



VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

STATYBOS FAKULTETAS

STATYBINĖS MECHANIKOS KATEDRA

Edvard Maksimovič

**TAMPRIAI PLASTINIŲ LENKIAMŲ PLOKŠČIŲ APKROVOS
OPTIMIZAVIMAS: MATEMATINIAI MODELIAI IR SPRENDIMO
ALGORITMAI**

LOAD OPTIMIZATION OF PLASTIC-ELASTIC BENDABLE PLATES:
MATHEMATICAL MODELS AND SOLUTION ALGORITHMS

Baigiamasis magistro darbas

Statinių konstrukcijų studijų programa (valstybinis kodas 62402T107)

Statinių projektavimo ir optimizacijos kompiuterinių technologijų specializacija

Technologijos mokslų sritis (T000), statybos inžinerijos kryptis (02T)

Vilnius, 2009

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

STATYBOS FAKULTETAS

STATYBINĖS MECHANIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas

(Parašas)

Prof. habil. dr. Juozas
Atkočiūnas
(Vardas, pavardė)

(Data)

Edvard Maksimovič

**TAMPRIAI PLASTINIŲ LENKIAMŲ PLOKŠČIŲ APKROVOS
OPTIMIZAVIMAS: MATEMATINIAI MODELIAI IR SPRENDIMO
ALGORITMAI**

LOAD OPTIMIZATION OF PLASTIC-ELASTIC BENDABLE PLATES:
MATHEMATICAL MODELS AND SOLUTION ALGORITHMS

Baigiamasis magistro darbas

Statinių konstrukcijų studijų programa, valstybinis kodas 62402T107

Statinių projektavimo ir optimizacijos kompiuterinių technologijų specializacija

Technologijos mokslų sritis (T000), statybos inžinerijos kryptis (02T)

Vadovas prof. habil. dr. Juozas Atkočiūnas _____

(Moksl.laipsnis, vardas, pavardė)

(Parašas)

(Data)

Konsultantas _____

(Moksl.laipsnis, vardas, pavardė)

(Parašas)

(Data)

Vilnius, 2009

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Statybos fakultetas

Statybinės mechanikos katedra

ISBN ISSN

Egz. sk.

Data-....-....

Statinių konstrukcijų studijų programos baigiamasis magistro darbas

Pavadinimas **Tampriai plastinių lenkiamų plokščių apkrovos optimizavimas: matematiniai modeliai ir sprendimo algoritmai**

Autorius **Edvard Maksimovič**

Vadovas prof. habil. dr.

Kalba

☐

lietuvių

☐

užsienio

Anotacija

Darbo tikslas – idealiai tampriai plastinių lenkiamųjų plokščių apkrovos pasiskirstymo optimizavimo uždavinių matematinių modelių sudarymo ir sprendimo metodų tobulinimas. Tyrimai atlikti pasitelkus netamprių konstrukcijų mechanikos energinius principus ir matematinį programavimą. Plokštės diskretizacijai naudojamas pusiausvyru baigtinių elementų metodas. Sukurtas naujas apkrovos optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmas, leidžiantis sklandžiai pereiti nuo *Treska* prie *von Mizeso* takumo sąlygos.

Darbą sudaro: 4 skyriai, išvados, naudotos literatūros sąrašas (92 psl) ir priedai. Pirmajame skyriuje atlikta tampriai plastinių plokščių šiuolaikinių optimizavimo metodu analizė. Išnagrinėti tiesinio ir netiesinio matematinio programavimo uždaviniai, teorinės jų taikymo galimybės nagrinėjant lenkiamosios plokštės ribinės pusiausvyros būseną.

Lenkiamųjų plokščių apkrovos optimizavimo uždavinių matematiniams modeliams skirtas antrasis skyrius. Čia išnagrinėti plokščių diskretizavimo klausimai, sudaryti plokštės analizės ir optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai. Apvalios plokštės ribinės pusiausvyros uždaviniai nagrinėjami trečiame skyriuje. Spresti tiesiniai (*Treska* takumo sąlygos) ir netiesiniai (*von Mizeso* takumo sąlygos) uždaviniai. Tampriai plastinės plokštės apkrovos optimizavimo problemoms skirtas ketvirtasis skyrius. Čia pateiktas pagerintas apvalios plokštės apkrovos optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmas. Pasitelkus *Rozeno* projektuojamųjų gradientų metodą, atlikti skaitiniai uždavinių sprendimo eksperimentai, suformuluotos išvados.

Prasminiai žodžiai: Tampriai plastinės plokštės, energiniai principai, matematinis programavimas, *Treska* ir *von Mizeso* takumo sąlygos, pusiausvyri baigtiniai elementai,

Vilnius Gediminas Technical University
Faculty of **Civil Engineering**
Department of **Structural Mechanics**

ISBN ISSN
Copies No.
Date-....-....

Building Structures study programme master thesis.

Title: **Load optimization of plastic-elastic bendable plates: mathematical models and solution algorithms.**

Thesis language

☐

Lithuanian

☐

Foreign (English)

Annotation

Thesis objects – ideally plastic elastic bended slabs load distribution optimization tasks mathematical model compose and solution methods improvement. Investigations were done using mechanical energy principles of non-elastic structures and mathematic programming. For slab dividing finite element method was used. New algorithm for the optimization load task solution was created. Method allows us walk from *Treska* to *von Mises* yielding condition uniformly.

Work consists of 4 chapters, conclusions, list of used literature (92 p.) and appendixes. In the first chapter modern optimization method were used in ideally plastic elastic slabs analyzes. Linear and non-linear mathematical programming tasks were analyzed. It theoretical application possibilities for bended slab ultimate equilibrium were investigated.

Second chapter analyze load optimization mathematical models of the slabs under bending. Here were analyzed questions of the slabs division. Analysis and optimization mathematical models of the slabs were created. Ultimate equilibrium tasks of the round slab were analyzed in the third chapter. Were solved linear (*Treska* yielding condition) and non-linear (*Von-Mizeco* yielding condition) exercises. Problems of elastic plastic slab load optimization were analyzed in the fourth chapter. There is presented better solution of algorithm of the round slab load optimization. Taken into account *Rozen* design gradients method numerical solution experiments solution of exercises was done as well as conclusions was formulated.

Keywords: mechanical energy principles, elastoplastic constructions, finite element method, mathematical programming, *Treska* and *von Mises* yielding condition, load optimization.

TURINYS

Paveikslų sąrašas.....	7
Lentelių sąrašas.....	8
Pagrindiniai sutartiniai žymėjimai.....	8
Santrumpos.....	9
ĮVADAS.....	10
1. ŠIUOLAIKINĖS TAMPRIAI PLASTINIŲ LENKIAMŲJŲ PLOKŠČIŲ OPTIMIZAVIMO PROBLEMOS.....	12
1.1. Bendros pastabos.....	12
1.2. Apie matematinį programavimą.....	13
1.3. Netiesinio matematinio programavimo uždavinio sprendimo algoritmas.....	18
1.4. Tampriai plastinių lenkiamųjų plokščių optimizavimo šiuolaikinių tyrimų apžvalga.....	21
1.5. Magistrinio darbo tikslų formulavimas.....	23
2. LENKIAMŲ PLOKŠČIŲ APKROVOS OPTIMIZAVIMO UŽDAVINIŲ MATEMATINIAI MODELIAI.....	24
2.1. Įvadinės pastabos.....	24
2.2. Diskretinės plokštės lygtys ir priklausomybės.....	25
2.3. Plokštės analizės uždavinys (vienkartė apkrova).....	32
2.4. Vienkartės apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis.....	38
2.5. Kintamos-kartotinės apkrovos optimizavimas.....	40
2.6. Antrojo skyriaus rezultatai ir išvados.....	42
3. APVALIOS PLOKŠTĖS RIBINĖS PUSIAUSVYROS UŽDAVINYS.....	43
3.1. Bendros pastabos.....	43
3.2. Ribinės apkrovos nustatymo skaitinis eksperimentas.....	43
3.2.1. Plokštės diskretizacija ir matematiniai modeliai.....	43
3.2.2. Sprendimas <i>Matlab</i> aplinkoje.....	46
3.2.3. Sprendimas <i>Simplex</i> programa. Rezultatai.....	54
3.3. Analizės uždavinio skaitinis eksperimentas.....	57
3.4. Skyriaus rezultatai ir išvados.....	59
4. APKROVOS OPTIMIZAVIMO UŽDAVINIO SPRENDIMO ALGORITMAS, SKAITINIS EKSPERIMENTAS.....	60
4.1. Sprendimo algoritmas.....	60
4.2. Skaitinis eksperimentas.....	63

REZULTATAI IR IŠVADOS.....	70
Autoriaus paskelbta medžiaga baigiamojo magistro darbo tema.....	71
1 priedas.....	76
2 priedas.....	85
3 priedas.....	87
LITERATŪRA.....	89

