1 lentelė. Netiesinių funkcijų bei jų transformacijas atitinkančių funkcijų tiesiniai atitikmenys...	18
2 lentelė. Matematinų priklausomybių išraiškos ir normalinių lygčių sistemos.....	18
3 lentelė. Koreliacijos koeficientų interpretacija.....	25
4 lentelė. Rodiklių skaičiavimas.....	28
5 lentelė. Apipusio jungumo koeficiento apskaičiavimas.....	28
6 lentelė. Nuokrypių kvadratų vidutinės vertės skaičiavimas.....	33
7 lentelė. Nagrinėjamų objektų lėšų paskirstymas į statybos etapus procentaliai.....	47
8 lentelė. Statybos etapų standartinės paklaidos.....	49
9 lentelė. Teorinių lėšų pasiskirstymas statybos etapuose	51
10 lentelė. Analitinio ryšio statybos etapų standartinės paklaidos.....	54
11 lentelė. Empirinio ir analitinio ryšio etapų standartinių paklaidų palyginimas.....	55
12 lentelė. Lėšų pasiskirstymas pagal statybos etapų procentus	56
13 lentelė. Prokuratūros lėšų pasiskirstymo standartinės paklaidos litais.....	57
14 lentelė. Prokuratūros statybos etapų išlaidų poreikis litais.....	58
15 lentelė. Lietuvos prokuratūros rūmų mėnesinis lėšų pasiskirstymas.....	59

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1 pav. Kaštų ir darbo jėgos poreikio pokyčiai.....	8
2 pav. Įvairios koreliacinio ryšio formos.....	13
3 pav. Vienfaktorio regresijos modelio sudarymo struktūrinė schema.....	32
4 pav. Daugiafaktorio regresijos modelio sudarymo struktūrinė schema.....	36
5 pav. Statybos darbų klasifikacija.....	42
6 pav. Sėlių g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas.....	43
7 pav. Verkių g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas.....	43
8 pav. Taikos g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas.....	43
9 pav. Žygio g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas.....	44
10 pav. Lazdinėlių g. 1 namo mėnesinis lėšų pasiskirstymas.....	44
11 pav. Lazdinėlių g. 2 namo mėnesinis lėšų pasiskirstymas.....	44
12 pav. Justiniškių g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas	45
13 pav. Karaliaučiaus g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas.....	45
14 pav. Ukmergės g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas.....	45
15 pav. Gineitiškės objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas.....	46
16 pav. Visų nagrinėjamų objektų grafikas su nustatytu vidutiniu grafiku.....	48
17 pav. Lėšų poreikis, reikalingas statybos etapams.....	48
18 pav. Statybos etapų standartinių paklaidų grafikas.....	50
19 pav. Teorinių lėšų pasiskirstymo statybos etapuose grafikas.....	51
20 pav. Empirinio ir analitinio ryšio statybos etapų palyginimas.....	52
21 pav. Analitinio ryšio statybos etapų standartinių paklaidų grafikas.....	54
22 pav. Empirinio ir analitinio ryšio etapų standartinių paklaidų palyginimo grafikas.....	55
23 pav. Prokuratūros lėšų pasiskirstymas pagal statybos etapų procentus.....	56
24 pav. Prokuratūros lėšų standartinės paklaidos statybos etapams.....	57
25 pav. Prokuratūros statybos etapų išlaidų poreikio grafikas.....	59
26 pav. Lietuvos prokuratūros rūmų mėnesinio lėšų pasiskirstymo grafikas.....	60

IVADAS

Šiuo metu Lietuvoje yra labai išsivysčiusi bei spartų įgavusi augimo tempą statyba. Vis dažniau vertinant nekilnojamąjį turtą naudojama statistinė analizė.

Vienas svarbiausių statistikos uždavinių yra ryšių tarp reiškinių tyrimas. Vertinant statybas bei atliekant resursų poreikio analizę, galima taikyti įvairius matematinės statistikos metodus. Matematinė statistika galima nagrinėti įvairių objektų charakteristikų ryšius ir jų intensyvumus (priklausomybes). Statistika orientuojasi į kiekybinį ryšio įvertinimą, sprendžiamą, koks ryšio stiprumas, kokia jo kryptis, kokį metodą taikyti ryšiui įvertinti bei kaip jį taikyti.

Darbe nagrinėjami naujos statybos daugiabučiai Vilniuje. Pagrindinė šio darbo dalis – analizei reikalingų patikimų ir kuo tikslesnių duomenų ir informacijos surinkimas, kaupimas bei analizė. Visi duomenys yra surinkti iš statybos įmonių bei internetinių svetainių.

Baigiamojo darbo tikslas – gyvenamosios statybos pavyzdžiu matematiškai apibrėžti resursų poreikio piniginėmis lėšomis priklausomybę nuo statybos stadijos.

Nagrinėjamas objektas – Vilniaus mieste pastatyti daugiabučiai namai nuo 2004 iki 2007 metų. Yra pateikta 16 daugiabučių namų, kuriuos statė gerai žinomos Lietuvoje statybos įmonės.

Baigiamojo darbo analizė yra atliekama regresinės analizės pagalba.

Pirmoje dalyje yra pateikta resursų poreikio atskiriems statybos etapams atliktų darbų apžvalga.

Antroje dalyje yra pristatoma regresinės – koreliacinės analizės teorija.

Trečioje dalyje yra pateikiami resursai, kokie jie yra, statybos darbų klasifikacija etapuose bei nagrinėjami objektai.

Ketvirtoje dalyje yra atliekama analizė. Analizuojami visi objektai. Nustatoma empirinė regresijos linija pagal nagrinėjamus objektus. Nustatoma analitinė ryšio išraiška ir palyginamos jos tarpusavyje.

Penktoje dalyje yra atliekamas metodikos praktinio taikymo uždavinys. Metodikos pritaikymui pasirinkti dabar statomi Lietuvos prokuratūros rūmai.

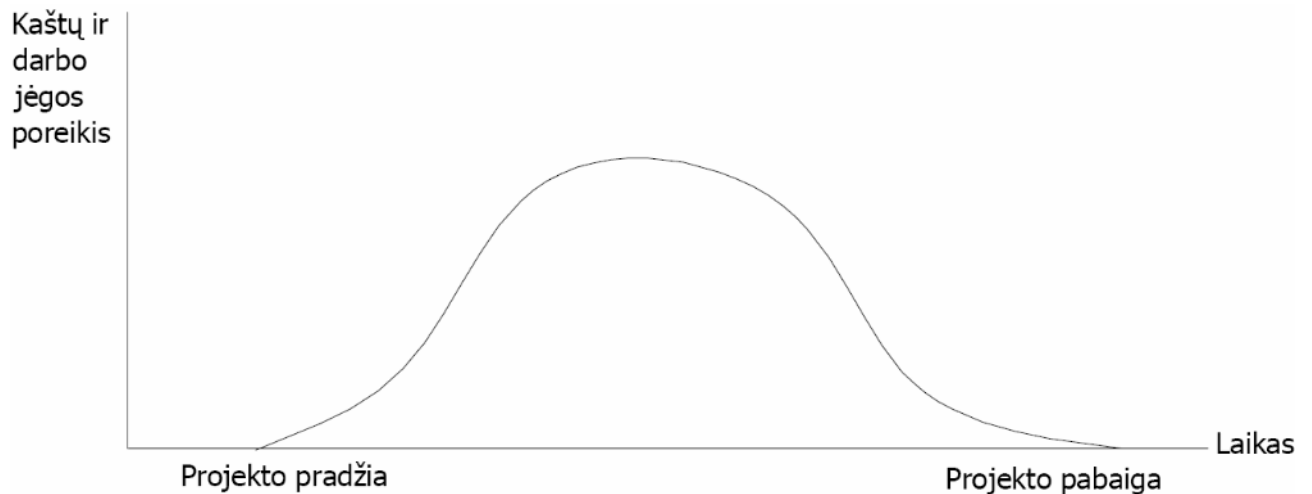
Paskutinėje dalyje yra pristatomos baigiamajame darbe gautų rezultatų išvados.

Analizė yra atlikta daugiabučiams namams, taip pat ją galima taikyti ir visuomeniniams pastatams.

1. RESURSŲ POREIKIO ATSKIRIEMS STATYBOS ETAPAMS ATLIKTŲ TYRIMŲ APŽVALGA

Statyboje resursų poreikio priklausomybė nuo statybos stadijos nėra nauja tema. Šią temą nagrinėjo daug autorių. Būtų galima paminėti: Frank Harris, Ronald McCaffer, Dennis Lock, atstovaujančią Kembridžo universitetą, Projektų vadybos institutą, Didžiosios Britanijos statybininkų asociacijos institutą (CIOB) ir daugelį kitų autorių bei institucijų [8, 19].

Apibendrinant minėtus autorius bei institucijas, galima pastebėti, kad daugumas iš jų pastebi, jog resursų poreikis su statybos trukme siejamas priklausomybe panašia į normaliojo pasiskirstymo funkciją. Frank Harris ir Ronald McCaffer savo knygoje “Modern Construction Management” analizuoja darbo jėgos ir kaštų priklausomybę nuo trukmės. Reikalinga darbo jėga ir kaštų poreikis keičiasi projekto pradžioje, įpusėjus ir artėjant pabaigai. Pradžioje darbo jėgos ir kaštų poreikis nedidelis. Įpusėjus projektui, darbo jėgos ir kaštų poreikis būna didžiausias. Baigiantis projektui, darbo jėgos ir kaštų poreikis mažėja [8]. Tai matyt pateiktame 1 paveiksle. Panašias priklausomybes pateikia ir CIOB bei JAV projektų vadybos institutas. Apie tai rašoma ir R.Tamošaičio knygoje “Projektų vadybos metodiniai nurodymai”[30].



1 pav. Kaštų ir darbo jėgos poreikio pokyčiai.

Tačiau, nei vienas autorius analizavęs resursų poreikį nėra bandęs pateikiamas grafines išraiškas apibrėžti matematiškai. Tai ir buvo pabandyta atlikti šiame darbe.

Kai kurie autoriai [2, 4, 9, 21, 24, 25, 27, 33] resursų poreikį bandė susieti su keliais faktoriais, pavyzdžiui, darbo jėgos, medžiagų, mechanizmų poreikiu ir t.t., tačiau ankstyvojoje planavimo stadijoje, kol nėra paskelbtas rangos konkursas dauguma iš minėtų faktorių nėra žinomi. Kadangi darbas orientuotas į lėšų poreikio atskiriems statybos etapams nustatymą ankstyvojoje pasirengimo statybai stadijoje, vertinti šiuos faktorius kaip atskirai veikiančius faktorius šiame darbe buvo atsisakyta.

2. REGRESINĖ ANALIZĖ

2. 1. ĮVADAS Į KORELIACINĘ REGRESINĘ ANALIZĘ

Daugelyje praktinių uždavinių, kuriuose naudojami vykstančių procesų kiekybiniai rodikliai, svarbu, kaip jie veikia vieni kitus. Tie ryšiai tarp kintamųjų gali egzistuoti iš tikrųjų ar būti tik įtariami. Tokiu ryšiu gali būti paprastas funkcinis ryšys, kai kiekvienai nepriklausomo kintamojo reikšmei galima vienareikšmiškai nurodyti priklausomo kintamojo (funkcijos) reikšmę.

Vienas iš svarbiausių statistikos uždavinių yra ryšių tarp reiškinių tyrimas. Tai sąlygoja visuotinis reiškinių sąryšis, kaip bendriausias dėsningumas. Be to, reiškinių sąveika sąlygoja patį konkrečių objektų egzistavimą, visas specifines jų ypatybes. Tam tikrų tipų reiškinius galima pažinti tik nustačius jų ryšius su kitais. Todėl statistika negali apsiriboti atskirų reiškinių tyrinėjimu izoliuotai nuo kitų [16].

Gamtos ir visuomenės reiškinių bei procesų ryšiai labai įvairūs ir sudėtingi. Pavyzdžiui, gaminių produkcija priklauso nuo medžiagų kokybės, darbininkų kvalifikacijos, darbo kokybės ir daugelio kitų tyrinėtojų žinomų ir nežinomų veiksnių. Kyla klausimas, kokia kiekvieno veiksnio įtaka?

Tiriant ryšius, vieni požymiai yra faktoriniai, kiti rezultatiniai. Tie požymiai, kurie sąlygoja kitų požymių reikšmes, yra vadinami faktoriniais (x), o priklausantys nuo pirmųjų – rezultatinais (y). Minėtame pavyzdyje produkcija yra rezultatinis požymis (y), o visi kiti – faktoriniai ($x_1, x_2, \dots, x_n$). Pažymėtina, kad vienu atveju tas pats požymis yra rezultatinis, o kitais – gali būti faktorinis.

2. 1. 1. RYŠIŲ RŪŠYS IR FORMOS

Nagrinėjant reiškinių ryšius, galima pastebėti, kad jie yra dviejų tipų: funkciniai ir koreliaciniai.

Funkciniu, arba determinuotu, vadinamas ryšys, kai kiekvieną faktorinio požymio reikšmę (jų kompleksą) atitinka visiškai apibrėžta rezultatinio požymio reikšmė. Žinant tikslų patalpos ilgį, plotį, aukštį, galima apskaičiuoti jos tūrį; žinant darbo laiko sąnaudų produkcijos vienetui pagaminti pakitimą, galima apskaičiuoti darbo našumo pakitimo laipsnį. Funkcinis ryšys paprastai reiškia, kad reiškinys nėra sudėtingas ir jis apibrėžtas bei gerai žinomas [22].

Koreliaciniu vadinamas ryšys, kai faktorinio požymio reikšmių kitimas veikia tik rezultatinio požymio vidutines reikšmes. Stebint statistinės visumos vienetus, tai pačiai faktorinio požymio reikšmei randamos įvairios rezultatinio požymio reikšmės. Taip yra todėl, kad

rezultatinio požymio dydį, be faktorinio, sąlygoja daugybė kitų veiksnių, kurių įtakos negalima izoliuoti (jie gali būti nežinomi). Todėl koreliacinis ryšys išryškėja tik masiniuose stebėjimuose.

Koreliacinis ryšys dar vadinamas stochastiniu, arba statistiniu – tai ryšis, kuris pasireiškia kaip priklausomybė tarp atsistiktinių dydžių taip, jog vieno dydžio pokytis veikia kito dydžio paskirstymą [1].

Stochastinio (statistinio) ryšio samprata remiasi tikimybinės reiškinių prigimties aiškinimu, o šitoks tikrovės pažinimo būdas iš esmės atitinka masinio sudėtingo reiškinio vyksmą – kiekvienas paskiras faktas traktuojamas kaip griežtai neapibrėžtas, tikimybinis; tik iš tokių faktų išryškėja tam tikra tvarka, dėsningumas.

Stochastinio tipo ryšiams reikšti paplitusios koreliacijos (atsakant į klausimą, ar yra ryšys tarp požymių, kokia jo kryptis ir stiprumas) ir regresijos (konkretizuojant ryšio formą) sąvokos.

Esant požymių koreliacinei priklausomybei, tyrimo metu sprendžiami šie uždaviniai [16]:

- a) nustatomas koreliacinio ryšio buvimo faktas;
- b) nustatoma ryšio kryptis ir forma, t.y. apibūdinamas jo pobūdis;
- c) kiekybiškai išreiškiamas ryšys, t.y. nustatoma ryšio lygtis, kuri apibūdina faktorinio požymio reikšmių ir rezultatinio požymio vidurkių tarpusavio santykį;
- d) nustatomas ryšio glaudumas, kuris parodo rezultatinio ir faktorinio požymio variacijos priklausomybės laipsnį.

Taigi apibendrinus naujus masinius faktus, statistika ne tik konstatuoja ryšio egzistavimą, bet ir kiekybiškai jį išreiškia. Atskleidus pagrindinius reiškinių arba procesą formuojančius veiksnius, galima numatyti konkrečias priemones jį nukreipti norima linkme. Koreliaciniai ryšiai kartais dar vadinami priežasties (padarinio) arba tiesiog priežastiniais ryšiais. Koreliacinius ryšius tiriant koreliaciniais – regresiniais metodais, turi būti patenkinta keletas svarbių sąlygų [1]:

- a) visuma, kurios požymių tarpusavio ryšiai yra tiriami, turi būti kokybiškai vienerūšė.
- b) turi būti pakankamai didelis nepriklausomų stebėjimų skaičius, kadangi dėsningumų atskleidimas pagristas didžiųjų skaičių dėsniu;
- c) iš daugybės veiksnių reikia atrinkti pagrindinius, kurie sąlygoja didžiąją dalį rezultatinio požymio reikšmių variacijos;
- d) šie požymiai negali būti tarpusavyje priklausomi;
- e) požymių, kurių tarpusavio ryšiai tiriami, reikšmės turi būti pasiskirsčiusios normaliai;
- f) visos gautos išvados turi būti logiškai paaiškintos, turėti ekonominę prasmę.

Šios sąlygos ne visada visiškai patenkinamos. Tokiais atvejais reikia atitinkamai paaiškinti gautus rezultatus.

Ryšiai gali būti tiesioginiai ir atvirkštiniai.

Tiesioginiais ryšiais vadiname tokius ryšius, kai susijusių požymių reikšmės kinta ta pačia kryptimi. Pavyzdžiui, didėjant darbininko darbo stažui, didėja jo kvalifikacija.

Atvirkštiniais ryšiais vadiname tokius ryšius, kai požymių reikšmės kinta priešingomis kryptimis, t. y. didesnes faktorinio požymio reikšmes atitinka mažesnės rezultatinio požymio reikšmės. Pavyzdžiui, didėjant parduotuvės prekių apyvartai, mažėja cirkuliacijos išlaidos.

Be to, yra tiesiniai ir kreiviniai ryšiai.

Tiesinio ryšio atveju rezultatinio požymio reikšmės kinta tolygiai. Pavyzdžiui, didėjant pagrindinių gamybinių fondų apimčiai, esant kitoms gamybos sąlygoms nekintamoms, produkcijos apimtis didėja tolygiai visame jos variacijos intervale. Toks ryšys išreiškiamas tiese:

$$y_x = a_0 + a_1 x. \quad (1)$$

Esant kreiviniam ryšiui, rezultatinio požymio reikšmių kitimas netolygus. Tokio pobūdžio ryšį galima išreikšti antro laipsnio parabole:

$$y_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \quad (2)$$

Socialinių ekonominių reiškinių ryšiai dažnai turi:

- hiperbolės (3) (ryšys tarp gamybos apimties ir vieno gaminio savikainos);

$$y_x = a_0 + a_1 \cdot 1/x; \quad (3)$$

- rodiklinės (4) (ryšys tarp įrenginių amžiaus ir išlaidų jų remontui);

$$y_x = a_0 a_1 x; \quad (4)$$

- ir kitų matematinių funkcijų formą.

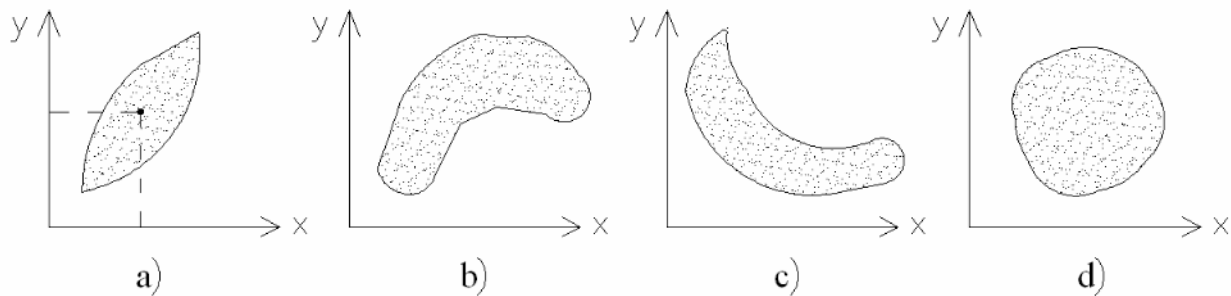
Ryšio formos nustatymas yra vienas iš atsakingiausių koreliacinės analizės uždavinių.

2. 1. 2. KORELIACINIO RYŠIO TYRIMO BŪDAI

Pradiniame tyrimo etape, kai, atlikus ekonominę analizę, konstatuota, kad ryšys tarp atskirų reiškinių yra galimas, taikomi elementarūs būdai, kurie duoda bendriausią informaciją apie jį. Dažniausiai apsiribojama porine koreliacija (dviejų požymių ryšys). Vienas iš paprasčiausių ryšio nustatymo būdų yra eilučių sugretinimas. Tam tikslui visumos vienetai išdėstomi didėjančia tvarka pagal faktorinio požymio reikšmes, o tai leidžia stebėti rezultatinio požymio reikšmių tvarką (dėsningas kitimas ar ne). Eilučių sugretinimas leidžia nustatyti ryšį ir jo kryptį [16].

Kai reikia nustatyti kelių faktorinių požymių įtaką, tai rezultatinio požymio reikšmės išdėstomos didėjančia (mažėjančia) tvarka.

Dažnai, tiriant dviejų požymių ryšius, taikomas grafinis metodas. Koordinačių sistemoje pagal stebėjimo duomenis nustatomi taškai, t. y. abscisių ašyje atidedamos faktorinio požymio, o ordinačių – rezultatinio požymio reikšmės. Tokiu būdu gaunamas vadinamasis koreliacijos laukas, pateiktas 2 paveiksle.



2 pav. Įvairios koreliacinio ryšio formos [16]:

a) tiesinis ryšys, b) parabolė, c) hiperbolė, d) ryšio nėra

Grafiniu metodu vaizduojamas ryšio egzistavimas, jo kryptis ir forma. Be to, kuo koreliacijos laukas glaustesnis (atskiroms x reikšmėms mažesnė y variacija), tuo glaustesnis ryšys tarp x ir y . Kita vertus, kuo didesnis taškų išsibarstymas koreliacijos lauke, tuo sunkiau nustatyti ryšio formą. Be to, ryšį galima nustatyti vietoj atskirų y reikšmių koordinačių sistemoje atidėjus rezultatinio požymio grupinius vidurkius, kitaip tariant, grafiškai vaizduojant analitinio grupavimo rezultatus. Grupės pagal faktorinį požymį apibūdinant rezultatinio požymio vidurkiais, atsitiktinių veiksnių įtaka pasinaikina ir ryšys tampa ryškesnis. Jeigu ryšio nėra, tai, didėjant faktorinio požymio reikšmėms, rezultatinio požymio grupiniai vidurkiai kinta be jokios tvarkos arba yra beveik vienodi.

Pažymėtina, kad lemiamas vaidmuo, pagrindžiant požymių ryšius bei nustatant jų formą, tenka ekonominei teorijai. Ji turi duoti atsakymą į tai, ar ryšys teoriškai yra galimas.

2. 2. REGRESINĖS ANALIZĖS METODAI

Reikia pabrėžti, kad ši tematika labai dažnai traktuojama kaip atskira matematinė disciplina, nesiejant jos su matematine statistika. Daugiau akcentuojamas taikymas nekreipiant dėmesio į tų taikymų galimumą ir prasmę.

2. 2. 1. REGRESIJOS BENDRAS SUPRATIMAS

Norint suprasti ir išsiaiškinti procesų ir reiškinių esmę, reikia ištirti jų ryšius su kitais procesais ir reiškiniais. Pirmiausia iškyla klausimas apie priežastis, sąlygojančias konkretų procesų ar reiškinių vyksmą. Pavyzdžiui, savikainai turi įtakos gamybos apimtis, technologijų lygis, darbo našumas. Savo ruožtu darbo našumą sąlygoja naudojama technika, darbuotojų kvalifikacija, mokslinio darbo organizavimo priemonės. Taigi kas daro lemiamą įtaką savikainai?

Tai pagrindinis klausimas, į kurį ir turėtų atsakyti koreliacinė ir regresinė analizė.

Skiriami du priklausomybės tipai – funkcinė ir statistinė. Funkcinę vieno kintamojo priklausomybę įprasta žymėti $y = f(x)$ ir suprasti kaip taisyklę, pagal kurią kiekvienai nepriklausomo kintamojo x reikšmei yra priskiriama tik viena priklausomo kintamojo y reikšmė.

Yra daug situacijų, kai išvardyti visus faktorius, nuo kurių priklauso tiriamas kintamasis, neįmanoma. Tokiu atveju įprasta išskirti tik pagrindinius faktorius, darančius įtaką nagrinėjamam kintamajam, neatsižvelgiant į mažiau reikšmingus. Priklausomybė nuo keleto išskirtų faktorių vadinama statistine. Jei $y = f(x, x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ pažymėtume bendrą y priklausomybę, tai $y = f(x)$ reikštų statistinę y priklausomybę nuo x . Šiuo atveju vieną nepriklausomo kintamojo x reikšmę atitinka daug priklausomo kintamojo y reikšmių. Taigi juntamas neįtrauktų į priklausomybę faktorių veikimas. Todėl priklausomas kintamasis y fiksuotai x reikšmei interpretuotinas kaip atsitiktinis dydis [16].

Koreliacijos ir regresijos istorija

Koreliacinės ir regresinės analizės sąvokų bei idėjų pradininku laikomas seras F. Golton, (1822 – 1911), o matematinę pagrindą joms suteikė K. Pearson (1857 – 1936). Regresijos sąvoka 1887 metais pirmasis pavartojo F. Golton. Pats terminas „regresija“ reiškia sugrįžimą. Jis pirmasis pavartojo terminą „regresija“ bei suformulavo regresinės analizės sąvoką. Per ilgesnę negu šimtas metų regresinės analizės teorijos raidą suformuluotas toks teiginys: regresinė priklausomybė kiekybiškai išreiškia ryšį tarp faktorinio požymio (požymių) ir rezultatinio požymio (požymių) grupinių vidutinių reikšmių naudojant vadinamąją empirinę regresijos liniją

arba regresijos lygtį [32].

Regresijos linija – tai linija, išreiškianti koreliacinio lauko taškų išsidėstymo tendenciją. Viena iš dažniausių regresijos lygties išraiškų tokia:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i; \quad (5)$$

čia: y_i – faktinės rezultatinio rodiklio reikšmės;

$f(x_i)$ – kokia nors matematinė funkcija;

ε_i – likutinis narys, neatitikimas tarp faktinės (y_i) ir teorinės ($\hat{y}_i$) reikšmių.

Koreliacinė analizė rodo tiesinio ryšio tarp kintamųjų stiprumą, o regresinė analizė nustato šio ryšio analizinę išraišką.

Regresinė analizė apibrėžia santykį, esantį tarp dviejų, vienas nuo kito priklausomų požymių taip, kad vieno požymio vertė, žinant kito požymio vertę, gali būti nusakyta su tam tikra tikimybe. Kitaip tariant, regresinė analizė yra metodas nustatyti funkcijai, nuo kurios atstumų kvadratai iki visos atrankinės imties statistinių duomenų sudaro minimumą.

Regresinėje analizėje gaunama regresijos lygtis. Tai yra matematinė formulė, siejanti vieną kintamąjį, vadinamą priklausomu kintamuoju y , su kitu – nepriklausomu kintamuoju. Po to, kai nustatyta regresijos lygtis, galima taikyti koreliacinę analizę kintamųjų ryšio stiprumui nustatyti. Abu kintamieji – priklausomas ir nepriklausomas – turi būti tolydūs dydžiai [1].

Regresijos lygtyje gali būti tik vienas priklausomas ir keli nepriklausomi kintamieji. Regresija – tai vienas pusė statistinė priklausomybė, kuri išreiškiama vadinamąją regresijos funkcija:

$$y = f(x); \quad (6)$$

čia: y – priklausantis dydis, pvz.: pastatyto namo savikaina;

x – nepriklausomi dydžiai, pvz.: medžiagos, technologija ir pan.

Yra skiriamos tokios regresijos rūšys [19]:

kintamųjų atžvilgiu

- o paprastoji (ryšys tarp dviejų kintamųjų),
- o grupinė (ryšys tarp keleto kintamųjų);

formos atžvilgiu

- o tiesinė,
- o netiesinė, arba kreivinė;

charakterio atžvilgiu

- o teigiama (didėjant x didėja y),

o neigiama (didėjant x mažėja y).

Formaliai regresijos funkcija nustato atitikimą tarp kintamųjų, nebūtinai susietų priežasties ar padarinio ryšiu. Regresija įvertina statistinio ryšio formą, o koreliacinė analizė – to ryšio stiprumą. Koreliacinė analizė padeda įvertinti statistinio ryšio $y = f(x_i)$ stiprumą ir kartu atrinkti faktorius, darančius didžiausią įtaką y priklausomybėje $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

2. 2. 2. PORINĖ REGRESIJA

Grafiškai vaizdavę faktorinio požymio reikšmių ir grupinių vidurkių ryšį, gauname vadinamąją empirinę regresijos liniją. Jos pagrindu galima nustatyti analitinę ryšio išraišką (matematinį modelį). Ją toliau vadinsime regresijos lygtimi.

Sudarant regresijos lygtį, neesminių priežasčių įtaka neįvertinama. Todėl koreliacinis ryšys lyg ir paverčiamas funkciniu.

Jeigu nagrinėjamas ryšys tarp dviejų požymių, tai regresijos lygtis vadinama porinės regresijos lygtimi. Taikant regresijos lygtį, sprendžiami šie uždaviniai [3]:

- ryšys charakterizuojamas atitinkama matematine funkcija, kuri išreiškia vienos arba kelių pagrindinių priežasčių (veiksnių) įtaką tiriamam reiškiniui;
- nustatomos rezultatinio požymio reikšmės priklausomai nuo vieno arba keleto veiksnių;
- galima įvertinti rezultatinio požymio lygį už stebėtos variacijos ribų.

Atsakingiausias regresinės analizės etapas yra funkcijos tipo išrinkimas. Matematinė funkcija turi atspindėti ryšio esmę.

Žinias apie ryšio formą duoda teorinė reiškinių analizė bei empiriniai metodai: eilučių sugretinimas, grupavimai, grafinis duomenų vaizdavimas.

Įvairiems reiškinių ryšiams aprašyti pirmiausia naudojamos šios matematinės funkcijos [16]:

- tiesė – $y_x = a_0 + a_1x$;
- antrojo laipsnio parabolė – $y_x = a_0 + a_1x + a_2x^2$;
- hiperbolė – $y_x = a_0 + a_1 \cdot 1/x$;
- laipsninė funkcija – $y_x = a_0x^{a_1}$;
- rodiklinė funkcija – $y_x = a_0a_1^x$.

Šių regresijos lygčių parametrai dažniausiai nustatomi mažiausių kvadratų metodu.

Pasirinkus kreivės tipą, parametrai surandami remiantis tokiu kriterijumi:

$$S = \sum (y - \hat{y}_x)^2 \rightarrow \min ; (7)$$

čia: y – faktinė rezultatinio požymio reikšmė;

$\hat{y}_x$ – teorinė reikšmė, išreiškianti veiksnio x įtaką.

Tiesinio ryšio atveju ($y_x = a_0 + a_1x$) šį kriterijų galima patenkinti sprendžiant normalinių lygčių sistemą [16]:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum x = \sum y \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 = \sum xy \end{cases}$$

čia: n — stebėjimų skaičius.

Tiesinės regresijos (ryšio) lygtį galima interpretuoti grafiškai. Tiesinės regresijos lygties prasmę atspindi jos grafikas.

Koeficientas a_1 yra vadinamas regresijos koeficientu. Jis parodo, keliais vienetais pasikeičia rezultatinis požymis faktoriniam požymiui pasikeitus vienetu.

Kai y ir x priklausomybė išreiškiama antrojo laipsnio parabolės lygtimi ($\hat{y}_x = a_0 + a_1x + a_2x^2$) jos parametrai skaičiuojami sprendžiant normalinių lygčių sistemą [16]:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 = \sum y \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 = \sum yx \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 = \sum yx^2 \end{cases}$$

Atliekant ekonominę analizę, dažnai taikoma hiperbolės lygtis, kai mažėjimas (didėjant faktorinio požymio reikšmėms) yra gėstantis. Šis ryšys išreiškiamas tokia lygtimi: $\hat{y}_x = a_0 + a_1 \cdot 1/x$. Jos parametrai apskaičiuojami sprendžiant normalinių lygčių sistemą [16]:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum \frac{1}{x} = \sum y \\ a_0 \sum \frac{1}{x} + a_1 \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{y}{x} \end{cases}$$

Be to, ryšiui išreikšti taikomos funkcijos: rodiklinė, laipsninė, logaritminė, logistinė ir kitos. 1 lentelėje yra pateikta netiesinių funkcijų bei jų transformacijas, duodančias nagrinėjamų funkcijų tiesinius atitikmenis, lentelė [28].

1 lentelė. Netiesinių funkcijų bei jų transformacijų atitinkančių funkcijų tiesiniai atitikmenys

Pavadinimas	Analizinė išraiška	Tiesinis atitikmuo
Laipsninė	$y = ax^b$	$\log y = \log a + b \log x$
Rodiklinė	$y = ab^x$	$\log y = \log a + x \log b$
Laipsninė rodiklinė	$y = ax^b \cdot c^x$	$\log y = \log a + b \log x + x \log c$
Ekologinė	$y = ae^{-b^2(x-c)^2}$	$\ln y = \ln a - b^2c^2 + 2b^2cx - b^2x^2$
Loginė	$y = \frac{a}{1 + be^{-cx}}$	$\ln\left(\frac{a}{y} - 1\right) = \ln b - cx$
Hiperbolinė	$y = \frac{1}{a + bx}$	$\frac{1}{y} = a + bx$
Trupmeninė racionalioji	$y = \frac{x}{a + bx + cX^2}$	$\frac{x}{y} = a + bx + cX^2$
Džonsono	$\log y = -\frac{a}{b+x} + c$	$\frac{1}{c - \log y} = \frac{b}{a} + \frac{1}{a}x$
Modifikuota eksponentinė	$y = ae^{bx}$	$\ln y = \ln a + bx$
Tornkvisto 1-ojo tipo	$y = \frac{ax}{b+x}$	$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x}$
Tornkvisto 2-ojo tipo	$y = \frac{a(x-b)}{c+x}$	$\frac{x-b}{y} = \frac{1}{a}x + \frac{c}{a}$
Tornkvisto 3-ojo tipo	$y = \frac{ax(x-b)}{c+x}$	$\frac{x-b}{y} = \frac{1}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{x}$

2 lentelėje yra pateiktos matematinių priklausomybių išraiškos ir normalinių lygčių sistemos, kurios dažniausiai naudojamos statybos procesų matematiniams modeliams sudaryti.