Paveikslų sąrašas

1.1 pav. <i>Rozeno</i> projektuojamųjų gradientų metodo iliustracija.....	19
2.1 pav. <i>Mizeso</i> takumo sąlyga stačiakampės plokštės pjūviui.....	27
2.2 pav. <i>Treska</i> takumo sąlyga stačiakampės plokštės pjūviui.....	28
2.3 pav. Apvalios plokštės diskretinis modelis.....	30
2.4a pav. Plokštės žiedinio baigtinio elemento fragmentas.....	30
2.4b pav. Plokštės žiedinio baigtinio elemento pagrindiniai mazgai.....	30
2.5 pav. <i>Treska</i> takumo sąlygos apvaliai plokštei.....	35
2.6 pav. <i>von Mizeso</i> takumo sąlygos apvaliai plokštei.....	35
3.1 pav. Simetriškai apkrauta apvali plokštė.....	44
3.2 pav. Įrašų paskirstymas radialiniame apvalios plokštės pjūvyje.....	44
3.3 pav. Apvalios plokštės suskaidymas į BE.....	45
3.4 pav. Apvalios plokštės dviejų elementų skaičiuojamieji pjūviai.....	45
3.5 pav. <i>Matlab</i> programoje gauti radialiniai testinio uždavinio momentai esant <i>Treska</i> takumo sąlygoms.....	51
3.6 pav. <i>Matlab</i> programoje gauti žiediniai testinio uždavinio momentai esant <i>Treska</i> takumo sąlygoms.....	51
3.7 pav. <i>Rozen</i> programoje nustatyti radialiniai testinio uždavinio momentai esant <i>von Mizeso</i> takumo sąlygoms.....	52
3.8 pav. <i>Rozen</i> programoje nustatyti žiediniai testinio uždavinio momentai esant <i>von Mizeso</i> takumo sąlygoms.....	52
4.1 pav. Perėjimo nuo <i>Treska</i> prie <i>Mizeso</i> takumo sąlygos fragmentas.....	60
4.2 pav. Apkrovos optimizavimo (<i>Treska-Mizeso</i>) principinė algoritmo schema.....	61
4.3 pav. Apvalios plokštės geometrija ir kraštinės sąlygos.....	63
4.4 pav. Apvalios plokštės diskretinis modelis.....	64

Lentelių sąrašas

3.1 lentelė. Testinio pavyzdžio pusiausvyros lygčių koeficientų matrica A	46
3.2 lentelė. Testinio pavyzdžio matematinis modelis – matricinė-operatorinė forma.....	48
3.3 lentelė. Testinio pavyzdžio matematinis modelis – skaitinė forma.....	49
3.4 lentelė. Testinio pavyzdžio <i>Simplex</i> programos skaitinė forma.....	55
4.1 lentelė. Plokštės įrašos ir poslinkiai nuo pastovios apkrovos.....	64
4.2 lentelė. Plokštės įrašos ir poslinkiai nuo pastovios apkrovos ir q^*	65

PAGRINDINIAI SUTARTINIAI ŽYMĖJIMAI

Matricos

A – statikos pusiausvyros lygčių koeficientų matrica

D – konstrukcijos pasiduodamumo matrica

α – tampraus plokštės skaičiavimo momentų influentinė matrica

β – tampraus skaičiavimo poslinkių influentinė matrica

G – liekamųjų įrašų influentinė matrica

H – liekamųjų poslinkių influentinė matrica

I – $(n \times n)$ -matė vienetinė matrica

$N_k(\rho)$ – k -jo elemento įrašų aproksimacijos matrica

P_κ – projektyvinė matrica

K – konstrukcijos standumo matrica

Φ – tiesinių takumo sąlygų matrica

Γ – konstrukcijos konfigūracijos matrica

Vektoriai

$\mathcal{F}(\mathbf{x})$ – tikslo funkcija

$\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}^{opt}$ – optimalus sprendinys

$\mathbf{F}_{sup}$, $\mathbf{F}_{inf}$ – jėgų kitimo apatinių ir viršutinių ribų reikšmių vektoriai

$\mathbf{S}$ – įrašų vektorius

$\mathbf{S}_r$ – liekamųjų įrašų vektorius

$\mathbf{S}_0$ – ribinių įrašų vektorius

$\mathbf{u}$ – poslinkių vektorius

$\mathbf{u}_r$ – liekamųjų poslinkių vektorius

$\mathbf{u}_{e,sup}$, $\mathbf{u}_{e,inf}$ – tamprus ekstreminiai poslinkiai

Θ – deformacijų vektorius

$\boldsymbol{\theta}_r$ – liekamųjų deformacijų vektorius

$\boldsymbol{\theta}_p$ – plastinių deformacijų vektorius

$\boldsymbol{\lambda}$ – plastinių daugiklių vektorius

$\boldsymbol{M}_r$ – liekamųjų momentų vektorius

$\boldsymbol{M}_e$ – tamprių momentų vektorius

$\boldsymbol{M}$ – momentų vektorius

$\boldsymbol{T}$ – apkrovos optimalumo kriterijaus svorio koeficientų vektorius

$\boldsymbol{w}$ – plokštės įlinkių vektorius

Kintamieji ir skaliarai

$\mathcal{L}$ – leistinųjų sprendinių aibė

$\tilde{\varepsilon}_p$ – pilnutinė plastinė deformacija

$\tilde{\mathbf{s}}$ – įtempių deviatorius

σ_y – takumo riba tempimo metu

M_{ok} – skaičiuojamojo pjūvio ribinis momentas

h – plokštės storis

ν – Puasono koeficientas

Indeksai

i – kintamas indeksas

k – baigtinio elemento indeksas

e – tamprusis

ρ – radialinis

θ – žiedinis

r – liekamasis

p – plastinis

Santrumpos

BEM – baigtinių elementų metodas

BE – baigtinis elementas

KKa – kartotinai kintama apkrova

IVADAS

Konstrukcijų skaičiavimas ir projektavimas įvertinant plastines deformacijas leidžia efektyviau išnaudoti jų laikomąją galią ir sudaryti ekonomiškesnius projektus. Baigiamajame magistriniame darbe nagrinėjamas tamptiriai plastinių lenkiamųjų plokščių apkrovos optimizavimas. Sprendžiami dviejų tipų uždaviniai. Pirmasis – tai ribinės pusiausvyros uždaviniai (naudojamas standžiai plastinės medžiagos modelis), antrasis – optimizuojama plokštės apkrova, plokštei nepasiekus plastinio suirimo būvio (naudojamas tamptiriai plastinės medžiagos modelis). Sudaryti abiejų tipų uždavinių matematiniai modeliai. Antruoju atveju matematiniam modelyje įeina ne tik stiprumo (*Treska*, *von Miseso* takumo sąlygos), bet ir standumo sąlygos (ribojami plokštės įlinkiai). Skaitiniai pavyzdžiai skirti apvalių plokščių nagrinėjimui. Sukurtas naujas apkrovos optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmas, leidžiantis sklandžiai pereiti nuo *Treska* prie *von Miseso* takumo sąlygos. Pagrindinė *von Miseso* naudojimo takumo sąlygos problema yra tai, kad influentinės liekamųjų įrašų ir poslinkių matricos priklauso nuo apkrovimo istorijos. Tos matricos pagrindinių optimizavimo uždavinių kintamųjų atžvilgiu (tai – plastiniai daugikliai) yra netiesinės. Tuo tarpu taikant *Treska* sąlygas šios matricos tiesiogiai nepriklauso nuo plastinių daugiklių. Darbo tikslas buvo apkrovos optimizavimo uždavinio matematinio modelio realizavimo pradžioje taikyti *Treska* takumo sąlygas ir tik baigiamajame uždavinio sprendimo etape pereiti prie *von Miseso* takumo sąlygos.

Darbe taikyti metodai: energiniai ekstreminiai netamptirų konstrukcijų mechanikos principai, matematinio programavimo teorija, baigtiniai elementai. Apkrovos optimizavimo uždavinių diskretiniai matematiniai modeliai sudaromi pusiausvirų baigtinių elementų metodu. Tyrimai atlikti ir skaitinių eksperimentų rezultatai gauti laikantis mažų deformacijų prielaidos. Baigiamajame magistriniame darbe buvo *spręsti šie uždaviniai*: 1) atlikta plastinių plokščių optimizavimo uždaviniams (projektinis ir patikrinamasis aspektas) skirtų darbų analizė; 2) pasitelkus VGTU statybinės mechanikos katedros (prof. *S.Kalanta*) išplėtotą pusiausvirų BE metodiką, sudaryti plokštės ribinės pusiausvyros uždavinių matematiniai modeliai; 3) išnagrinėti ekstreminiai energiniai papildomos deformavimo energijos minimumo bei pilnutinės potencinės energijos minimumo principai ir jų taikymas plokštės analizės uždaviniuose; 4) sudaryti analizės uždavinio matematiniai modeliai ir jų pagrindu – plokštės apkrovos optimizavimo matematinis modelis; 5) baigiamojo darbo autoriaus sudarytos tiesinių uždavinių sprendimo programos ir išspręsti uždaviniai; 6) sukurtas naujas apkrovos optimizavimo uždavinio algoritmas; 7) išnagrinėtas *Rozeno* algoritmo metodas ir jo pritaikymas optimizavimo uždavinių sprendimui; 8) atlikta skaičiavimo rezultatų analizė.

Baigiamojo magistro darbo *mokslinis naujumas* – naujo algoritmo sukūrimas ir taikymas.

Darbo aprobacija – paskelbtas straipsnis: Maksimovič, E.; Atkočiūnas, J. 2008. Apvalių plokščių analizės uždavinio matematinis modelis, esant Treska plastiškumo kriterijui, iš *11-osios Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Mokslas – Lietuvos ateitis“*, įvykusios Vilniuje 2008 m. balandžio 2-4 d., darbai. Vilnius: Technika, 188-196.

1. ŠIUOLAIKINĖS TAMPRIŲ-PLASTINIŲ LENKIAMŲJŲ PLOKŠČIŲ OPTIMIZAVIMO PROBLEMA

1.1. Bendros pastabos

Pagrindinis statybinių konstrukcijų skaičiavimo tikslas yra apskaičiuoti nuo išorinio poveikio atsirandančias įrašas, įlinkius ir, juos žinant, suprojektuoti pakankamai stiprias ir standžias konstrukcijas. Magistro baigiamajame darbe nagrinėjamos tampriai plastinės lenkiamosios plokštės. Norima pratęsti ribinės pusiausvyros ir analizės uždavinių, gerai žinomų ir taikomų strypinėms sistemoms, sprendimo metodiką plokštėms. Klasikinis ribinės pusiausvyros uždavinys siejamas su maksimalios apkrovos, esant plastiniam suirimui, nustatymu. Plokštėms tai sudėtinga problema: takumo sąlygos yra netiesinės, diskretinio modelio (o jam rašomos pusiausvyros ir geometrinės lygtys) sudarymo ir kraštinių sąlygų įvertinimo sunkumai. Etapinio skaičiavimo metodiką čia sunku pasitelkti. Lieka galimybė ribinės apkrovos skaičiavimo uždavinį formuluoti kaip ekstreminį (matematinio programavimo) uždavinį, tam pasitelkus mechanikos energinius principus. Taip atsiranda ekstreminis uždavinys, kurį išsprendus randamas ne tik įrašas, bet ir apkrovos dydžiai (jei eksploatuojamos plokštės apkrova mažesnė – plastinis suirimas nebus pasiektas). Kitaip sakant, magistriniame darbe nagrinėjamas patikrinamasis uždavinys ([Čyras 1983](#); [Čyras 1989](#); [Bazant 1999](#); [Čyras et al. 2004](#)). Ribinės pusiausvyros uždavinio atveju paranku taikyti standžiai plastinės medžiagos fizinių modelių.

Sprendžiant patikrinamąjį uždavinį medžiaga, geometrija, apkrovų pridėties vieta duotos. Ribinės apkrovos optimizacijos uždavinys formuluojamas taip: *ieškoma apkrova, tenkinanti nustatytą optimalumo kriterijų bei plokštės stiprumo sąlygas*. Darbe formuluojamas ir apkrovos optimizavimo uždavinys, esant ne tik stiprumo, bet ir standumo apribojimams. Tuo atveju plokštės medžiaga – idealiai tampriai plastinė.

Matematinio programavimo teorijoje kartais pradžioje nustatomos nagrinėjamo uždavinio ekstreminio sprendimo egzistavimo būtinų netiesinių sąlygų dalinėmis išvestinėmis lygtys, ir tik po to atliekama jų diskretizacija. Inžinerinėje praktikoje tikslingiau jas diskretizuoti iki jų skaitinio sprendimo: tai natūraliai pasiekama taikant baigtinių elementų metodą ([Jarmolajeva 2001](#); [Kalanta \(rusų k.\) 1995](#); [Atkočiūnas et al. 2004](#)).

Grįžtant prie tamprios-plastinės plokštės apkrovos optimizavimo uždavinio būtina pažymėti, kad jis sujungia savyje konstrukcijos analizės uždavinį ir maksimalios apkrovos skaičiavimo problemą. Iš esmės tai – tiesinio, kvadratinio ir iškilo netiesinio matematinio programavimo uždavinių loginė grupė. Todėl šiame skyriuje ir kalbama atskirai apie kiekvieną iš jų – tiesinį, netiesinius – uždavinius.

Skyriuje medžiaga išdėstyta taip: 1.2 poskyryje bendrai kalbama apie matematinį programavimą, jo uždavinius, 1.3 poskyryje – apie *Rozeno* algoritmą, o 1.4 poskyryje apžvelgiama mokslinė literatūra, skirta plokščių apkrovos optimizacijai, taikant *tiesinį* ir *netiesinį matematinį* programavimą. Glaustai liečiami ir plokščių prisitaikomumo klausimai.

Taip išryškėjo, kad tampriai plastinių plokščių apkrovos optimizacijos uždavinių sprendimo metodika nėra pilnai išnagrinėta, ypač stokojama netamprių konstrukcijų mechanikos uždavinių formulavimo ir matematinio programavimo sąsajų. Tam ir skirtas šis baigiamasis magistro darbas.

1.2. Apie matematinį programavimą

Ekonominėje, inžinerinėje veikloje dažnai tenka rinktis vieną sprendinį iš kelių galimų. Natūraliai kyla uždavinys – rasti geriausią sprendinį. Pavyzdžiui, reikia suprojektuoti konstrukciją, kuri tenkintų stiprumo, standumo, stabilumo bei kitus reikalavimus ir t.t. Konstrukcijų, tenkinančių šias sąlygas gali būti ne viena: kiekvienas toks variantas gali būti vadinamas *leistiniu sprendiniu*. Ekonominis, technologinis tikslingumas iš visų konstrukcijos variantų skatina pasirinkti tokį jos leistiną sprendinį, kad konstrukcija būtų kiek galima lengvesnė (arba pigesnė). Tikslas, kurio siekiama renkantis leistiną sprendinį, apibrėžia *optimalumo kriterijų*, t.y. požymį, kuriuo remiantis vertinami leistinieji sprendiniai (dažnai optimalumo kriterijus sutapatinamas su tikslo funkcija). Uždavinys, kai reikia rasti geriausią sprendinį, vadinamas *optimizavimo uždaviniu*. Tokie uždaviniai sėkmingai sprendžiami matematinio programavimo metodais.

Matematinio programavimo minimizacijos uždavinys formuluojamas taip: reikia rasti tokį vektorių $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, kuris tenkintų apribojimų sistemą $g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \ i = 1, 2, \dots, m$, $h_i(\mathbf{x}) = 0 \ i = 1, 2, \dots, l$ ir kuriam funkcija $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ įgytų mažiausią reikšmę ([Bazaraa et al. 2004](#); [Kalanta 2007](#)).

Simboliškai šis uždavinys užrašomas taip:

rasti

$$\min \mathcal{F}(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

esant sąlygoms

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.2)$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = 1, 2, \dots, l. \quad (1.3)$$

Lygtys (1.7) matricine forma užrašomos $AS = F$. Čia A – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Šioje matricioje yra m eilučių ir n stulpelių. Vėliau bus parodyta, jog m yra sistemos diskretinio modelio laisvumo laipsnis, o n – bendras įrašų skaičius konstrukcijoje.

$$S = (S_1, S_2, \dots, S_n)^T.$$

Kvadratinio programavimo uždavinys. Kvadratinio programavimo uždavinio tikslo funkcija yra kvadratinė funkcija, o apribojimai – tiesinės funkcijos. Tuo kvadratinio programavimo uždavinys skiriasi nuo tiesinio programavimo. Simboliškai kvadratinio programavimo uždavinys yra užrašomas taip:

rasti

$$\min \left(\sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m d_{ij} x_i x_j \right), \quad (1.9)$$

esant sąlygoms

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.10)$$

$$h_i(x) = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j - d_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (1.11)$$

Kvadratinio programavimo uždavinių grupei priklauso tampriųjų konstrukcijų statybinės mechanikos įtempių ir deformacijų skaičiavimo, esant duotai apkrovai, uždavinys (jis dažnai vadinamas įtempių ir deformacijų būvio analizės uždaviniu). Antai, analizės statinės formuluotės uždavinio tikslo funkcija yra kvadratinė, t.y. papildoma deformavimo energija, išreikšta įrašomis: $\frac{1}{2} S^T D S$. Tampraus rėmo analizės uždavinio statinės

formuluotės apribojimų sistemą sudaro tik pusiausvyros lygtys (1.11). Tampriojo plastinio rėmo atveju analizės uždavinio statinės formuluotės apribojimų sistemą jau sudarytų takumo sąlygos (1.10) ir pusiausvyros lygtys (1.11). Pastaruoju atveju uždavinio tikslo funkcija būtų:

$$\min \frac{1}{2} S_r^T D S_r.$$

Netiesinio matematinio programavimo uždavinio formuluoė. Netiesinio iškilojo programavimo bendrasis uždavinys užrašomas taip:

rasti

$$\min \mathcal{F}(\mathbf{x}), \quad (1.12)$$

esant sąlygoms

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.13)$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (1.14)$$

Netiesinio programavimo uždavinys (1.12) – (1.14), eliminavus pusiausvyros lygtis (1.14), gali būti užrašytas taip:

rasti

$$\min \mathcal{F}(\mathbf{x}), \quad (1.15)$$

esant sąlygoms

$$\varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (1.16)$$

$$i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.17)$$

Čia $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ ir $\varphi(\mathbf{x})$ bendruoju atveju yra netiesinės iškilos funkcijos. Jeigu visos funkcijos – ir $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, ir $\varphi(\mathbf{x})$ tiesinės – tai uždavinys (1.15) – (1.16) tampa tiesinio programavimo uždaviniu. Šiuo atveju įvedama leistinųjų sprendinių $\mathbf{x}$ kitimo sritis $\mathcal{L}$, kuri yra apibrėžiama (1.14) taip:

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{x} | \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, m\}.$$

Leistinoji sritis $\mathcal{L}$ iškila, jeigu $\varphi_i(\mathbf{x})$ – iškilosios funkcijos. Pasinaudojant (1.4), netiesinio matematinio programavimo uždavinys gali būti užrašomas grakščiau:

rasti

$$\min \mathcal{F}(\mathbf{x}), \quad (1.18)$$

kur leistinoji $\mathbf{x}$ kitimo sritis

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{x} | \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, m\}. \quad (1.19)$$

Hiperpaviršiai, nustatomi lygybėmis $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$ formuoja leistinosios srities $\mathcal{L}$ kraštinius paviršius, kurie žymimi $H_i, \quad i \in I$. Leistinasis vektorius $\mathbf{x}$ vadinamas

„vektoriumi ant srities krašto“, jeigu jis priklauso nors vienam iš ribojamųjų paviršių H_i . Leistinasis vektorius $\mathbf{x}$ vadinamas „vidinių leistinosios srities $\mathcal{L}$ vektoriumi“, jeigu visiems $\mathbf{x}$ apribojimais $\varphi_i(\mathbf{x}) < 0$, $i \in I$. Leistinasis vektorius, minimizuojantis tikslo funkciją (1.18), vadinamas uždavinio (1.18) – (1.19) optimaliu vektoriumi arba sprendiniu $\mathbf{x}^*$. Taške $\mathbf{x}^*$ tikslo funkcijos reikšmė yra optimali, t.y. šiuo atveju minimaliausia. Jeigu sritis $\mathcal{L}$ ne tuščia ir apribota, tai egzistuoja bent vienas sprendinys.