2 lentelė. Matematinių priklausomybių išraiškos ir normalinių lygčių sistemos [14]

Eil. Nr.	Funkcija	Normalinių lygčių sistemos
1.	$y = a_0 + a_1x$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$

2.	$y = a + bx$	$\begin{cases} an + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i y_i) \end{cases}$
3.	$\lg y = a + bx$	$\begin{cases} an + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \lg y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i \lg y_i) \end{cases}$
4.	$y = a + b \lg x$	$\begin{cases} an + b \sum_{i=1}^n \lg x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n \lg x_i + b \sum_{i=1}^n (\lg x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i \lg x_i) \end{cases}$
5.	$\lg y = a + b \lg x$	$\begin{cases} an + b \sum_{i=1}^n \lg x_i = \sum_{i=1}^n \lg y_i \\ a \sum_{i=1}^n \lg x_i + b \sum_{i=1}^n (\lg x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\lg x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\lg x_i \lg y_i) \end{cases}$
6.	$y = ab^x$ arba $\lg y = \lg a + \lg b$	$\begin{cases} n \lg a + \lg b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \lg y_i \\ \lg a \sum_{i=1}^n x_i + \lg b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (\lg x_i \lg y_i) \end{cases}$
7.	$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$	$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i) \end{cases}$
8.	$y = a + bx + c\sqrt{x}$	$\begin{cases} an + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^3} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + b \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^3} + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i y_i} \end{cases}$

9.	$y = ab^x c^{x^2}$ arba $\lg y = \lg a + x \lg b + x^2 \lg c$	$\begin{cases} n \lg a + \lg b \sum_{i=1}^n x_i + \lg c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \lg y_i \\ \lg a \sum_{i=1}^n x_i + \lg b \sum_{i=1}^n x_i^2 + \lg c \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n (x_i \lg y_i) \\ \lg a \sum_{i=1}^n x_i^2 + \lg b \sum_{i=1}^n x_i^3 + \lg c \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 \lg y_i) \end{cases}$
----	--	--

Gauta regresijos lygtis gali būti pritaikyta rezultatinio požymio reikšmėms nustatyti esant vienoms ar kitoms faktorinio požymio reikšmėms. Tiksliausius įvertinimus gausime tokioms faktorinio požymio reikšmėms, kurios artimos jų vidurkiui. Apskaičiuotos reikšmės bus tuo artimesnės faktinėms, kuo tobulesnė koreliacijos lygtis.

Ribinės ir standartinės paklaidos

Regresijos lygtis gaunama remiantis atrankos duomenimis. Todėl reikia nustatyti regresijos koeficientų paklaidas, o kartu ir jų ribas. Tai ypač aktualu esant mažam stebėjimų skaičiui.

Regresijos lygties koeficientų ribinės paklaidos apskaičiuojamos pagal tokias formules [16]:

$$\Delta_{a_1} = t \sqrt{\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_x^2(n-2)}} ; \quad (8)$$

$$\Delta_{a_0} = t \sqrt{\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{n-2}} ; \quad (9)$$

$$\Delta_{a_2} = t \sqrt{\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{x^2}^2(n-2)}} . \quad (10)$$

čia: t – patikimumo koeficientas, nustatomas pagal tikybės P reikšmę (kai $n \leq 20$, naudojamos Stiudento pasiskirstymo reikšmės);

σ_{ε}^2 – likutinė dispersija, kuri parodo atsitiktinių nukrypimų ($y - \hat{y}_x$) variaciją;

σ_x^2 – bendroji faktorinio požymio dispersija;

$\sigma_{x^2}^2$ – bendroji kvadratinė faktorinio požymio dispersija.

Rodiklis, atspindintis regresinės lygties tinkamumą, tai būtų standartinis nuokrypis nuo teorinės lygties.

Norint nustatyti skaičiavimų paklaidas reikia apskaičiuoti regresinės lygties kvadratinis

nuokrypius RSS [2]:

$$RSS = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2. \quad (11)$$

Taip pat ir suminius kvadratinius nuokrypius TSS [2]:

$$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2. \quad (12)$$

Likutiniai neišsiaiškinti standartiniai nuokrypiai SSR bus:

$$SSR = TSS - RSS. \quad (13)$$

Regresinio modelio standartinė paklaida skaičiuojama pagal tokia formulę [3]:

$$S = \sqrt{\frac{SSR}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-m-1}}; \quad (14)$$

čia: m – nežinomų argumentų skaičius;

n – stebimų objektų skaičius;

$y_i - \hat{y}_i$ – skirtumas tarp realios y ir teorinės y reikšmės.

Skaičiuojant matriciniu būdu, tiek modelio su laisvuju nariu, tiek modelio be laisvojo nario regresijos standartinės paklaidos nustatomos pagal šią formulę:

$$S_{bj} = s\sqrt{c_{jj}}; \quad (15)$$

čia: S_{bj} - j -ojo dalinio proceso standartinis nuokrypis,

s – atitinkamo regresinio modelio standartinė paklaida,

c_{jj} – regresinio modelio kvadratiniu nuokrypiu atvirkstinės matricos įstrižainės jj narys.

2. 2. 3. DAUGINĖ REGRESIJA

Porinės koreliacijos tyrimo metodai, tai didelis ryšių tyrimo suprastinimas. Tikrovėje ryšiai kur kas sudėtingesni. Juk kiekvienas reiškinyje priklauso nuo daugelio veiksnių, kurių įtaka būna labai įvairaus intensyvumo ir pobūdžio, todėl reikia ištirti rezultatinio požymio priklausomybę nuo keleto veiksnių. Dauginės regresijos lygtimi vadiname, kai ji išreiškia kelių veiksnių įtaką. Taigi taikome dauginės regresijos ir koreliacijos metodus. Šiuo atveju turi būti sprendžiami tokie uždaviniai [3]:

- o atrenkamas apibrėžtas esminių veiksnių skaičius;
- o nustatoma ryšio tarp rezultatinio ir keleto faktorinių požymių analitinė išraiška,

atspindinti ryšio dėsningumą;

- o išmatuojamas ryšio glaudumas.

Atrenkant esminius veiksnus dauginėi regresinei analizei, reikia remtis porinės koreliacijos tyrimo rezultatais. Paprastai atrenkami tie veiksniai, kurie labiausiai koreliuoja su rezultatinio požymiu. Tačiau to dar nepakanka todėl atliekant dauginę regresinę analizę, atmetami tarpusavyje glaudžiai susiję faktoriniai požymiai, taip yra išvengiama vadinamojo multikolinearumo (Kolineariais vadinami glaudžiai susiję faktoriniai požymiai. Multikolinearumas – kai tokių požymių yra tris ir daugiau.). Priešingu atveju ryšio glaudumo rodiklio reikšmė nenatūraliai, nepagrįstai padidinama. Faktoriniai požymiai laikomi kolineariais, jeigu jų tarpusavio koreliacijos koeficientas didesnis kaip 0,6 – 0,8. Paprastai yra atmetamas logiškai mažiau svarbus požymis arba tas, kuris mažiau koreliuoja su rezultatinio požymiu [16].

Sudarant dauginės regresijos lygtį, faktorinių požymių skaičius turi būti ribotas, kadangi labai padidėja skaičiavimo darbų apimtis, pasunkėja gautų rezultatų interpretacija.

Sudarant šią lygtį, svarbu nustatyti ryšio formą, kadangi atskiri veiksniai su rezultatinio požymiu koreliuoja įvairiai. Be to, tai dar nereiškia, kad, porinės regresijos atveju nustačius tiesinį ryšį, tiesinis jis liks ir dauginėje regresijoje, nes atskiri veiksniai, sąveikaudami su kitais, neretai pakeičia ryšio formą. Daug sudėtingiau apskaičiuoti dauginės regresijos lygties parametrus (ypač netiesiniu atveju). Be to, norint garantuoti tą patį išvadų patikimumą, reikia kur kas didesnio stebėjimų skaičiaus. Paprastai manoma, kad stebėjimų skaičius turi ne mažiau kaip aštuonis kartus būti didesnis už veiksmų skaičių [16]. Dažniausiai pasitaikanti ryšio forma yra tiesinė, kai rezultatinio rodiklio reikšmės kinta proporcingai faktorinio rodiklio reikšmių kitimui.

Bendru atveju, kai veiksmų skaičius lygus k , tiesinės dauginės regresijos lygtis turi tokį pavidalą:

$$\hat{y}_{1,2,...,k} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_kx_k. \quad (16)$$

Koeficientai a_i ($i = 1, 2, ..., k$) vadinami dalinės regresijos koeficientais. Koeficientas a_i parodo, keliais vienetais pakinta rezultatinis požymis faktoriniam požymiui pasikeitus vienetu, kai kitų požymių reikšmės nekinta.

Tiesinės dauginės regresijos lygties parametrai surandami mažiausių kvadratų metodu. Tikslų funkciją išreiškiama taip [12]:

$$S = \sum (y - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_kx_k))^2 \rightarrow \min. \quad (17)$$

Ši sąlyga patenkinama, kai regresijos lygties parametrai nustatomi sprendžiant šią

normalinių lygčių sistemą [16]:

[illegible]

Sistema sprendžiama keitimo, Kramerio, Dulitlo ir kitais metodais. Regresijos koeficientų interpretacija priklauso nuo faktorinių požymių išraiškos formos. Todėl atskirų veiksnių įtakos rezultatiniam požymiui palyginti naudojami dalinio elastingumo koeficientai (Ei) (tiesinio ryšio atveju):

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{a}_1 * \mathbf{x}_{i, \text{vid}} / \mathbf{y}_{\text{vid}}. \quad (18)$$

Elastingumo koeficientas parodo keliais procentais pasikeičia rezultatinio požymio reikšmė i-ojo faktorinio požymio reikšmei pakitus 1% ir esant fiksuotiems kitiems veiksniams.

2. 2. 4. MATRICINIAI SKAIČIAVIMAI REGRESINĖJE ANALIZĖJE

Tokiu atveju statinį modelį išreiškiant regresiniu palyginimu su keliomis kintamomis reikšmėmis, dauginės regresinės lygties parametrų įvertinimą geriausia atlikti matriciniu pavidalu.

Tiesinio modelio vektorinė išraiška yra tokia [3]:

$$Y = X^*Q + \varepsilon; \quad (19)$$

čia: $Y = (y_i), i=1, \dots, n$ – priklausomų kintamųjų vektoriaus reikšmės;

n – stebėjimų skaičius;

X – nepriklausomų kintamųjų reikšmių matrica;

Q – nežinomų parametru reikšmių koeficientai prie vektoriaus;

ε – stulpelio klaidų vektorius, kuris gaunamas nustatant teorines y reikšmes.

Taikydami mažiausių kvadratų metodą, gauname [7]:

$$\mathbf{X}^T * \mathbf{X} * \mathbf{Q} = \mathbf{X}^T * \mathbf{Y}; \quad (20)$$

čia: X^T – yra transponuota X matrica, o simetriška matrica X^T . X išreiškia suminius kvadratinus nuokrypius. Ši matrica dažnai vadinama informacine matrica.

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{X}^T * \mathbf{X})^{-1} * \mathbf{X}^T * \mathbf{Y}. \quad (21)$$

Skaičiavimams atlikti ypatingą reikšmę turi atvirkštinė suminių kvadratinų nuokrypių matrica C [3]:

$$C = (X^T * X)^{-1}; \quad (22)$$

čia: C – atvirkštinė suminių kvadratinių nuokrypių matrica.

Atliekant skaičiavimus, pasinaudojant šia formule priklausomybė tarp x ir y išreiškiama:

$$\hat{Y} = X \cdot Q. \quad (23)$$

2. 3. RYŠIO GLAUDUMO RODIKLIAI

Jeigu regresijos koeficientas parodo faktorinio požymio įtakos rezultatiniam požymiui lygį, tai ryšio laipsnį charakterizuoja ryšio g l a u d u m o rodikliai. Šie rodikliai parodo, kokią dalį rezultatinio požymio variacijos sąlygoja faktorinio požymio kitimas. Yra naudojami įvairūs ryšio glaudumo rodikliai.

2. 3. 1. KORELIACINIO RYŠIO GLAUDUMO RODIKLIAI

Koreliacijos indeksas (R_x). Jis vartojamas tada, kai žinoma regresijos lygtis ir pagal ją yra apskaičiuotos teorinės rezultatinio požymio reikšmės. Jis skaičiuojamas pagal tokią formulę:

$$R_x = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 - \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2}}. \quad (24)$$

Rodiklio pošaknis $(\sigma_y^2 - \sigma_\varepsilon^2) / \sigma_y^2$ vadinamas determinacijos koeficientu $((D_x^2)^2)$. Jis parodo, kokią dalį visos rezultatinio požymio variacijos nulemia faktorinis požymis $(\sigma_y^2 - (\sigma_\varepsilon)^2 = (\sigma_{yx})^2$ – faktorinė dispersija). Koreliacijos rodiklis įgyja reikšmes iš intervalo [0;1]. Kuo rodiklio reikšmė artimesnė vienetui, tuo ryšys glaudesnis, t.y. faktorinis požymis labiau sąlygoja rezultatinį. Kai yra funkcinis ryšys, $R_x = 1$ [28].

Šis rodiklis nustato ryšio glaudumą esant bet kuriai ryšio formai. Tačiau norint apskaičiuoti koreliacijos indeksą, reikia žinoti teorines rezultatinio požymio reikšmes ($\hat{y}_x$).

Regresijos modelio koreliacinis koeficientas skaičiuojamas pagal šią formulę [3]:

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}}; \quad (25)$$

Ryšio glaudumą galima įvertinti ir kitais rodikliais, kurių skaičiavimui teorinės rezultatinio požymio reikšmės nereikalingos. Vienas iš jų yra tiesinės koreliacijos koeficientas

(r). Jis skaičiuojamas taip [16]:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}; \quad (26)$$

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot \sum (y - \bar{y})^2}}. \quad (27)$$

Šis koeficientas apskaičiuojamas remiantis empiriniais duomenimis, todėl jis ir priskiriamas prie empiriniu ryšio glaudumo rodiklių.

Tiesinės koreliacijos koeficientas yra $-1 \leq r \leq 1$. Be to, tiesinės koreliacijos koeficiento ženklas sutampa su regresijos koeficiento (a_1) ženklu, kuris rodo ryšio kryptį („ + “ tiesioginis ryšys, „ — “ atvirkštinis). Kuo $|r| \rightarrow 1$, tuo ryšys glaudesnis. 3 lentelėje yra pateikta koreliacijos koeficientų interpretacija.

3 lentelė. Koreliacijos koeficientų interpretacija [20]

Koreliacijos koeficiento vertė	Koreliacijos koeficientų interpretacija
Iki 0,2	Labai silpna koreliacija
Iki 0,5	Silpna koreliacija
Iki 0,7	Pakankama koreliacija
Iki 0,9	Stipri koreliacija
Daugiau kaip 0,9	Labai stipri koreliacija

Galima taip pat nustatyti koreliacijos koeficiento ribinę paklaidą (Δ_r):

$$\Delta r = t \cdot \frac{1 - r^2}{\sqrt{n - 1}}; \quad (28)$$

čia: t – nustatomas pagal Studento paskirstymo funkciją.

Tiesinės koreliacijos koeficientą galima išreikšti normuotais nukrypimais, t.y.:

$$r = t_x \cdot t_y / n; \quad (29)$$

čia: $t_x = (x - \bar{x}) / \sigma_x$, $t_y = (y - \bar{y}) / \sigma_y$.

Jeigu koreliacinis ryšys išreikštas tiese, tai apskaičiuotos koreliacijos indekso ir koreliacijos koeficiento reikšmės sutampa ($R_x = r$).

Koreliacijos koeficientas parodo tiesinio ryšio glaudumą, todėl, esant jo reikšmei artimai

nuliui, negalima teigti, kad koreliacinio ryšio iš viso nėra (gali būti glaudus kreivinis ryšys).

Jeigu duomenys yra sugrupuoti ir pateikti koreliacinėje lentelėje, tai koreliacijos koeficientas apskaičiuojamas pagal tokią formulę [12]:

$$r = \frac{n \cdot \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{n \cdot \sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum y^2 - (\sum y)^2}} ; \quad (30)$$

$$\text{arba} \quad r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} . \quad (31)$$

čia: n – stebėjimų skaičius;

$\sum xy$ – randamas dauginant x ir y reikšmes iš bendro jų dažnumo esančio eilučių ir skilčių susikirtimuose, po to šios sandaugos sudedamos.

Skaičiuojant koreliacijos koeficientą remiantis koreliacinės lentelės duomenimis, prarandama dalis informacijos, kadangi naudojami ne faktiški atskirų grupių vidurkiai, o intervalų centrai. Todėl koreliacijos koeficiento reikšmė priklauso taip pat nuo intervalų parinkimo. Rekomenduojama šį rodiklį skaičiuoti remiantis nesugrupuotais duomenimis. Tačiau tai nereiškia, kad naudotis koreliacine lentele netikslinga. Sudarius koreliacinę lentelę, galima gana nuodugniai išanalizuoti struktūrą, susidaryti vaizdą apie ryšio kryptį ir netgi formą, gauti ryšio lygtį bet nustatyti ryšio glaudumą [16].

Ryšio glaudumą galima nustatyti ir skaičiuojant empirinį koreliacijos santykį (η):

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta_y^2}{\sigma_y^2}} ; \quad (32)$$

čia: δ_y^2, σ_y^2 – bendroji ir tarpgrupinė rezultatinio požymio dispersija.

Dydis $\delta_y^2 : \sigma_y^2$ yra vadinamas empiriniu determinacijos koeficientu. Jis parodo, kokią dalį rezultatinio požymio (y) variacijos sąlygoja grupavimo požymis (x), neatsižvelgiant į variacijos kryptį ir formą. Todėl šis rodiklis leidžia išaiškinti bet kokios formos ryšio glaudumą. Ryšio kryptis nustatoma pagal dažnumų n_{xy} išsidėstymą koreliacinėje lentelėje jos įstrižainių atžvilgiu. Jeigu dažnumai koncentruojasi apie pagrindinę įstrižainę — ryšys tiesioginis (kai abiejų požymių reikšmės lentelėje išdėstytos didėjančia arba mažėjančia tvarka) ir atvirkščiai [16].

Tiesinio ryšio atveju tiesinės koreliacijos koeficiento ir empirinio koreliacinio santykio

reikšmės sutampa ($r_{y/x} = \eta_{y/x}$). Vadinasi, tiesinį koreliacijos koeficientą palyginę su empiriniu koreliaciniu santykiu, gauname rodiklį, kuris atspindi ryšio tiesiškumo laipsnį.

Skirtumas $\eta^2 - r^2$ nebūtų didesnis už koreliacinio koeficiento atsitiktinių svyravimų dydį. Galima vadovautis ir tokia lygybe: $(\eta^2 - r^2) < 0,1$. Jeigu sąlyga patenkinta, tai ryšiui aprašyti galima taikyti tiesinės regresijos lygtį.

Taikant tiesinės koreliacijos koeficientą, ryšys praktiškai ne visada visiškai įvertinamas, todėl tikslesnė koreliacinio ryšio glaudumo charakteristika yra empirinis koreliacinis santykis.

Empirinį koreliacinį santykį galima apskaičiuoti ir tada, kai grupės pagal faktorinį požymį apibūdintos kokybiškai. Be to, empirinį koreliacinį santykį galima skaičiuoti remiantis analitinio grupavimo duomenimis, kai visuma sugrupuojama pagal faktorinį požymį, o po to grupės apibūdinamos rezultatinio požymio vidurkiais.

Empirinis koreliacinis santykis, pagrįstas dispersijų sudėties taisykle, kartu yra dispersinės analizės išeities pozicija. Dispersinė analizė — tai ryšių tyrimo metodas, kai tyrinėjama rezultatinio požymio variacijos priklausomybė nuo vieno, dviejų, trijų ir daugiau faktorinių požymių esant nedideliam stebėjimų skaičiui. Esant mažai statistinei visumai, svarbu patikrinti gauto rodiklio patikimumą. Jis įvertinamas remiantis R. Fišerio kriterijumi (F) [14].

$$F_R = \frac{R^2 \cdot (n - p - 1)}{(1 - R^2) \cdot p}; \quad (33)$$

čia: n – bendras stebėjimo reikšmių skaičius;

p – nagrinėjamų veiksnių skaičius.

2. 3. 2. NEPARAMETRINIAI RYŠIO GLAUDUMO RODIKLIAI

Ryšiui tarp atributinių, tarp atributinių ir variacinių požymių nustatyti neretai taikomi neparametriniai rodikliai. Jie vadinami neparametriniais, kadangi nesusiję su faktorinio ir rezultatinio požymių pasiskirstymo dėsniais, pasiskirstymų charakteristikomis (vidurkiu, dispersija), pavyzdžiui, koreliacijos koeficientas. Dažniausiai tokie rodikliai neturi griežto matematinio pagrindimo, tačiau jų loginis apibrėžtumas akivaizdus. Tokiu atveju galimi įvairūs logiškai pagrįsti variantai, duodantys skirtingus kiekybinius ryšio glaudumo įvertinimus.

Ryšiui tarp dviejų alternatyvinių požymių išmatuoti dažniausiai naudojami du rodikliai [1]:

- ✓ asociacijos;

✓ kontingencijos.

Asociacijos ir kontingencijos rodikliams suskaičiuot sudaroma žemiau pateikta lentelė. 4 lentelėje yra pateikta kaip suskaičiuot šiuos rodiklius.

4 lentelė. Rodiklių skaičiavimas [7]

Požymiai	Taip	Ne	Suma
Taip	a	b	a + b
Ne	c	d	c + d
Suma	a + c	b + d	n = a + b + c + d

Dydžiai a, b, c ir d parodo užregistruotų atitinkamų atvejų skaičių. Asociacijos koeficientas (k_a) skaičiuojamas pagal tokią formulę:

$$k_a = \frac{ad - bc}{ad + bc} . \quad (34)$$

Tais atvejais, kai iš keturių lentelės rodiklių vieno nėra, asociacijos koeficiento dydis bus lygus vienetui, o dėl to ryšio tarp rodiklių glaudumo laipsnis bus padidintai įvertinamas.

Kontingencijos koeficientas (k_k) skaičiuojamas pagal tokią formulę:

$$k_k = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a + b) \cdot (b + d) \cdot (a + c) \cdot (c + d)}} . \quad (35)$$

Kontingencijos koeficientas gali keistis nuo +1 iki -1, bet visada bus mažesnis už asociacijos koeficientą. Paprastai ryšiui patvirtinti reikalaujama, kad rodiklių reikšmės būtų: $k_a \geq 0,5$, o $k_k \geq 0,3$.

Jeigu požymiai turi daugiau negu po dvi reikšmes, tai ryšio glaudumas matuojamas K. Pirsono ir A. Čuprovo ryšio rodikliais.

Apipusio jungumo koeficiento apskaičiavimas pateiktas 5 lentelėje.

5 lentelė. Apipusio jungumo koeficiento apskaičiavimas [7]

Požymio grupės A	Požymio grupės B			Iš viso
	B ₁	B ₂	B ₃	
A ₁	f ₁	f ₂	f ₃	n ₁

A ₂	f ₄	f ₅	f ₆	n ₂
A ₃	f ₇	f ₈	f ₉	n ₃
Iš viso	m ₁	m ₂	m ₃	

K. Pirsono ryšio rodiklis skaičiuojamas pagal tokią formulę:

$$k_{pirsono} = \sqrt{\frac{\psi^2}{1 + \psi^2}}. \quad (36)$$

Dydis ψ^2 skaičiuojamas taip:

pirmoje eilutėje – $(f_1^2/m_1 + f_2^2/m_2 + f_3^2/m_3) : n_1 = z_1$;

antroje eilutėje – $(f_4^2/m_1 + f_5^2/m_2 + f_6^2/m_3) : n_2 = z_2$;

trečioje eilutėje – $(f_7^2/m_1 + f_8^2/m_2 + f_9^2/m_3) : n_3 = z_3$.

Iš čia:

$$\psi^2 = z_1 + z_2 + z_3 - 1 = \sum z_i - 1.$$

Abipusio jungumo koeficientas, pasiūlytas statistiko A. Čiuprovo, apskaičiuojamas pagal tokią formulę:

$$k_{ciuprovo} = \sqrt{\frac{\psi^2}{(k_1 - 1) \cdot (k_2 - 1)}}; \quad (37)$$

čia: k_1 – grupių skaičius pagal stulpelius;

k_2 – grupių skaičius pagal eilutes.

Rezultatas, gautas pagal šį koeficientą, tikslesnis, kadangi jis įvertina grupių skaičių pagal kiekvieną požymį.

Alternatyvinio ir variacinio (kiekybinio) požymių ryšį galima išmatuoti taikant biserialinį koreliacijos koeficientą, kuris priskiriamas prie parametrinių rodiklių, kadangi jis remiasi pagrindinėmis paskirstymo charakteristikomis (vidurkiu ir dispersija). Jis skaičiuojamas pagal tokią formulę [16]:

$$r_{bis} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_0|}{\sigma_x} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_0}{n \cdot (n - 1)}}; \quad (38)$$

čia: $\bar{x}_1$ – vienetų, turinčių nagrinėjamą požymį, vidurkis;

$\bar{x}_0$ – kitų vienetų vidurkis;

n_1 – vienetų, turinčių nagrinėjamą požymį, skaičius;

n_0 – kitų vienetų skaičius.

Biserialinis koreliacijos koeficientas svyruoja nuo 0 iki 1.

Ryšiui tarp požymių, kurie išreiškiami rangų skale, išmatuoti taikomi rangų koreliacijos koeficientai, tai yra Spirmeno ir Kendalo koeficientai.

Išreikšti požymių rangų skale reiškia išdėstyti jo reikšmes didėjančia arba mažėjančia tvarka ir jas sunumeruoti, t. y. kiekvienai iš jų nustatyti balą (rangą).

Spirmeno rangų koreliacijos koeficientas išreiškiamas pagal tokią formulę [32]:

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum (r_x - r_y)^2}{n^3 - n}. \quad (39)$$

Kendalo rangų koreliacijos koeficientas skaičiuojamas pagal tokią formulę [32]:

$$\tau = \frac{s_1 - s_2}{\frac{1}{2} \cdot (n^2 - n)}. \quad (40)$$

Abu rodikliai rodo glaudų atvirkštinį ryšį. Tačiau Kendalo rangų koreliacijos koeficientas ryšio glaudumą įvertina griežčiau negu Spirmeno.

Rangų koreliacijos koeficientai yra paprasta priemonė ryšiui nustatyti. Tačiau, jeigu kokybinių požymių ryšiams tirti šie rodikliai tinka, tai variacinių (kiekybinių) požymių ryšiui matuoti jie nerekomenduojami, kadangi rangai neįvertina atskirų reikšmių skirtumo dydžio, o nustatomi tik atsižvelgiant į eilės tvarką.

Apskaičiavus neparametrinius rodiklius, reikia patikrinti, ar ryšys reikšmingas ar ne. Tikrinama, lyginant gauto rodiklio reikšmę su kritine. Jeigu kritinė reikšmė mažesnė, tai pagal pasirinkta tikimybę ryšys laikomas reikšmingu.

2. 4. REGRESIJOS ALGORITMO SUDARYMAS

Koreliacinės ir regresinės analizės metu sudaromi įvairių procesų ar reiškinių matematiniai modeliai. Vienfaktoriais ir daugiafaktoriais koreliacijos modeliais prognozuojami ir optimizuojami techniniai ir ekonominiai statybos rodikliai, sudaromos statybos normos,

įvertinamas techninių ir organizacinių inovacijų efektyvumas. Šiais metodais galima sudaryti statybos procesų efektyvumo rodiklių koreliacinius modelius [11].

2. 4. 1. VIENFAKTORIS ALGORITMAS

Vienfaktoriai koreliaciniai ir regresiniai modeliai sudaromi tokia tvarka [12]:

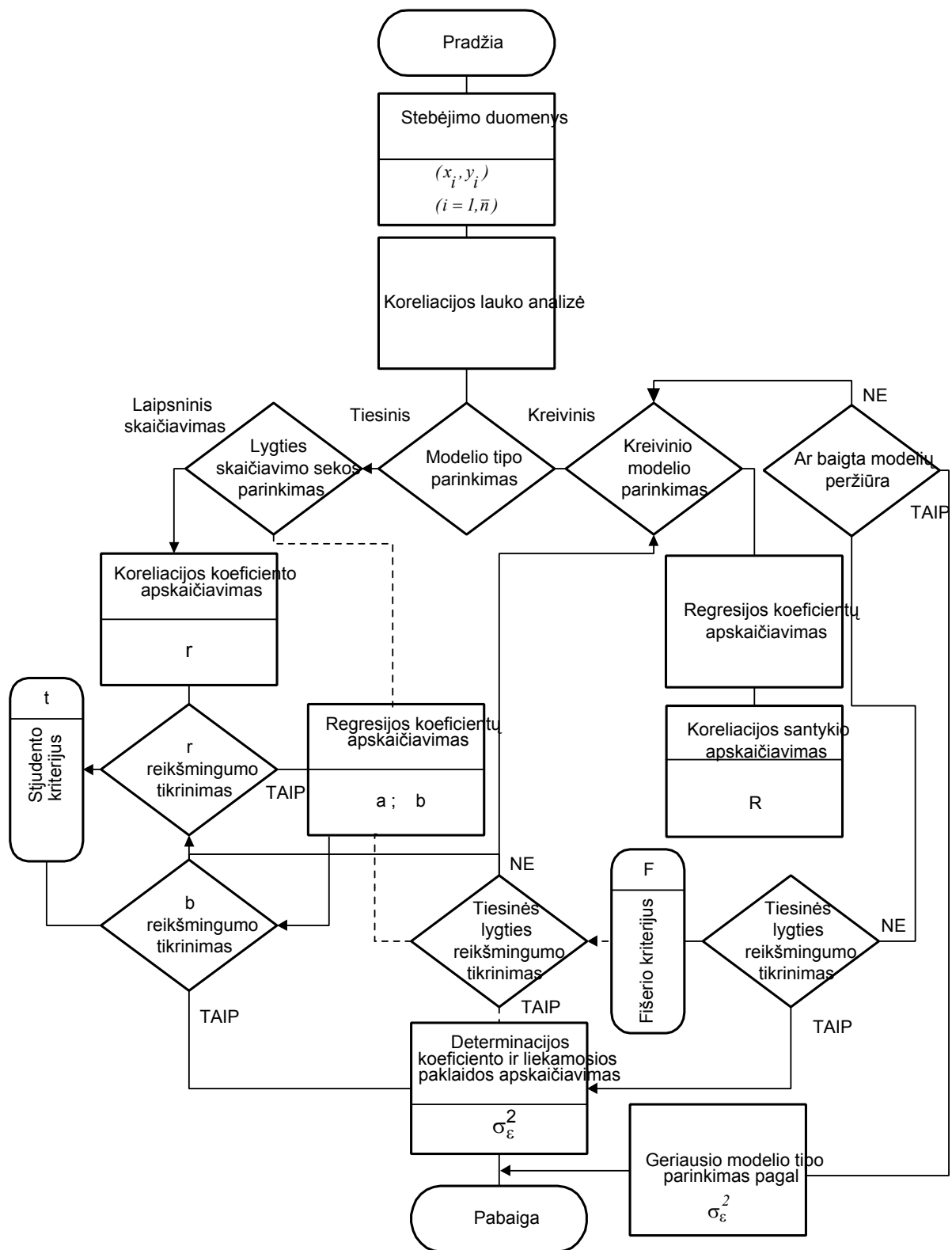
1. Nustatomas modelio kūrimo tikslas.
2. Renkami modelio kūrimui reikalingi duomenys.
3. Atliekama nagrinėjamų parametrų koreliacinė analizė.
4. Apskaičiuojami matematinės priklausomybės regresijos koeficientai.
5. Tikrinamas modelio adekvatumas.

3 paveiksle yra pateikta vienfaktorio regresijos modelio sudarymo struktūrinė schema.

Pirmame etape formuluojamas modelio kūrimo tikslas. Šiame etape aprašomas nagrinėjamas statybos procesas ar tyrimo objektas ir nustatoma šio proceso modeliavimo funkcija, t.y. nagrinėjamas rodiklis. Be to, numatomi veiksniai, darantys įtaką šio rodiklio kitimui. Visi veiksniai išreiškiami rodikliais.

Antrame etape modeliui kurti reikalingas tam tikras duomenų skaičius. Jie gali būti gauti įvairiai, pavyzdžiui, tai gali būti eksperimentinių bandymų, procesų stebėjimo, analitinių skaičiavimų rezultatai ir pan.

Trečiame etape, t.y. koreliacinės analizės metu tikrinama, ar yra parametrų tarpusavio ryšys, ir nustatomas šio ryšio reikšmingumas. Šiam tikslui sudaromi koreliacijos laukai, apskaičiuojamas koreliacijos koeficientas ir tikrinamas jo reikšmingumas.



3 pav. Vienfaktorio regresijos modelio sudarymo struktūrinė schema [6]

Ketvirtame etape skaičiuojami regresijos koeficientai. Koreliacinės analizės metu nustatoma nagrinėjamų parametrų tarpusavio ryšio matematinės priklausomybės išraiška. Regresijos koeficientai randami taikant mažiausių kvadratų metodą. Regresijos koeficientų statistinis įvertinimas atliekamas tikrinant nulinę hipotezę, t.y. tikrinama, ar regresijos koeficientai statistiškai nelygus nuliui. Šiuo atveju apskaičiuojamas Stjudento kriterijus t_{sk} , jis palyginamas su t_{lent} . Jeigu $t_{sk} \geq t_{lent}$, tai regresijos koeficientas a_i yra reikšmingas, ir jis paliekamas lygtyje.

Penktajame etape tikrinamas matematinio modelio adekvatumas. Tikrinant modelio adekvatumo hipotezę, reikia palyginti sudaryto modelio tikslumo charakteristiką su empirinių duomenų tikslumo charakteristikos įverčiu. Jeigu modelio tikslumo charakteristikos paklaida didesnė už empirinių duomenų paklaidą, tuomet modelio adekvatumo hipotezė atmetama.

Regresijos modelių adekvatumui tikrinti naudojamos šios charakteristikos. Jos pateiktos 6 lentelėje [12].

6 lentelė. Nuokrypių kvadratų vidutinės vertės apskaičiavimas

Stebėjimo rezultatų nuokrypių tipas	Nuokrypių kvadratų suma	Laisvės laipsnių skaičius	Nuokrypių kvadratų vidutinė vertė
Regresijos tiesės reikšmių sklaida statybos procesų stebėjimo rezultatų vidurkio atžvilgiu	$SS_b = \sum_1^4 (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2$	1	$MS_b = SS_b$
Statybos procesų stebėjimo rezultatų sklaida tiesės atžvilgiu	$SS_r = \sum_1^4 (y_i - \hat{y}_i)^2$	n-2	$MS_r = SS_r / (n-2)$
Statybos procesų stebėjimo rezultatų sklaida jų vidurkio atžvilgiu	$SS_t = \sum_1^4 (y_i - \bar{y}_i)^2$	n-1	$MS_t = SS_t / (n-1)$

Šioms charakteristikoms teisinga išraiška:

$$SS_t \approx SS_r + SS_b. \quad (41)$$

Matematinio modelio adekvatumas nustatomas pagal Fišerio (F_{sk}) kriterijų. Fišerio (F_{sk}) kriterijus apskaičiuojamas pagal formulę:

$$F_{sk} = (S_{ad})^2 / S_y^2 ; \quad (42)$$

čia: $(S_{ad})^2$ – neadekvatumo dispersija;

S_y^2 – empirinė dispersija.

$(S_{ad})^2$ ir S_y^2 vertės apskaičiuojamos pagal formules:

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2} ; \quad (43)$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2}{n - 1} . \quad (44)$$

čia: y_i – stebėta reikšmė;

$\bar{y}_i$ – stebėtos reikšmės vidurkis;

$\hat{y}_i$ – pagal regresijos lygtį apskaičiuota reikšmė;

n – bendras stebėjimo skaičius.

Kai $F_{sk} < F$ kritinį, tai koreliacinis koeficientas lygus nuliui. Jeigu $F_{sk} > F$ kritinį, tai koreliacinis koeficientas nelygus nuliui, taigi matematinis modelis adekvatus ir jį galima naudoti tyrimams arba skaičiavimams [3].

Kuriant koreliacinius modelius atliekami sudėtingi apskaičiavimai, todėl naudojami asmeniniai kompiuteriai ir specialiosios programos.

2. 4. 2. DAUGIAFAKTORIS ALGORITMAS

Toks modelis leidžia įvertinti dviejų ir daugiau veiksnių bendrą kiekybinę įtaką nagrinėjamo statybos proceso tikslo funkcijos rodikliui.