Iškilo matematinio programavimo uždavinyje optimalus sprendinys $\mathbf{x}^*$ užtikrina absoliutinį (globalinį) tikslo funkcijos minimumą leistinoje sprendinių srityje $\mathcal{L}$. Nei viename kitame leistinosios srities taške tikslo funkcija neturi mažesnės reikšmės. Netiesinių uždavinių atvejais optimalus sprendinys randamas nelengvai. Kartais optimalus sprendinys net ir nenustatomas (jei apribojimai neiškili). Todėl vietoje optimalaus sprendinio apibrėžimo (dažniausiai vienintelio, kaip tiesinio programavimo neišsigimusiuose uždaviniuose) netiesinio ir neiškilo programavimo uždaviniuose įvedamos sąvokos – globalinis optimalus sprendinys, lokalinis optimalus sprendinys.

Tiesinio programavimo uždavinių sprendimo algoritmai yra labai universalūs. To, deja, pasakyti apie netiesinio programavimo uždavinių sprendimo algoritmus negalima. Netiesinio programavimo uždavinių sprendimų algoritmų teorija net ir dabar nėra išstobulinta iki tokio universalumo laipsnio, kaip tiesinio programavimo uždavinių sprendimų algoritmai. Daugiau išnagrinėti algoritmai atvejams, kai minimizuojama iškila žemyn funkcija $\mathcal{F}(\mathbf{x})$, o nepriklausomi kintamieji $\mathbf{x}$ įgyja reikšmes iš iškilosios srities $\mathcal{L}$. Toliau ir nagrinėjamas iškilojo programavimo uždavinys.

Kaip pažymėta anksčiau, iškilojo netiesinio matematinio programavimo uždavinio (1.18) – (1.19) sprendimas yra vektoriaus, tenkinančio apribojimus (1.19), paieška. Metodai, leidžiantys rasti skaitinį sprendinį, vadinami tiesioginiais. Jie tiesiogiai susiję su tikslo funkcijos $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ reikšmių palyginimu dviejuose ir daugiau taškų. Kelių kintamųjų uždavinio tikslo funkcijos minimizacijai (maksimizacijai) plačiai taikomi gradientiniai metodai. Yra įvairių šių metodų modifikacijų. Kitame poskyryje smulkiau nagrinėjamas projektuojamųjų gradientų metodas (*Rozeno* algoritmas) ([Bazaraa et al. 2004](#)), sprendžiant iškilus netiesinius uždavinius.

1.3. Netiesinio matematinio programavimo uždavinio sprendimo algoritmas

Rozeno algoritmą galima taikyti, kai tikslo funkcija, apribojimai yra tiesiniai arba netiesiniai. *Rozeno* algoritmas aptariamas paprasčiausiam atvejui, kai tikslo funkcija tiesinė, o apribojimai netiesiniai.

Tarkim, kad maksimizuojama tiesinė tikslo funkcija:

rasti

$$\max \mathcal{F}(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_j x_j + \dots + a_n x_n = \mathbf{a}^T \mathbf{x}, \quad (1.20)$$

esant apribojimams

$$\varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ visiems } i \in I. \quad (1.21)$$

Daroma prielaida, kad galimi kintamųjų $x_j, j \in J$ ženklo apribojimai įvertinami sąlygose (1.21). Jeigu $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ – tiesinė funkcija, tai jos gradientas

$$\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}.$$

Grafiškai ir analitiškai paaiškiname *Rozeno* algoritmo esmę. Tegul taškas $\mathbf{x}^k$ yra ant leistinosios srities $\mathcal{L}$ krašto. Tariama, kad per šį tašką eina κ ($0 \leq \kappa \leq m$) kraštinių paviršių H_i ($i=1, 2, \dots, \kappa$). Vektoriai iš n -matės erdvės, tenkinantys (1.21) sąlygas kaip lygybes, sudaro $(n-\kappa)$ -matį darinį, žymimą G^κ (1.1 pav.). Aktyviniais vadinami apribojimai, kurie yra tenkinami kaip lygybės, t.y. $\varphi_i(\mathbf{x}^k) = 0, i \in I$. Daromi tokie pažymėjimai

$$\begin{aligned} \varphi_{1,x}(\mathbf{x}^k) &= \nabla \varphi_1(\mathbf{x}^k) \\ \varphi_{2,x}(\mathbf{x}^k) &= \nabla \varphi_2(\mathbf{x}^k) \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{\kappa,x}(\mathbf{x}^k) &= \nabla \varphi_\kappa(\mathbf{x}^k) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Čia κ – aktyvinių apribojimų skaičius. Vektoriai $\nabla \varphi_i(\mathbf{x}^k), i=1, 2, \dots, \kappa$ sujungiami į $(n \times \kappa)$ -matį gradientų matricą

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}^k) = [\nabla \varphi_1(\mathbf{x}^k) \quad \nabla \varphi_2(\mathbf{x}^k) \quad \dots \quad \nabla \varphi_\kappa(\mathbf{x}^k)]. \quad (1.23)$$

Judėjimas iš taško $\mathbf{x}^k$ įgyvendinamas vektoriaus

$$\mathbf{P}_\kappa \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k) = (\mathbf{I} - \nabla \Phi(\mathbf{x}^k) \mathbf{V}_\kappa(\mathbf{x}^k) \nabla \Phi^T(\mathbf{x}^k)) \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k) \quad (1.24)$$

kryptimi. Čia $\mathbf{I}$ – $(n \times n)$ -matė vienetinė matrica; $(\kappa \times \kappa)$ -matė matrica $\mathbf{V}_\kappa(\mathbf{x}^k)$ išreiškiama taip:

$$\mathbf{V}_\kappa(\mathbf{x}^k) = (\nabla \Phi^T(\mathbf{x}^k) \nabla \Phi(\mathbf{x}^k))^{-1}. \quad (1.25)$$

Matrica P_κ yra vadinama projektyvine. Vektorius $P_\kappa a$ [čia įvertinta išraiška (1.20)] yra tikslo funkcijos gradiento $\nabla \mathcal{F}(x^k)$ projekcija į tiesinį darinį $H_\kappa(x^k)$, besiliečianti su G^κ taške x^k (1.1 pav.). Naujas taškas x^{k+1} , kai ėjimo žingsnis $\tau > 0$, nustatomas taip:

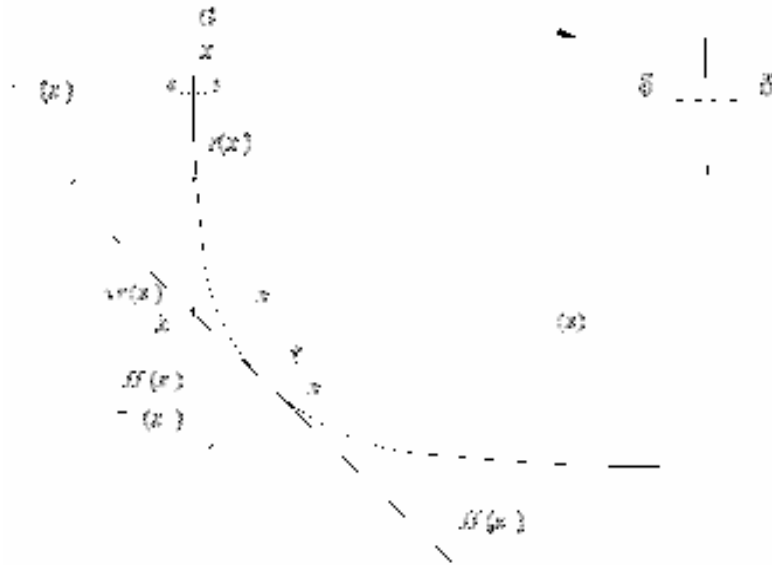
$$\tilde{x}^{k+1} = x^k + \tau \frac{P_\kappa a}{|P_\kappa a|}. \quad (1.26)$$

Paveiksle raide r žymimas vektorius $\frac{P_\kappa a}{|P_\kappa a|}$. Taškas $\tilde{x}^{k+1}$, savaime aišku, nepriklausys

dariniui G^κ . Grįžimui prie leistinosios srities krašto $\mathcal{L}$ naudojama rekurentinė formulė:

$$x^{k+1} = (x^k + (I - \nabla \Phi(x^k))V_\kappa(x^k))W_\kappa(x^{k+1}); \quad (1.27)$$

čia $W(x^{k+1})$ - κ -matis reikšmių $\varphi_i(x^{k+1})$, $i=1,2,\dots,\kappa$ vektorius-stulpelis (aktyvinių takumo sąlygų reikšmių vektorius).



1.1 pav. Rozeno projektuojamųjų gradientų metodo iliustracija

Procesas tęsiamas iki tol, kol nebus tenkinami optimalumo kriterijai:

$$P_\kappa a = 0, \quad (1.28)$$

$$V_\kappa(x) \nabla \Phi^T(x^k) a \leq 0. \quad (1.29)$$

Vektorius, tenkinantis sąlygas (1.28), (1.29) yra optimalus sprendinys x^{opt} (kiek anksčiau, sekant matematinio programavimo literatūrą, šis taškas buvo žymimas x^*). Kadangi

leistinoji sritis ir tikslo funkcija iškiloji, tai gautasis minimumas bus vienintelis. Jeigu $\mathbf{x}^{k+1}$ pažeidžia kurią nors apribojimą, nepriklausiusi aktyvinių grupė, tai ieškomas toks žingsnis τ , kuris įjungtų šį pažeistąjį apribojimą į aktyviųjų grupę. Taip formuojamas naujas darinys $\mathbf{G}^{k+1}$.

Baigdami poskyrį, užrašysime *Kuno ir Takerio* optimalumo sąlygas, (1.12) – (1.14) uždaviniams. Grįžtama prie funkcijos $\mathcal{F}$ minimizacijos, esant apribojimams lygybių ir nelygybių pavidalo, uždavinio:

rasti

$$\min \mathcal{F}(\mathbf{x}), \quad (1.30)$$

esant sąlygoms

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.31)$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (1.32)$$

Kuno ir Takerio sąlygos siejamos su pradinio uždavinio (1.30) – (1.32) optimaliu sprendiniu $\mathbf{x}^*$ (Bazaraa *et al.* 2004). Iškilio netiesinio matematinio programavimo uždaviniui *Kuno ir Takerio* priklausomybės yra pradinio uždavinio globalinio egzistavimo pakankama sąlyga. *Kuno ir Takerio* sąlyga teigia: $\mathbf{x}^*$ yra pradinio uždavinio optimalus sprendinys, jeigu galima rasti tokius skaičius λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$), u_i ($i = 1, 2, \dots, l$), kuriems

$$\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^*) + \nabla \mathbf{g}^T(\mathbf{x}^*)\boldsymbol{\lambda} + \nabla \mathbf{h}^T(\mathbf{x}^*)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1.33)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad (1.34)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}. \quad (1.35)$$

Priklausomybė (1.33) išreiškia tai, jog optimaliam pradinio uždavinio (1.34) – (1.36) sprendiniui tikslo funkcijos gradientas $\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^*)$ yra tiesinė apribojimų gradientų kombinacija:

$$\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^*) = - \sum_{i=1}^m \nabla g_i(\mathbf{x}^*)\lambda_i - \sum_{i=1}^l \nabla h_i(\mathbf{x}^*)u_i.$$

Vektorių $\boldsymbol{\lambda}$ ir $\mathbf{u}$ komponentai yra *Lagranžo* daugikliai. Sąlygos $\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ atliekant matematinį programavimą yra vadinamos griežtumo sąlygomis.

1.4. *Tampriai plastinių lenkiamųjų plokščių optimizavimo šiuolaikinių tyrimų apžvalga*

Pirmosios teorijos apie konstrukcijų optimalų projektavimą atsirado labai seniai. Bet pirmosios šios srities knygos pasirodė tik praeito šimtmečio antroje pusėje. Pirmąją šios srities knygą (dabar turinti daugiau istorinę vertę) skaitoma *H. L. Cox* darbas išleistas 1965 metais ([Cox 1965](#)). Šioje knygoje jos autorius daug dėmesio skyrė inžineriniams konstrukcijų optimizacijos aspektams. Savaime aišku, kad joje nebuvo kalbėta apie kompiuterių taikymą optimizacijos srityje.

Lenkų mokslininkas *Z. Leśniak* ([1970](#)) buvo pirmasis, konstrukcijų optimizacijai pritaikęs netiesinio matematinio programavimo metodus nesudėtingai konstrukcijai, dažniausiai sijai. *P. Hupfer* savo knygoje ([1970](#)), nepateikdamas savo paties tyrimų, apžvelgia sudėtingesnių nei *Z. Leśniak* monografijoje nagrinėtų konstrukcijų optimizacijos bendruosius metodus.

Plastinių žiedinių ir apvalių plokščių elgesys esant dinaminiam apkrovimui buvo nagrinėjamas daugelių autorių (šiam baigiamajame magistro darbe dinaminis apkrovimas nenagrinėjamas). Pirmasis tyrimas dinaminio plastinio apvalių plokščių atsako buvo atliktas *Hopkinso* ir *Pragerio* ([Prager 1974](#)), taip pat *Wang* ir *Hopkins* ([1954](#)) ir *Wang* ([1955](#)). Jie pirmieji panaudojo *standaus plastiško kūno* ir *Treska šešiakampio* (2.5 pav.) sąvoką.

Apitikslių dinaminio apvalių plokščių apkrovimo problemos sprendimą pasiūlė *Aggarwal* ir *Ablow* ([1971](#)). Tikslus problemos sprendimas buvo išvystytas vėliau *Mazalov* ir *Nemirovsky* ([1976](#)). Kaip bebūtų, net ir šis priartinimas daugelių atveju yra per daug sudėtingas.

Daug dėmesio yra skiriama optimizavimui plokščių, pagamintų arba iš idealiai tamprių, arba iš idealiai plastinių medžiagų ([Cherkajev 2000](#); [Kaliszky 1989](#); [Lellep and Mürk 2008](#); [Zyczkowski 1992](#)). Tačiau yra labai mažai darbų, skirtų struktūrinių elementų pagamintų iš tampriai-plastinių medžiagų optimizacijai. Iš kitos pusės, nemažas dėmesys skirtas įvairių tampriai-plastinių plokščių lenkimo modelių tyrimui ([Chakrabarty 2000](#); [Kaliszky 1989](#); [Upadastra et al. 2006](#)).

Optimalus projektavimas idealiai standžių plastinių apvalių plokščių, veikiamų *kintamos kartotinės apkrovos* (KKA), yra tiriamas atsižvelgiant į prisitaikomumo kriterijų ([Giambanco et al. 1994](#)). Yra suformuluota dviejų skirtingų tipų projektavimo užduotis: viena ieško minimalų tūrį esant prisitaikomumo kriterijaus ribinei apkrovai; kita didžiausią prisitaikomumo kriterijaus reikšmę, kai tūris yra žinomas. Abiem atvejais projektavimo problema yra suformuluota naudojant statinę formuluotę, esant prisitaikomumo minimumo teoremai ir kinematinę formuluotę, esant prisitaikomumo kriterijaus viršutiniai ribai. *Eulerio-Lagranžo* lygtis šioje problemoje imamos iš variacijos metodo. Abiem atvejais atitinkanti

projektavimo problema ir projektavimo optimalumo sąlyga yra įrodyta, jei įrodoma, kad jas būtų galima pratęsti iki prisitaikomumo kriterijaus kontekste žinomos optimalaus plastinio projektavimo *Drucker-Prager-Shield-Rozvany* teoremos.

Savo knygoje (Pham Duc Chinh 1997) *Pham Duc Chinh* rašė, jog kinematinis metodas yra sukurtas įvertinti prisitaikomumo ribas plokštėms taikant kintamas (kvazistatines ir dinamines) apkrovas. Prisitaikomumo kinematinė teorema virsta sumažinta forma, kurioje gali būti panaudotas viršutinės ribos metodas įtraukiantis kinematiškai vertingus mechanizmus iš plastiškumo apribojimų analizės

B. Bremec, F. Kosel darbas (2006) susijęs su apvalios žiedinės plokštės storio optimizavimo suirimo metu. Plokštė ant vidinio ir išorinio krašto yra apkrauta vienoda, simetriška apkrova. Optimizacijos problema atrodo taip: rasti optimalų projektavimo kintamųjų rinkinį prie didžiausios ardančios apkrovos, esant pastoviam plokštės svoriui (tūriui). Reikalinga ardančioji apkrova yra nustatoma pagal standartines linijines suirimo lygtys, o medžiaga yra parenkama pagal mažų deformacijų prielaidą ir deformacinę plastiškumo teoriją, turint omeny linijinį stiprėjančio standumo reologinį modelį. Optimalaus plokštės aukščio funkcijos yra nustatomos įvairiems atramų ir apkrovų atvejams ir skaitiniai rezultatai rodo, kad ardančiosios apkrovos gali būti žymiai padidintos.

Savo knygoje (2004) *J. Kruzelecki* ir *P. Smas* rašė, kad gana daug darbų susiję su konstrukcijos optimaliu projektavimu esant stabilumo apribojimams. Kita vertus, konstrukcijų optimizavimo problema suirimo nuo apkrovos sukeltų poslinkių (deformacijų) metu buvo tiriamą, pavyzdžiui, *A. B. Albul, N. W. Banichuk, A. A. Barsuk* (1983), *J. Kruzelecki, P. Smas* (2004) darbuose.

M. Ozakca, N. Taysi, F. Colcu (2003) darbe yra kalbama apie kintamo storio apvalių ir žiedinių plokščių ardančiosios apkrovos optimizavimą. Yra naudojama automatizuota analizės ir optimizacijos procedūra kuri apjungia struktūrinio baigtinio elemento analizę, parametrinio kubinio lakšto storio apibrėžimą, automatinį tinklo generavimą, jautrumo analizę ir matematinį programavimą. Optimizavimo metodų įrodymui yra aprašyti ir keli pritaikymo pavyzdžiai.

Kaliszky ir *Logo* (2002; 2006) pristatė optimizacijos metodo išdėstymą ir formą tampriai-plastinių diskų optimizacijai, atsižvelgiant į poslinkius ir deformacijas. Buvo pasiūlyti optimalūs tampriai plastinių medžiagų optimizavimo metodai (*Kaliszky and Logo* 2003; *Kaliszky and Logo* 2006), esant trumpalaikiam dinaminiam slėgiui arba smūgiui.

Lellep ir *Polikarpus* (2008) sukūrė optimalų projektą stiprėjančių medžiagų apvalioms plokštėms. Plokštė pagaminta iš idealiai tampriai plastinių (pagal *Treska*) medžiagų ir apkrauta tolygiai išskirstytos skersinės apkrovos – atskiras straipsnio atvejis.

Būtina pabrėžti, kad optimalumo sąlygos gautos *optimalaus valdymo teorijos* pagalba (Bryson and Ho Yu-Chi 1975; Hocking 2001; Hull 2003; Lellep and Mürk 2008).