Daugiafaktorinių koreliacinių modelių kūrimo etapai [12]:

1. Modelio kūrimo tikslo nustatymas.
2. Modelio kūrimui reikalingų duomenų rinkimas.
3. Nagrinėjamo proceso parametrų daugiafaktorė koreliacinė analizė.
4. Matematinės priklausomybės regresijos koeficientų apskaičiavimas.
5. Modelio adekvatumo tikrinimas.

4 paveiksle pateikta daugiafaktorio regresijos modelio sudarymo struktūrinė schema [6].

Pirmame etape nustatomas matematinio modelio sudarymo tikslas ir tikslo funkcijos rodiklis.

Modelio kūrimui reikalingų duomenų rinkimas. Šiame etape sudaromas veiksmų sąrašas. Tai veiksniai, kurie gali daryti kiekybinę įtaką pasirinktam tikslo funkcijos rodikliui. Po to renkami reikalingi duomenys.

Reikalingas duomenų skaičius m randamas pagal formulę:

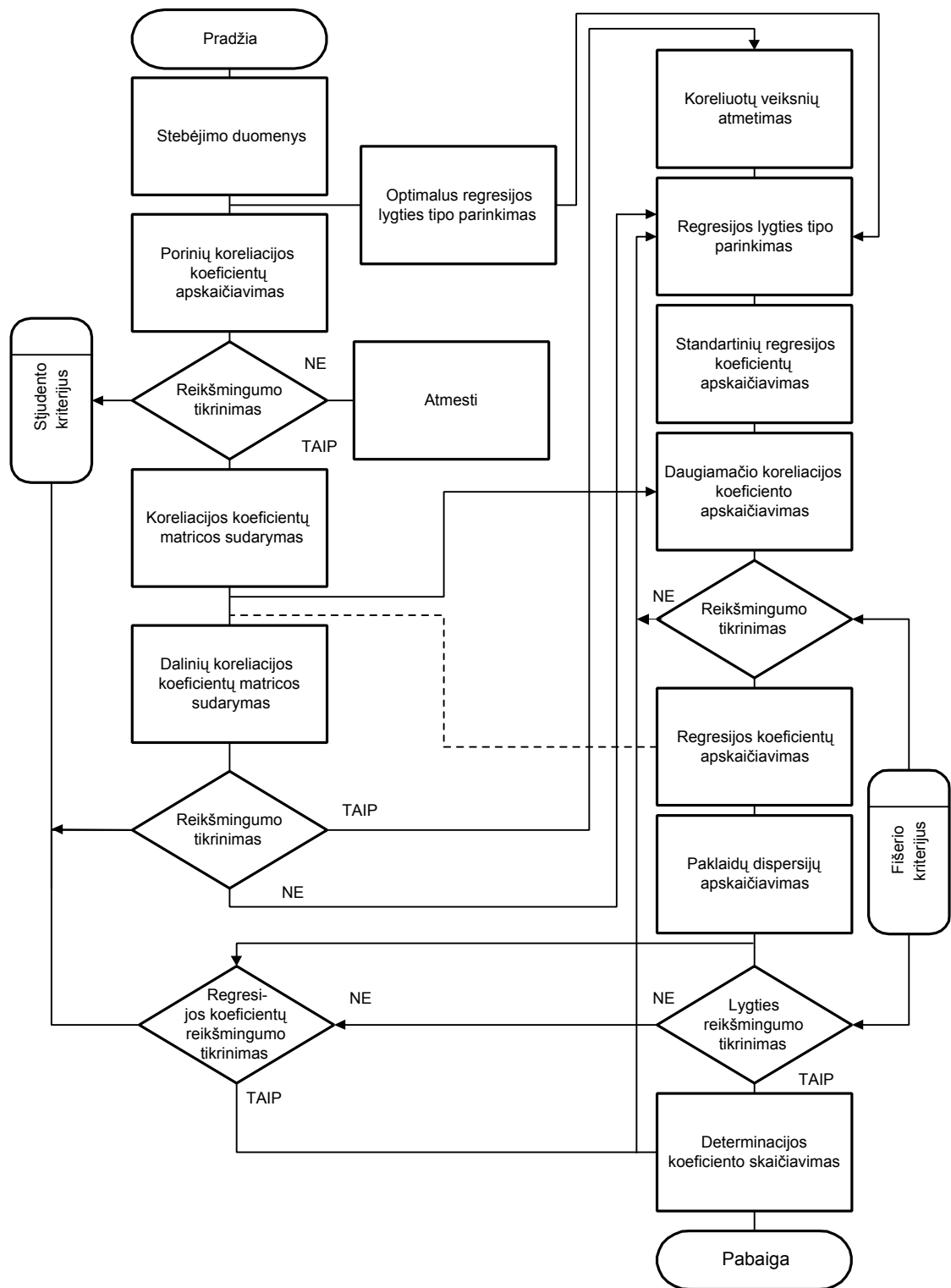
$$m \geq (n + 1) \cdot 8 ; \quad (45)$$

čia: m – reikalingas duomenų skaičius (objektų skaičius);

n – veiksmų skaičius.

Trečiame etape yra nagrinėjamo proceso parametrų daugiafaktorė koreliacinė analizė. Ji atliekama panašiai kaip vienfaktorės (porinės) koreliacijos atveju. Tačiau čia skaičiuojami dviejų tipų koreliacijos koeficientai.

Ketvirtame etape vyksta daugiafaktorės matematinės priklausomybės regresijos koeficientų apskaičiavimas. Tiesinio daugiafaktorio koreliacinio modelio regresijos koeficientai randami mažiausių kvadratų metodu. Regresijos koeficientų statistinis įvertinimas atliekamas tikrinant nulinę hipotezę, t.y. tikrinama, ar regresijos koeficientai statistiškai nelygus nuliui.



4 pav. Daugiafaktorio regresijos modelio sudarymo struktūrinė schema

Šiuo atveju apskaičiuojamas Stjudento kriterijus t_{sk} , jis palyginamas su t_{lent} . Jeigu $t_{sk} \geq t_{lent}$, tai regresijos koeficientas a_i yra reikšmingas, ir jis paliekamas lygtyje. t_{lent} reikšmė nustatoma iš matematinės statistikos lentelių pagal duomenų skaičių n ir rezultatų patikimumą. Jeigu $t_{sk} < t_{lent}$, tai regresijos koeficientas a_i yra reikšmingas, ir jis paliekamas lygtyje.

Penktajame etape tikrinamas matematinio modelio adekvatumas. Daugiafaktorių koreliacinių modelių adekvatumui tikrinti naudojamas daugiafaktorės koreliacijos koeficientas R . Šio koeficiento vertė būna $0 \leq R \leq 1$. Kuo R vertė arčiau vienetą, tuo matematinis modelis geriau aproksimuoja empirinius duomenis.

Daugiafaktorės koreliacijos koeficientas R gali būti apskaičiuojamas pagal šią formulę [26]:

$$R = \sqrt{1 - \frac{n-1}{n-p-1} \cdot (1 - (R^*)^2)}; \quad (46)$$

čia:

$$R^* = \sqrt{1 - \frac{n \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (47)$$

n – bendras stebėjimo reikšmių skaičius;

p – nagrinėjamų veiksnių skaičius.

Koreliacijos koeficiento R reikšmingumas tikrinamas pagal Fišerio F kriterijų [23]:

$$F = \frac{\frac{SSR}{k_2}}{\frac{SSE}{k_1}}; \quad (48)$$

čia: SSR – teorinės nuo vidutinės sumos skirtumai;

SSE – skirtumas tarp faktinio ir teorinio;

k_1 – denominatoriaus laisvės laipsnis;

k_2 – numeratoriaus laisvės laipsnis.

Jeigu $F \geq F^{kr}_{(k_1; k_2; \alpha)}$, tai hipotezė, kad daugiafaktorės koreliacijos koeficientas lygus nuliui $H : R = 0$, atmetama. $F^{kr}_{(k_1; k_2; \alpha)}$ vertė priklauso nuo reikšmingumo lygmens α , $k_1 = n - p - 1$ ir $k_2 = p$.

Daugiafaktorės koreliacinės analizės metu koeficientas R apskaičiuojamas visais atvejais,

kai šalinamas nereikšmingas veiksnys arba regresijos koeficientas. Po to kiekvieną kartą tikrinamas koreliacijos koeficiento reikšmingumas pagal Fišerio kriterijų $F^{kr}_{(k_1; k_2; \alpha)}$.

2. 5. KORELIACINĖS REGRESINĖS ANALIZĖS APRAŠYMAS TAIKANT KOMPIUTERINES PROGRAMAS

Spręsti koreliacinę regresinę analizę galima įvairiomis kompiuterinėmis programomis. Labiausiai paplitusios – t. y. statistica, maple, matcadas ir kitos.

2. 5. 1. KORELIACINĖ REGRESINĖ ANALIZĖ EXCELIU

Paprasčiausias būdas koreliacinei regresinei analizei atlikti yra šių statistinių EXCEL funkcijų panaudojimas [22]:

1. Aprašomosios statistikos dydžiai skaičiuojami naudojant šias funkcijas:

vidurkis - AVERAGE;

vidutinis kvadratinis nuokrypis – STDEV;

dispersija – VAR.

2. Koreliacijos koeficientą tarp dviejų veiksnių skaičiuoja funkcija CORREL.

3. Porinės regresijos lygties koeficientus apskaičiuoja šios funkcijos:

a_0 – INTERCEPT;

a_1 – SLOPE

4. Daugianarė koreliacinė regresinė analizė atliekama naudojant šias statistines funkcijas:

- esant tiesinei ryšio formai – LINEST ir TREND;
- esant eksponentiniam augimui – LOGEST ir GROWTH.

Funkcijos LINEST (ir atitinkamai LOGEST) pateikia pilną informaciją, reikalinga regresijos lygčiai užrašyti ir statistinėms išvadoms padaryti [16]:

- lygties koeficientus,
- determinacijos koeficientą,
- likutinės dispersijos kvadratų sumą,
- laisvės laipsnius.

Funkcijos TREND (ir GROWTH) apskaičiuoja funkcijos $\hat{y}$ reikšmę pagal regresijos lygtį, esant tam tikroms kintamųjų $x_1...x_m$ reikšmėms. Praktinėje veikloje dažniausiai reikia būtent apskaičiuoti funkcijos reikšmes, o funkcijos koeficientų žinojimas nėra būtinas.

Kartu su grafikais, kuriuos galima nupiešti naudojant funkciją CHART WIZARD, o pavaizduoti reikėtų porinės regresijos rezultatus bei likučių grafiką daugianarėje regresijoje ($\hat{y}_i - y_i$ nuo $\hat{y}_i$), gauname išsamų nagrinėjamojo reiškinių vaizdą.

Reikia padaryti dar vieną būtiną pastabą dėl regresinio ryšio formos. Paprasčiausia ryšio forma yra tiesė: $y = a_0 + a_1x$, kai nagrinėjame priklausomybę nuo vieno veiksnio. Jei statistinių taškų išsidėstymas yra toks, kad galima įtarti kreivę, ryšio galima ieškoti polinomo pavidalu, pavyzdžiui, antrojo laipsnio:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Pažymėję $x^2 = t$, gauname:

$$y = a_0 + a_1x + a_2t.$$

Tokią tiesinę priklausomybę nuo dviejų kintamųjų (x bei t) ir šios lygties koeficientus galima rasti naudojant tapačią LINEST funkciją. Daugelį funkcijų algebriniais veiksmais galima suvesti į tiesinę formą ir su LINEST funkcija įvertinti koeficientus. EXCEL'yje atskirai išskirta dažnai ekonominiuose tyrimuose pasitaikanti eksponentinio augimo kreivė, kurios koeficientus ir reikšmes galima apskaičiuoti naudojant funkcijas LOGEST ir GROWTH.

2. 5. 2. KORELIACINĖ REGRESINĖ ANALIZĖ TAIKANT MAPLE

Taikant kompiuterinę sistemą Maple (Maple 6, Maple 7, Maple 8, Maple 9, Maple 9.5 ir Maple 10) galima tiksliau modeliuoti, planuoti ir atlikti mokslinius tyrimus.

Taikant regresinę analizę arba tiesiog regresiją funkcijos parametrai parenkami taip, kad ji apytiksliai aproksimuotų į pradinę priklausomybę, kuri dažniausiai būna išreikšta tam tikru taškų rinkiniu.

Regresinei analizei atlikti yra skirta funkcija fit pakete stats, kuri randama šiuo būdu [31]:

```
>restart,with(stats);
```

```
[anova, describe, fit, importdata, random, statevalf, statplots, transform]
```

```
arba
```

```
>restart;fit[leastsquare[vars,eqn,parms]](data);
```

$$fit_{leastsquare}^{vars,eqn,parms}(data)$$

```
>plot([r1], x = 0.5, style= [line,point] , color=black);
```

Formulės rašomos pagal Maple sistemą ir yra nedalomos. Taikant Maple dešimtainėje trupmenoje vietoje kablelio naudojamas taškas, o po formulės taško nerašoma.

Šiuo atveju data – duomenų sąrašas, vars – kintamųjų x ar y sąrašas duomenims pateikti, eqn – lygtis, sudarant aproksimuojamąją priklausomybę (pagal nutylėjimą - tiesinę), parms – parametrų aibė, kurie bus pakeisti apskaičiuotomis reikšmėmis, plot – komanda grafikams braižyt.

3. DUOMENYS SKAIČIAVIMAMS

Visi gyvenime vykstantys procesai ir reiškiniai yra glaudžiai susiję su resursais. Be jų negali išsiverst jokia gamyba, nė jokia sritis. Išteklių yra įvairių: darbo, finansiniai, medžiaginiai ir kiti.

Statyba irgi yra ne išimtis – ji taip pat negali apsieiti be išteklių. Statybos ištekliai yra išskiriami į tris pagrindines grupes: darbo jėgą, mechanizmus, medžiagas.

Darbo jėga – tai yra darbo užmokestis, skirtas darbininkams.

Mechanizmai – tai yra įrenginiai, transportas, technika, įrankiai, įranga ir t. t.

Medžiagos – tai yra visos statybinės medžiagos, skirtos statybai.

Šiuo metu Lietuvoje resursų sąnaudos yra pasiskirsčiusios taip: apie 15% – mechanizmams, apie 40% – medžiagoms ir 45% – darbo užmokesčiui [13].

Statybos resursai – projekte numatytos ir statybos darbams atlikti reikalingos medžiagos, gaminiai ar nustatytus reikalavimus atitinkantys analogai, mechanizmai (mašinos ar kita įranga), darbo jėgos bei statinio įrenginių ištekliai, reikalingi jam pastatyti (sumontuoti, nutiesti), suremontuoti, rekonstruoti ar sutvarkyti nekilnojamąsias kultūros vertybes [5].

Statybos resursų poreikio skaičiavimai yra skirti naudotis nustatant statybos objektų (darbų) skaičiuojamąją kainą, sudarant statybos sąmatas, statybos rangovo parinkimo (konkursų ar kitais būdais) dokumentus bei sutartis dėl statinių statybos (montavimo, tiesimo), remonto, rekonstrukcijos ar nekilnojamųjų kultūros vertybių tvarkymo darbų, planuojant investicijas bei rengiant statybos pagrindimus [29].

Resursų poreikio žiniaraščiai sudaromi pagal darbo, medžiagų (gaminų) ir mechanizmų (mašinų ir kitos įrangos eksploatacijos) normatyvines sąnaudas bei projektuose apskaičiuotus darbų kiekius.

Statybos resursų normatyvinės sąnaudos – tai techniniu, apskaičiavimo bei ekspertiniu būdu įvertinta vidutinė darbo trukmė, medžiagų (gaminų) kiekiai, mechanizmų (mašinų ir kitos įrangos) naudojimo trukmė.

Bendruoju atveju statybos resursų poreikis apskaičiuojamas, sudarant tokius dokumentus:

1. Darbų kiekių žiniaraščius;
2. Detalų resursų poreikio žiniaraštį;
3. Įrenginių poreikio žiniaraštį.

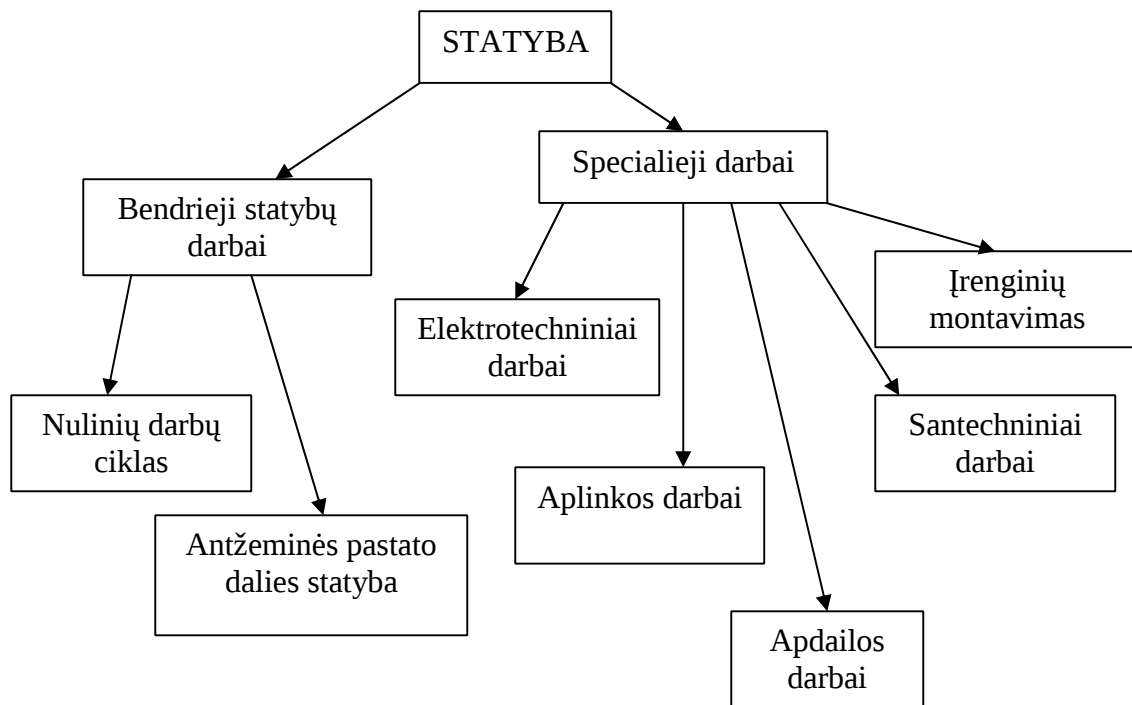
Vietoj detaliojo resursų poreikio žiniaraščio gali būti sudaromi atskiri žiniaraščiai pagal resursų tipus [29]:

1. Medžiagų poreikio žiniaraštis;
2. Mechanizmų poreikio žiniaraštis;
3. Darbo sąnaudų poreikio žiniaraštis.

Daugumos objektų statyba yra skirstoma į du etapus: paruošiamuosius ir pagrindinius darbus. Abiejuose etapuose išskirtinos šios darbų grupės [15]:

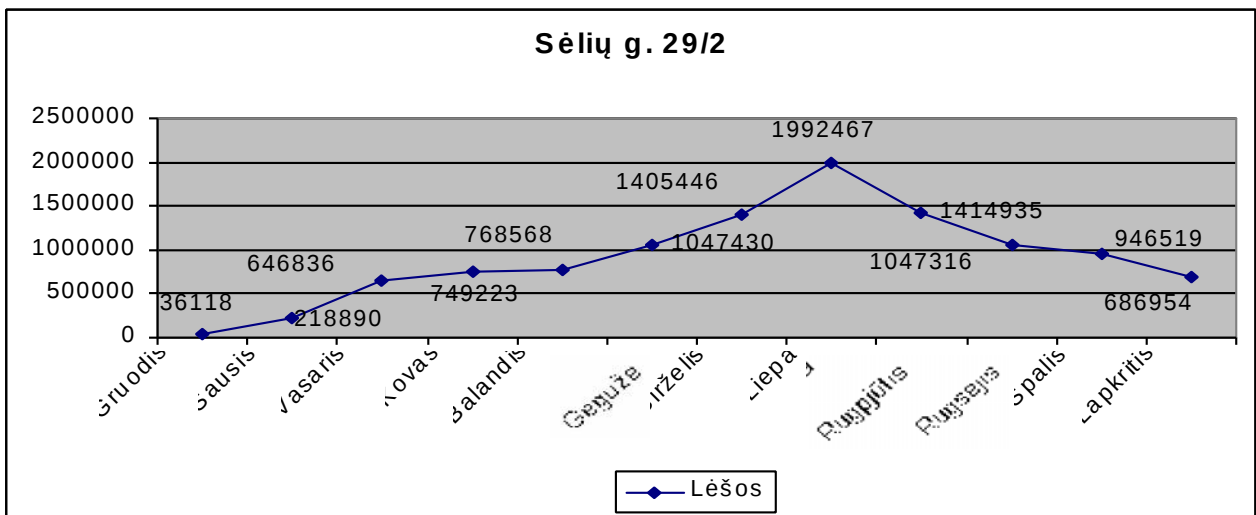
1. Nulinių darbų ciklas (patatų duobės, tranšėjų kasimas, patatų įrengimas, inžinerinių tinklų klojimas, patatų užpylimas gruntu);
2. Antžeminės pastato dalies statyba;
3. Specialieji darbai (įrengimų montavimas, elektrotechniniai, santechniniai darbai, apdailos darbai, aplinkotvarka).

Taigi statybinius resursus, tai yra darbo jėga, mechanizmus, medžiagas suvedame į lėšas. 5 paveiksle yra pavaizduota statybos darbų klasifikacija.

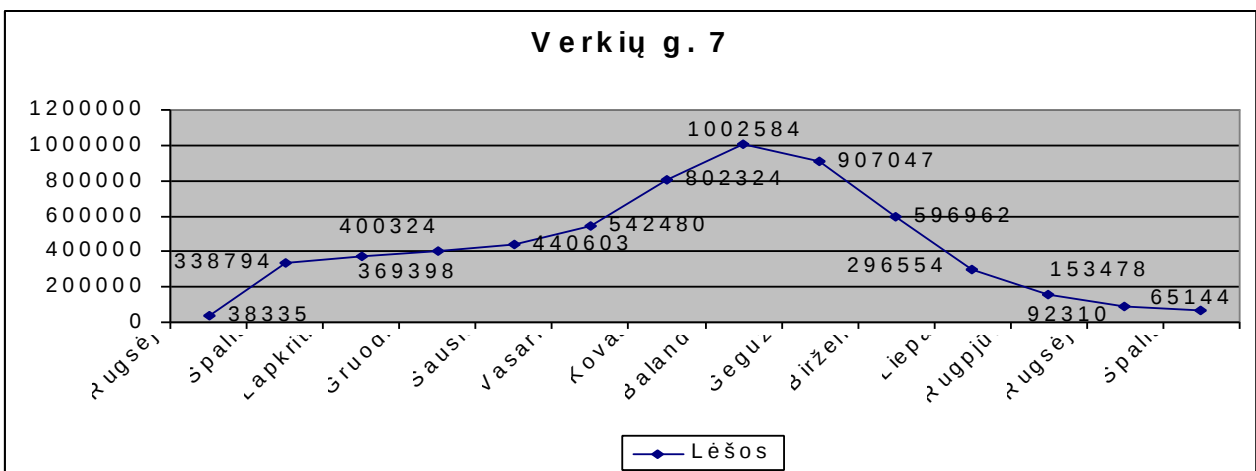


5 pav. Statybos darbų klasifikacija

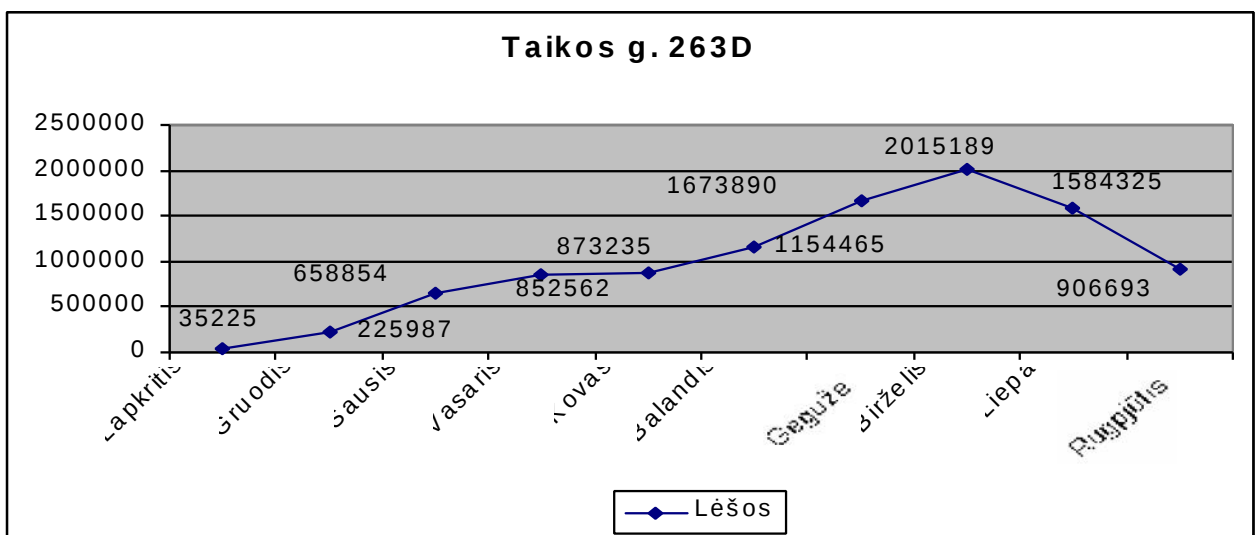
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 paveiksle yra pateiktas mėnesinis lėšų poreikio pasiskirstymas. Šiuos objektus statė gerai žinomos Lietuvos statybos įmonės [34 – 42]: UAB „Namų statyba“, UAB „Veikmė“, UAB „Kamintras“, UAB „Ukmergės statyba“, UAB „Junesta“, UAB „KRS“, UAB „Masyvas“, AB „Kasyba“, UAB „Luidas“. 1 priede yra pateikti statytų daugiabučių, mėnesiniai lėšų pasiskirstymo, duomenys.



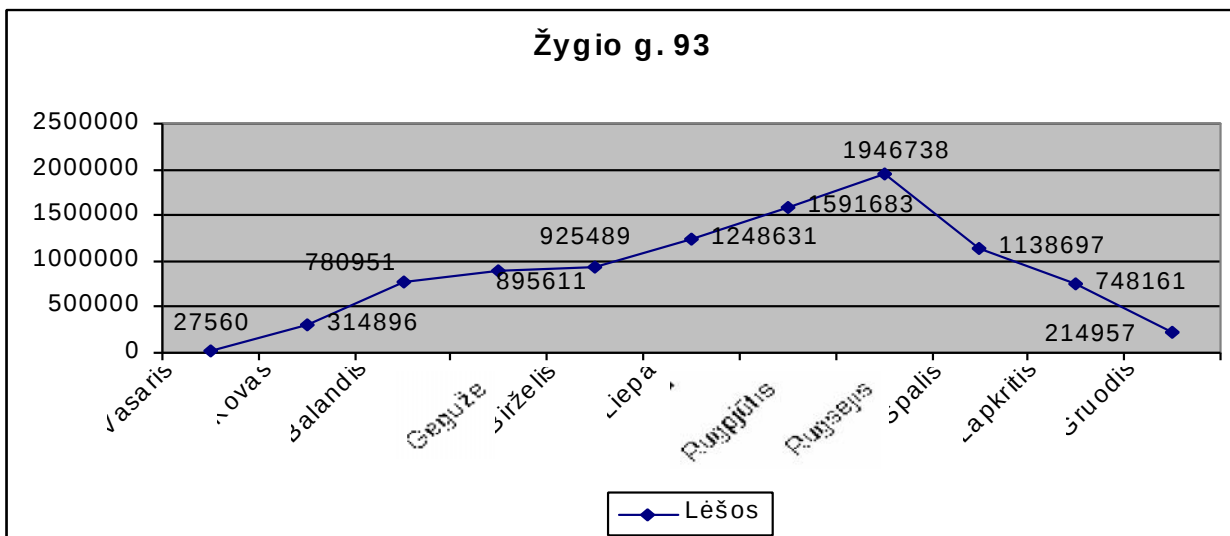
6 pav. Sėlių g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas



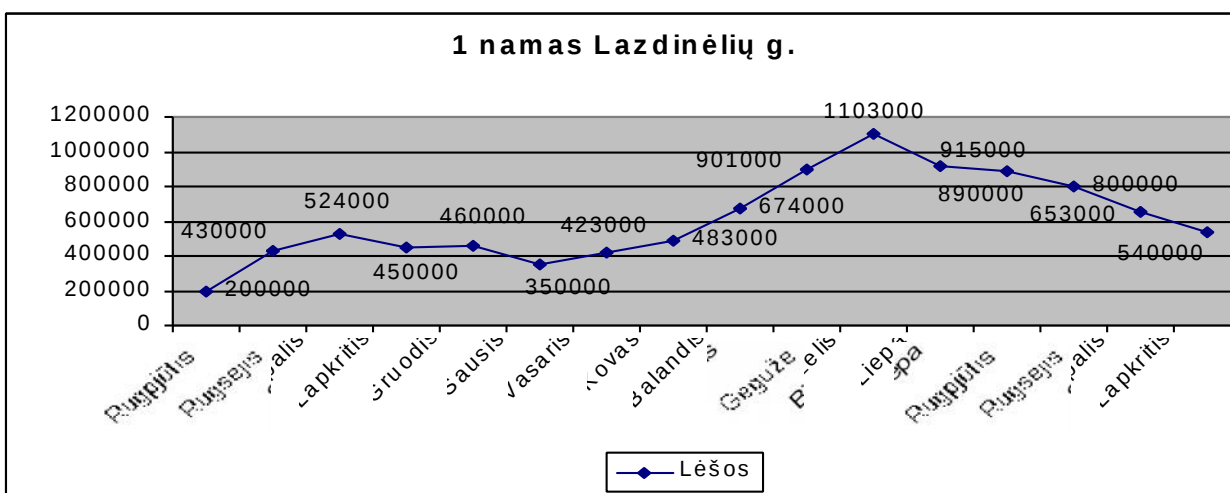
7 pav. Verkių g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas



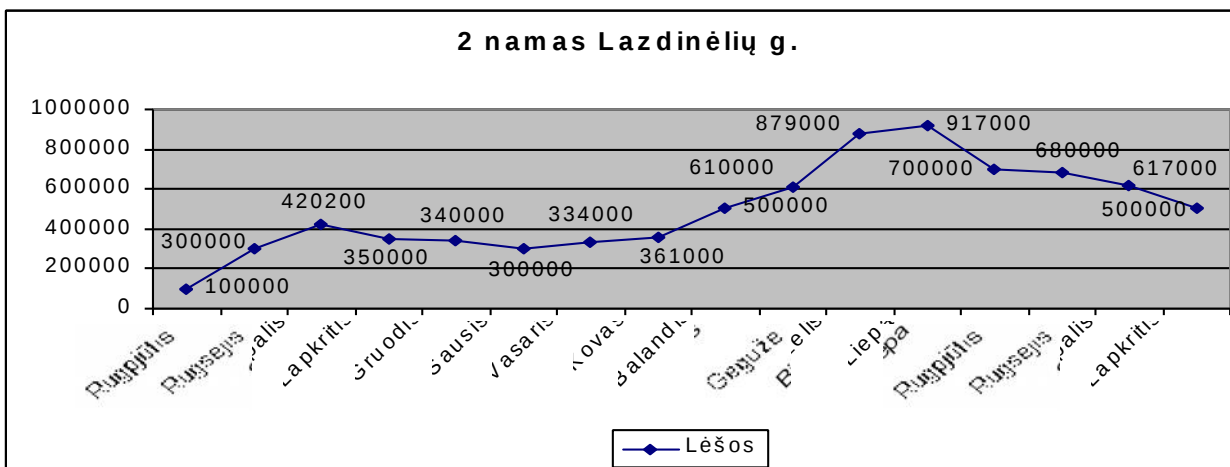
8 pav. Taikos g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas



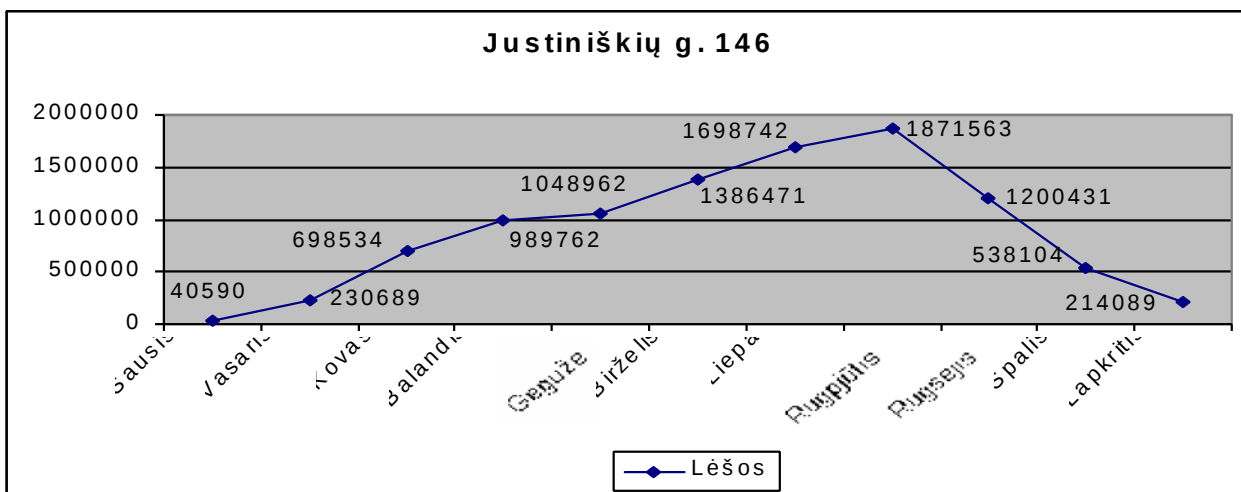
9 pav. Žygio g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas



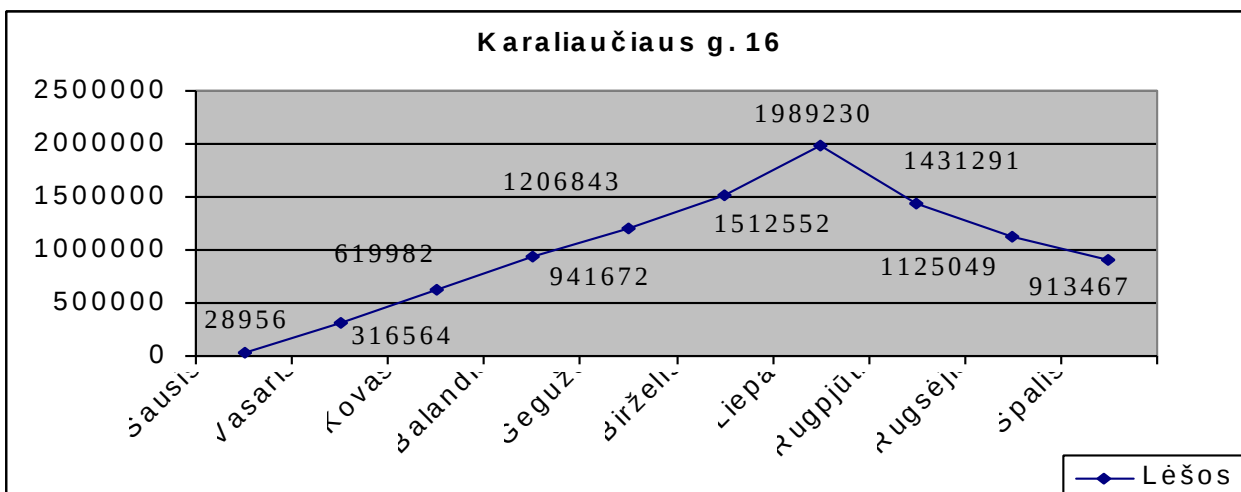
10 pav. Lazdinėlių g. 1 namo mėnesinis lėšų pasiskirstymas