Lietuvoje optimizacinės statybinės mechanikos pradininku laikomas *Aleksandras Čyras*. Konstrukcijų optimizavimo teorijos plėtotei pagrindinį vaidmenį turėjo kompiuterių ir netiesinio matematinio programavimo teorijos metodų taikymas. Šie du veiksniai įgalino spręsti technikos uždavinius, kuriuose randamas atitinkantis pasirinktą optimalumo kriterijų sprendinys.

1.5. Magistrinio darbo tikslų formulavimas

Taigi, kaip kalbėta anksčiau (1.1 poskyryje), tampriai plastinių plokščių apkrovos optimizacijos uždavinių sprendimo metodika nėra išsamiai išnagrinėta, ypač stokojama netamprių konstrukcijų mechanikos uždavinių formulavimo ir matematinio programavimo sąsajos. Mechanikos ekstreminiai energiniai principai leidžia uždavinius pateikti kaip matematinio programavimo problemas. Pagal prof. *A. Čyro* mokslinės mokyklos tradicijas sudaromi uždavinių matematiniai modeliai diskretine forma ir jie sprendžiami pasitelkus tiesinio ar netiesinio programavimo kompiuterinės programas.

Taip elgiamasi ir šiame magistriniame darbe. Tačiau naujais požiūriais nagrinėjama apvalių lenkiamųjų plokščių diskretizacija pusiausvyrais baigtiniais elementais, taikomos *Treska* ir *Mizeso* takumo sąlygos: tikimasi sprendimo eigoje sklandžiai pereiti nuo *Treska* prie *Mizeso* takumo sąlygų. Skaitinis eksperimentas parodė magistrinio darbo iškeltų tikslų naujumą ir jų realizacijos sėkmę.

2. LENKIAMŲJŲ PLOKŠČIŲ APKROVOS OPTIMIZAVIMO UŽDAVINIŲ MATEMATINIAI MODELIAI

2.1. Įvadinės pastabos

Pirmame skyriuje atliktų darbų analizė leidžia teigti, kad konstrukcijos parametrų ar ją veikiančios apkrovos optimizavimo metodika, kurioje vienu metu taikoma matematinio programavimo teorija, ekstreminiai energiniai principai ir medžiagos netampriąsias savybes įvertinančios priklausomybės, – yra viena iš efektyviausių. Optimizavimo rezultatai pagal plastinį konstrukcijos suirimą ne visuomet gali būti naudingi praktiškai, nes tuomet optimalios konstrukcijos ribinis tinkamumo būvis dėl pernelyg didelių netampriųjų deformacijų gali būti prarastas net nepasiekus *plastiškojo suirimo* (dideles deformacijas paprastai lydi ir nemaži poslinkiai). Šiame skyriuje nagrinėjamas tampriai plastinės lenkiamosios plokštės skaičiavimas, taikant *von Mizeso* ir *Treska* takumo sąlygas. Ieškomas optimalus apkrovos pasiskirstymas, kai ribojami ir plokštės įlinkiai (patikrinamasis uždavinys). Apskritai pati apkrova gali būti vienkartinė arba kintama-kartotinė. Pastaruoju atveju gali būti nagrinėjamas ir plokštės prisitaikomumo būvis (vienkartinė apkrova tampa atskiru kintamos-kartotinės apkrovos atveju).

Idealiai tamprios plastinės plokštės medžiaga, geometrija, apkrovos pridėties vieta patikrinamojo uždavinio, kai optimizuojama apkrova, atveju duotos. Kvazistatinė kintama-kartotinė apkrova (kai tokia glaustai nagrinėjama) charakterizuojama nepriklausančiomis nuo laiko viršutinėmis ir apatinėmis kitimo ribomis. Konkreti apkrovimo istorija nenagrinėjama, laikoma, kad ji „telpa“ nustatytose, nuo laiko nepriklausančiose kitimo ribose. Apkrovos optimizavimo uždavinys, kaip minėta įvade, formuluojamas taip: *ieškomos apkrovos kitimo ribos, tenkinančios nustatytą optimalumo kriterijų bei plokštės stiprumo ir standumo sąlygas*.

Disipatyvinės sistemos įrašų ir deformacijų būvis priklauso nuo apkrovimo istorijos: tiek vienkartinės, tiek kintamos-kartotinės apkrovos atveju. Apskaičiuoti plokštės įlinkius (o jie ir bus ribojami) nelengva, o dažnai ir praktiškai neįmanoma. Tuomet kintamos-kartotinės apkrovos atveju lieka tik galimybė vienokiu ar kitokiu būdu apskaičiuoti įlinkių kitimo ribas, atsižvelgiant į visas galimas plastinio deformavimo trajektorijas (Zyckowski 1981; Mróz 1995). Paprasčiau yra vienkartinės apkrovos atveju, kai plastinis deformavimo procesas gali būti laikomas holonominiu (Koiter 1960). Būtent čia išryškėja galimybė tiesiogiai taikyti ekstreminius energinius principus. Baigiamajame magistro darbe apsiribosime vienkarte apkrova, sprendami skaitinius pavyzdžius. O matematinius apkrovos optimizavimo uždavinių modelius užrašysime ir kintamai-kartotinei apkrovai.

Plačiau apsistosisime prie *Haro ir Karmano* principo (Koiter 1960) idealiai tampriam plastiniam kūnui. Šis principas galioja visoms tikrojo plastinio deformavimo stadijoms, jeigu nėra nusikrovimo iš įtempių būvių, esančių ant plastinio tekėjimo paviršiaus. Jeigu pilnutinė plastinė deformacija $\tilde{\varepsilon}_p$ su *Mizeso* takumo sąlyga asocijuojasi pagal priklausomybes $\tilde{\varepsilon}_p = \lambda \tilde{s}$, tai *Haro-Karmano* principas yra teisingas esant naujam griežtesniam apribojimui (čia $\tilde{s}$ – įtempimų deviatorius). Būtent, viso apkrovimo proceso metu įtempių būvis kiekviename nagrinėjamo kūno taške (konstrukcijos atveju – pjūvyje), kuriame pasiektas plastinis tekėjimas, turi likti *nepakitęs*. Akivaizdu, kad formulė $\tilde{\varepsilon}_p = \lambda \tilde{s}$ suponuoja ir jau aukščiau suformuluotą nenusikrovimo reikalavimą. Taigi apkrovos optimizavimo uždavinių matematiniuose modeliuose į vieną visumą sujungiami du konstrukcijų mechanikos uždaviniai. Pirmasis uždavinys – statiskai leistinų liekamųjų plokštės momentų M_r , tenkinančių papildomos deformavimo energijos minimumo principą (Milan and Bazant 2001), radimas. Tuo užtikrinamas plokštės stiprumo sąlygų tenkinimas, o kintamos-kartotinės apkrovos atveju tai reiškia, kad plokštė prisitaikė prie duotosios apkrovos (prie jos kitimo ribų F_{sup} , F_{inf}). Antrasis uždavinys užtikrina plokštės standumo sąlygų tenkinimą. *Rozeno* optimalumo kriterijaus matematinė-mechaninė interpretacija yra jungiamoji abiejų uždavinių grandis (Atkočiūnas et al. 2004).

Antrajame skyriuje medžiaga išdėstyta taip: 2.2 poskyryje aptariamas plokštės diskretinis modelis (tiek apvalioms, tiek stačiakampėms plokštėms). 2.3 poskyris skirtas plokštės analizės uždavinio matematinio modelio sudarymui vienkartės apkrovos atveju. Čia nagrinėjamos liekamųjų įrąžų ir poslinkių influentinės matricos G ir H . 2.4 poskyryje sudaromas vienkartės apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis, o 2.5 poskyryje – optimizuojama kintama-kartotinė apkrova. Pastaruoju atveju išsamiau aptariamos standumo sąlygos, kurios yra žymiai sudėtingiau realizuojamos lyginant su vienkarte apkrova. Šiame darbe pasirinktos kiek supaprastintos standumo sąlygos esant prisitaikomumo būviui. Skyrius baigiamas išvadomis.

2.2. Diskretinės plokštės lygtys ir priklausomybės

Pradžioje aptariamos *stačiakampės plokštės*. Plokštės diskretinis modelis gaunamas suskaidžius ją į s baigtinių elementų, kurių kiekviename išskiriame po s_k mazginių taškų. Tokiu būdu bendras plokštės diskretinio modelio skaičiuojamųjų pjūvių skaičius yra $\zeta = s \cdot s_k$.

Mazginiuose taškuose ateityje bus tikrinamos takumo sąlygos. Diskretinio modelio įtempių ir deformacijų būvį aprašo n -mačiai momentų $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_s)^T$ ir deformacijų $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_s)^T$ vektoriai.

Tegul plokštės pusiausvyrų baigtinių elementų diskretinio modelio laisvės laipsnis yra m . Atsižvelgiant į kraštines sąlygas diskretinio modelio pusiausvyros lygtys bendru pavidalu užrašomos:

$$\sum_{k=1}^s \mathbf{A}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{F} \text{ arba } \mathbf{A} \mathbf{M} = \mathbf{F}, \quad (2.1)$$

$$k=1, 2, \dots, s; \quad k \in K.$$

Pusiausvyros lygčių koeficientų matrica $\mathbf{A}$ yra $(m \times n)$ eilės; čia n – bendras įrašų vektoriaus $\mathbf{M}$ komponentų skaičius.

Geometrinės lygtys:
atskiram baigtiniam elementui

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{u} - \mathbf{D}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

visai diskretinei sistemai

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{D} \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

Čia $\mathbf{D} - (n \times n)$ eilės kvazidiagonalinė plokštės elementų pasiduodamumų $\mathbf{D}_k$ matrica; $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ – poslinkių vektorius.

Hubero-Mizeso netiesinė takumo sąlyga stačiakampei plokštei yra:

$$M_{11}^2 - M_{11} M_{22} + M_{22}^2 + 3 M_{12}^2 \leq M_0^2.$$

Čia M_{11} , M_{22} – plokštės lenkimo momentai, M_{12} – sukimo momentas. Ši sąlyga tikriname kiekviename skaičiuojamajame plokštės pjūvyje (kiekviename baigtinio elemento mazge):

$$\varphi_{kl} = C_k - \mathbf{M}_{kl}^T \mathbf{H}_{kl} \mathbf{M}_{kl} \geq 0, \quad C_k = M_{0k}^2, \quad (2.4)$$

$$k=1, 2, \dots, s; \quad l=1, 2, \dots, s_k.$$

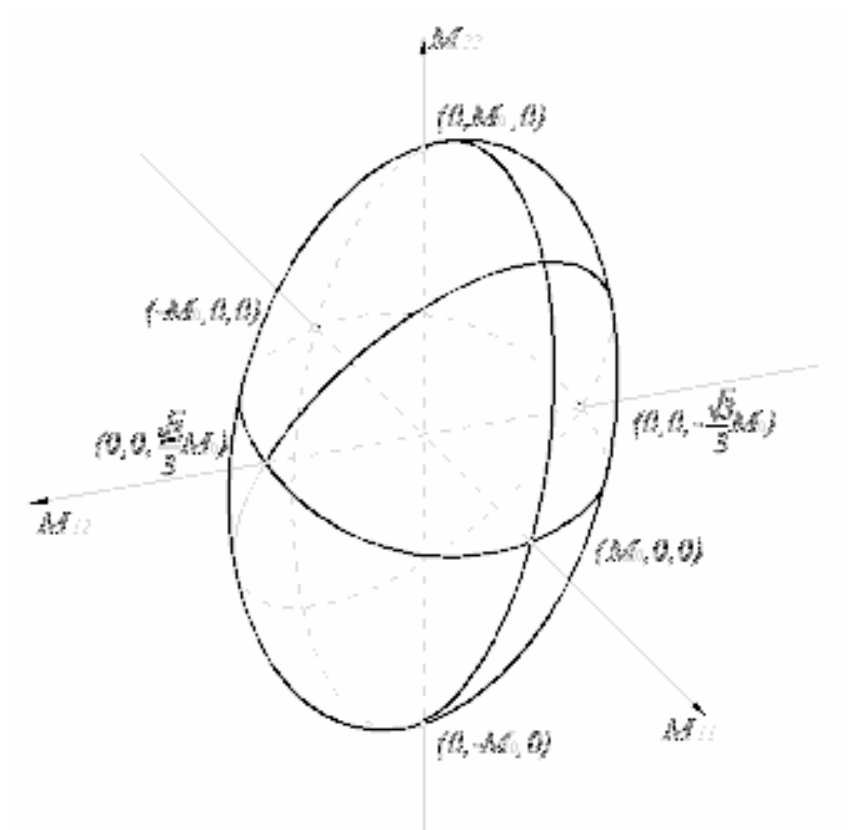
Čia M_{0k} – skaičiuojamojo pjūvio ribinis momentas, jis laikomas pastovus elemento ribose.

Šiame darbe nagrinėjamos metalinės ištisinio skerspjūvio plokštės, kurios $M_0 = \frac{1}{4} \sigma_y h^2$, čia

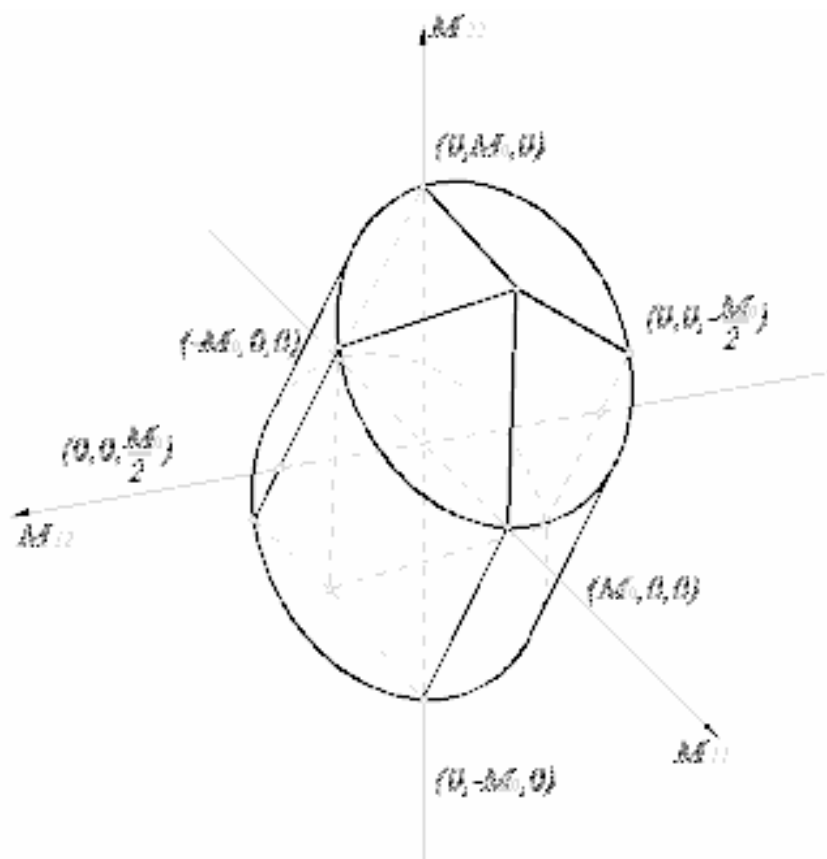
h – plokštės storis, σ_y – takumo riba tempimo metu. Takumo sąlygos (2.4) matrica $\mathbf{II}_k$ stačiakampei plokštei yra:

$$\mathbf{II}_k = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Stačiakampei plokštei *Mizeso* takumo sąlyga (2.4) pavaizduota 2.1 pav.



2.1 pav. Mizeso takumo sąlyga stačiakampės plokštės pjūviui



2.2 pav. Treska takumo sąlyga stačiakampės plokštės pjūviui

Sprendžiant plokštės analizės uždavinius patogu išskirti tampraus plokštės skaičiavimo momentus M_e ir saupusiausvyrus liekamuosius momentus M_r . Takumo sąlygose (2.4) tamprumo momentai $M_{e,kl}$ įeina į suminių momentų vektorių M_{kl} sudėtį:

$$M_{kl} = M_{e,kl} + M_{r,kl}, \quad (2.5)$$

$$k=1, 2, \dots, s; \quad l=1, 2, \dots, s_k.$$

Visos plokštės diskretiniam modeliui $M_e = \alpha F$, α – tampraus plokštės skaičiavimo momentų influentinė matrica. Tampraus skaičiavimo momentai M_e gali būti skaičiuojami ir kitais metodais, nenaudojant influentinės matricos α .

Plastinių deformacijų vektoriaus $\theta_p = (\theta_{p,kl})^T$ komponentai yra skaičiuojami pagal formulę:

$$\theta_{p,kl} = [\nabla \varphi_{kl} (M_{e,kl} + M_{r,kl})]^T \lambda_{kl}, \quad (2.6)$$

$$\lambda_{kl} \geq 0, \quad (2.7)$$

$$k=1, 2, \dots, s; \quad l=1, 2, \dots, s_k.$$

Čia λ_{kl} – plastinių daugiklių vektorius; $\nabla \boldsymbol{\varphi}$ – visos plokštės diskretinio modelio takumo sąlygų gradientų matrica. Jos struktūra yra:

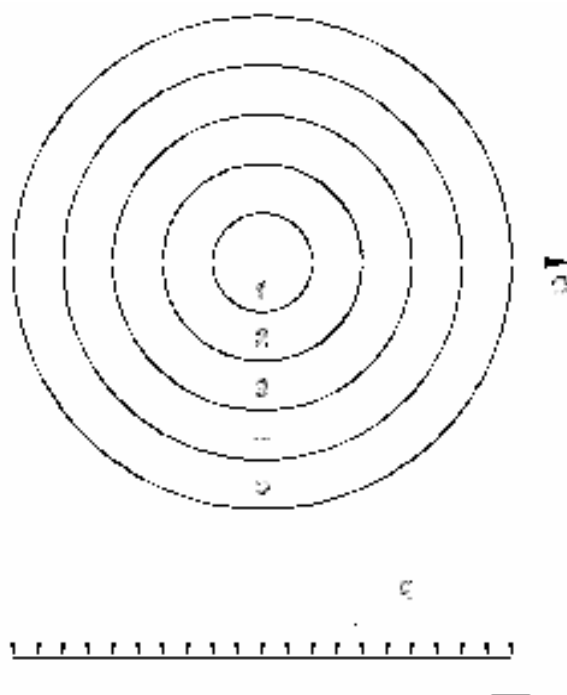
$$[\nabla \boldsymbol{\varphi}]^T = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \varphi_{kl}(\mathbf{M}_{kl})}{\partial \mathbf{M}_{r,kl}} \right] & & & & \\ & \left[\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{M}_1)}{\partial \mathbf{M}_{r1}} \right] & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \left[\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{M}_2)}{\partial \mathbf{M}_{r2}} \right] & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \left[\frac{\partial \varphi_\zeta(\mathbf{M}_\zeta)}{\partial \mathbf{M}_{r\zeta}} \right] \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Tuomet vektoriaus λ struktūra yra:

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\zeta]^T. \quad (2.9)$$

Tuo būdu aptartos stačiakampės plokštės, patyrusios plastines deformacijas, diskretinio modelio pagrindinės lygtys ir priklausomybės. Svarbiu etapu čia yra pusiausvyros lygčių koeficientų matricos $\mathbf{A}$ sudarymas pusiausvyrais baigtiniais elementais. Čia pasinaudojama *Galagerio* vadovėliu ([Gallagher 1984](#)), kuriame sukurta tokių elementų taikymo metodika ir praktinė pusiausvyrų baigtinių elementų (BE) skaičiavimo programa SM3 (autorius prof. *S.Kalanta*) ([Kalanta 2007](#)). Išsamiau apie tai kalbėsime vėliau, nagrinėdami *apvalios diskretinės plokštės* priklausomybes.