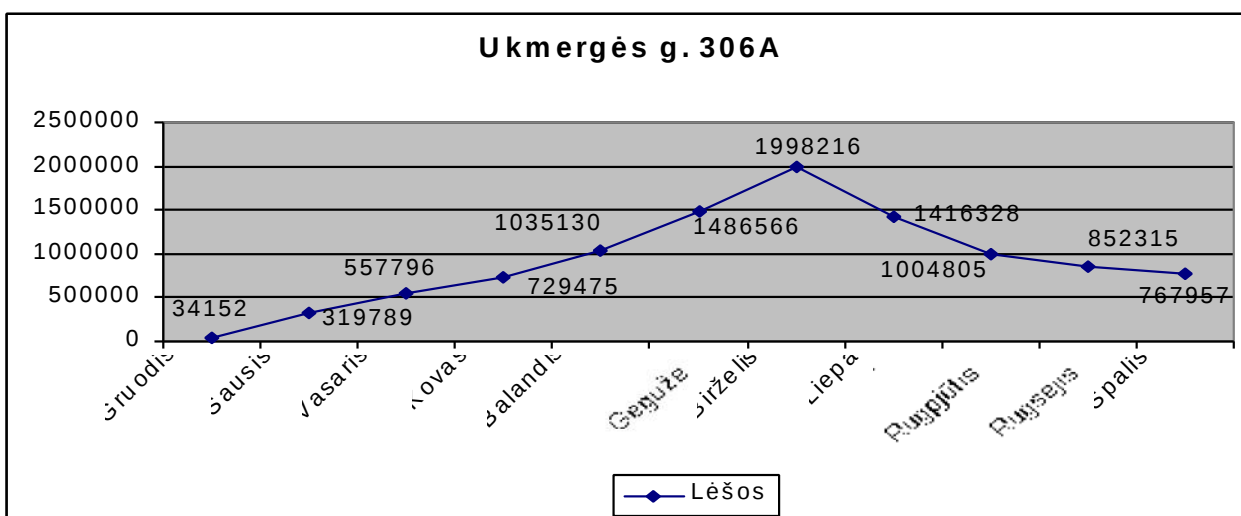
11 pav. Lazdinėlių g. 2 namo mėnesinis lėšų pasiskirstymas



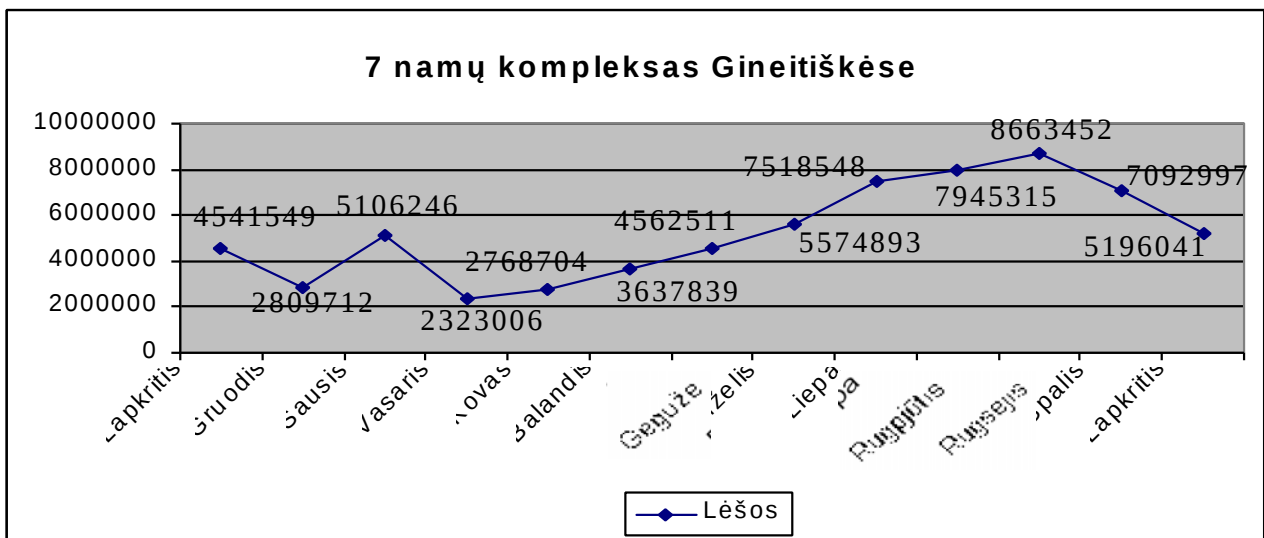
12 pav. Justiniškių g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas



13 pav. Karaliaučiaus g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas



14 pav. Ukmergės g. objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas



15 pav. Gineitiškėse objekto mėnesinis lėšų pasiskirstymas

Yra žinoma, kad statybos pradžioje resursų poreikis nėra didelis. Įpusėjus statybai resursų poreikis žymiai išauga, o baigiantis vėl sumažėja. Tai ir matosi pateiktuose paveiksluose.

Pagal šių objektų mėnesinius lėšų poreikius, bus atlikti tolimesni skaičiavimai.

4. RESURSŲ POREIKIO ATSKIRIEMS STATYBOS ETAPAMS ANALIZĖ

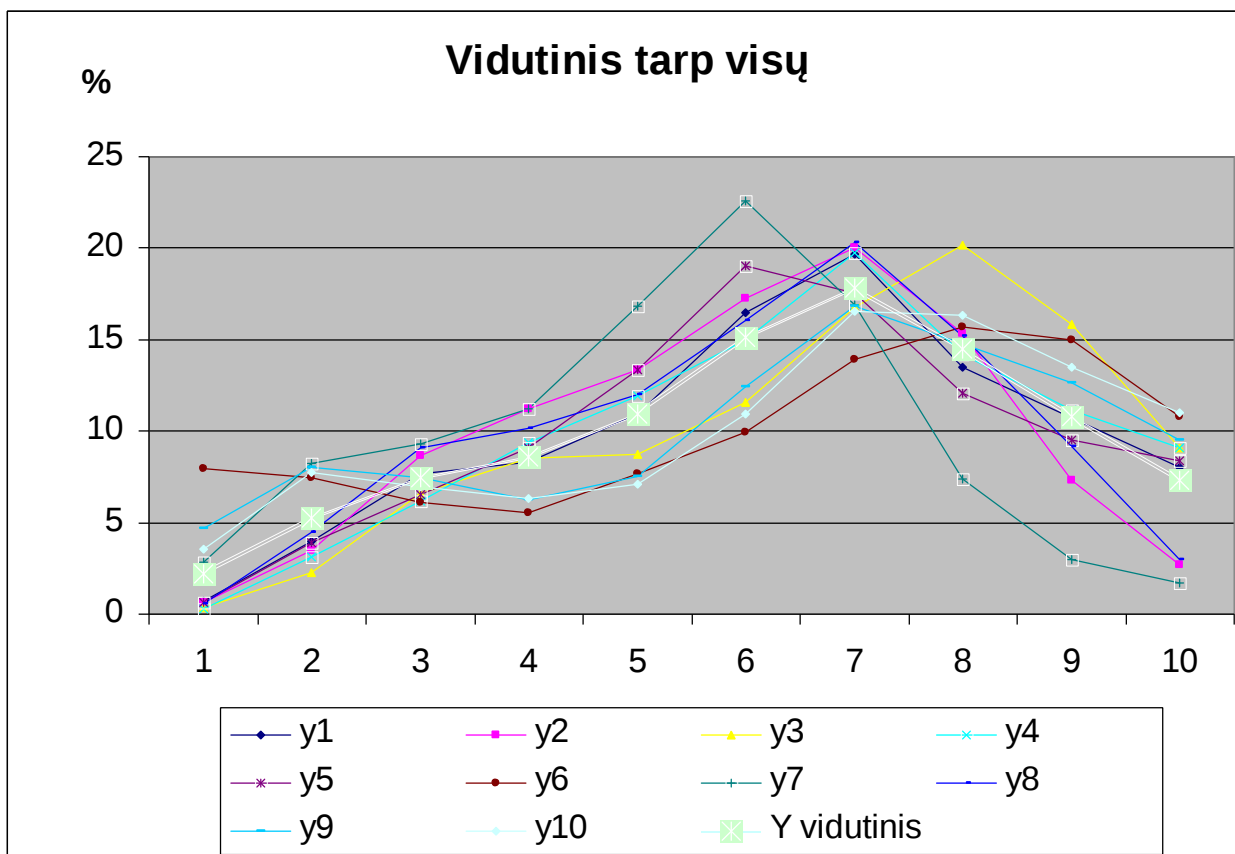
4. 1. EMPIRINĖ REGRESIJOS LINIJA

Skaičiavimams atlikti panaudoti 16 daugiabučių pastatų duomenys, tačiau 7 lentelėje parodyta 10 objektų, nes objektas, esantis Gineitiškėse, statytas UAB „Luidas“, yra kompleksinis. Jį sudaro 7 daugiabučiai ir jų kainos yra panašios, tai jis bus kaip vienas. Visi pastatai yra suskirstyti į dešimt statybos etapų. 4 priede yra pateiktas pastatų skirstymas į dešimt etapų. 7 lentelėje yra parodyti visi nagrinėjami objektai bei jų lėšų paskirstymas į statybos etapus procentaliai.

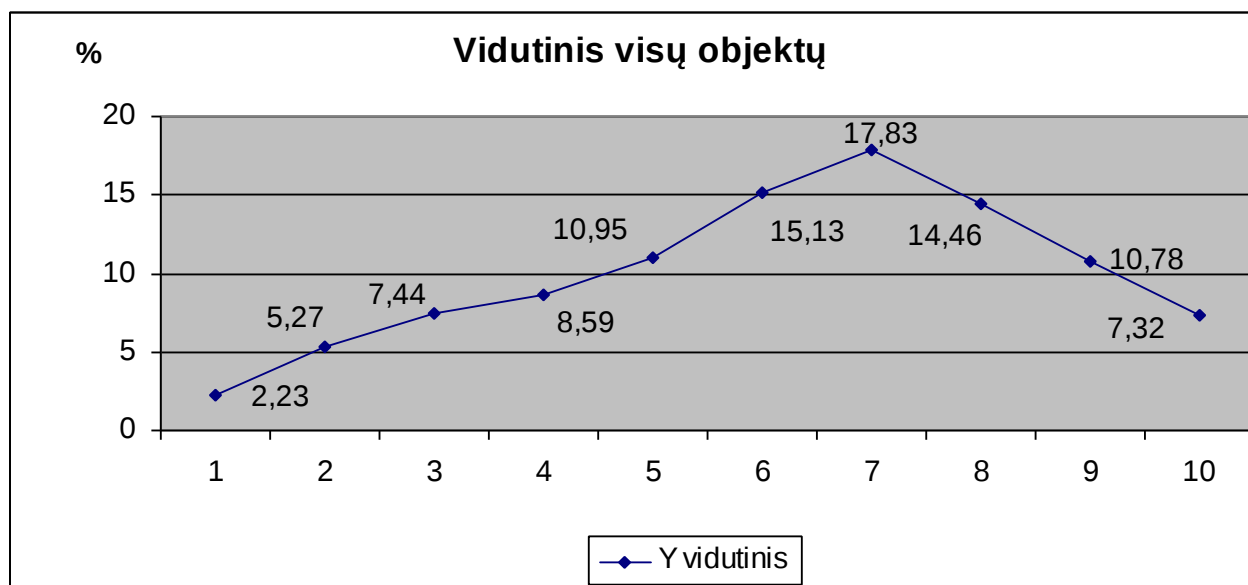
7 lentelė. Nagrinėjamų objektų lėšų paskirstymas į statybos etapus procentaliai

Sėlių	Justiniškių	Taikos	Karal	Ukmergės	Gineitiškės	Verkių	Žygio	Lazd 1	Lazd 2	Bendras
y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	y ₇	y ₈	y ₉	y ₁₀	y _{vidutinis}
0,73	0,64	0,35	0,29	0,65	7,95	2,87	0,6	4,68	3,54	2,23
3,96	3,5	2,26	3,14	3,92	7,43	8,25	4,47	8,02	7,72	5,27
7,64	8,63	6,6	6,15	6,52	6,1	9,3	9,09	7,43	6,98	7,44
8,34	11,22	8,54	9,34	9,06	5,51	11,21	10,14	6,24	6,34	8,59
10,96	13,34	8,75	11,96	13,37	7,66	16,86	12	7,52	7,1	10,95
16,46	17,27	11,57	15	19,04	9,95	22,58	16,06	12,4	10,95	15,13
19,7	20,06	16,77	19,72	17,55	13,92	16,9	20,33	16,81	16,52	17,83
13,48	15,34	20,19	14,19	12,04	15,67	7,39	15,2	14,74	16,36	14,46
10,73	7,3	15,87	11,15	9,49	15	2,95	9,16	12,65	13,49	10,78
8	2,7	9,1	9,06	8,36	10,81	1,69	2,95	9,51	11	7,32
100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

16 paveiksle yra pateiktas visų nagrinėjamų objektų grafikas su nustatytu vidutiniu grafiku. 17 paveiksle yra parodytas nustatytas lėšų poreikis, reikalingas statybos etapams.



16 pav. Visų nagrinėjamų objektų grafikas su nustatytu vidutiniu grafiku



17 pav. Lėšų poreikis, reikalingas statybos etapams

Skaičiuojamas koreliacinis koeficientas R:

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} \right)}}$$

$$R = \sqrt{\frac{207,498}{\frac{2,845 \times 10^3}{10}}} = 0,854.$$

Koreliacinis koeficientas R yra 0,854. Jo reikšmė pagal koreliacijos koeficientų lentelės interpretaciją yra stipri. Ryšys tarp teorinio ir faktinio lėšų poreikio yra glaudesnis, nes koreliacijos koeficientas artėja į vienetą.

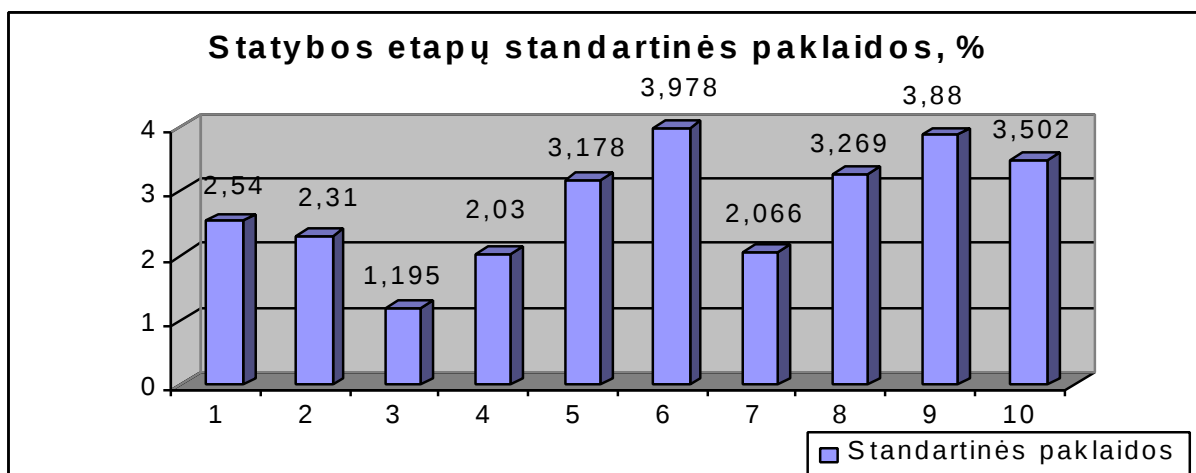
Skaičiuojama kiekvieno statybos etapo lėšų poreikio standartinė paklaida:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 1}}.$$

6 priede yra pateikti statybos etapų standartinių paklaidų skaičiavimai. 8 lentelėje yra pateiktos, paskaičiuotos visų etapų standartinės paklaidos, o 18 paveiksle yra pateiktas statybos etapų standartinių paklaidų grafikas.

8 lentelė. Statybos etapų standartinės paklaidos

Etapai	Standartinės paklaidos (s), %
1	2,54
2	2,31
3	1,195
4	2,03
5	3,178
6	3,978
7	2,066
8	3,269
9	3,88
10	3,502



18 pav. Statybos etapų standartinių paklaidų grafikas

4. 2. ANALITINĖ RYŠIO IŠRAIŠKA

Kadangi visų nagrinėjamų objektų lėšų poreikio grafikai yra panašūs, analitinė ryšio išraiška buvo parenkama pagal vieną objektą, t.y. pastatą Sėlių g. Iš pateiktų regresinių lygčių: tiesinės, antrojo laipsnio parabolės ir hiperbolės lygties, nustaciau, kad geriausiai tinka hiperbolės lygtis. Ji vienintelė iš pateiktų lygčių atitinka savo formą, be to yra kreivinio ryšio, kaip nagrinėjamo objekto grafikas. 2 priede yra pateiktas analitinės lygties Sėlių g. objektui parinkimas. 3 priede yra pateiktas parinktos analitinės lygties Sėlių g. objektui tikrinimas, o 5 priede yra pateiktas Sėlių g. objekto interpoliuotų duomenų regresinis modelis.

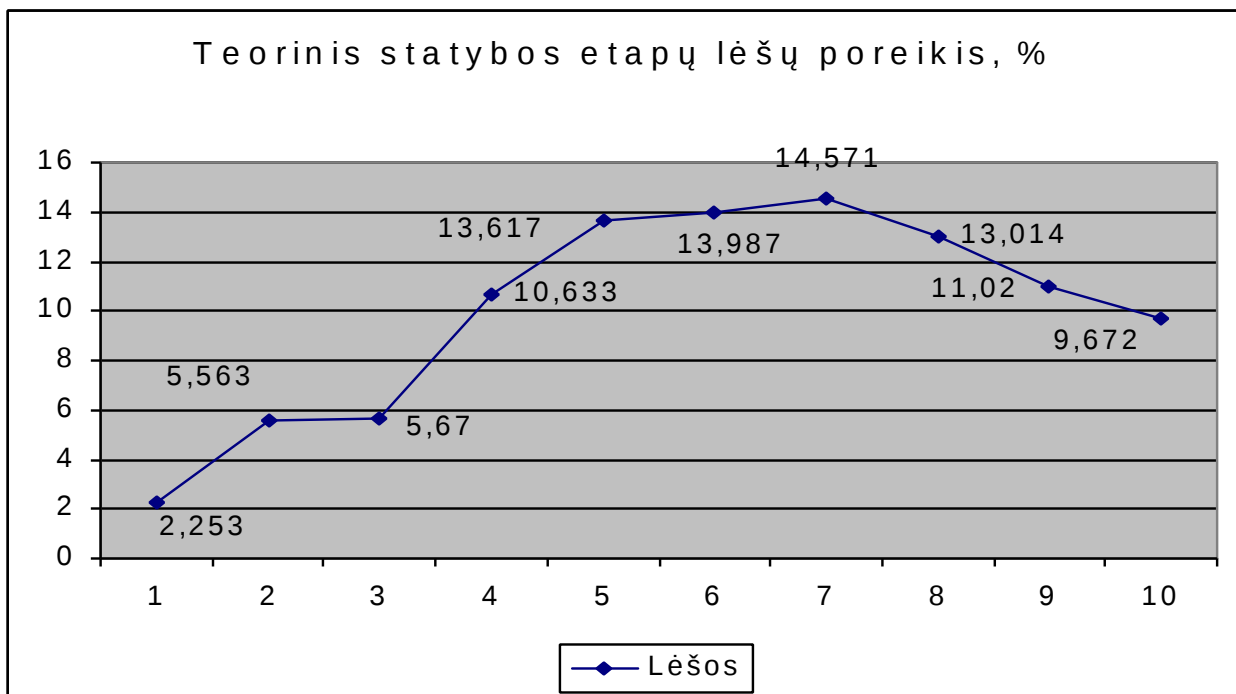
Vėliau buvo parinkta analitinio ryšio išraiška įvertinant sukaupią informaciją apie visus stebėtus pastatus.

$$\hat{y}_x = -68,05 \cdot \frac{1}{x^{0.5}} + 119,138 \cdot \frac{1}{x} + 9,123 \cdot \frac{1}{x^{1.5}} - 88,162 \cdot \frac{1}{x^2} + 43,989 \cdot \frac{1}{x^{2.5}} - 6,357 \cdot \frac{1}{x^3}.$$

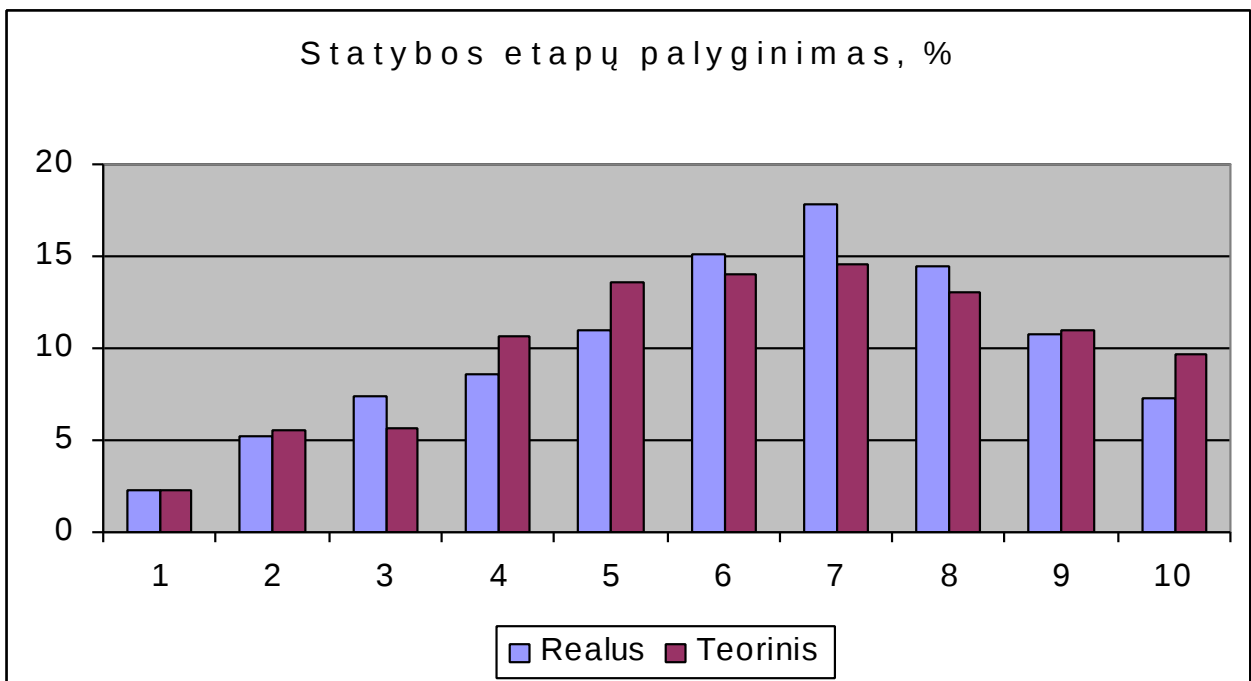
Vėliau buvo atliktas analitinio ryšio išraiškos palyginimas su empirine regresijos linija. 7 priede yra pateikti teorinio lėšų pasiskirstymo skaičiavimai. 9 lentelėje yra pateiktas teorinis lėšų pasiskirstymas statybos etapuose. O 19 paveiksle yra parodytas teorinis lėšų pasiskirstymo grafikas statybos etapuose. 20 paveiksle yra pavaizduotas empirinio ir analitinio ryšio palyginimas procentaliai.

9 lentelė. Teorinių lėšų pasiskirtymas statybos etapuose

Etapai	Lėšos, %
1	2,253
2	5,563
3	5,67
4	10,633
5	13,617
6	13,987
7	14,571
8	13,014
9	11,02
10	9,672
Σ	100%



19 pav. Teorinių lėšų pasiskirtymo statybos etapuose grafikas



20 pav. Empirinio ir analitinio ryšio statybos etapų palyginimas

Iš 20 paveikslo matosi, koks yra realaus ir teorinio lėšų poreikio pasiskirstymas. Pirmuose dviejuose statybos etapuose teorinės lėšos yra nežymiai didesnės už realias: pirmam etape skirtumas yra 0,023 proc., o antrame jau didesnis – 0,293 procento. Trečiame etape realios lėšos nuo teorinių skiriasi 1,77 punkto. Kituose dviejuose statybos etapuose teorinis lėšų poreikis yra žymiai padidėjęs: ketvirtame skirtumas tarp realių yra 2,043 proc., o penktame – 2,667 procento. Sekančiuose trijuose etapuose realus lėšų poreikis yra didesnis už teorinį: šeštame skiriasi 1,143 punkto, septintame – 3,259 punkto, o aštuntame etape skirtumas yra 1,446 punkto. Didžiausias skirtumas yra septintame etape, realus lėšų poreikis yra didesnis 3,259 proc. už teorinį. Priešpaskutiniame statybos etape realus lėšų poreikis mažėja 0,24 punkto. Paskutiniame etape teorinis lėšų poreikis yra didesnis 2,352 proc. už realų. Taigi lėšų poreikiai tarp empirinio ir teorinio pasiskirstymo statybos etapuose nesutampa.

Skaičiuojant empirinės priklausomybės koreliacinį koeficientą pagal 25 formulę, jo reikšmė yra 0,875. Ji yra pakankama ir tai rodo stiprią priklausomybę.

Skaičiuojamas koreliacinis koeficientas R:

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} \right)}}.$$

$$R = \sqrt{\frac{158,958}{\frac{2,845 \times 10^3}{10}}} = 0,747.$$

Analitinio ryšio (teorinio) koreliacinis koeficientas R yra 0,747. Šio koeficiento reikšmė yra pakankama. Ji reiškia, kad yra stipri koreliacija. Stipri koreliacija yra, kai koreliacinis koeficientas yra tarp 0,7 ir 0,9. Taigi ryšys tarp realaus ir teorinio objekto lėšų pasiskirstymo yra glaudesnis.

Matematinio modelio adekvatumas nustatomas pagal Fišerio (F) kriterijų. Fišerio (F) kriterijus skaičiuojamas pagal 48 formulę:

$$F = \frac{\frac{SSR}{k_2}}{\frac{SSE}{k_1}} = \frac{\frac{SSR}{p}}{\frac{SSE}{n-p-1}}.$$

Jeigu $F \geq F^{kr}_{(k_1; k_2; \alpha)}$, tai koreliacijos koeficientas nelygus nuliui. $F^{kr}_{(k_1; k_2; \alpha)}$ vertė priklauso nuo reikšmingumo lygmens α , $k_1 = n - p - 1$ ir $k_2 = p$, taigi $\alpha = 0,025$, $k_1 = 100 - 6 - 1 = 93$, $k_2 = 6$, $F^{kr}_{(93; 6; 0,025)} = 2,19$ [23].

$$F = \frac{\frac{1589}{6}}{\frac{1107}{(100 - 6 - 1)}} = \frac{264,8}{11,9} = 22,25.$$

Taigi matematinis modelis yra adekvatus, nes $F^{kr} = 2,19 < F = 22,25$.

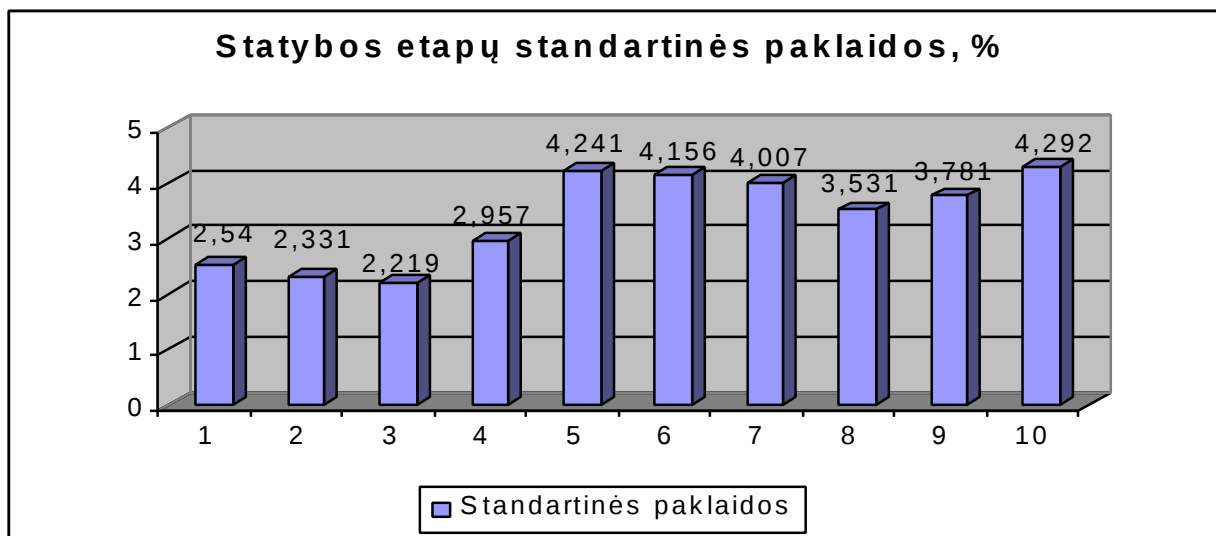
Skaičiuojama analitinio ryšio kiekvieno statybos etapo standartinė paklaida:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-1}}.$$

10 lentelėje yra pateiktos analitinio ryšio statybos etapų standartinės paklaidos, o 21 paveiksle jų grafikas. 7 priede yra pateikti analitinio ryšio statybos etapų standartinių paklaidų skaičiavimai.

10 lentelė. Analitinio ryšio statybos etapų standartinės paklaidos

Etapai	Standartinės paklaidos (s), %
1	2,54
2	2,331
3	2,219
4	2,957
5	4,241
6	4,156
7	4,007
8	3,531
9	3,781
10	4,292

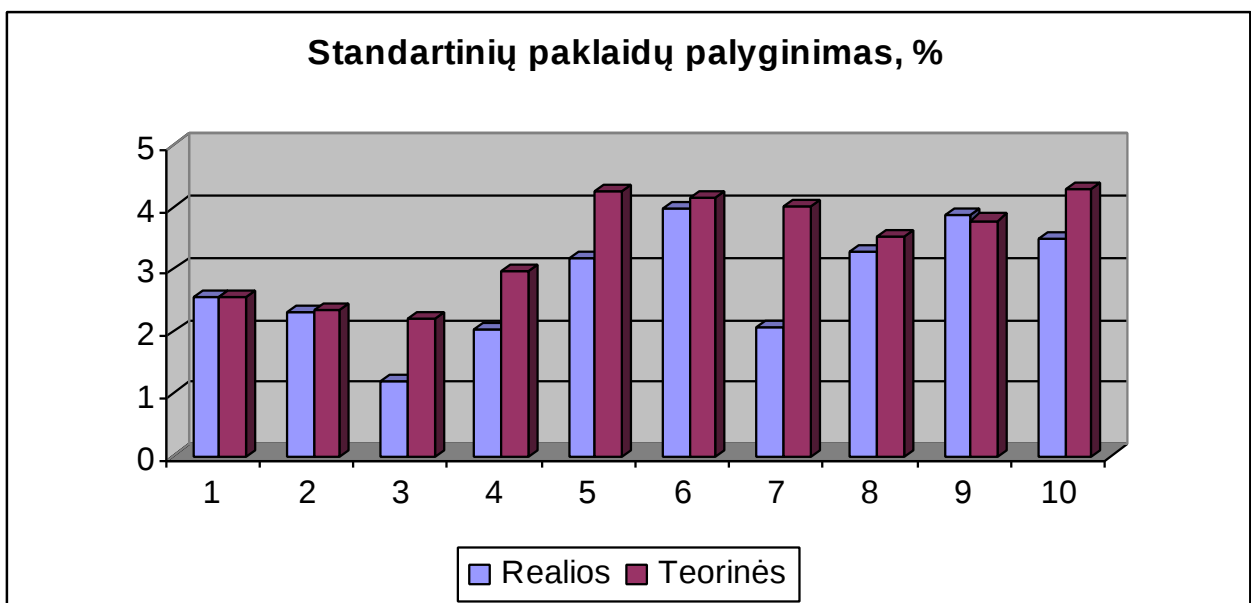


21 pav. Analitinio ryšio statybos etapų standartinių paklaidų grafikas

11 lentelėje yra pateiktos realios ir teorinės standartinės etapų paklaidos. Jos visai nesutampa, tik pirmo etapo yra vienodos. Visuose etapuose teorinės standartinės paklaidos yra didesnės už realias nuo 0,021 iki 1,941 procento, išskyrus aštuntą etapą. Septintame etape yra pats didžiausias skirtumas tarp teorinių ir realių standartinių paklaidų – 1,941 procento. Aštuntame etape realios standartinės paklaidos didesnės 0,099 punkto. 22 paveiksle yra parodytas empirinio ir analitinio ryšio statybos etapų standartinių paklaidų palyginimo grafikas.

11 lentelė. Empirinio ir analitinio ryšio etapų standartinių paklaidų palyginimas

Etapai	Realios standartinės paklaidos (s), %	Teorinės standartinės paklaidos (s), %
1	2,54	2,54
2	2,31	2,331
3	1,195	2,219
4	2,03	2,957
5	3,178	4,241
6	3,978	4,156
7	2,066	4,007
8	3,269	3,531
9	3,88	3,781
10	3,502	4,292



22 pav. Empirinio ir analitinio ryšio etapų standartinių paklaidų palyginimo grafikas

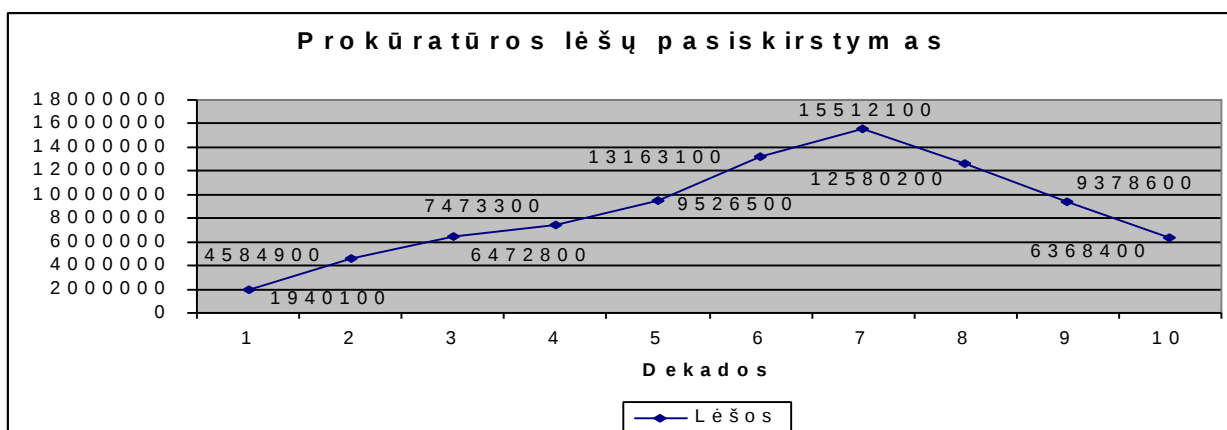
5. METODIKOS PRAKTINIO TAIKYMO UŽDAVINYS

Metodikos pritaikimui pasirinkau dabar statomą naują prokuratūrą, kuri bus pastatyta Rinktinės g. Lietuvos prokuratūros rūmų statybos trukmė bus 21 mėn. Darbai pradėti nuo 2006 metų lapkričio mėnesio ir bus vykdomi iki 2008 metų liepos mėnesio. Statybos kaina bus apie 87 mln. litų [18].

12 lentelėje yra parodytas realių lėšų pasiskirstymas pagal statybos etapus. 23 paveiksle yra pavaizduotas prokuratūros lėšų pasiskirstymo grafikas pagal statybos etapus.

12 lentelė. Lėšų pasiskirstymas pagal statybos etapų procentus

Dekados	%	Litai
1	2,23	1940100
2	5,27	4584900
3	7,44	6472800
4	8,59	7473300
5	10,95	9526500
6	15,13	13163100
7	17,83	15512100
8	14,46	12580200
9	10,78	9378600
10	7,32	6368400
Σ	100%	87000000 Lt



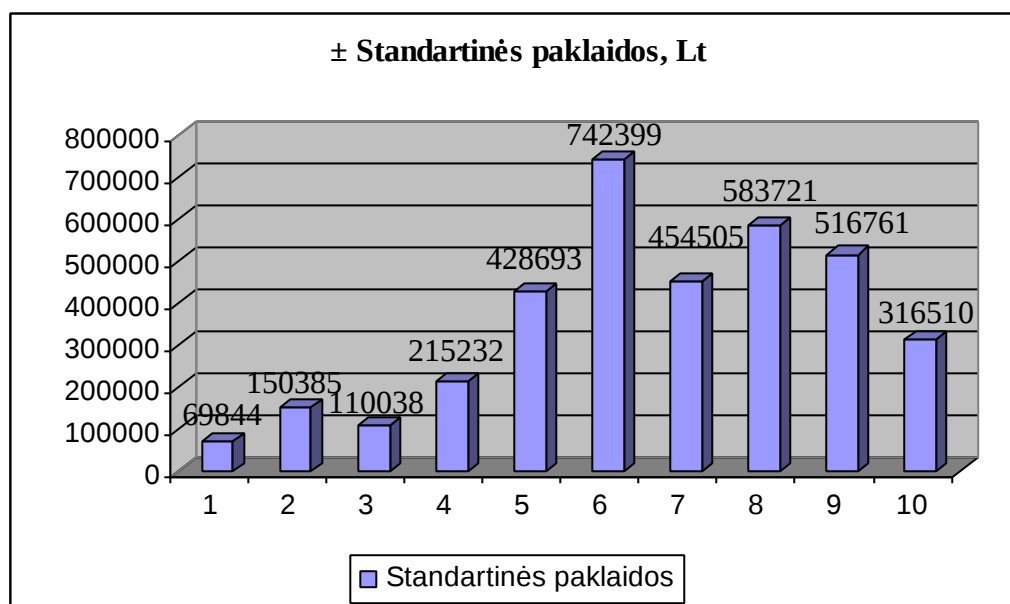
23 pav. Prokuratūros lėšų pasiskirstymas pagal statybos etapų procentus

Teorinės standartinės paklaidos yra didesnės už realias, todėl standartinės paklaidos yra

skaičiuojamos pagal realias standartines paklaidas. Pagal 8 lentelės duomenys, kiekvienam etapui yra skaičiuojama standartinė paklaida 85% tikimybės tikslumu nuo 1,42 standartinės paklaidos. 13 lentelėje yra pateiktas kiekvienam statybos etapui, lėšų pasiskirstymo poreikis nagrinėjam objektui, bei galimas lėšų trūkumas arba perteklius kiekvienam etapui. 24 paveiksle yra pavaizduotas prokuratūros lėšų standartinių paklaidų grafikas statybos etapams.

13 lentelė. Prokuratūros lėšų pasiskirstymo standartinės paklaidos litais

Etapai	Lėšos, Lt	± Standartinė paklaida %	± Standartinė paklaida, Lt
1	1940100	3,6	69844
2	4584900	3,28	150385
3	6472800	1,7	110038
4	7473300	2,88	215232
5	9526500	4,5	428693
6	13163100	5,64	742399
7	15512100	2,93	454505
8	12580200	4,64	583721
9	9378600	5,51	516761
10	6368400	4,97	316510



24 pav. Prokuratūros lėšų standartinės paklaidos statybos etapams

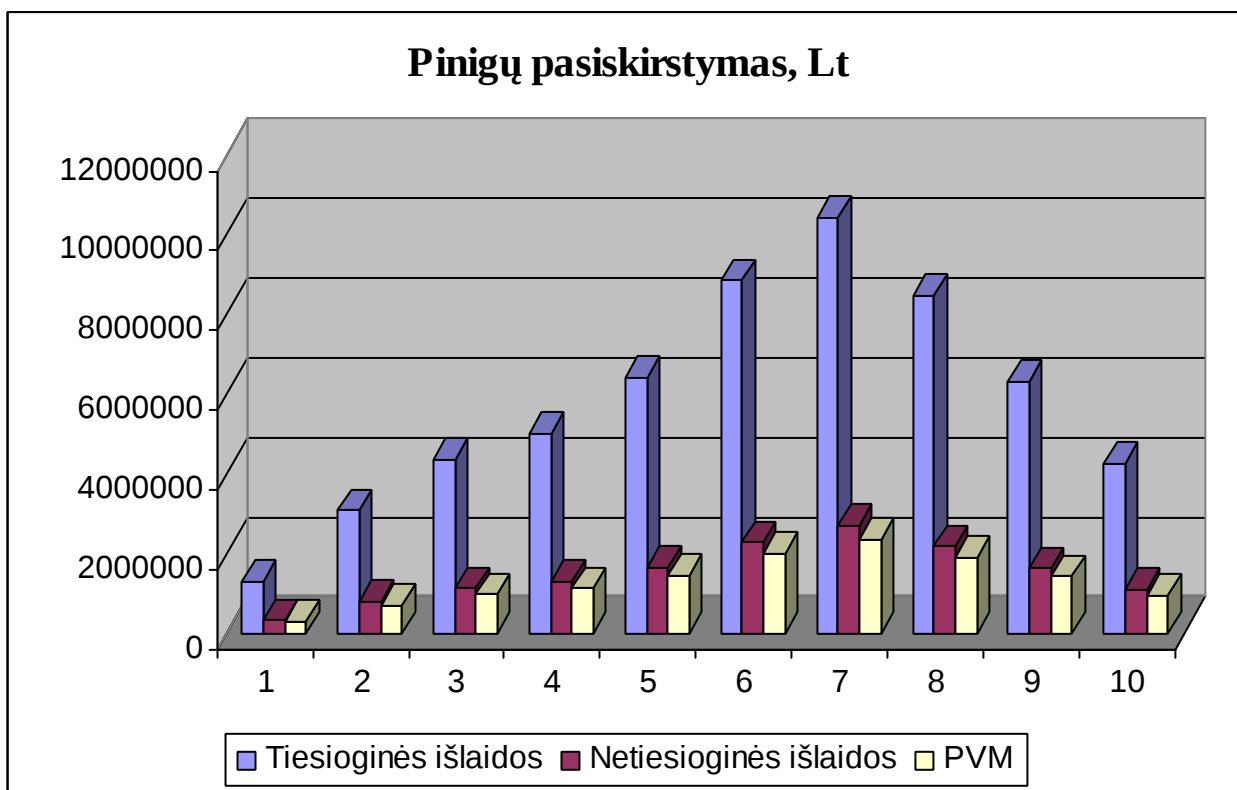
Skaičiuojamoji statybos kaina dabar yra orientuota į būtinųjų statybos sąnaudų, arba tiesioginių išlaidų, apskaičiavimą ir pagrindimą. Visos kitos statytojo (užsakovo) išlaidos, susijusios su statinio statyba, laikomos netiesioginėmis. Tiesiogines išlaidas sudaro darbams atlikti reikalingų materialinių ir darbo išteklių (statybos resursų), t. y. medžiagų, mechanizmų eksploatacijos ir darbo užmokesčio vertė, socialinio draudimo mokesčiai bei kitos su darbo vykdymu susijusios statybvietės įrengimo, eksploatavimo ir valdymo išlaidos. Yra nustatyta, kad orientacinės išlaidos statybvietei įrengti, eksploatuoti ir valdyti sudaro apie 10 proc. visos statybos darbų vertės [13].

Statytojo netiesiogines išlaidas sudaro kainos skirtumas tarp numatomos pasiūlymo (ar sutarties) kainos ir apskaičiuotų tiesioginių išlaidų. Apskaičiuojant skaičiuojamosios kainos netiesiogines išlaidas, atsižvelgiama į rangovo pridėtines išlaidas, kurios paprastai sudaro apie 45 proc., skaičiuojant nuo darbininkų darbo užmokesčio, taip pat numatomą rangovo (generalinio rangovo) pelną (iki 8 proc.), įskaitant riziką ir skatinamuosius mokėjimus [13].

8 priede yra pateiktos apskaičiuotos naujos prokuratūros statybos etapų sąmatinės vertės. Prokuratūros statybos bendra vertė procentaliai yra pasiskirsčius taip: tiesioginės išlaidos – 67,3 proc., netiesioginės išlaidos – 17,45 proc. ir pridėtinės vertės mokestis – 15,25 procento. Jei be pridėtinės vertės mokesčio, tai statybos kaina procentaliai yra: tiesioginės išlaidos – 79,4 proc., o netiesioginės išlaidos – 20,6 procento. 14 lentelėje yra parodytas prokuratūros statybos etapų išlaidų poreikis litais. 25 paveiksle pavaizduotas statybos etapų poreikio išlaidų grafikas.

14 lentelė. Prokuratūros statybos etapų išlaidų poreikis litais

Dekados	Tiesioginės išlaidos, Lt	Netiesioginės išlaidos, Lt	PVM, Lt
1	1305896	338593	296008
2	3086127	800173	699534
3	4356887	1129656	987578
4	5030330	1304267	1140227
5	6412351	1662598	1453491
6	8860171	2297271	2008340
7	10441301	2707227	2366735
8	8467820	2195542	1919405
9	6312801	1636787	1430926
10	4286615	1111437	971649
Σ	58560299	15183551	13273893



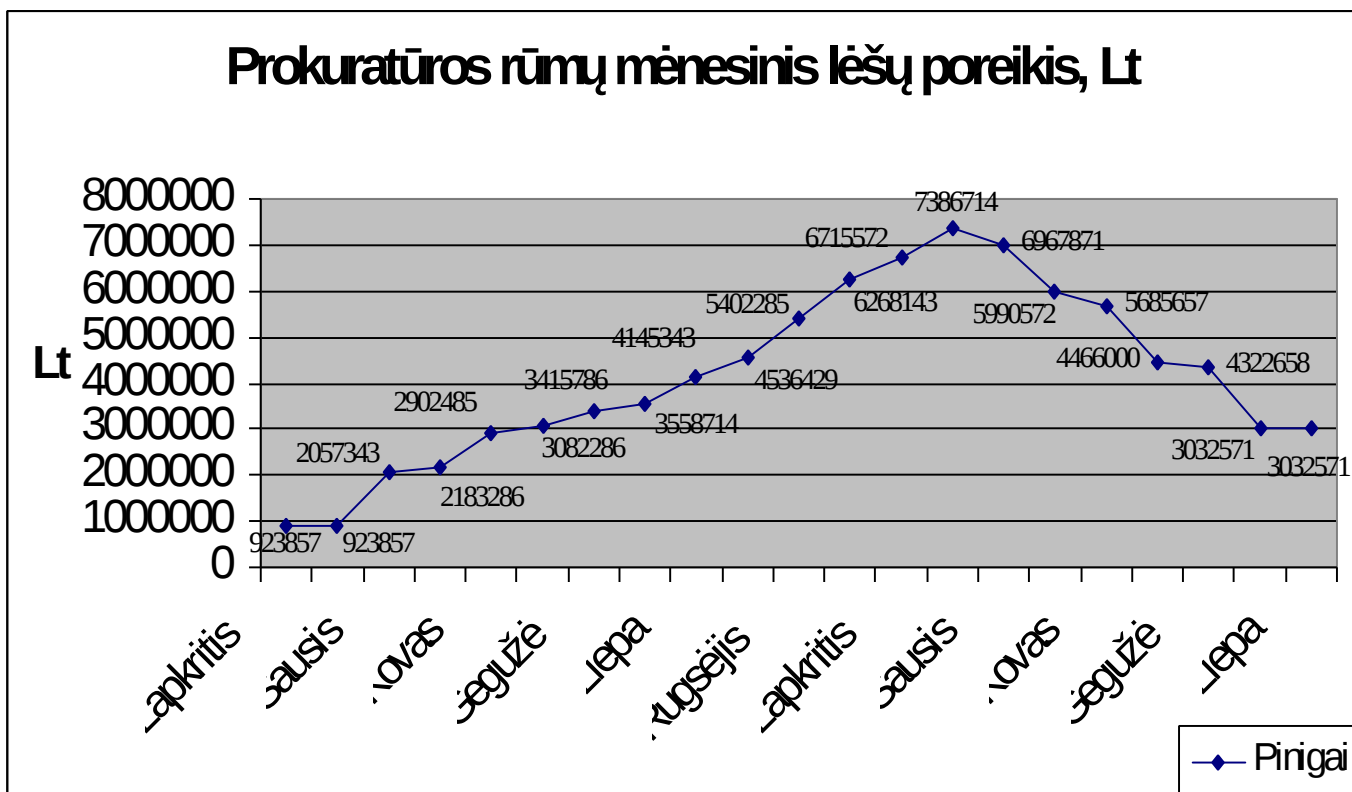
25 pav. Prokuratūros statybos etapų išlaidų poreikio grafikas

15 lentelėje yra pateiktas Lietuvos prokuratūros rūmų mėnesinis lėšų pasiskirstymas. 9 priede yra pateikti Lietuvos prokuratūros rūmų mėnesinio lėšų pasiskirstymo skaičiavimai. 26 paveiksle yra pateiktas Lietuvos prokuratūros rūmų mėnesinio lėšų pasiskirstymo grafikas.

15 lentelė. Lietuvos prokuratūros rūmų mėnesinis lėšų pasiskirstymas

Mėnesiai	Lėšos
Lapkritis	923857
Gruodis	923857
Sausis	2057343
Vasaris	2183286
Kovas	2902485
Balandis	3082286
Gegužė	3415786
Birželis	3558714
Liepa	4145343
Rugpjūtis	4536429

Rugsėjis	5402285
Spalis	6268143
Lapkritis	6715572
Gruodis	7386714
Sausis	6967871
Vasaris	5990572
Kovas	5685657
Balandis	4466000
Gegužė	4322658
Birželis	3032571
Liepa	3032571



26 pav. Lietuvos prokuratūros rūmų mėnesinio lėšų pasiskirstymo grafikas

6. IŠVADOS

Analizė buvo atlikta su 10 objektų, kuriuos statė statybos įmonės Vilniaus mieste.

1. Statyba buvo suskirstyta į 10 statybos etapų, ir empiriškai buvo įvertinta kiekvieno statybos etapo sąmatinė vertė procentais: 1 etape – 2,23%, 2 etape – 5,27%, 3 etape – 7,44%, 4 statybos etape – 8,59%, 5 etape – 10,95% , 6 etape – 15,13% , 7 etape – 17,83%, 8 etape – 14,46%, 9 etape – 10,78% ir paskutiniame statybos etape – 7,32%.

2. Empirinės regresijos linijos koreliacijos koeficientas yra 0,854. Jo reikšmė pakankama, kad būtų galima įrodyti, jog resursų poreikis priklausomas nuo statybos etapo.

3. Analitinei ryšio išraiškai nustatyti buvo pasirinktos tokios priklausomybės: tiesinė, antrojo laipsnio parabolė bei hiperbolė.

4. Labiausiai tikusi ryšio išraiška yra hiperbolinės formos:

$$\hat{y}_x = -68,05 \cdot \frac{1}{x^{0.5}} + 119,138 \cdot \frac{1}{x} + 9,123 \cdot \frac{1}{x^{1.5}} - 88,162 \cdot \frac{1}{x^2} + 43,989 \cdot \frac{1}{x^{2.5}} - 6,357 \cdot \frac{1}{x^3}.$$

5. Lyginant empirinės regresijos liniją su hiperboline analitine išraiška, gauta, kad koreliacijos koeficientas $R = 0,875$, tai rodo pakankamai stiprią priklausomybę.

6. Lyginant hiperbolinę analitinę regresijos liniją su visų objektų lėšų poreikio grafikais, nustatyta, kad regresijos koeficientas yra 0,747. Jo reikšmė yra pakankama, kad įrodyti tarp jų esantį ryšį.

7. Apskaičiuotas Fišerio kriterijus rodo, kad matematinis modelis yra adekvatus, nes $F^{kr} = 2,19 < F = 22,25$. Tai rodo, kad koreliacijos koeficientas yra nelygus nuliui.

8. Sukurta metodika pritaikyta Lietuvos prokuratūros rūmų lėšų poreikiui atitinkamam statybos etapui įvertinti.

Atlikus skaičiavimus nustatyta, kad labiausiai tikėtinas lėšų poreikis Lietuvos prokuratūros rūmams yra: 1 etape – 1940100 Lt, 2 etape – 4584900 Lt, 3 etape – 6472800 Lt, 4 etape – 7473300 Lt, 5 etape – 9526500 Lt, 6 etape – 13163100 Lt, 7 etape – 15512100 Lt, 8 etape – 12580200 Lt, 9 etape – 9378600 Lt, 10 etape – 6368400 Lt.

Įvertinus galimas paklaidas, lėšų poreikis su 85% tikimybe būtų: 1 etape nuo 1870256 Lt iki 2009944 Lt, 2 etape nuo 44344515 Lt iki 4735285 Lt, 3 etape nuo 6362762 Lt iki 6582838 Lt, 4 etape nuo 7258068 Lt iki 7688532 Lt, 5 etape nuo 9097807 Lt iki 9955193 Lt, 6 etape nuo 12420701 Lt iki 13905499 Lt, 7 etape nuo 15057595 Lt iki 15966605 Lt, 8 etape nuo 11996479 Lt iki 13163921 Lt, 9 etape nuo 8861839 Lt iki 9895361 Lt, 10 etape nuo 6051890 Lt iki 6684910 Lt.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. Bartosevičienė V. Ekonominė statistika. – Kaunas: Technologija, 2004, p. 75 – 79.
2. Chang T. C and William Ibbs C. Priority ranking — a fuzzy expert system for priority decision making in building construction resource scheduling. Building and Environment, Volume 30, Issue 2, April 1995, Pages 197 – 207.
3. Davies Owen L. and Goldsmith Peter L. Statistical methods in research and production. 2000, p. 238 – 252.
4. Dawood N. N. Scheduling in the precast concrete industry using the simulation modelling approach. Building and Environment, Volume 30, Issue 2, April 1995, Pages 197 – 207.
5. Ginevičius R. Statybos kaina ir išteklių ekonomika. – Vilnius: Technika, 2005. 6 p.
6. Gourieroux C, Monfort A. Statistics and econometric models. 1995. 125 p.
7. Gudonavičiūtė – Bartosevičienė V. Ekonominė statistika. – Kaunas: Technologija, 2 dalis. 1997, p. 149 – 174.
8. Harris Frank and McCaffer Ronald. Modern Construction Management. Great Britain, Oxford: Blackwell Science Ltd, 2001. 588 p.
9. Holt Gary D. Applying cluster analysis to construction contractor classification. Building and Environment, Volume 31, Issue 6, November 1996, Pages 557 – 568.
10. Interpoliacijos apibrėžimas. [Žiūrėta 2007-04-10]. Prieiga per internetą:
<http://images.katalogas.lt/maleidykla/>
11. Juodis A. Statybos procesų ekonominis matematinis modeliavimas ir optimizavimas. Kaunas: Technologija, 1997. 26 p.
12. Juodis A. Statybos procesų matematinis modeliavimas ir optimizavimas. – Kaunas: Technologija, 2005, p. 83 – 96.
13. Kainų apskaičiavimo naujovės. [Žiūrėta 2007-05-05]. Prieiga per internetą:
http://www.sistela.lt/index.php/aktualijos/straipsniai/kainu_apskaiciavimo_naujoves/286
14. Kėdaitis V. Koreliacinės – regresinės analizės pagrindai. – Vilnius: Technika, 2005. 35 p.
15. Krušinskas V. Statybos technologija. Vilnius: Technika, 1992. 5 p.
16. Kunigilytė L. ir kiti. Bendroji statistikos teorija. – Vilnius: Mintis, 1986, p. 227 – 247.
17. Львовский, Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. Москва: Высшая школа, 1988. 239 p.
18. Lietuvos prokuratūrų rūmai. [Žiūrėta 2007-04-15]. Prieiga per internetą:
<http://tinkle.miestai.net/showthread.php?t=2781&page=3>

19. Lock Dennis. Project Management. Great Britain: University Press, Cambridge, 1996. 522 p.
20. Martinkus B. Ekonomikos pagrindai. – Kaunas: Technologija, 1997. 156 p.
21. Marica Silvana, Cetean Valentina and Lazaroiu Gheorghe. Unitary management and environmental performance by monitoring and protection of mineral resources for construction materials from Romania. Building and Environment, In Press, Corrected Proof, Available online 30 March 2007, p 15 – 20.
22. Pabedinskaitė A. Kiekybiniai sprendimų metodai. – Kaunas: Technologija, 1 dalis. 2005, p. 13 – 37.
23. Prem S. Mann. Statistics for business and economics. 2005, 844 p.
24. Proverbs D. G., Holt G. D. and Olomolaiye P. O. A method for estimating labour requirements and costs for international construction projects at inception. Building and Environment, Volume 34, Issue 1, 1 January 1999, Pages 43 – 48.
25. Proverbs D. G., Holt G. D. and Olomolaiye P. O. Factors impacting construction project duration: a comparison between France, Germany and U.K. Building and Environment, Volume 34, Issue 2, 1 March 1998, Pages 197 – 204.
26. Puškorius S. Matematiniai metodai vadyboje. Vilnius: TEV, 2001. 386 p.
27. Robyn K. and Keith H. Building constructive innovation networks: role of relationship management. Journal of Construction Engineering & Management; May 2007, Vol. 133 Issue 5, p 364 – 373.
28. Sakalauskas V. Statistika su Statistica. Vilnius: Margi raštai, 1998, p. 128 – 148.
29. STR 3.01.01:2002. Statinių statybos resursų poreikio skaičiavimo tvarka.
30. Tamošaitis R. Projektų vadybos metodiniai nurodymai. Vilnius: Technika, 2004. 14 p.
31. Valavičius V. Matematinis modeliavimas ir eksperimentų planavimas. Vilnius: Technika, 2006. 64 p.
32. Valkauskas R. Statistika. Vilnius, 2004, p. 60 – 69.
33. Vaziri, Kabeh, Carr and Paul G. Project Planning for Construction under Uncertainty with Limited Resources. Journal of Construction Engineering & Management; April 2007, Vol. 133 Issue 4, p 268 – 276.
34. UAB „Junesta“ Lazdinėlių g. objekto duomenys.
35. UAB „Kamintras“ Taikos g. objekto duomenys.
36. UAB „Kasyba“ Ukmergės g. objekto duomenys.
37. UAB „KRS“ Justiniškių g. objekto duomenys.

- 38. UAB „Luidas“ Gineitiškėse objekto duomenys.
- 39. UAB „Masyvas“ Karaliaučiaus g. objekto duomenys.
- 40. UAB „Namų statyba“ Sėlių g. objekto duomenys.
- 41. UAB „Ukmergės statyba“ Žygio g. objekto duomenys.
- 42. UAB „Veikmė“ Verkių g. objekto duomenys.

PRIEDAI

Duomenys skaičiavimams

1 objektas 1 namas Sėlių g. 29/2 51 butas UAB „Namų statyba“

2005	2006				
Gruodis	Sausis	Vasaris	Kovas	Balandis	Gegužė
36118	218890	646836	749223	768568	1047430

2006						
Birželis	Liepa	Rugpjūtis	Rugsėjis	Spalis	Lapkritis	Iš viso:
1405446	1992467	1414935	1047316	946519	686954	10960702 Lt

2 objektas 1 namas Verkių g. 7 40 butų UAB „Veikmė“

2004			2005			
Rugsėjis	Spalis	Lapkritis	Gruodis	Sausis	Vasaris	Kovas
38335	338794	369398	400324	440603	542480	802324

2005							
Balandis	Gegužė	Birželis	Liepa	Rugpjūtis	Rugsėjis	Spalis	Iš viso:
1002584	907047	596962	296554	153478	92310	65144	6046337 Lt

3 objektas 1 namas Taikos g. 263 D 48 butai UAB „Kamintras“

2005		2006		
Lapkritis	Gruodis	Sausis	Vasaris	Kovas
35225	225987	658854	852562	873235

2006					
Balandis	Gegužė	Birželis	Liepa	Rugpjūtis	Iš viso:
1154465	1673890	2015189	1584325	906693	9980425 Lt

4 objektas 1 namas Žygio g. 93 45 butai UAB „Ukmergės statyba“

2006					
Vasaris	Kovas	Balandis	Gegužė	Birželis	Liepa
27560	314896	780951	895611	925489	1248631

2006					
Rugpjūtis	Rugsėjis	Spalis	Lapkritis	Gruodis	Iš viso:
1591683	1946738	1138697	748161	214957	9833374 Lt

5, 6 objektas 2 namai Lazdinėlių g. 51 butas ir 38 butai UAB „Junesta“

2006					2007				
Namas	Rugpjūtis	Rugsėjis	Spalis	Lapkritis	Gruodis	Sausis	Vasaris	Kovas	Balandis
1	200000	430000	524000	450000	460000	350000	423000	483000	674000
2	100000	300000	420200	350000	340000	300000	334000	361000	500000

2007								
Namas	Gegužė	Birželis	Liepa	Rugpjūtis	Rugsėjis	Spalis	Lapkritis	Iš viso:
1	901000	1103000	915000	890000	800000	653000	540000	9796000 Lt
2	610000	879000	917000	700000	680000	617000	500000	7908200 Lt

7 objektas 1 namas Justiniškių g. 146 48 butai UAB „KRS“

2006						
Sausis	Vasaris	Kovas	Balandis	Gegužė	Birželis	
40590	230689	698534	989762	1048962	1386471	

2006					
Liepa	Rugpjūtis	Rugsėjis	Spalis	Lapkritis	Iš viso:
1698742	1871563	1200431	538104	214089	9917937 Lt

8 objektas 1 namas Karaliaučiaus g. 16 58 butai UAB „Masyvas“

2006				
Sausis	Vasaris	Kovas	Balandis	Gegužė
28956	316564	619982	941672	1206843

2006					
Birželis	Liepa	Rugpjūtis	Rugsėjis	Spalis	Iš viso:
1512552	1989230	1431291	1125049	913467	10085606 Lt

9 objektas 1 namas Ukmergės g. 306A 66 butai UAB „Kasyba“

2005	2006				
Gruodis	Sausis	Vasaris	Kovas	Balandis	Gegužė
34152	319789	557796	729475	1035130	1486566

2006					
Birželis	Liepa	Rugpjūtis	Rugsėjis	Spalis	Iš viso:
1998216	1416328	1004805	852315	767957	10202529 Lt

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 objektas 7 namai Gineitiškėse po 64 butus UAB „Luidas“

2005			2006				
Namas	Lapkritis	Gruodis	Sausis	Vasaris	Kovas	Balandis	Gegužė
1	647895	400104	733869	330113	393521	520431	652168
2	645985	402131	732617	331621	393416	518820	653012
3	648536	403153	731210	330124	391983	518638	651891
4	648792	401283	729463	331858	395529	519691	651786
5	645687	405165	719062	336471	399126	520346	652531
6	649248	402864	730120	330658	396704	518789	650949
7	655406	395012	729905	332161	398425	521124	650174
Iš viso:	4541549	2809712	5106246	2323006	2768704	3637839	4562511

2006							
Namas	Birželis	Liepa	Rugpjūtis	Rugsėjis	Spalis	Lapkritis	Iš viso:
1	798126	1069791	1136413	1236184	1013368	741315	9673298 Lt
2	798011	1072169	1134568	1236847	1012956	740232	9672385 Lt
3	796956	1075286	1135984	1240945	1014361	742826	9681893 Lt
4	796413	1074078	1135045	1237636	1013285	742292	9677151 Lt
5	795795	1077091	1136031	1238501	1011667	743025	9680498 Lt
6	795189	1075144	1136128	1236325	1014138	743964	9680220 Lt
7	794403	1074989	1131146	1237014	1013222	742387	9675368 Lt
Iš viso:	5574893 Lt	7518548 Lt	7945315 Lt	8663452 Lt	7092997 Lt	5196041 Lt	67740813 Lt

Analitinės lygties Sėlių g. objektui parinkimas

Nustatomos regresinės lygtys, kurios labiausiai apibrėžtų nagrinėjamų objektų mėnesinį lėšų poreikio pasiskirstymą. Nustatoma pagal tiesinį ir kreivinį ryšį. Labiausiai tinkančios yra kreivinio ryšio regresinės lygtys. Patikrinimą darau pagal tiesinės, antrojo laipsnio parabolės ir hiperbolės lygtis. Nagrinėjamas Sėlių g. 29/2 objekto lėšų poreikio mėnesinis pasiskirstymas.

Tiesė

Tiesinio ryšio atveju ($\hat{y}_x = a_0 + a_1x$) šį kriterijų galima patenkinti sprendžiant normalinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum x = \sum y \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 = \sum xy \end{cases}$$

n	x	y	xy	x ²
1	0,083333	36118	3009,82	0,00694439
2	0,166666	218890	36481,5	0,02777756
3	0,249999	646836	161708	0,0624995
4	0,333332	749223	249740	0,11111022
5	0,416665	768568	320235	0,17360972
6	0,499998	1047430	523713	0,249998
7	0,583331	1405446	819840	0,34027506
8	0,666664	1992467	1328306	0,44444089
9	0,749997	1414935	1061197	0,5624955
10	0,83333	1047316	872760	0,69443889
11	0,916663	946519	867639	0,84027106
12	0,999996	686954	686951	0,999992
	Σx	Σy	Σxy	Σx²
	6,499974	10960702	6931581	4,51385278

$$a_0 = \frac{(\sum y - a_1 \cdot \sum x)}{n};$$

$$\frac{(\sum y - a_1 \cdot \sum x)}{n} \cdot \sum x + a_1 \cdot \sum x^2 - \sum xy = 0;$$

$$\sum y \cdot \sum x - a_1 \cdot \sum x \cdot \sum x + a_1 \cdot \sum x^2 \cdot n - \sum xy \cdot n = 0;$$

$$a_1 \cdot \sum x^2 \cdot n - a_1 \cdot \sum x \cdot \sum x = \sum xy \cdot n - \sum y \cdot \sum x;$$

$$a_1 \cdot (\sum x^2 \cdot n - \sum x \cdot \sum x) = \sum xy \cdot n - \sum y \cdot \sum x;$$

$$a_1 = \frac{\sum xy \cdot n - \sum y \cdot \sum x}{\sum x^2 \cdot n - \sum x \cdot \sum x}.$$

Taigi paskaičiuoti koeficientai a_1 ir a_0 yra:

$$a_1 = 1001521;$$

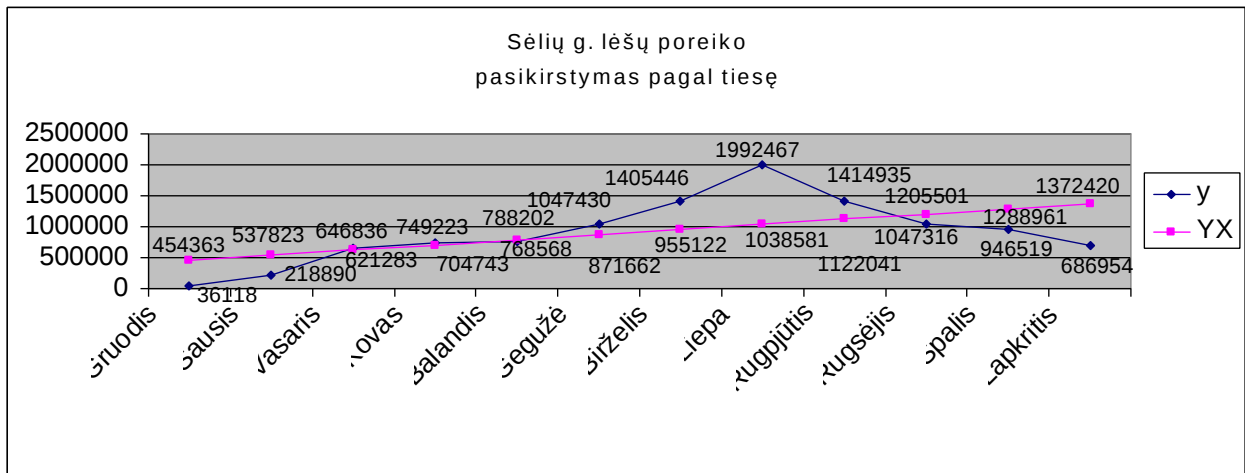
$$a_0 = 370903,4.$$

Tiesinio ryšio atveju regresijos lygtis bus tokia:

$$\hat{y}_x = 370903,4 + 1001521x.$$

Realaus ir teorinio lėšų poreikio mėnesinis pasiskirstymas

Mėnesiai	y	y_x
Gruodis	36118	454363
Sausis	218890	537823
Vasaris	646836	621283
Kovas	749223	704743
Balandis	768568	788202
Gegužė	1047430	871662
Birželis	1405446	955122
Liepa	1992467	1038581
Rugpjūtis	1414935	1122041
Rugsėjis	1047316	1205501
Spalis	946519	1288961
Lapkritis	686954	1372420
Σ	10960702	10960702



Realaus ir teorinio lėšų poreikio pasiskirstymo grafikas pagal tiesę

Matosi, kad lėšos yra pasiskirsčiusios pagal tiesę, tačiau tiesinė regresijos lygtis yra netinkama, nes čia turi būti kreivinis ryšys.

Antrojo laipsnio parabolė

Kai y ir x priklausomybė išreiškiama antrojo laipsnio parabolės lygtimi ($\hat{y}_x = a_0 + a_1x + a_2x^2$) jos parametrai apskaičiuojami sprendžiant normalinių lygčių sistemą.

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 = \sum y \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 = \sum yx \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 = \sum yx^2 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{\sum y - a_1 \cdot \sum x - a_2 \sum x^2}{n};$$

$$\sum y \sum x - \sum x a_1 \sum x - \sum x a_2 \sum x^2 + na_1 \sum x^2 + na_2 \sum x^3 = n \sum yx;$$

$$na_1 \sum x^2 - \sum x a_1 \sum x = n \sum yx - \sum y \sum x + \sum x a_2 \sum x^2 - na_2 \sum x^3;$$

$$a_1 = \frac{n \cdot \sum yx - \sum y \cdot \sum x + \sum x \cdot a_2 \cdot \sum x^2 - n \cdot a_2 \cdot \sum x^3}{n \cdot \sum x^2 - \sum x \sum x}.$$

n	x	y	yx	x ²	x ³	x ⁴	yx ²
1	0,083333	36118	3009,821	0,006944389	0,000579	4,8225E-05	250,8174379
2	0,166666	218890	36481,52	0,027777556	0,00463	0,00077159	6080,229136
3	0,249999	646836	161708,4	0,0624995	0,015625	0,00390619	40426,92658
4	0,333332	749223	249740	0,111110222	0,037037	0,01234548	83246,33403
5	0,416665	768568	320235,4	0,173609722	0,072337	0,03014034	133430,877
6	0,499998	1047430	523712,9	0,249998	0,124999	0,062499	261855,4051
7	0,583331	1405446	819840,2	0,340275056	0,198493	0,11578711	478238,2157
8	0,666664	1992467	1328306	0,4444440889	0,296293	0,1975277	885533,8046
9	0,749997	1414935	1061197	0,5624955	0,42187	0,31640119	795894,5703
10	0,83333	1047316	872759,8	0,694438889	0,578697	0,48224537	727296,9594
11	0,916663	946519	867638,9	0,840271056	0,770245	0,70605545	795332,5192
12	0,999996	686954	686951,3	0,999992	0,999988	0,999984	686948,5044
n	Σx	Σy	Σxy	Σx ²	Σx ³	Σx ⁴	Σyx ²
12	6,499974	10960702	6931581	4,513852778	3,520791	2,92771164	4894535,163

$$\begin{aligned} & \Sigma x^2(\Sigma y - a_1 \Sigma x - a_2 \Sigma x^2)/n + \Sigma x^3(n \Sigma yx - na_2 \Sigma x^3 + \Sigma x a_2 \Sigma x^2 - \Sigma y \Sigma x)/(n \Sigma x^2 - \Sigma x \Sigma x) + a_2 \Sigma x^4 = \Sigma yx^2; \\ & (\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x^2 a_1 \Sigma x - \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2)(n \Sigma x^2 - \Sigma x \Sigma x) + n(\Sigma x^3 n \Sigma yx - \Sigma x^3 na_2 \Sigma x^3 + \Sigma x^3 \Sigma x a_2 \Sigma x^2 - \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x) \\ & + na_2 \Sigma x^4(n \Sigma x^2 - \Sigma x \Sigma x) = n \Sigma yx^2(n \Sigma x^2 - \Sigma x \Sigma x); \\ & \Sigma x^2 \Sigma y n \Sigma x^2 - \Sigma x^2 a_1 \Sigma x n \Sigma x^2 - \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \Sigma x + \Sigma x^2 a_1 \Sigma x \Sigma x \Sigma x + \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x + \\ & n \Sigma x^3 n \Sigma yx - n \Sigma x^3 n a_2 \Sigma x^3 + n \Sigma x^3 \Sigma x a_2 \Sigma x^2 - n \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x + na_2 \Sigma x^4 n \Sigma x^2 - na_2 \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x = n \Sigma yx^2 n \Sigma x^2 - \\ & n \Sigma yx^2 \Sigma x \Sigma x; \\ & \Sigma x^2 a_1 \Sigma x \Sigma x \Sigma x - \Sigma x^2 a_1 \Sigma x n \Sigma x^2 + \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma x^3 na_2 \Sigma x^3 + n \Sigma x^3 \Sigma x a_2 \Sigma x^2 - \\ & n \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x + na_2 \Sigma x^4 n \Sigma x^2 - na_2 \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x = n \Sigma yx^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma x^2 - n \Sigma yx \Sigma x \Sigma x + \Sigma x^2 \Sigma y n \Sigma x^2 - \\ & \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \Sigma x + n \Sigma yx n \Sigma x^3. \end{aligned}$$

Vietoj a_1

$$\begin{aligned} & \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x (n \Sigma yx - na_2 \Sigma x^3 + \Sigma x a_2 \Sigma x^2 - \Sigma y \Sigma x) / (n \Sigma x^2 - \Sigma x \Sigma x) - \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 (n \Sigma yx - na_2 \Sigma x^3 + \\ & \Sigma x a_2 \Sigma x^2 - \Sigma y \Sigma x) / (n \Sigma x^2 - \Sigma x \Sigma x); \\ & \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x n \Sigma yx - \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x na_2 \Sigma x^3 + \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x a_2 \Sigma x^2 - \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma y \Sigma x - \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 n \Sigma yx + \\ & \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 na_2 \Sigma x^3 - \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 \Sigma x a_2 \Sigma x^2 + \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x + \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 - \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \\ & \Sigma x \Sigma x - \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 + \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - n \Sigma x^3 na_2 \Sigma x^3 n \Sigma x^2 + n \Sigma x^3 na_2 \Sigma x^3 \Sigma x \Sigma x + \\ & n \Sigma x^3 \Sigma x a_2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma x^3 \Sigma x a_2 \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - n \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x n \Sigma x^2 + n \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x \Sigma x \Sigma x + na_2 \Sigma x^4 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - \\ & na_2 \Sigma x^4 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - na_2 \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + na_2 \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x = n \Sigma yx^2 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma yx^2 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - \\ & n \Sigma yx^2 \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + n \Sigma yx^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x + \Sigma x^2 \Sigma y n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - \Sigma x^2 \Sigma y n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x; \\
& \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x a_2 \Sigma x^2 - \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x n a_2 \Sigma x^3 + \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 n a_2 \Sigma x^3 - \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x - \\
& \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 + \Sigma x^2 a_2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - n \Sigma x^3 n a_2 \Sigma x^3 n \Sigma x^2 + n \Sigma x^3 n a_2 \Sigma x^3 \Sigma x \Sigma x + \\
& n \Sigma x^3 \Sigma x a_2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma x^3 \Sigma x a_2 \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x + n a_2 \Sigma x^4 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n a_2 \Sigma x^4 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - n a_2 \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 \\
& + n a_2 \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x = \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma y \Sigma x - \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x n \Sigma y x + \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 n \Sigma y x - \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \\
& + n \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x n \Sigma x^2 - n \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x \Sigma x \Sigma x + n \Sigma y x^2 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma y x^2 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - n \Sigma y x^2 \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + \\
& n \Sigma y x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x + \Sigma x^2 \Sigma y n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - \Sigma x^2 \Sigma y n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x; \\
& a_2 (\Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x^2 - \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^3 + \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 n \Sigma x^3 - \Sigma x^2 \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x - \Sigma x^2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 + \\
& \Sigma x^2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - n \Sigma x^3 n \Sigma x^3 n \Sigma x^2 + n \Sigma x^3 n \Sigma x^3 \Sigma x \Sigma x + n \Sigma x^3 \Sigma x \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma x^3 \Sigma x \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x + \\
& n \Sigma x^4 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma x^4 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - n \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + n \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x) = \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma y \Sigma x - \\
& \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x n \Sigma y x + \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 n \Sigma y x - \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x + n \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x n \Sigma x^2 - n \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x \Sigma x \Sigma x + \\
& n \Sigma y x^2 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma y x^2 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - n \Sigma y x^2 \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + n \Sigma y x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x + \Sigma x^2 \Sigma y n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - \\
& \Sigma x^2 \Sigma y n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x; \\
& a_2 = (\Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma y \Sigma x - \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x n \Sigma y x + \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 n \Sigma y x - \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x + n \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x n \Sigma x^2 \\
& - n \Sigma x^3 \Sigma y \Sigma x \Sigma x \Sigma x + n \Sigma y x^2 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma y x^2 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - n \Sigma y x^2 \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + n \Sigma y x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x + \\
& \Sigma x^2 \Sigma y n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - \Sigma x^2 \Sigma y n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + \Sigma x^2 \Sigma y \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x) / (\Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x^2 - \\
& \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^3 + \Sigma x^2 \Sigma x n \Sigma x^2 n \Sigma x^3 - \Sigma x^2 \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x - \Sigma x^2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 + \Sigma x^2 \Sigma x^2 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - \\
& n \Sigma x^3 n \Sigma x^3 n \Sigma x^2 + n \Sigma x^3 n \Sigma x^3 \Sigma x \Sigma x + n \Sigma x^3 \Sigma x \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - n \Sigma x^3 \Sigma x \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x + n \Sigma x^4 n \Sigma x^2 n \Sigma x^2 - \\
& n \Sigma x^4 n \Sigma x^2 \Sigma x \Sigma x - n \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x n \Sigma x^2 + n \Sigma x^4 \Sigma x \Sigma x \Sigma x \Sigma x).
\end{aligned}$$

Taigi paskaičiuoti koeficientai a_1 , a_2 ir a_0 yra:

$$a_0 = 440197,477;$$

$$a_1 = 645150,231;$$

$$a_2 = 328959,013.$$

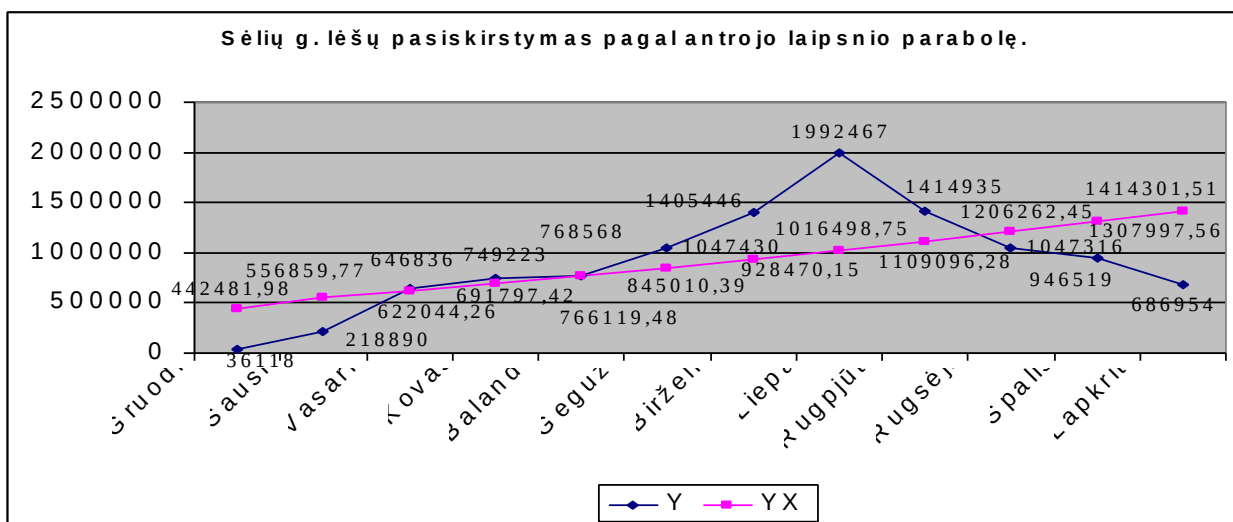
Kreivinio ryšio (antrojo laipsnio parabolės) lygtis bus tokia:

$$\hat{y}_x = 440197,477 + 645150,231x + 328959,013x^2.$$

Realaus ir teorinio lėšų poreikio mėnesinis pasiskirstymas pagal antrojo laipsnio parabolę

Mėnesiai	y	y_x
Gruodis	36118	442481,98
Sausis	218890	556859,77
Vasaris	646836	622044,26
Kovas	749223	691797,42
Balandis	768568	766119,48
Gegužė	1047430	845010,39
Birželis	1405446	928470,15
Liepa	1992467	1016498,75

Rugpjūtis	1414935	1109096,28
Rugsėjis	1047316	1206262,45
Spalis	946519	1307997,56
Lapkritis	686954	1414301,51
Σ	10960702	10960702



Realaus ir teorinio lėšų poreikio pasiskirstymo grafikas pagal antrojo laipsnio parabolę

Matosi, kad antrojo laipsnio parabolės lygtis yra netinkama, nes jos paskaičiuotas grafikas yra neparabolė, o tiesė.

Hiperbolė

Dažnai taikoma hiperbolės lygtis. Ji išreiškiama tokia lygtimi: $\hat{y}_x = a_0 + a_1 \cdot 1/x$. Jos parametrai apskaičiuojami sprendžiant normalinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum \frac{1}{x} = \sum y \\ a_0 \sum \frac{1}{x} + a_1 \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{y}{x} \end{cases}$$

n	x	y	1/x	1/x ²	y/x
1	0,083333	36118	12,00005	144,001152	433417,7337
2	0,166666	218890	6,000024	36,000288	1313345,253
3	0,249999	646836	4,000016	16,000128	2587354,349
4	0,333332	749223	3,000012	9,000072	2247677,991
5	0,416665	768568	2,40001	5,76004608	1844570,578
6	0,499998	1047430	2,000008	4,000032	2094868,379
7	0,583331	1405446	1,714293	2,93879902	2409345,637
8	0,666664	1992467	1,500006	2,250018	2988712,455
9	0,749997	1414935	1,333339	1,777792	1886587,546

10	0,83333	1047316	1,200005	1,44001152	1256784,227
11	0,916663	946519	1,090913	1,19009217	1032570,312
12	0,999996	686954	1,000004	1,000008	686956,7478
n	Σx	Σy	Σ1/x	Σ1/x²	Σy/x
12	6,499974	10960702	37,23868	225,358439	20782191,21

$$a_0 = \frac{\sum y - a_1 \cdot \sum \frac{1}{x}}{n};$$

$$\frac{\sum y - a_1 \cdot \sum \frac{1}{x}}{n} \cdot \sum \frac{1}{x} + a_1 \cdot \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{y}{x};$$

$$\sum y \cdot \sum \frac{1}{x} - \sum \frac{1}{x} \cdot a_1 \cdot \sum \frac{1}{x} + n \cdot a_1 \cdot \sum \frac{1}{x^2} = n \cdot \sum \frac{y}{x};$$

$$a_1 \cdot \left(n \cdot \sum \frac{1}{x^2} - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum \frac{1}{x} \right) = n \cdot \sum \frac{y}{x} - \sum y \cdot \sum \frac{1}{x};$$

$$a_1 = \frac{n \cdot \sum \frac{y}{x} - \sum y \cdot \sum \frac{1}{x}}{n \cdot \sum \frac{1}{x^2} - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum \frac{1}{x}}.$$

Taigi paskaičiuoti koeficientai a_1 ir a_0 yra:

$$a_0 = 1287346,92;$$

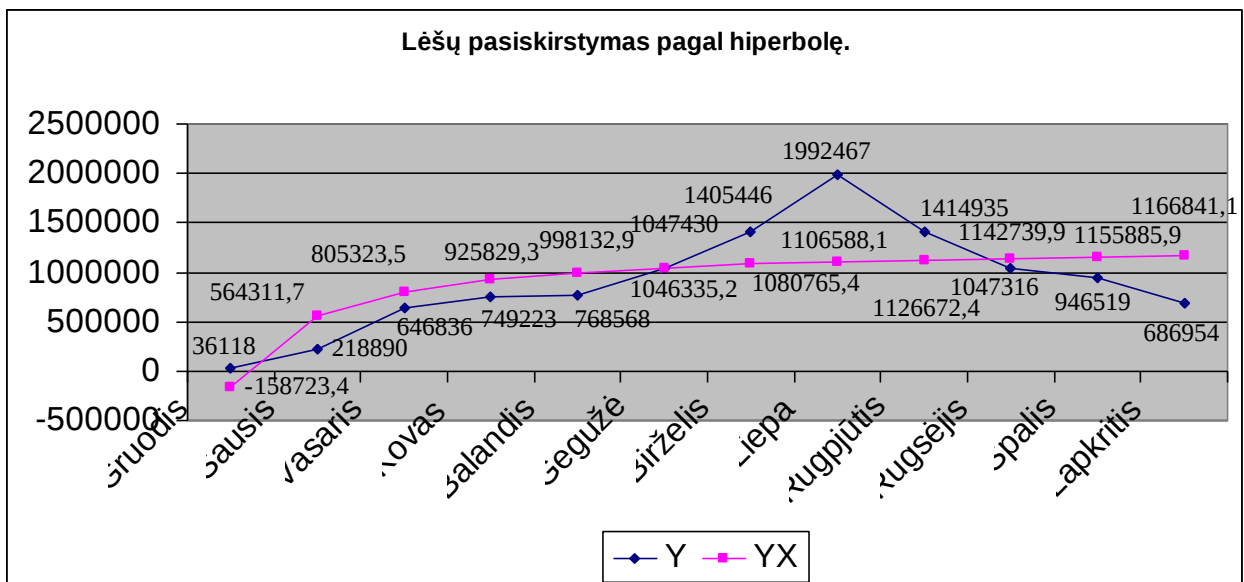
$$a_1 = -120505,38.$$

Kreivinio ryšio (hiperbolės) lygtis bus tokia:

$$\hat{y}_x = 1287346,92 - 120505,38 \cdot \frac{1}{x}.$$

Realaus ir teorinio lėšų poreikio mėnesinis pasiskirstymas pagal hiperbolę

Mėnesiai	y	y _x
Gruodis	36118	-158723,4
Sausis	218890	564311,7
Vasaris	646836	805323,5
Kovas	749223	925829,3
Balandis	768568	998132,9
Gegužė	1047430	1046335,2
Birželis	1405446	1080765,4
Liepa	1992467	1106588,1
Rugpjūtis	1414935	1126672,4
Rugsėjis	1047316	1142739,9
Spalis	946519	1155885,9
Lapkritis	686954	1166841,1
Σ	10960702	10960702



Realaus ir teorinio lėšų poreikio pasiskirstymo grafikas pagal hiperbolę

Iš pateiktų regresinių lygčių: tiesinės, antrojo laipsnio parabolės ir hiperbolės lygties, nustatiau, kad geriausiai tinka hiperbolės lygtis. Ji vienintelė iš pateiktų lygčių atitinka savo formą, be to yra kreivinio ryšio, kaip nagrinėjamo objekto grafikas.

Parinktos analitinės lygties Sėlių g. objektui tikrinimas

Sudaromas ir patikrinamas nagrinėjamo objekto (Sėlių g. 29/2) regresinis modelis. Taikoma išplėstinė hiperbolės lygtis, kad būtų galima gauti kuo tikslesnes teorines lėšų poreikio mėnesines reikšmes.

$$\hat{y}_x = q_1 \cdot \frac{1}{x} + q_2 \cdot \frac{1}{x^2} + q_3 \cdot \frac{1}{x^3} + q_4 \cdot \frac{1}{x^4}.$$

Skaičiavimai atliekami taikant kompiuterinę programą Matcad.

Y	X	1/X	1/X ²	1/X ³	1/X ⁴
36118	0,083333	12,00005	144,0012	1728,021	20736,33
218890	0,166666	6,000024	36,00029	216,0026	1296,021
646836	0,249999	4,000016	16,00013	64,00077	256,0041
749223	0,333332	3,000012	9,000072	27,00032	81,0013
768568	0,416665	2,40001	5,760046	13,82417	33,17813
1047430	0,499998	2,000008	4,000032	8,000096	16,00026
1405446	0,583331	1,714293	2,938799	5,037961	8,63654
1992467	0,666664	1,500006	2,250018	3,375041	5,062581
1414935	0,749997	1,333339	1,777792	2,370399	3,160544
1047316	0,833333	1,200005	1,440012	1,728021	2,073633
946519	0,916663	1,090913	1,190092	1,298288	1,416319
686954	0,999996	1,000004	1,000008	1,000012	1,000016

$$y := \begin{pmatrix} 36118 \\ 218890 \\ 646836 \\ 749223 \\ 768568 \\ 1047430 \\ 1405446 \\ 1992467 \\ 1414935 \\ 1047316 \\ 946519 \\ 686954 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 12.00005 & 144.0012 & 1728.021 & 20736.33 \\ 6.000024 & 36.00029 & 216.0026 & 1296.021 \\ 4.000016 & 16.00013 & 64.00077 & 256.0041 \\ 3.000012 & 9.000072 & 27.00032 & 81.0013 \\ 2.40001 & 5.760046 & 13.82417 & 33.17813 \\ 2.000008 & 4.000032 & 8.000096 & 16.00026 \\ 1.714293 & 2.938799 & 5.037961 & 8.63654 \\ 1.500006 & 2.250018 & 3.375041 & 5.062581 \\ 1.333339 & 1.777792 & 2.370399 & 3.160544 \\ 1.200005 & 1.440012 & 1.728021 & 2.073633 \\ 1.090913 & 1.190092 & 1.298288 & 1.416319 \\ 1.000004 & 1.000008 & 1.000012 & 1.000016 \end{pmatrix}$$

Skaičiuojamas dydis C:

$$\left(\begin{matrix} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} \end{matrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.721 & -0.492 & 0.089 & -4.456 \times 10^{-3} \\ -0.492 & 0.361 & -0.068 & 3.426 \times 10^{-3} \\ 0.089 & -0.068 & 0.013 & -6.63 \times 10^{-4} \\ -4.456 \times 10^{-3} & 3.426 \times 10^{-3} & -6.63 \times 10^{-4} & 3.404 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Skaičiuojamos koeficientų q reikšmės:

$$\left(\begin{matrix} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} \end{matrix} \right)^{-1} \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1.752 \times 10^6 \\ -7.75 \times 10^5 \\ 1.109 \times 10^5 \\ -4.869 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 225.358 & 2.072 \times 10^3 & 2.244 \times 10^4 & 2.58 \times 10^5 \\ 2.072 \times 10^3 & 2.244 \times 10^4 & 2.58 \times 10^5 & 3.038 \times 10^6 \\ 2.244 \times 10^4 & 2.58 \times 10^5 & 3.038 \times 10^6 & 3.613 \times 10^7 \\ 2.58 \times 10^5 & 3.038 \times 10^6 & 3.613 \times 10^7 & 4.317 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} \end{matrix} \right)^{-1} \cdot \mathbf{x}^T =$$

	0	1	2	3	4	5
0	-4.641·10 ⁸	0.162	-0.403	-0.21	-0.014	0.119
1	5.245·10 ⁻³	-0.164	0.342	0.217	0.073	-0.029
2	-1.661·10 ⁸	0.042	-0.065	-0.045	-0.018	1.197·10 ⁻³
3	1.529·10 ⁻⁴	-2.477·10 ⁸	3.28·10 ³	2.326·10 ⁻³	1.006·10 ⁻³	3.418·10 ⁻⁵

Taigi išplėstinė hiperbolės lygtis bus tokia:

$$\hat{y}_x = 1.752 \times 10^6 \cdot \frac{1}{x} - 7.75 \times 10^5 \cdot \frac{1}{x^2} + 1.109 \times 10^5 \cdot \frac{1}{x^3} - 4.869 \times 10^3 \cdot \frac{1}{x^4}.$$

Skaičiuojamos $\hat{y}_x$ (teorinės y) reikšmės:

$$1.752 \times 10^6 \cdot 12.00005 - 7.75 \times 10^5 \cdot 144.0012 + 1.109 \times 10^5 \cdot 1728.021 - 4.869 \times 10^3 \cdot 20736.33 = 9.55 \times 10^4 ;$$

$$1.752 \times 10^6 \cdot 6.000024 - 7.75 \times 10^5 \cdot 36.00029 + 1.109 \times 10^5 \cdot 216.0026 - 4.869 \times 10^3 \cdot 1296.021 = 2.562 \times 10^5 ;$$

$$1.752 \times 10^6 \cdot 4.000016 - 7.75 \times 10^5 \cdot 16.00013 + 1.109 \times 10^5 \cdot 64.00077 - 4.869 \times 10^3 \cdot 256.0041 = 4.591 \times 10^5 ;$$

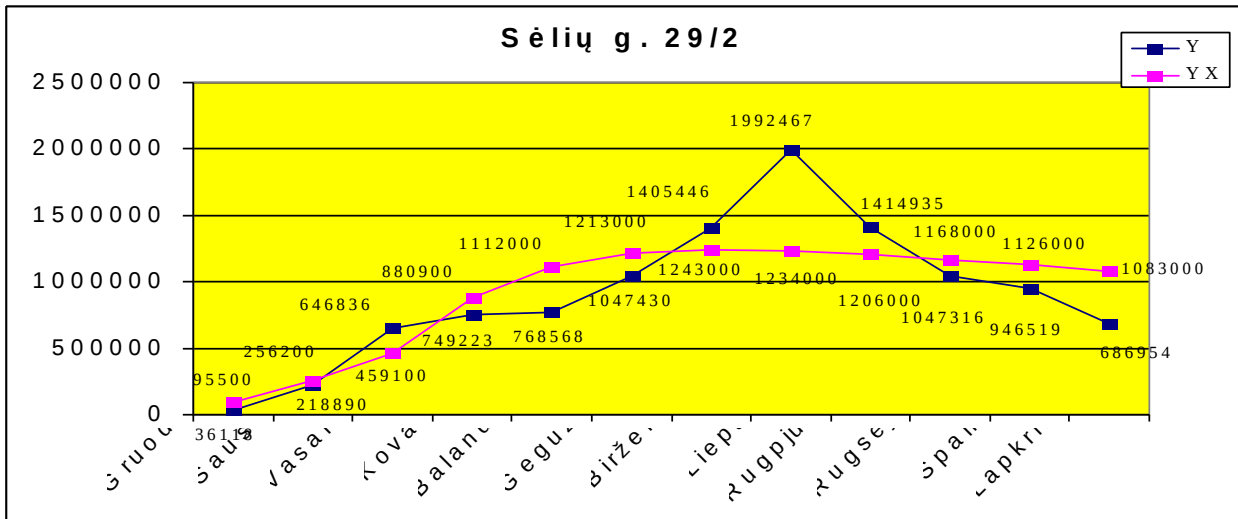
$$1.752 \times 10^6 \cdot 3.000012 - 7.75 \times 10^5 \cdot 9.000072 + 1.109 \times 10^5 \cdot 27.00032 - 4.869 \times 10^3 \cdot 81.0013 = 8.809 \times 10^5 ;$$

$$1.752 \times 10^6 \cdot 2.40001 - 7.75 \times 10^5 \cdot 5.760046 + 1.109 \times 10^5 \cdot 13.82417 - 4.869 \times 10^3 \cdot 33.17813 = 1.112 \times 10^6 ;$$

$$\begin{aligned}
& 1.752 \times 10^6 \cdot 2.000008 - 7.75 \times 10^5 \cdot 4.000032 + 1.109 \times 10^5 \cdot 8.000096 - 4.869 \times 10^3 \cdot 16.00026 = 1.213 \times 10^6 ; \\
& 1.752 \times 10^6 \cdot 1.714293 - 7.75 \times 10^5 \cdot 2.938799 + 1.109 \times 10^5 \cdot 5.037961 - 4.869 \times 10^3 \cdot 8.63654 = 1.243 \times 10^6 ; \\
& 1.752 \times 10^6 \cdot 1.500006 - 7.75 \times 10^5 \cdot 2.250018 + 1.109 \times 10^5 \cdot 3.375041 - 4.869 \times 10^3 \cdot 5.062581 = 1.234 \times 10^6 ; \\
& 1.752 \times 10^6 \cdot 1.333339 - 7.75 \times 10^5 \cdot 1.777792 + 1.109 \times 10^5 \cdot 2.370399 - 4.869 \times 10^3 \cdot 3.160544 = 1.206 \times 10^6 ; \\
& 1.752 \times 10^6 \cdot 1.200005 - 7.75 \times 10^5 \cdot 1.440012 + 1.109 \times 10^5 \cdot 1.728021 - 4.869 \times 10^3 \cdot 2.073633 = 1.168 \times 10^6 ; \\
& 1.752 \times 10^6 \cdot 1.090913 - 7.75 \times 10^5 \cdot 1.190092 + 1.109 \times 10^5 \cdot 1.298288 - 4.869 \times 10^3 \cdot 1.416319 = 1.126 \times 10^6 ; \\
& 1.752 \times 10^6 \cdot 1.000004 - 7.75 \times 10^5 \cdot 1.000008 + 1.109 \times 10^5 \cdot 1.000012 - 4.869 \times 10^3 \cdot 1.000016 = 1.083 \times 10^6 ;
\end{aligned}$$

Realaus ir teorinio lėšų poreikio mėnesinis pasiskirstymas pagal išplėstinę hiperbolę

Mėnesiai	y	y _x
Gruodis	36118	95500
Sausis	218890	256200
Vasaris	646836	459100
Kovas	749223	880900
Balandis	768568	1112000
Gegužė	1047430	1213000
Birželis	1405446	1243000
Liepa	1992467	1234000
Rugpjūtis	1414935	1206000
Rugsėjis	1047316	1168000
Spalis	946519	1126000
Lapkritis	686954	1083000
Σ	10960702	11076700



Realaus ir teorinio lėšų poreikio pasiskirstymo grafikas pagal išplėstinę hiperbolę

Atliekamas patikrinimas kaip teorinė ($\hat{y}_x$) kreivė atitinka praktinę (y) kreivę. Rodiklis, atspindintis regresinės lygties tinkamumą, tai būtų standartinis nuokrypis nuo teorinės lygties.

Norint nustatyti skaičiavimų paklaidas reikia apskaičiuoti regresinės lygties kvadratinus nuokrypius RSS:

$$RSS = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2.$$

Regresinės lygties kvadratiniai nuokrypia RSS yra:

$$RSS = 1.873 \times 10^{12}.$$

Taip pat reikia apskaičiuoti ir suminius kvadratinus nuokrypius TSS:

$$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2.$$

Regresinės lygties suminiai kvadratiniai nuokrypia TSS yra:

$$TSS = 3.117 \times 10^{12}.$$

Likutiniai neišsiaiškinti standartiniai nuokrypia SSR skaičiuojami pagal šią formulę:

$$SSR = TSS - RSS.$$

Taigi likutiniai neišsiaiškinti standartiniai nuokrypia SSR yra:

$$SSR = 3.117 \times 10^{12} - 1.873 \times 10^{12} = 1.244 \times 10^{12}.$$

Pagal šią formulę skaičiuojamas regresijos modelio koreliacinis koeficientas R:

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}}.$$

$$R = \sqrt{\frac{1.873 \times 10^{12}}{3.117 \times 10^{12}}} = 0.775.$$

Taigi koreliacinis koeficientas $R = 0,775$. Ši koreliacinio koeficiento reikšmė gera, ji reiškia, kad yra stipri koreliacija ir ryšis glaudesnis tarp realaus ir teorinio lėšų pasiskirstymo.

Skaičiuojama regresinio modelio standartinė paklaida pagal šią formulę:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1}}.$$

$$s = \sqrt{\frac{9.457 \times 10^{11}}{12 - 4 - 1}} = 3.676 \times 10^5.$$

Regresijos koeficiento standartinė paklaida skaičiuojama pagal šią formulę:

$$S_j = s \sqrt{c_{jj}}.$$

Taigi regresijos koeficiento standartinės paklaidos:

$$S_1 = 3.676 \times 10^5 \cdot \sqrt{0.721} = 3.121 \times 10^5,$$

$$S_2 = 3.676 \times 10^5 \cdot \sqrt{0.361} = 2.209 \times 10^5,$$

$$S_3 = 3.676 \times 10^5 \cdot \sqrt{0.013} = 4.191 \times 10^4,$$

$$S_4 = 3.676 \times 10^5 \cdot \sqrt{3.404 \times 10^{-5}} = 2.145 \times 10^3.$$

Interpoliacija

Interpoliacija – tai toks procesas, kai iš turimų aplinkinių reikšmių nustatomos apytikslės reikšmės tose vietose, kur nėra matavimų taškų [10].

Nagrinėjamų objektų interpoliacija ir jų vertimas į lyginamuosius svorius

1 objektas (Sėlių g.)

Iš 12 mėnesių pervaista į dešimtainę sistemą ir interpoliuota po 120 %.

1. Gruodis + 20% sausis;

$$36118 + 218890 \cdot 20/100 = 79896.$$

2. 80% sausis + 40% vasaris;

$$218890 \cdot 80/100 + 646836 \cdot 40/100 = 433846,4.$$

3. 60% vasaris + 60% kovas;

$$646836 \cdot 60/100 + 749223 \cdot 60/100 = 837635,4.$$

4. 40% kovas + 80% balandis;

$$749223 \cdot 40/100 + 768568 \cdot 80/100 = 914543,6.$$

5. 20% balandis + gegužė;

$$768568 \cdot 20/100 + 1047430 = 1201143,6.$$

6. Birželis + 20% liepa;

$$1405446 + 1992467 \cdot 20/100 = 1803939,4.$$

7. 80% liepa + 40% rugpjūtis;

$$1992467 \cdot 80/100 + 1414935 \cdot 40/100 = 2159947,6.$$

8. 60% rugpjūtis + 60% rugsejis;

$$1414935 \cdot 60/100 + 1047316 \cdot 60/100 = 1477350,6.$$

9. 40% rugsejis + 80% spalio;

$$1047316 \cdot 40/100 + 946519 \cdot 80/100 = 1176141,6.$$

10. 20% spalio + lapkritis;

$$946519 \cdot 20/100 + 686954 = 876257,8.$$

Vertimas į lyginamuosius svorius.

Etapai	y	%
1	79896	0,73
2	433846,4	3,96
3	837635,4	7,64
4	914543,6	8,34
5	1201144	10,96

6	1803939	16,46
7	2159948	19,7
8	1477351	13,48
9	1176142	10,73
10	876257,8	8
Σ	10960702	100%

2 objektas (Verkių g.)

Iš 14 mėnesių pervesta į dešimtainę sistemą ir interpoliuota po 140 %.

1. Rugsejis + 40% spalį;

$$38335 + 338794 \cdot 40/100 = 173852,6.$$

2. 60% spalį + 80% lapkritis;

$$338794 \cdot 60/100 + 369398 \cdot 80/100 = 498794,8.$$

3. 20% lapkritis + gruodis + 20% sausis;

$$369398 \cdot 20/100 + 400324 + 440603 \cdot 20/100 = 562324,2.$$

4. 80% sausis + 60% vasaris;

$$440603 \cdot 80/100 + 542480 \cdot 60/100 = 677970,4.$$

5. 40% vasaris + kovas;

$$542480 \cdot 40/100 + 802324 = 1019316.$$

6. Balandis + 40% gegužė;

$$1002584 + 907047 \cdot 40/100 = 1365402,8.$$

7. 60% gegužė + 80% birželis;

$$907047 \cdot 60/100 + 596962 \cdot 80/100 = 1021797,8.$$

8. 20% birželis + liepa + 20% rugpjūtis;

$$596962 \cdot 20/100 + 296554 + 153478 \cdot 20/100 = 446642.$$

9. 80% rugpjūtis + 60% rugsėjis;

$$153478 \cdot 80/100 + 92310 \cdot 60/100 = 178168,4.$$

10. 40% rugsėjis + spalį;

$$92310 \cdot 40/100 + 65144 = 102068.$$

Vertimas į lyginamuosius svorius.

Etapai	y	%
1	173852,6	2,87
2	498794,8	8,25
3	562324,2	9,3
4	677970,4	11,21
5	1019316	16,86

6	1365403	22,58
7	1021798	16,9
8	446642	7,39
9	178168,4	2,95
10	102068	1,69
Σ	6046337	100%

3 objektas (Taikos g.)

Vertimas į lyginamuosius svorius.

Etapai	y	%
1	35225	0,35
2	225987	2,26
3	658854	6,6
4	852562	8,54
5	873235	8,75
6	1154465	11,57
7	1673890	16,77
8	2015189	20,19
9	1584325	15,87
10	906693	9,1
Σ	9980425	100%

4 objektas (Karaliaučiaus g.)

Vertimas į lyginamuosius svorius.

Etapai	y	%
1	28956	0,29
2	316564	3,14
3	619982	6,15
4	941672	9,34
5	1206843	11,96
6	1512552	15
7	1989230	19,72
8	1431291	14,19
9	1125049	11,15
10	913467	9,06
Σ	10085606	100%

5 objektas (Justiniškių g.)

Iš 11 mėnesių pervesta į dešimtainę sistemą ir interpoliuota po 110 %.

1. Sausis + 10% vasaris;

$$40590 + 230689 \cdot 10/100 = 63658,9.$$

2. 90% vasaris + 20% kovas;

$$230689*90/100 + 698534*20/100 = 347326,9.$$

3. 80% kovas + 30% balandis;

$$698534*80/100 + 989762*30/100 = 855755,8.$$

4. 70% balandis + 40% gegužė;

$$989762*70/100 + 1048962*40/100 = 1112418,2.$$

5. 60% gegužė + 50% birželis;

$$1048962*60/100 + 1386471*50/100 = 1322612,7.$$

6. 50% birželis + 60% liepa;

$$1386471*50/100 + 1698742*60/100 = 1712480,7.$$

7. 40% liepa + 70% rugpjūtis;

$$1698742*40/100 + 1871563*70/100 = 1989590,9.$$

8. 30% rugpjūtis + 80% rugsėjis;

$$1871563*30/100 + 1200431*80/100 = 1521813,7.$$

9. 20% rugsejis + 90% spalio;

$$1200431*20/100 + 538104*90/100 = 724379,8.$$

10. 10% spalio + lapkritis;

$$538104*10/100 + 214089 = 267899,4.$$

Vertimas į lyginamuosius svorius.

Etapai	y	%
1	63658,9	0,64
2	347326,9	3,5
3	855755,8	8,63
4	1112418	11,22
5	1322613	13,34
6	1712481	17,27
7	1989591	20,06
8	1521814	15,34
9	724379,8	7,3
10	267899,4	2,7
Σ	9917937	100%

6 objektas (Ukmergės g.)

Iš 11 mėnesių pervesta į dešimtainę sistemą ir interpoliuota po 110 %.

1. Gruodis + 10% sausis;

$$34152 + 319789*10/100 = 66130,9.$$

2. 90% sausis + 20% vasaris;

$$319789*90/100 + 557796*20/100 = 399369,3.$$

3. 80% vasaris + 30% kovas;

$$557796*80/100 + 729475*30/100 = 665079,3.$$

4. 70% kovas + 40% balandis;

$$729475*70/100 + 1035130*40/100 = 924684,5.$$

5. 60% balandis + 50% gegužė;

$$1035130*60/100 + 1486566*50/100 = 1364361.$$

6. 50% gegužė + 60% birželis;

$$1486566*50/100 + 1998216*60/100 = 1942212,6.$$

7. 40% birželis + 70% liepa;

$$1998216*40/100 + 1416328*70/100 = 1790716.$$

8. 30% liepa + 80% rugpjūtis;

$$1416328*30/100 + 1004805*80/100 = 1228742,4.$$

9. 20% rugpjūtis + 90% rugsėjis;

$$1004805*20/100 + 852315*90/100 = 968044,5.$$

10. 10% rugsejis + spalio;

$$852315*10/100 + 767957 = 853188,5.$$

Vertimas į lyginamuosius svorius.

Etapai	y	%
1	66130,9	0,65
2	399369,3	3,92
3	665079,3	6,52
4	924684,5	9,06
5	1364361	13,37
6	1942213	19,04
7	1790716	17,55
8	1228742	12,04
9	968044,5	9,49
10	853188,5	8,36
Σ	10202529	100%

7 objektas (Lazdinėlio g. 1namas)

Iš 16 mėnesių pervesta į dešimtainę sistemą ir interpoliuota po 160 %.

1. Rugpjūtis + 60% rugsėjis;

$$200000 + 430000*60/100 = 458000.$$

2. 40% rugsejis + spalio + 20% lapkritis;

$$430000*40/100 + 524000 + 450000*20/100 = 786000.$$

3. 80% lapkritis + 80% gruodis;

$$450000*80/100 + 460000*80/100 = 728000.$$

4. 20% gruodis + sausis + 40% vasaris;

$$460000*20/100 + 350000 + 423000*40/100 = 611200.$$

5. 60% vasaris + kovas;

$$423000*60/100 + 483000 = 736800.$$

6. Balandis + 60% gegužė;

$$674000 + 901000*60/100 = 1214600.$$

7. 40% gegužė + birželis + 20% liepa;

$$901000*40/100 + 1103000 + 915000*20/100 = 1646400.$$

8. 80% liepa + 80% rugpjūtis;

$$915000*80/100 + 890000*80/100 = 1444000.$$

9. 20% rugpjūtis + rugsejis + 40% spalio;

$$890000*20/100 + 800000 + 653000*40/100 = 1239200.$$

10. 60% spalio + lapkritis;

$$653000*60/100 + 540000 = 931800.$$

Vertimas į lyginamuosius svorius.

Etapai	y	%
1	458000	4,68
2	786000	8,02
3	728000	7,43
4	611200	6,24
5	736800	7,52
6	1214600	12,4
7	1646400	16,81
8	1444000	14,74
9	1239200	12,65
10	931800	9,51
Σ	9796000	100%

8 objektas (Lazdinė g. 2 namas)

Iš 16 mėnesių pervesta į dešimtainę sistemą ir interpoliuota po 160 %.

1. Rugpjūtis + 60% rugsėjis;

$$100000 + 300000*60/100 = 280000.$$

2. 40% rugsėjis + spalio + 20% lapkritis;

$$300000*40/100 + 420200 + 350000*20/100 = 610200.$$

3. 80% lapkritis + 80% gruodis;

$$350000*80/100 + 340000*80/100 = 552000.$$

4. 20% gruodis + sausis + 40% vasaris;

$$272000*20/100 + 300000 + 334000*40/100 = 501600.$$

5. 60% vasaris + kovas;

$$334000*60/100 + 361000 = 561400.$$

6. Balandis + 60% gegužė;

$$500000 + 610000*60/100 = 866000.$$

7. 40% gegužė + birželis + 20% liepa;

$$610000*40/100 + 879000 + 917000*20/100 = 1306400.$$

8. 80% liepa + 80% rugpjūtis;

$$917000*80/100 + 700000*80/100 = 1293600.$$

9. 20% rugpjūtis + rugsejis + 40% spalį;

$$700000*20/100 + 680000 + 617000*40/100 = 1066800.$$

10. 60% spalį + lapkritis;

$$617000*60/100 + 500000 = 870200.$$

Vertimas į lyginamuosius svorius.

Etapai	y	%
1	280000	3,54
2	610200	7,72
3	552000	6,98
4	501600	6,34
5	561400	7,1
6	866000	10,95
7	1306400	16,52
8	1293600	16,36
9	1066800	13,49
10	870200	11
Σ	7908200	100%

9 objektas (Žygio g.)

Iš 11 mėnesių pervesta į dešimtainę sistemą ir interpoliuota po 110 %.

1. Vasaris + 10% kovas;

$$27560 + 314896*10/100 = 59049,6.$$

2. 90% kovas + 20% balandis;

$$314896*90/100 + 780951*20/100 = 439596,6.$$

3. 80% balandis + 30% gegužė;

$$780951 \cdot 80/100 + 895611 \cdot 30/100 = 893444,1.$$

4. 70% gegužė + 40% birželis;

$$895611 \cdot 70/100 + 925489 \cdot 40/100 = 997123,3.$$

5. 60% birželis + 50% liepa;

$$925489 \cdot 60/100 + 1248631 \cdot 50/100 = 1179608,9.$$

6. 50% liepa + 60% rugpjūtis;

$$1248631 \cdot 50/100 + 1591683 \cdot 60/100 = 1579325,3.$$

7. 40% rugpjūtis + 70% rugsėjis;

$$1591683 \cdot 40/100 + 1946738 \cdot 70/100 = 1999389,8.$$

8. 30% rugsėjis + 80% spalio;

$$1946738 \cdot 30/100 + 1138697 \cdot 80/100 = 1494979.$$

9. 20% spalio + 90% lapkritis;

$$1138697 \cdot 20/100 + 748161 \cdot 90/100 = 901084,3.$$

10. 10% lapkritis + gruodis;

$$748161 \cdot 10/100 + 214957 = 289773,1.$$

Vertimas į lyginamuosius svorius.

Etapai	y	%
1	59049,6	0,6
2	439596,6	4,47
3	893444,1	9,09
4	997123,3	10,14
5	1179609	12
6	1579325	16,06
7	1999390	20,33
8	1494979	15,2
9	901084,3	9,16
10	289773,1	2,95
Σ	9833374	100%

10 objektas (Gineitiškėse kompleksas)

Iš 13 mėnesių pervesta į dešimtainę sistemą ir interpoliuota po 130 %.

1. Lapkritis + 30% gruodis;

$$4541549 + 2809712 \cdot 30/100 = 5384462,6.$$

2. 70% gruodis + 60% sausis.

$$2809712 \cdot 70/100 + 5106246 \cdot 60/100 = 5030546.$$

3. 40% sausis + 90% vasaris;

$$5106246 \cdot 40/100 + 2323006 \cdot 90/100 = 4133203,8.$$

4. 10% vasaris + kovas + 20% balandis;

$$2323006 \cdot 10/100 + 2768704 + 3637839 \cdot 20/100 = 3728572,4.$$

5. 80% balandis + 50% gegužė;

$$3637839 \cdot 80/100 + 4562511 \cdot 50/100 = 5191526,7.$$

6. 50% gegužė + 80% birželis;

$$4562511 \cdot 50/100 + 5574893 \cdot 80/100 = 6741169,9.$$

7. 20% birželis + liepa + 10% rugpjūtis;

$$5574893 \cdot 20/100 + 7518548 + 7945615 \cdot 10/100 = 9428058,1.$$

8. 90% rugpjūtis + 40% rugsėjis;

$$7945315 \cdot 90/100 + 8663452 \cdot 40/100 = 10616164,3.$$

9. 60% rugsėjis + 70% spalio;

$$8663452 \cdot 60/100 + 7092997 \cdot 70/100 = 10163169,1.$$

10. 30% spalio + lapkritis;

$$7092997 \cdot 30/100 + 5196041 = 7323940,1.$$

Vertimas į lyginamuosius svorius.

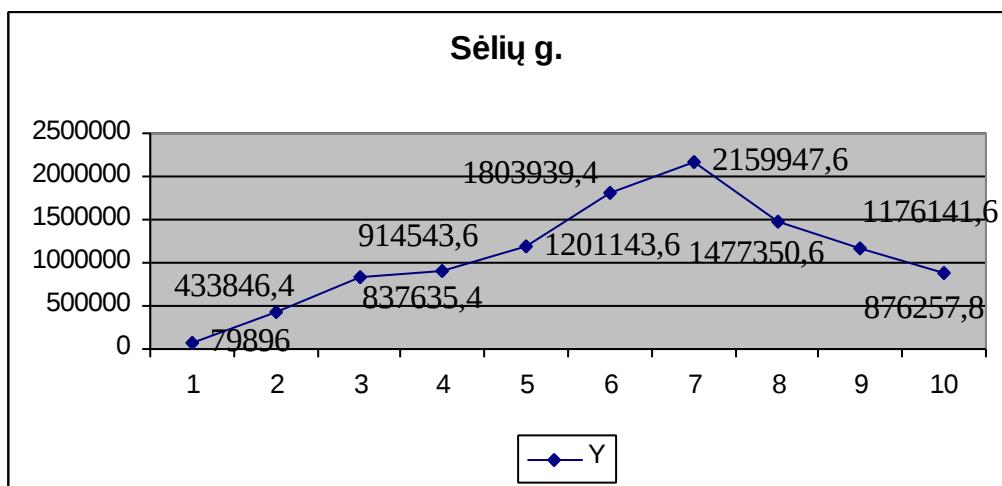
Etapai	y	%
1	5384463	7,95
2	5030546	7,43
3	4133204	6,1
4	3728572	5,51
5	5191527	7,66
6	6741170	9,95
7	9428058	13,92
8	10616164	15,67
9	10163169	15
10	7323940	10,81
Σ	67740813	100%

Sėlių g. objektui interpoliuotų duomenų regresinis modelis

Sudaromas ir patikrinamas nagrinėjamo objekto interpoliuotas regresinis modelis.

Interpoliuotos Sėlių g. 29/2 lėšų poreikio pasiskirstymo reikšmės

	y
1	79896
2	433846,4
3	837635,4
4	914543,6
5	1201143,6
6	1803939,4
7	2159947,6
8	1477350,6
9	1176141,6
10	876257,8
Σ	10960702



Interpoliuotų reikšmių lėšų pasiskirstymo grafikas

Taikoma išplėstinė hiperbolės lygtis, kad būtų galima gauti kuo tikslesnes teorines lėšų poreikio reikšmes.

$$\hat{y}_x = q_1 \cdot \frac{1}{x} + q_2 \cdot \frac{1}{x^2} + q_3 \cdot \frac{1}{x^3} + q_4 \cdot \frac{1}{x^4}.$$

Y	X	1/X	1/X ²	1/X ³	1/X ⁴
79896	0,1	10	100	1000	10000
433846,4	0,2	5	25	125	625
837635,4	0,3	3,33333	11,1111	37,037	123,457
914543,6	0,4	2,5	6,25	15,625	39,0625

1201143,6	0,5	2	4	8	16
1803939,4	0,6	1,66667	2,77778	4,62963	7,71605
2159947,6	0,7	1,42857	2,04082	2,91545	4,16493
1477350,6	0,8	1,25	1,5625	1,95313	2,44141
1176141,6	0,9	1,11111	1,23457	1,37174	1,52416
876257,8	1	1	1	1	1

$$y := \begin{pmatrix} 79896 \\ 433846.4 \\ 837635.4 \\ 914543.6 \\ 1201143.6 \\ 1803939.4 \\ 2159947.6 \\ 1477350.6 \\ 1176141.6 \\ 876257.8 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 10 & 100 & 1000 & 10000 \\ 5 & 25 & 125 & 625 \\ 3.333333 & 11.11111 & 37.03704 & 123.45688 \\ 2.5 & 6.25 & 15.625 & 39.0625 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1.666667 & 2.777778 & 4.62963 & 7.716049 \\ 1.428571 & 2.040816 & 2.915452 & 4.164931 \\ 1.25 & 1.5625 & 1.953125 & 2.441406 \\ 1.111111 & 1.234568 & 1.371742 & 1.524158 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Skaičiuojamas dydis C:

$$\begin{pmatrix} x^T \cdot x \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.443 & -1.151 & 0.248 & -0.015 \\ -1.151 & 0.97 & -0.215 & 0.013 \\ 0.248 & -0.215 & 0.048 & -2.936 \times 10^{-3} \\ -0.015 & 0.013 & -2.936 \times 10^{-3} & 1.791 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Skaičiuojamos koeficientų q reikšmės:

$$\begin{pmatrix} x^T \cdot x \end{pmatrix}^{-1} \cdot x^T \cdot y = \begin{pmatrix} 2.336 \times 10^6 \\ -1.162 \times 10^6 \\ 1.92 \times 10^5 \\ -9.902 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$x^T \cdot x = \begin{pmatrix} 154.977 & 1.198 \times 10^3 & 1.082 \times 10^4 & 1.037 \times 10^5 \\ 1.198 \times 10^3 & 1.082 \times 10^4 & 1.037 \times 10^5 & 1.017 \times 10^6 \\ 1.082 \times 10^4 & 1.037 \times 10^5 & 1.017 \times 10^6 & 1.008 \times 10^7 \\ 1.037 \times 10^5 & 1.017 \times 10^6 & 1.008 \times 10^7 & 1.004 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^{-1} \cdot x^T =$$

	0	1	2	3	4	5
0	-6.467·10 ³	0.232	-0.611	-0.285	0.032	0.243
1	8.219·10 ⁻³	-0.265	0.587	0.337	0.069	-0.117
2	-3.008·10 ³	0.079	-0.132	-0.082	-0.024	0.018
3	3.251·10 ⁻⁴	-5.475·10 ³	7.945·10 ⁻³	5.118·10 ⁻³	1.647·10 ⁻³	-8.358·10 ⁴

Taigi interpoliuota išplėstinė hiperbolės lygtis bus tokia:

$$\hat{y}_x = 2.336 \times 10^6 \cdot \frac{1}{x} - 1.162 \times 10^6 \cdot \frac{1}{x^2} + 1.92 \times 10^5 \cdot \frac{1}{x^3} - 9.902 \times 10^3 \cdot \frac{1}{x^4}.$$

Skaičiuojamos $\hat{y}_x$ (teorinės y) reikšmės:

$$2.336 \times 10^6 \cdot 10 - 1.162 \times 10^6 \cdot 100 + 1.92 \times 10^5 \cdot 1000 - 9.902 \times 10^3 \cdot 10000 = 1.4 \times 10^5$$

$$2.336 \times 10^6 \cdot 5 - 1.162 \times 10^6 \cdot 25 + 1.92 \times 10^5 \cdot 125 - 9.902 \times 10^3 \cdot 625 = 4.412 \times 10^5$$

$$2.336 \times 10^6 \cdot 3.333333 - 1.162 \times 10^6 \cdot 11.111111 + 1.92 \times 10^5 \cdot 37.03704 - 9.902 \times 10^3 \cdot 123.45688 = 7.642 \times 10^5$$

$$2.336 \times 10^6 \cdot 2.5 - 1.162 \times 10^6 \cdot 6.25 + 1.92 \times 10^5 \cdot 15.625 - 9.902 \times 10^3 \cdot 39.0625 = 1.191 \times 10^6$$

$$2.336 \times 10^6 \cdot 2 - 1.162 \times 10^6 \cdot 4 + 1.92 \times 10^5 \cdot 8 - 9.902 \times 10^3 \cdot 16 = 1.402 \times 10^6$$

$$2.336 \times 10^6 \cdot 1.666667 - 1.162 \times 10^6 \cdot 2.777778 + 1.92 \times 10^5 \cdot 4.62963 - 9.902 \times 10^3 \cdot 7.716049 = 1.478 \times 10^6$$

$$2.336 \times 10^6 \cdot 1.428571 - 1.162 \times 10^6 \cdot 2.040816 + 1.92 \times 10^5 \cdot 2.915452 - 9.902 \times 10^3 \cdot 4.164931 = 1.484 \times 10^6$$

$$2.336 \times 10^6 \cdot 1.25 - 1.162 \times 10^6 \cdot 1.5625 + 1.92 \times 10^5 \cdot 1.953125 - 9.902 \times 10^3 \cdot 2.441406 = 1.455 \times 10^6$$

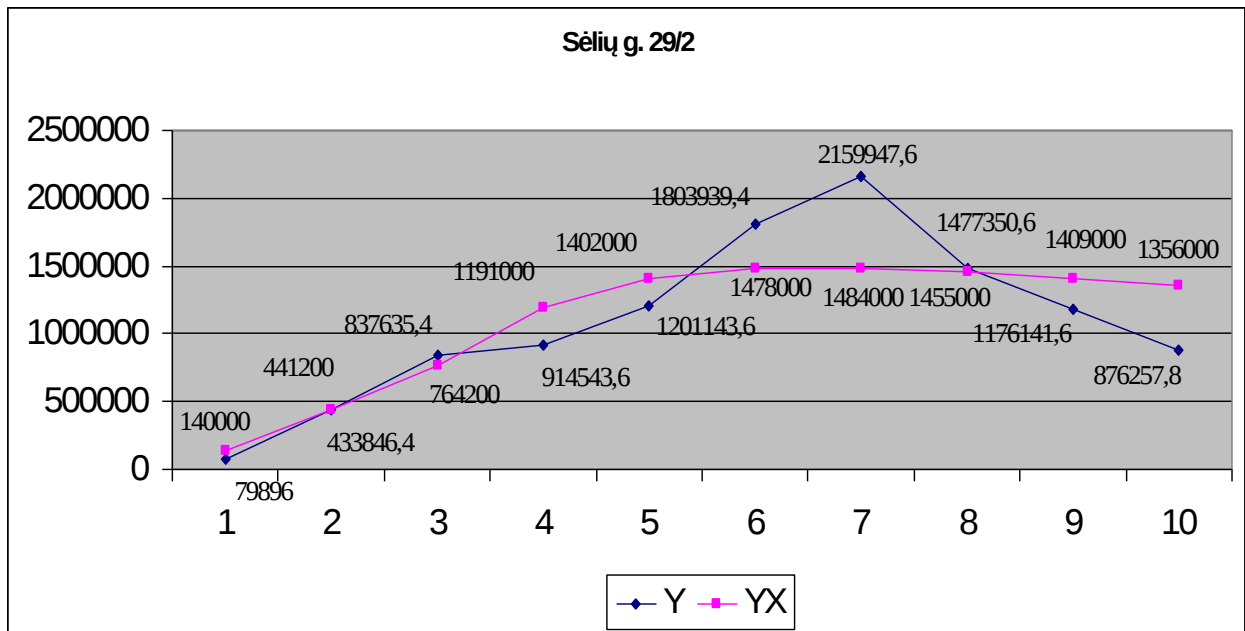
$$2.336 \times 10^6 \cdot 1.111111 - 1.162 \times 10^6 \cdot 1.234568 + 1.92 \times 10^5 \cdot 1.371742 - 9.902 \times 10^3 \cdot 1.524158 = 1.409 \times 10^6$$

$$2.336 \times 10^6 \cdot 1 - 1.162 \times 10^6 \cdot 1 + 1.92 \times 10^5 \cdot 1 - 9.902 \times 10^3 \cdot 1 = 1.356 \times 10^6$$

Interpoliuoto praktinio ir teorinio lęšų poreikio pasiskirstymas pagal išplėstinę hiperbolę

	y	y _x
1	79896	140000
2	433846,4	441200
3	837635,4	764200
4	914543,6	1191000
5	1201144	1402000
6	1803939	1478000
7	2159948	1484000
8	1477351	1455000
9	1176142	1409000
10	876257,8	1356000
Σ	10960702	11120400

Interpoliuoto praktinio ir teorinio lėšų poreikio pasiskirstymo grafikas pagal išplėstinę hiperbolę



Interpoliuoto praktinio ir teorinio lėšų poreikio pasiskirstymo grafikas pagal išplėstinę hiperbolę
Atliekamas patikrinimas kaip teorinė ($\hat{y}_x$) kreivė atitinka praktinę (y) kreivę.

Norint nustatyti skaičiavimų paklaidas reikia apskaičiuoti pagal 11 formulę regresinės lygties kvadratinis nuokrypius RSS:

$$RSS = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2.$$

Regresinės lygties kvadratiniai nuokrypiai RSS yra:

$$RSS = 2.146 \times 10^{12}.$$

Taip pat reikia pagal (12) formulę apskaičiuoti ir suminius kvadratinis nuokrypius TSS:

$$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2.$$

Regresinės lygties suminiai kvadratiniai nuokrypiai TSS yra:

$$TSS = 3.414 \times 10^{12}.$$

Likutiniai neišsiaiškinti standartiniai nuokrypiai SSR skaičiuojami pagal 13 formulę:

$$SSR = TSS - RSS.$$

Taigi likutiniai neišsiaiškinti standartiniai nuokrypiai SSR yra:

$$SSR = 3.414 \times 10^{12} - 2.146 \times 10^{12} = 1.268 \times 10^{12}.$$

Pagal 25 formulę skaičiuojamas regresijos modelio koreliacinis koeficientas R:

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}};$$

$$R = \sqrt{\frac{2.146 \times 10^{12}}{3.414 \times 10^{12}}} = 0.793.$$

Taigi koreliacinis koeficientas $R = 0,793$. Ši koreliacinio koeficiento reikšmė gera, ji reiškia, kad yra stipri koreliacija ir ryšis glaudesnis tarp realaus ir teorinio lėšų pasiskirstymo.

Skaičiuojama regresinio modelio standartinė paklaida pagal 14 formulę:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1}};$$

$$s = \sqrt{\frac{5.169 \times 10^{11}}{10 - 4 - 1}} = 3.215 \times 10^5.$$

Regresijos koeficiento standartinė paklaida skaičiuojama pagal 15 formulę:

$$S_j = s \sqrt{c_{jj}}.$$

Skaičiuojama atvirkštinė suminių kvadratinų nuokrypių matrica C:

$$\left(\begin{matrix} \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} \end{matrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.443 & -1.151 & 0.248 & -0.015 \\ -1.151 & 0.97 & -0.215 & 0.013 \\ 0.248 & -0.215 & 0.048 & -2.936 \times 10^{-3} \\ -0.015 & 0.013 & -2.936 \times 10^{-3} & 1.791 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Taigi regresijos koeficiento standartinės paklaidos:

$$S_1 = 3.215 \times 10^5 \cdot \sqrt{1.443} = 3.862 \times 10^5,$$

$$S_2 = 3.215 \times 10^5 \cdot \sqrt{0.97} = 3.166 \times 10^5,$$

$$S_3 = 3.215 \times 10^5 \cdot \sqrt{0.048} = 7.044 \times 10^4,$$

$$S_4 = 3.215 \times 10^5 \cdot \sqrt{1.791 \times 10^{-4}} = 4.303 \times 10^3.$$

6 priedas

Pagal interpoliuotus duomenis regresinio modelio standartinių paklaidų skaičiavimas

Visi nagrinėjami interpoliuoti objektai su lyginamaisiais svoriais pateikti šitoje lentelėje.

Sėlių	Justiniškių	Taikos	Karal	Ukmergės	Gineitiškės	Verkių	Žygio	Lazd 1	Lazd 2	Bendras
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	$y_{\text{vidutinis}}$
0,73	0,64	0,35	0,29	0,65	7,95	2,87	0,6	4,68	3,54	2,23
3,96	3,5	2,26	3,14	3,92	7,43	8,25	4,47	8,02	7,72	5,27
7,64	8,63	6,6	6,15	6,52	6,1	9,3	9,09	7,43	6,98	7,44
8,34	11,22	8,54	9,34	9,06	5,51	11,21	10,14	6,24	6,34	8,59
10,96	13,34	8,75	11,96	13,37	7,66	16,86	12	7,52	7,1	10,95
16,46	17,27	11,57	15	19,04	9,95	22,58	16,06	12,4	10,95	15,13
19,7	20,06	16,77	19,72	17,55	13,92	16,9	20,33	16,81	16,52	17,83
13,48	15,34	20,19	14,19	12,04	15,67	7,39	15,2	14,74	16,36	14,46
10,73	7,3	15,87	11,15	9,49	15	2,95	9,16	12,65	13,49	10,78
8	2,7	9,1	9,06	8,36	10,81	1,69	2,95	9,51	11	7,32
100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Pagal šią formulę yra skaičiuojamos standartinės paklaidos:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-1}};$$

1 etapas

$$\begin{aligned} (0.73 - 2.23)^2 &= 2.25 & (7.95 - 2.23)^2 &= 32.718 \\ (0.64 - 2.23)^2 &= 2.528 & (2.87 - 2.23)^2 &= 0.41 \\ (0.35 - 2.23)^2 &= 3.534 & (0.6 - 2.23)^2 &= 2.657 \\ (0.29 - 2.23)^2 &= 3.764 & (4.68 - 2.23)^2 &= 6.002 \\ (0.65 - 2.23)^2 &= 2.496 & (3.54 - 2.23)^2 &= 1.716 \end{aligned}$$

$$2.25 + 2.528 + 3.534 + 3.764 + 2.496 + 32.718 + 0.41 + 2.657 + 6.002 + 1.716 = 58.075 ;$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{58.075}{10-1}} = 2.54.$$

2 etapas

$$\begin{aligned} (3.96 - 5.27)^2 &= 1.716 & (7.43 - 5.27)^2 &= 4.666 \\ (3.5 - 5.27)^2 &= 3.133 & (8.25 - 5.27)^2 &= 8.88 \\ (2.26 - 5.27)^2 &= 9.06 & (4.47 - 5.27)^2 &= 0.64 \\ (3.14 - 5.27)^2 &= 4.537 & (8.02 - 5.27)^2 &= 7.563 \\ (3.92 - 5.27)^2 &= 1.822 & (7.72 - 5.27)^2 &= 6.003 \end{aligned}$$

$$1.716 + 3.133 + 9.06 + 4.537 + 1.822 + 4.666 + 8.88 + 0.64 + 7.563 + 6.003 = 48.02 ;$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{48.02}{10-1}} = 2.31.$$

3 etapas

$$\begin{aligned} (7.64 - 7.44)^2 &= 0.04 & (6.1 - 7.44)^2 &= 1.796 \\ (8.63 - 7.44)^2 &= 1.416 & (9.3 - 7.44)^2 &= 3.46 \\ (6.6 - 7.44)^2 &= 0.706 & (9.09 - 7.44)^2 &= 2.722 \\ (6.15 - 7.44)^2 &= 1.664 & (7.43 - 7.44)^2 &= 1 \times 10^{-4} \\ (6.52 - 7.44)^2 &= 0.846 & (6.98 - 7.44)^2 &= 0.212 \end{aligned}$$

$$0.04 + 1.416 + 0.706 + 1.664 + 0.846 + 1.796 + 3.46 + 2.722 + 1 \times 10^{-4} + 0.212 = 12.862 ;$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{12.862}{10-1}} = 1.195.$$

4 etapas

$$\begin{aligned} (8.34 - 8.59)^2 &= 0.063 & (5.51 - 8.59)^2 &= 9.486 \\ (11.22 - 8.59)^2 &= 6.917 & (11.21 - 8.59)^2 &= 6.864 \\ (8.54 - 8.59)^2 &= 2.5 \times 10^{-3} & (10.14 - 8.59)^2 &= 2.403 \\ (9.34 - 8.59)^2 &= 0.563 & (6.24 - 8.59)^2 &= 5.522 \\ (9.06 - 8.59)^2 &= 0.221 & (6.34 - 8.59)^2 &= 5.063 \end{aligned}$$

$$0.063 + 6.917 + 2.5 \times 10^{-3} + 0.563 + 0.221 + 9.486 + 6.864 + 2.403 + 5.522 + 5.063 = 37.105 ;$$

$$s_4 = \sqrt{\frac{37.105}{10-1}} = 2.03.$$

5 etapas

$$\begin{aligned} (10.96 - 10.95)^2 &= 1 \times 10^{-4} & (7.66 - 10.95)^2 &= 10.824 \\ (13.34 - 10.95)^2 &= 5.712 & (16.86 - 10.95)^2 &= 34.928 \\ (8.75 - 10.95)^2 &= 4.84 & (12 - 10.95)^2 &= 1.103 \\ (11.96 - 10.95)^2 &= 1.02 & (7.52 - 10.95)^2 &= 11.765 \\ (13.37 - 10.95)^2 &= 5.856 & (7.1 - 10.95)^2 &= 14.822 \end{aligned}$$

$$1 \times 10^{-4} + 5.712 + 4.84 + 1.02 + 5.856 + 10.824 + 34.928 + 1.103 + 11.765 + 14.822 = 90.87 ;$$

$$s_5 = \sqrt{\frac{90.87}{10-1}} = 3.178.$$

6 etapas

$$\begin{aligned}(16.46 - 15.13)^2 &= 1.769 & (9.95 - 15.13)^2 &= 26.832 \\ (17.27 - 15.13)^2 &= 4.58 & (22.58 - 15.13)^2 &= 55.502 \\ (11.57 - 15.13)^2 &= 12.674 & (16.06 - 15.13)^2 &= 0.865 \\ (15 - 15.13)^2 &= 0.017 & (12.4 - 15.13)^2 &= 7.453 \\ (19.04 - 15.13)^2 &= 15.288 & (10.95 - 15.13)^2 &= 17.472\end{aligned}$$

$$1.769 + 4.58 + 12.674 + 0.017 + 15.288 + 26.832 + 55.502 + 0.865 + 7.453 + 17.472 = 142.452 ;$$

$$s_6 = \sqrt{\frac{142.452}{10-1}} = 3.978.$$

7 etapas

$$\begin{aligned}(19.7 - 17.83)^2 &= 3.497 & (13.92 - 17.83)^2 &= 15.288 \\ (20.06 - 17.83)^2 &= 4.973 & (16.9 - 17.83)^2 &= 0.865 \\ (16.77 - 17.83)^2 &= 1.124 & (20.33 - 17.83)^2 &= 6.25 \\ (19.72 - 17.83)^2 &= 3.572 & (16.81 - 17.83)^2 &= 1.04 \\ (17.55 - 17.83)^2 &= 0.078 & (16.52 - 17.83)^2 &= 1.716\end{aligned}$$

$$3.497 + 4.973 + 1.124 + 3.572 + 0.078 + 15.288 + 0.865 + 6.25 + 1.04 + 1.716 = 38.403 ;$$

$$s_7 = \sqrt{\frac{38.403}{10-1}} = 2.066$$

8 etapas

$$\begin{aligned}(13.48 - 14.46)^2 &= 0.96 & (15.67 - 14.46)^2 &= 1.464 \\ (15.34 - 14.46)^2 &= 0.774 & (7.39 - 14.46)^2 &= 49.985 \\ (20.19 - 14.46)^2 &= 32.833 & (15.2 - 14.46)^2 &= 0.548 \\ (14.19 - 14.46)^2 &= 0.073 & (14.74 - 14.46)^2 &= 0.078 \\ (12.04 - 14.46)^2 &= 5.856 & (16.36 - 14.46)^2 &= 3.61\end{aligned}$$

$$0.96 + 0.774 + 32.833 + 0.073 + 5.856 + 1.464 + 49.985 + 0.548 + 0.078 + 3.61 = 96.181 ;$$

$$s_8 = \sqrt{\frac{96.181}{10-1}} = 3.269.$$

9 etapas

$$\begin{aligned}(10.73 - 10.78)^2 &= 2.5 \times 10^{-3} & (15 - 10.78)^2 &= 17.808 \\ (7.3 - 10.78)^2 &= 12.11 & (7.39 - 10.78)^2 &= 11.492 \\ (15.87 - 10.78)^2 &= 25.908 & (15.2 - 10.78)^2 &= 19.536 \\ (11.15 - 10.78)^2 &= 0.137 & (14.74 - 10.78)^2 &= 15.682 \\ (9.49 - 10.78)^2 &= 1.664 & (16.36 - 10.78)^2 &= 31.136\end{aligned}$$

$$2.5 \times 10^{-3} + 12.11 + 25.908 + 0.137 + 1.664 + 17.808 + 11.492 + 19.536 + 15.682 + 31.136 = 135.476 ;$$

$$s_9 = \sqrt{\frac{135.476}{10-1}} = 3.88.$$

10 etapas

$$(8 - 7.32)^2 = 0.462 \quad (10.81 - 7.32)^2 = 12.18$$

$$(2.7 - 7.32)^2 = 21.344 \quad (1.69 - 7.32)^2 = 31.697$$

$$(9.1 - 7.32)^2 = 3.168 \quad (2.95 - 7.32)^2 = 19.097$$

$$(9.06 - 7.32)^2 = 3.028 \quad (9.51 - 7.32)^2 = 4.796$$

$$(8.36 - 7.32)^2 = 1.082 \quad (11 - 7.32)^2 = 13.542$$

$$0.462 + 21.344 + 3.168 + 3.028 + 1.082 + 12.18 + 31.697 + 19.097 + 4.796 + 13.542 = 110.396 ;$$

$$s_{10} = \sqrt{\frac{110.396}{10-1}} = 3.502.$$

Regresinio modelio analitinės ryšio išraiškos nustatymas ir tikrinimas

Sudaromas ir patikrinamas analitinės ryšio išraiškos modelis.

Taikoma išplėstinė hiperbolės lygtis, kad būtų galima gauti kuo tikslesnes teorines lėšų poreikio reikšmes.

$$\hat{y}_x = q_1 \cdot \frac{1}{x^{0.5}} + q_2 \cdot \frac{1}{x} + q_3 \cdot \frac{1}{x^{1.5}} + q_4 \cdot \frac{1}{x^2} + q_5 \cdot \frac{1}{x^{2.5}} + q_6 \cdot \frac{1}{x^3}.$$

y	x	1/x ^{0,5}	1/X	1/x ^{1,5}	1/x ²	1/x ^{2,5}	1/x ³
2,23	0,1	3,16	10	31,62	100	316,23	1000
5,27	0,2	2,24	5	11,18	25	55,9	125
7,44	0,3	1,83	3,33333	6,09	11,1111	20,29	37,037
8,59	0,4	1,58	2,5	3,95	6,25	9,88	15,625
10,95	0,5	1,41	2	2,83	4	5,66	8
15,13	0,6	1,29	1,66667	2,15	2,77778	3,59	4,62963
17,83	0,7	1,2	1,42857	1,71	2,04082	2,44	2,91545
14,46	0,8	1,12	1,25	1,65	1,5625	1,75	1,95313
10,78	0,9	1,05	1,11111	1,17	1,23457	1,3	1,37174
7,32	1	1	1	1	1	1	1

$$y := \begin{pmatrix} 2.23 \\ 5.27 \\ 7.44 \\ 8.59 \\ 10.95 \\ 15.13 \\ 17.83 \\ 14.46 \\ 10.78 \\ 7.32 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 3.16 & 10 & 31.62 & 100 & 316.23 & 1000 \\ 2.24 & 5 & 11.18 & 25 & 55.9 & 125 \\ 1.83 & 3.33333 & 6.09 & 11.1111 & 20.29 & 37.037 \\ 1.58 & 2.5 & 3.95 & 6.25 & 9.88 & 15.625 \\ 1.41 & 2 & 2.83 & 4 & 5.66 & 8 \\ 1.29 & 1.66667 & 2.15 & 2.77778 & 3.59 & 4.62963 \\ 1.2 & 1.42857 & 1.71 & 2.04082 & 2.44 & 2.91545 \\ 1.12 & 1.25 & 1.65 & 1.5625 & 1.75 & 1.95313 \\ 1.05 & 1.11111 & 1.17 & 1.23457 & 1.3 & 1.37174 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Skaičiuojamas dydis C:

$$\left(\begin{matrix} x^T \cdot x \end{matrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 333.97 & -490.503 & 1.509 & 291.355 & -148.576 & 21.651 \\ -490.503 & 730.795 & -13.957 & -426.059 & 219.632 & -32.165 \\ 1.509 & -13.957 & 19.521 & -10.411 & 2.354 & -0.186 \\ 291.355 & -426.059 & -10.411 & 269.714 & -136.788 & 19.954 \\ -148.576 & 219.632 & 2.354 & -136.788 & 69.957 & -10.245 \\ 21.651 & -32.165 & -0.186 & 19.954 & -10.245 & 1.503 \end{pmatrix}$$

Skaičiuojamos koeficientų q reikšmės:

$$\left(\begin{matrix} x^T \cdot x \end{matrix} \right)^{-1} \cdot x^T \cdot y = \begin{pmatrix} -68.05 \\ 119.138 \\ 9.123 \\ -88.162 \\ 43.989 \\ -6.357 \end{pmatrix}$$

$$x^T \cdot x = \begin{pmatrix} 29.298 & 63.101 & 155.24 & 417.927 & 1.197 \times 10^3 & 3.558 \times 10^3 \\ 63.101 & 154.977 & 418.324 & 1.198 \times 10^3 & 3.56 \times 10^3 & 1.082 \times 10^4 \\ 155.24 & 418.324 & 1.198 \times 10^3 & 3.56 \times 10^3 & 1.082 \times 10^4 & 3.335 \times 10^4 \\ 417.927 & 1.198 \times 10^3 & 3.56 \times 10^3 & 1.082 \times 10^4 & 3.335 \times 10^4 & 1.037 \times 10^5 \\ 1.197 \times 10^3 & 3.56 \times 10^3 & 1.082 \times 10^4 & 3.335 \times 10^4 & 1.037 \times 10^5 & 3.242 \times 10^5 \\ 3.558 \times 10^3 & 1.082 \times 10^4 & 3.335 \times 10^4 & 1.037 \times 10^5 & 3.242 \times 10^5 & 1.017 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} x^T \cdot x \end{matrix} \right)^{-1} \cdot x^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0.085	-2.736	9.889	-1.296	-8.154	-7.276	-2.176
1	-0.148	4.53	-15.585	1.38	12.043	11.306	4.138
2	1.909·10 ⁻³	-0.071	0.324	-0.116	-0.349	-0.674	-0.792
3	0.128	-3.369	10.019	0.103	-6.5	-6.117	-1.981
4	-0.082	1.935	-5.335	-0.2	3.278	3.2	1.16
5	0.015	-0.309	0.8	0.047	-0.47	-0.469	-0.178

Taigi interpoliuota išplėstinė hiperbolės lygtis bus tokia:

$$\hat{y}_x = -68,05 \cdot \frac{1}{x^{0.5}} + 119,138 \cdot \frac{1}{x} + 9,123 \cdot \frac{1}{x^{1.5}} - 88,162 \cdot \frac{1}{x^2} + 43,989 \cdot \frac{1}{x^{2.5}} - 6,357 \cdot \frac{1}{x^3}.$$

Skaičiuojamos $\hat{y}_x$ (teorinės y) reikšmės:

$$\begin{aligned}
 &-68.05 \cdot 3.16 + 119.138 \cdot 10 + 9.123 \cdot 31.62 - 88.162 \cdot 100 + 43.989 \cdot 316.23 - 6.357 \cdot 1000 = 2.253 \\
 &-68.05 \cdot 2.24 + 119.138 \cdot 5 + 9.123 \cdot 11.18 - 88.162 \cdot 25 + 43.989 \cdot 55.9 - 6.357 \cdot 125 = 5.563 \\
 &-68.05 \cdot 1.83 + 119.138 \cdot 3.33333 + 9.123 \cdot 6.09 - 88.162 \cdot 11.1111 + 43.989 \cdot 20.29 - 6.357 \cdot 37.037 = 5.67 \\
 &-68.05 \cdot 1.58 + 119.138 \cdot 2.5 + 9.123 \cdot 3.95 - 88.162 \cdot 6.25 + 43.989 \cdot 9.88 - 6.357 \cdot 15.625 = 10.633 \\
 &-68.05 \cdot 1.41 + 119.138 \cdot 2 + 9.123 \cdot 2.83 - 88.162 \cdot 4 + 43.989 \cdot 5.66 - 6.357 \cdot 8 = 13.617 \\
 &-68.05 \cdot 1.29 + 119.138 \cdot 1.66667 + 9.123 \cdot 2.15 - 88.162 \cdot 2.7778 + 43.989 \cdot 3.59 - 6.357 \cdot 4.62963 = 13.987 \\
 &-68.05 \cdot 1.12 + 119.138 \cdot 1.25 + 9.123 \cdot 1.65 - 88.162 \cdot 1.5625 + 43.989 \cdot 1.75 - 6.357 \cdot 1.95313 = 14.571 \\
 &-68.05 \cdot 1.2 + 119.138 \cdot 1.42857 + 9.123 \cdot 1.71 - 88.162 \cdot 2.04082 + 43.989 \cdot 2.44 - 6.357 \cdot 2.91545 = 13.014 \\
 &-68.05 \cdot 1.05 + 119.138 \cdot 1.11111 + 9.123 \cdot 1.17 - 88.162 \cdot 1.23457 + 43.989 \cdot 1.3 - 6.357 \cdot 1.37174 = 11.02 \\
 &-68.05 \cdot 1 + 119.138 \cdot 1 + 9.123 \cdot 1 - 88.162 \cdot 1 + 43.989 \cdot 1 - 6.357 \cdot 1 = 9.672
 \end{aligned}$$

Skaičiuojamas koreliacinis koeficientas R:

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} \right)}}.$$

$$\begin{aligned}
 (2.253 - 10)^2 &= 60.016 \\
 (5.563 - 10)^2 &= 19.687 \\
 (5.67 - 10)^2 &= 18.749 \\
 (10.633 - 10)^2 &= 0.401 \\
 (13.617 - 10)^2 &= 13.083 \\
 (13.987 - 10)^2 &= 15.896 \\
 (14.571 - 10)^2 &= 20.894 \\
 (13.014 - 10)^2 &= 9.084 \\
 (11.02 - 10)^2 &= 1.04 \\
 (9.672 - 10)^2 &= 0.108
 \end{aligned}$$

$$60.016 + 19.687 + 18.749 + 0.401 + 13.083 + 15.896 + 20.894 + 9.084 + 1.04 + 0.108 = 158.958 ;$$

$(2.87 - 10)^2 = 50.837$	$(0.6 - 10)^2 = 88.36$	$(4.68 - 10)^2 = 28.302$	$(3.54 - 10)^2 = 41.732$	$(0.73 - 10)^2 = 85.933$
$(8.25 - 10)^2 = 3.063$	$(4.47 - 10)^2 = 30.581$	$(8.02 - 10)^2 = 3.92$	$(7.72 - 10)^2 = 5.198$	$(3.96 - 10)^2 = 36.482$
$(9.3 - 10)^2 = 0.49$	$(9.09 - 10)^2 = 0.828$	$(7.43 - 10)^2 = 6.605$	$(6.98 - 10)^2 = 9.12$	$(7.64 - 10)^2 = 5.57$
$(11.21 - 10)^2 = 1.464$	$(10.14 - 10)^2 = 0.02$	$(6.24 - 10)^2 = 14.138$	$(6.34 - 10)^2 = 13.396$	$(8.34 - 10)^2 = 2.756$
$(16.86 - 10)^2 = 47.06$	$(12 - 10)^2 = 4$	$(7.52 - 10)^2 = 6.15$	$(7.1 - 10)^2 = 8.41$	$(10.96 - 10)^2 = 0.922$
$(22.58 - 10)^2 = 158.256$	$(16.06 - 10)^2 = 36.724$	$(12.4 - 10)^2 = 5.76$	$(10.95 - 10)^2 = 0.902$	$(16.46 - 10)^2 = 41.732$
$(16.9 - 10)^2 = 47.61$	$(20.33 - 10)^2 = 106.709$	$(16.81 - 10)^2 = 46.376$	$(16.52 - 10)^2 = 42.51$	$(19.7 - 10)^2 = 94.09$
$(7.39 - 10)^2 = 6.812$	$(15.2 - 10)^2 = 27.04$	$(14.74 - 10)^2 = 22.468$	$(16.36 - 10)^2 = 40.45$	$(13.48 - 10)^2 = 12.11$
$(2.95 - 10)^2 = 49.703$	$(9.16 - 10)^2 = 0.706$	$(12.65 - 10)^2 = 7.023$	$(13.49 - 10)^2 = 12.18$	$(10.73 - 10)^2 = 0.533$
$(1.69 - 10)^2 = 69.056$	$(2.95 - 10)^2 = 49.703$	$(9.51 - 10)^2 = 0.24$	$(11 - 10)^2 = 1$	$(8 - 10)^2 = 4$

$$85.933 + 36.482 + 5.57 + 2.756 + 0.922 + 41.732 + 94.09 + 12.11 + 0.533 + 4 = 284.128$$

$$87.61 + 42.25 + 1.877 + 1.488 + 11.156 + 52.853 + 101.204 + 28.516 + 7.29 + 53.29 = 387.534$$

$$93.123 + 59.908 + 11.56 + 2.132 + 1.563 + 2.465 + 45.833 + 103.836 + 34.457 + 0.81 = 355.687$$

$(0.29 - 10)^2 = 94.284$	$(0.65 - 10)^2 = 87.422$	$(7.95 - 10)^2 = 4.202$
$(3.14 - 10)^2 = 47.06$	$(3.62 - 10)^2 = 40.704$	$(7.43 - 10)^2 = 6.605$
$(6.15 - 10)^2 = 14.822$	$(6.52 - 10)^2 = 12.11$	$(6.1 - 10)^2 = 15.21$
$(9.34 - 10)^2 = 0.436$	$(9.06 - 10)^2 = 0.884$	$(5.51 - 10)^2 = 20.16$
$(11.96 - 10)^2 = 3.842$	$(13.37 - 10)^2 = 11.357$	$(7.66 - 10)^2 = 5.476$
$(15 - 10)^2 = 25$	$(19.04 - 10)^2 = 81.722$	$(9.95 - 10)^2 = 2.5 \times 10^{-3}$
$(19.72 - 10)^2 = 94.478$	$(17.55 - 10)^2 = 57.003$	$(13.92 - 10)^2 = 15.366$
$(14.19 - 10)^2 = 17.556$	$(12.04 - 10)^2 = 4.162$	$(15.67 - 10)^2 = 32.149$
$(11.15 - 10)^2 = 1.323$	$(9.49 - 10)^2 = 0.26$	$(15 - 10)^2 = 25$
$(9.06 - 10)^2 = 0.884$	$(8.36 - 10)^2 = 2.69$	$(10.81 - 10)^2 = 0.656$

$$94.284 + 47.06 + 14.822 + 0.436 + 3.842 + 25 + 94.478 + 17.556 + 1.323 + 0.884 = 299.685$$

$$87.422 + 40.704 + 12.11 + 0.884 + 11.357 + 81.722 + 57.003 + 4.162 + 0.26 + 2.69 = 298.314$$

$$4.202 + 6.605 + 15.21 + 20.16 + 5.476 + 2.5 \times 10^{-3} + 15.366 + 32.149 + 25 + 0.656 = 124.827$$

$(2.87 - 10)^2 = 50.837$	$(0.6 - 10)^2 = 88.36$	$(4.68 - 10)^2 = 28.302$	$(3.54 - 10)^2 = 41.732$
$(8.25 - 10)^2 = 3.063$	$(4.47 - 10)^2 = 30.581$	$(8.02 - 10)^2 = 3.92$	$(7.72 - 10)^2 = 5.198$
$(9.3 - 10)^2 = 0.49$	$(9.09 - 10)^2 = 0.828$	$(7.43 - 10)^2 = 6.605$	$(6.98 - 10)^2 = 9.12$
$(11.21 - 10)^2 = 1.464$	$(10.14 - 10)^2 = 0.02$	$(6.24 - 10)^2 = 14.138$	$(6.34 - 10)^2 = 13.396$
$(16.86 - 10)^2 = 47.06$	$(12 - 10)^2 = 4$	$(7.52 - 10)^2 = 6.15$	$(7.1 - 10)^2 = 8.41$
$(22.58 - 10)^2 = 158.256$	$(16.06 - 10)^2 = 36.724$	$(12.4 - 10)^2 = 5.76$	$(10.95 - 10)^2 = 0.902$

$$\begin{aligned}
(16.9 - 10)^2 &= 47.61 & (20.33 - 10)^2 &= 106.709 & (16.81 - 10)^2 &= 46.376 & (16.52 - 10)^2 &= 42.51 \\
(7.39 - 10)^2 &= 6.812 & (15.2 - 10)^2 &= 27.04 & (14.74 - 10)^2 &= 22.468 & (16.36 - 10)^2 &= 40.45 \\
(2.95 - 10)^2 &= 49.703 & (9.16 - 10)^2 &= 0.706 & (12.65 - 10)^2 &= 7.023 & (13.49 - 10)^2 &= 12.18 \\
(1.69 - 10)^2 &= 69.056 & (2.95 - 10)^2 &= 49.703 & (9.51 - 10)^2 &= 0.24 & (11 - 10)^2 &= 1
\end{aligned}$$

$$50.837 + 3.063 + 0.49 + 1.464 + 47.06 + 158.256 + 47.61 + 6.812 + 49.703 + 69.056 = 434.351$$

$$88.36 + 30.581 + 0.828 + 0.202 + 4 + 36.724 + 106.709 + 27.04 + 0.706 + 49.703 = 344.853$$

$$28.302 + 3.92 + 6.605 + 14.138 + 6.15 + 5.76 + 46.376 + 22.468 + 7.023 + 0.24 = 140.982$$

$$41.732 + 5.198 + 9.12 + 13.396 + 8.41 + 0.902 + 42.51 + 40.45 + 12.18 + 1 = 174.898$$

$$284.128 + 387.534 + 355.687 + 299.685 + 298.314 + 124.827 + 434.351 + 344.853 + 140.982 + 174.898 = 2.845 \times 10^3$$

$$R \text{ yra } \sqrt{\frac{158.958}{(2.845 \times 10^2)}} = 0.747$$

Skaičiuojama teorinė kiekvienos dekados standartinė paklaida:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-1}}$$

$$(0.73 - 2.253)^2 = 2.32 \quad (7.95 - 2.253)^2 = 32.456$$

$$(0.64 - 2.253)^2 = 2.602 \quad (2.87 - 2.253)^2 = 0.381$$

$$(0.35 - 2.253)^2 = 3.621 \quad (0.6 - 2.253)^2 = 2.732$$

$$(0.29 - 2.253)^2 = 3.853 \quad (4.68 - 2.253)^2 = 5.89$$

$$(0.65 - 2.253)^2 = 2.57 \quad (3.54 - 2.253)^2 = 1.656$$

$$\sqrt{\frac{58.081}{10-1}} = 2.54$$

$$2.32 + 2.602 + 3.621 + 3.853 + 2.57 + 32.456 + 0.381 + 2.732 + 5.89 + 1.656 = 58.081$$

$$(3.96 - 5.563)^2 = 2.57 \quad (7.43 - 5.563)^2 = 3.486$$

$$(3.5 - 5.563)^2 = 4.256 \quad (8.25 - 5.563)^2 = 7.22$$

$$(2.26 - 5.563)^2 = 10.91 \quad (4.47 - 5.563)^2 = 1.195$$

$$(3.14 - 5.563)^2 = 5.871 \quad (8.02 - 5.563)^2 = 6.037$$

$$(3.92 - 5.563)^2 = 2.699 \quad (7.72 - 5.563)^2 = 4.653$$

$$\sqrt{\frac{48.897}{10-1}} = 2.331$$

$$2.57 + 4.256 + 10.91 + 5.871 + 2.699 + 3.486 + 7.22 + 1.195 + 6.037 + 4.653 = 48.897$$

$$\begin{array}{ll}
(7.64 - 5.67)^2 = 3.881 & (6.1 - 5.67)^2 = 0.185 \\
(8.63 - 5.67)^2 = 8.762 & (9.3 - 5.67)^2 = 13.177 \\
(6.6 - 5.67)^2 = 0.865 & (9.09 - 5.67)^2 = 11.696 \\
(6.15 - 5.67)^2 = 0.23 & (7.43 - 5.67)^2 = 3.098 \\
(6.52 - 5.67)^2 = 0.722 & (6.98 - 5.67)^2 = 1.716
\end{array}
\quad \sqrt{\frac{44.332}{10 - 1}} = 2.219$$

$$3.881 + 8.762 + 0.865 + 0.23 + 0.722 + 0.185 + 13.177 + 11.696 + 3.098 + 1.716 = 44.332$$

$$\begin{array}{ll}
(8.34 - 10.633)^2 = 5.258 & (5.51 - 10.633)^2 = 26.245 \\
(11.22 - 10.633)^2 = 0.345 & (11.21 - 10.633)^2 = 0.333 \\
(8.54 - 10.633)^2 = 4.381 & (10.14 - 10.633)^2 = 0.243 \\
(9.34 - 10.633)^2 = 1.672 & (6.24 - 10.633)^2 = 19.298 \\
(9.06 - 10.633)^2 = 2.474 & (6.34 - 10.633)^2 = 18.43
\end{array}
\quad \sqrt{\frac{78.679}{10 - 1}} = 2.957$$

$$5.258 + 0.345 + 4.381 + 1.672 + 2.474 + 26.245 + 0.333 + 0.243 + 19.298 + 18.43 = 78.679$$

$$\begin{array}{ll}
(10.96 - 13.617)^2 = 7.06 & (7.66 - 13.617)^2 = 35.486 \\
(13.34 - 13.617)^2 = 0.077 & (16.86 - 13.617)^2 = 10.517 \\
(8.75 - 13.617)^2 = 23.688 & (12 - 13.617)^2 = 2.615 \\
(11.96 - 13.617)^2 = 2.746 & (7.52 - 13.617)^2 = 37.173 \\
(13.37 - 13.617)^2 = 0.061 & (7.1 - 13.617)^2 = 42.471
\end{array}
\quad \sqrt{\frac{161.894}{10 - 1}} = 4.241$$

$$7.06 + 0.077 + 23.688 + 2.746 + 0.061 + 35.486 + 10.517 + 2.615 + 37.173 + 42.471 = 161.894$$

$$\begin{array}{ll}
(16.46 - 13.987)^2 = 6.116 & (9.95 - 13.987)^2 = 16.297 \\
(17.27 - 13.987)^2 = 10.778 & (22.58 - 13.987)^2 = 73.84 \\
(11.57 - 13.987)^2 = 5.842 & (16.06 - 13.987)^2 = 4.297 \\
(15 - 13.987)^2 = 1.026 & (12.4 - 13.987)^2 = 2.519 \\
(19.04 - 13.987)^2 = 25.533 & (10.95 - 13.987)^2 = 9.223
\end{array}
\quad \sqrt{\frac{155.471}{10 - 1}} = 4.156$$

$$6.116 + 10.778 + 5.842 + 1.026 + 25.533 + 16.297 + 73.84 + 4.297 + 2.519 + 9.223 = 155.471$$

$$\begin{array}{ll}
(19.7 - 14.571)^2 = 26.307 & (13.92 - 14.571)^2 = 0.424 \\
(20.06 - 14.571)^2 = 30.129 & (16.9 - 14.571)^2 = 5.424 \\
(16.77 - 14.571)^2 = 4.836 & (20.33 - 14.571)^2 = 33.166 \\
(19.72 - 14.571)^2 = 26.512 & (16.81 - 14.571)^2 = 5.013 \\
(17.55 - 14.571)^2 = 8.874 & (16.52 - 14.571)^2 = 3.799
\end{array}
\quad \sqrt{\frac{144.484}{10 - 1}} = 4.007$$

$$26.307 + 30.129 + 4.836 + 26.512 + 8.874 + 0.424 + 5.424 + 33.166 + 5.013 + 3.799 = 144.484$$

$$\begin{array}{ll}
(13.48 - 13.014)^2 = 0.217 & (15.67 - 13.014)^2 = 7.054 \\
(15.34 - 13.014)^2 = 5.41 & (7.39 - 13.014)^2 = 31.629 \\
(20.19 - 13.014)^2 = 51.495 & (15.2 - 13.014)^2 = 4.779 \\
(14.19 - 13.014)^2 = 1.383 & (14.74 - 13.014)^2 = 2.979 \\
(12.04 - 13.014)^2 = 0.949 & (16.36 - 13.014)^2 = 11.196
\end{array}
\quad \sqrt{\frac{112.222}{10 - 1}} = 3.531$$

$$0.217 + 0.541 + 51.495 + 1.383 + 0.949 + 7.054 + 31.629 + 4.779 + 2.979 + 11.196 = 112.222$$

$$\begin{array}{ll}
(10.73 - 11.02)^2 = 0.084 & (15 - 11.02)^2 = 15.84 \\
(7.3 - 11.02)^2 = 13.838 & (7.39 - 11.02)^2 = 13.177 \\
(15.87 - 11.02)^2 = 23.522 & (15.2 - 11.02)^2 = 17.472 \\
(11.15 - 11.02)^2 = 0.017 & (14.74 - 11.02)^2 = 13.838 \\
(9.49 - 11.02)^2 = 2.341 & (16.36 - 11.02)^2 = 28.516
\end{array}
\quad \sqrt{\frac{128.645}{10 - 1}} = 3.781$$

$$0.084 + 13.838 + 23.522 + 0.017 + 2.341 + 15.84 + 13.177 + 17.472 + 13.838 + 28.516 = 128.645$$

$$\begin{array}{ll}
(8 - 9.672)^2 = 2.796 & (10.81 - 9.672)^2 = 1.295 \\
(2.7 - 9.672)^2 = 48.609 & (1.69 - 9.672)^2 = 63.712 \\
(9.1 - 9.672)^2 = 0.327 & (2.95 - 9.672)^2 = 45.185 \\
(9.06 - 9.672)^2 = 0.375 & (9.51 - 9.672)^2 = 0.026 \\
(8.36 - 9.672)^2 = 1.721 & (11 - 9.672)^2 = 1.764
\end{array}
\quad \sqrt{\frac{165.81}{10 - 1}} = 4.292$$

$$2.796 + 48.609 + 0.327 + 0.375 + 1.721 + 1.295 + 63.712 + 45.185 + 0.026 + 1.764 = 165$$

Skaiciavimų pavyzdys. Lėšų poreikis pokuratūros pastato statybos etapams

1 etapas 1940100

Išlaidų pavadinimas	proc.	Darbo užmokestis	Medžiagos	Mechanizmai	Iš viso
		446048	389158	150753	985959
Papildomų medžiagų vertė	3		11675		
Papildomų mechanizmų vertė	3			4523	
Papildomas darbo užmokestis	8	35684			
Viso:		481732	400833	155276	1037841
Soc. Draudimo išlaidos	31	149337			
Viso:		631069	400833	155276	1187178
Statyb vietės išlaidos	10				118718
Iš viso tiesioginės išlaidos:					1305896
Pridėtinės išlaidos	45				216779
Pelnas	8				121814
Iš viso netiesioginės išlaidos:					338593
				Bendra vertė be PVM	1644489
Pridėtinės vertės mokestis	18				296008
				Bendra vertė su PVM	1940497

2 etapas 4584900

Išlaidų pavadinimas	proc.	Darbo užmokestis	Medžiagos	Mechanizmai	Iš viso
		1054113	919669	356264	2330046
Papildomų medžiagų vertė	3		27590		
Papildomų mechanizmų vertė	3			10688	
Papildomas darbo užmokestis	8	84329			
Viso:		1138442	947259	366952	2452653
Soc. Draudimo išlaidos	31	352917			
Viso:		1491359	947259	366952	2805570
Statyb vietės išlaidos	10				280557
Iš viso tiesioginės išlaidos:					3086127
Pridėtinės išlaidos	45				512299
Pelnas	8				287874
Iš viso netiesioginės išlaidos:					800173
				Bendra vertė be PVM	3886300
Pridėtinės vertės mokestis	18				699534
				Bendra vertė su PVM	4585834

3 etapas 6472800

Išlaidų pavadinimas	proc.	Darbo užmokestis	Medžiagos	Mechanizmai	Iš viso
		1488159	1298357	502961	3289477
Papildomų medžiagų vertė	3		38951		
Papildomų mechanizmų vertė	3			15089	
Papildomas darbo užmokestis	8	119053			
Viso:		1607212	1337308	518050	3462570
Soc. Draudimo išlaidos	31	498236			
Viso:		2105448	1337308	518050	3960806
Statybvietės išlaidos	10				396081
Iš viso tiesioginės išlaidos:					4356887
Pridėtinės išlaidos	45				723245
Pelnas	8				406411
Iš viso netiesioginės išlaidos:					1129656
				Bendra vertė be PVM	5486543
Pridėtinės vertės mokestis	18				987578
				Bendra vertė su PVM	6474121

4 etapas 7473300

Išlaidų pavadinimas	proc.	Darbo užmokestis	Medžiagos	Mechanizmai	Iš viso
		1718184	1499044	580704	3797932
Papildomų medžiagų vertė	3		44971		
Papildomų mechanizmų vertė	3			17421	
Papildomas darbo užmokestis	8	137455			
Viso:		1855639	1544015	598125	3997779
Soc. Draudimo išlaidos	31	575248			
Viso:		2430887	1544015	598125	4573027
Statybvietės išlaidos	10				457303
Iš viso tiesioginės išlaidos:					5030330
Pridėtinės išlaidos	45				835038
Pelnas	8				469299
Iš viso netiesioginės išlaidos:					1304267
				Bendra vertė be PVM	6334597
Pridėtinės vertės mokestis	18				1140227
				Bendra vertė su PVM	7474824

5 etapas 9526500

Išlaidų pavadinimas	proc.	Darbo užmokestis	Medžiagos	Mechanizmai	Iš viso
		2190234	1910888	740245	4841367
Papildomų medžiagų vertė	3		57327		
Papildomų mechanizmų vertė	3			22207	
Papildomas darbo užmokestis	8	175219			
Viso:		2365453	1968215	762452	5096120
Soc. Draudimo išlaidos	31	733290			
Viso:		3098743	1968215	762452	5829410
Statyb vietės išlaidos	10				582941
Iš viso tiesioginės išlaidos:					6412351
Pridėtinės išlaidos	45				1064454
Pelnas	8				598144
Iš viso netiesioginės išlaidos:					1662598
				Bendra vertė be PVM	8074949
Pridėtinės vertės mokestis	18				1453491
				Bendra vertė su PVM	9528440

6 etapas 13163100

		Darbo užmokestis	Medžiagos	Mechanizmai	Iš viso
Išlaidų pavadinimas	proc.	3026324	2640340	1022823	6689487
Papildomų medžiagų vertė	3		79210		
Papildomų mechanizmų vertė	3			30685	
Papildomas darbo užmokestis	8	242106			
Viso:		3268430	2719550	1053508	7041488
Soc. Draudimo išlaidos	31	1013213			
Viso:		4281643	2719550	1053508	8054701
Statybvietės išlaidos	10				805470
Iš viso tiesioginės išlaidos:					8860171
Pridėtinės išlaidos	45				1470794
Pelnas	8				826477
Iš viso netiesioginės išlaidos:					2297271
				Bendra vertė be PVM	11157442
Pridėtinės vertės mokestis	18				2008340
				Bendra vertė su PVM	13165782

7 etapas 15512100

Išlaidų pavadinimas	proc.	Darbo užmokestis	Medžiagos	Mechanizmai	Iš viso
		3566382	3111518	1205349	7883249
Papildomų medžiagų vertė	3		93346		
Papildomų mechanizmų vertė	3			36161	
Papildomas darbo užmokestis	8	285311			
Viso:		3851693	3204864	1241510	8298067
Soc. Draudimo išlaidos	31	1194025			
Viso:		5045718	3204864	1241510	9492092
Statyb vietės išlaidos	10				949209
Iš viso tiesioginės išlaidos:					10441301
Pridėtinės išlaidos	45				1733262
Pelnas	8				973965
Iš viso netiesioginės išlaidos:					2707227
				Bendra vertė be PVM	13148528
Pridėtinės vertės mokestis	18				2366735
				Bendra vertė su PVM	15515263

8 etapas 12580200

Išlaidų pavadinimas	proc.	Darbo užmokestis	Medžiagos	Mechanizmai	Iš viso
		2892310	2523419	977529	6393258
Papildomų medžiagų vertė	3		75703		
Papildomų mechanizmų vertė	3			29326	
Papildomas darbo užmokestis	8	231385			
Viso:		3123695	2599122	1006855	6729672
Soc. Draudimo išlaidos	31	968346			
Viso:		4092041	2599122	1006855	7698018
Statyb vietės išlaidos	10				769802
Iš viso tiesioginės išlaidos:					8467820
Pridėtinės išlaidos	45				1405663
Pelnas	8				789879
Iš viso netiesioginės išlaidos:					21951542
				Bendra vertė be PVM	10663362
Pridėtinės vertės mokestis	18				1919405
				Bendra vertė su PVM	12582767

9 etapas 9378600

Išlaidų pavadinimas	proc.	Darbo užmokestis	Medžiagos	Mechanizmai	Iš viso
		2156231	1881221	728753	4766205
Papildomų medžiagų vertė	3		56437		
Papildomų mechanizmų vertė	3			21863	
Papildomas darbo užmokestis	8	172499			
Viso:		2328730	1937658	750616	5017004
Soc. Draudimo išlaidos	31	721906			
Viso:		3050636	1937658	750616	5738910
Statyb vietės išlaidos	10				573891
Iš viso tiesioginės išlaidos:					6312801
Pridėtinės išlaidos	45				1047929
Pelnas	8				588885
Iš viso netiesioginės išlaidos:					1636787
				Bendra vertė be PVM	7949588
Pridėtinės vertės mokestis	18				1430926
				Bendra vertė su PVM	9380514

10 etapas 6368400

Išlaidų pavadinimas	proc.	Darbo užmokestis	Medžiagos	Mechanizmai	Iš viso
		1464157	1277415	494849	3236421
Papildomų medžiagų vertė	3		38323		
Papildomų mechanizmų vertė	3			14846	
Papildomas darbo užmokestis	8	117133			
Viso:		1581290	1315738	509695	3406723
Soc. Draudimo išlaidos	31	490200			
Viso:		2071490	1315738	509695	3896923
Statyb vietės išlaidos	10				389692
Iš viso tiesioginės išlaidos:					4286615
Pridėtinės išlaidos	45				711581
Pelnas	8				399856
Iš viso netiesioginės išlaidos:					1111437
				Bendra vertė be PVM	5398052
Pridėtinės vertės mokestis	18				971649
				Bendra vertė su PVM	6369701

Prokuratūros pastato mėnesinis lėšų poreikis

Prokuratūros statybos trukmė yra 21 mėnesis (nuo 2006 11 iki 2008 07), o sąmatinė vertė 87 mln. litų.

Dekados	Procentai	Lėšos
1	2,23	1940100
2	5,27	4584900
3	7,44	6472800
4	8,59	7473300
5	10,95	9526500
6	15,13	13163100
7	17,83	15512100
8	14,46	12580200
9	10,78	9378600
10	7,32	6368400
Σ	100%	87000000 Lt

1. Nuo **1940100 Lt.**

210% - 1940100;
 100% - 923857; Lapkritis **923857 Lt**;
 100% - 923857; Gruodis **923857 Lt**.
 10% - 92386.

2. Nuo **4584900 Lt.**

210% - 4584900;
 90% - 1964957; Sausis 92386 + 1964957 = **2057343 Lt**;
 100% - 2183286; Vasaris **2183286 Lt**.
 20% - 436657.

3. Nuo **6472800 Lt.**

210% - 6472800;
 80% - 2465828; Kovas 436657 + 2465828 = **2902485 Lt**;
 100% - 3082286; Balandis **3082286 Lt**.
 30% - 924686.

4. Nuo **7473300 Lt.**

210% - 7473300;
 70% - 2491100; Gegužė 924686 + 2491100 = **3415786 Lt**;
 100% - 3558714; Birželis **3558714 Lt**.
 40% - 1423486.

5. Nuo **9526500 Lt.**

210% - 9526500;
60% - 2721857;
100% - 4536429;
50% - 2268214.

Liepa $1423486 + 2721857 = 4145343$ Lt;
Rugpjūtis **4536429 Lt.**

6. Nuo **13163100 Lt.**

210% - 13163100;
50% - 3134071;
100% - 6268143;
60% - 3760886.

Rugsėjis $2268214 + 3134071 = 5402285$ Lt;
Spalis **6268143 Lt.**

7. Nuo **15512100 Lt.**

210% - 15512100;
40% - 2954686;
100% - 7386714;
70% - 5170700.

Lapkritis $3760886 + 2954686 = 6715572$ Lt;
Gruodis **7386714 Lt.**

8. Nuo **12580200 Lt.**

210% - 12580200;
30% - 1797171;
100% - 5990572;
80% - 4792457.

Sausis $5170700 + 1797171 = 6967871$ Lt;
Vasaris **5990572 Lt.**

9. Nuo **9378600 Lt.**

210% - 9378600;
20% - 893200;
100% - 4466000;
90% - 4019400.

Kovas $4792457 + 893200 = 5685657$ Lt;
Balandis **446600 Lt.**

10. Nuo **6368400 Lt.**

210% - 6368400;
10% - 303258;
100% - 3032571;
100% - 3032571.

Gegužė $4019400 + 303258 = 4322658$ Lt;
Birželis **3032571 Lt;**
Liepa **3032571 Lt.**