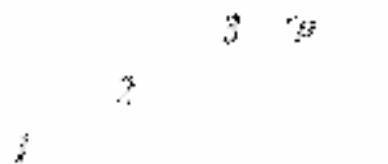
Magistriniame darbe skaitiniai pavyzdžiai siejami su apvaliomis plokštėmis. Todėl jų diskretizacija nagrinėjama išsamiau (2.3 pav.). Elemento k ($k=1, 2, \dots, s; k \in K$) su trimis mazginiais taškais $l=1, 2, 3$ ($l \in L$) momentų vektorius $\mathbf{M}_k = (M_{\rho,k1}, M_{\theta,k1}, M_{\rho,k2}, M_{\theta,k2}, M_{\rho,k3}, M_{\theta,k3})^T = (\mathbf{M}_{k1}, \mathbf{M}_{k2}, \mathbf{M}_{k3})^T$. Čia $\mathbf{M}_{kl} = (M_{\rho,kl}, M_{\theta,kl})^T$, indeksai ρ ir θ žymi radialinius ir žiedinius momentus, teigiamos jų kryptys parodytos 2.4 pav.



2.3 pav. Apvalios plokštės diskretinis modelis



2.4a pav. Plokštės žiedinio baigtinio elemento fragmentas



2.4b pav. Plokštės žiedinio baigtinio elemento pagrindiniai mazgai

Lenkiamųjų momentų aproksimacijos funkcijos yra tokios:

$$\mathbf{M}_k(\rho) = \mathbf{N}_k(\rho) \mathbf{M}_k. \quad (2.10)$$

Čia $\mathbf{N}_k(\rho)$ – k -jo elemento įrašų aproksimacijos matrica. $\mathbf{N}_k(\rho) \equiv \{M_\rho(\rho), M_\theta(\rho)\}^T$.

Funkcijos (2.10) tokios, kad plokštės elemento pusiausvyros lygtis

$$\frac{d}{d\rho}(\rho M_\rho(\rho)) - M_\theta(\rho) = -Q\rho \quad (2.11)$$

nėra tapačiai tenkinama. Todėl diskretinio modelio pusiausvyra yra užtikrinama plokštės elementams ir ties pagrindiniais mazgais. Algebrinė baigtinio elemento pusiausvyros lygtis yra:

$$\mathbf{A}_k(\rho) \mathbf{M}_k = \mathbf{q}_k(\rho). \quad (2.12)$$

Čia $\mathbf{A}_k(\rho) = \mathcal{A} \mathbf{N}_k(\rho)$. Toliau nagrinėjamas atvejis, kai $\mathbf{q}_k(\rho) = \mathbf{q}_k$. Atskiri elementai į sistemą jungiami, rašant pusiausvyros lygtis abiem pagrindiniams mazgams (tai 1 ir 3 mazgai (2.4 pav.)). Taip užtikrinamas radialinių momentų M_ρ ir skersinių jėgų Q_ρ tolydinumas.

Atsižvelgus ir į kraštines sąlygas, plokštės m pusiausvyros lygčių sistema užrašoma tokiu pat pavidalu kaip ir stačiakampės plokštės atveju:

$$\mathbf{A} \mathbf{M} = \mathbf{F} \text{ arba } \sum_{k=1}^s \mathbf{A}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{F}. \quad (2.13)$$

Plokštės diskretinio modelio geometrinės lygtys gaunamos, panaudojus įtempių galimųjų pokyčių principą:

$$\delta \mathbf{F}^T \mathbf{u} = \sum_{k=1}^s \int_{A_k} \delta \mathbf{M}_k^T(\rho) \mathcal{L} \mathbf{M}_k(\rho) dA. \quad (2.14)$$

Pasitelkus priklausomybes $\mathbf{M}_k(\rho) = [\mathbf{N}_k(\rho)] \mathbf{M}_k$ ir lygtis $\sum_{k=1}^s \mathbf{A}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{F}$, gaunama lygybė:

$$\sum_{k=1}^s \delta \mathbf{M}_k^T \mathbf{A}_k^T \mathbf{u} = \sum_{k=1}^s \delta \mathbf{M}_k^T \mathbf{D}_k \mathbf{M}_k. \quad (2.15)$$

Čia k -jo elemento pasiduodamumo matrica $\mathbf{D}_k$ skaičiuojama pagal formulę:

$$\mathbf{D}_k = \int_{A_k} [\mathbf{N}_k(\rho)]^T \mathcal{L} [\mathbf{N}_k(\rho)] dA. \quad (2.16)$$

Taip gaunamos geometrinės lygtys paskiram baigtiniam elementui

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{u} - \mathbf{D}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{0}, \quad k \in K \quad (2.17)$$

ir visam plokštės diskretiniam modeliui

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{D} \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Čia $\mathbf{D}$ – kvazidiagonalinė visų baigtinių elementų pasiduodamumų matrica (Kalanta (rusų k.) 1995). Poslinkių vektoriaus $\mathbf{u}$ komponentų fizinę prasmę lemia pusiausvyros lygčių $\mathbf{A} \mathbf{M} = \mathbf{F}$ sudarymo tvarka. Pusiausviri baigtiniai elementai vienkartinės apkrovos atveju tamprios plastinės plokštės analizei, esant tiesinėms takumo sąlygoms naudoti ir darbe (Save et al. 1997).

Apvalios plokštės atveju *Mizeso* takumo sąlyga (2.6 pav.) užrašoma taip:

$$M_\rho^2 - M_\rho M_\theta + M_\theta^2 \leq M_0^2. \quad (2.19)$$

Panaudojus matricą:

$$\mathbf{H}_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

takumo sąlyga (2.19) kiekvieno elemento k mazginiame taške l įgauna pavidalą, analogišką (2.4):

$$\varphi_{kl} = M_{0k}^2 - \mathbf{M}_{kl}^T \mathbf{H}_{kl} \mathbf{M}_{kl} \geq 0.$$

Čia $\mathbf{M}_{kl} = (M_{\rho,kl}, M_{\theta,kl})^T$. Kartais naudosime pažymėjimą

$$f_{kl}(\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl}) = \mathbf{M}_{kl}^T \mathbf{H}_{kl} \mathbf{M}_{kl}. \quad (2.21)$$

2.3. Plokštės analizės uždavinys (vienkartinė apkrova)

Inžinerijos praktikoje dažnai reikia žinoti plokštės, patyrusios plastinių deformavimą, bet nepasiekusios plastinio suirimo, įtempių ir deformacijų būvį, kai žinomi plokštės geometrija, ribiniai momentai $\mathbf{M}_0$ ir apkrova $\mathbf{F}$. Toks statybinės mechanikos uždavinys paprastai vadinamas *analizės uždaviniu* (Dunne and Petrinic 2005; Kojić and Bathe 2005; Stein et al. 1993; Čyras 1983). Sprendžiant tokį uždavinį nustatomas vien konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvis, t.y. konstrukcija analizuojama mechaniniu požiūriu: lyginant su eksploatacijos reikalavimais, galima įsitikinti ar konstrukcija yra pakankamai stipri, standi ir stabili.

Matematiniai modeliai. Pasitelkus papildomos deformavimo energijos minimumo principą sudaromas lenkiamosios plokštės analizės uždavinio statinės formuluotės matematinis modelis:

iš visų statišškai leistinų liekamųjų momentų pasiskirstymų prisitaikiusioje plokštėje tikrasis yra tas, kuriam esant papildoma energija minimali.

Netiesinėms *Mizeso* takumo sąlygoms atitinka toks ekstreminis uždavinys:
rasti

$$\min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \mathbf{M}_{r,k}^T \mathbf{D}_k \mathbf{M}_{r,k}, \quad (2.22)$$

esant sąlygoms

$$\sum_{k=1}^s \mathbf{A}_k \mathbf{M}_{r,k} = \mathbf{0}, \quad (2.23)$$

$$\varphi_{kl} = M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl})^T \mathbf{H}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl}) \geq 0, \quad (2.24)$$

$$k \in K, l \in L.$$

Čia $\mathbf{M}_{r,k}$ yra plokštės k -jo baigtinio elemento liekamųjų momentų reikšmės visuose jo mazginiuose taškuose.

Analizės uždavinio matematinis modelis (2.22) – (2.24) tinka tiek stačiakampei, tiek apvaliai plokštei (skiriasi tik matricos $\mathbf{A}$ ir $\mathbf{H}_{kl}$). Žinomais dydžiais čia yra plokštės elementų ribiniai momentai $\mathbf{M}_{0k}$ ir apkrova $\mathbf{F}$, t.y. tampraus skaičiavimo momentai $\mathbf{M}_e$. Išsprendus analizės uždavinio statinę formuluotę, randami liekamieji plokštės momentai $\mathbf{M}_r$. Dualaus uždavinio sprendimu nustatomi plokštės liekamieji įlinkiai $\mathbf{u}_r$ ir platinės deformacijas $\boldsymbol{\theta}_p$. Todėl duali formuluotė kartais vadinama tiesiog „kinematinė“. *Mizeso* takumo sąlygų atveju (2.6 pav.) gaunama tokia *analizės uždavinio kinematinė formuluotė* (Atkočiūnas 1995; Čyras et al. 2004):

rasti

$$\max \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \mathbf{M}_{rk}^T \mathbf{D}_k \mathbf{M}_{rk} - \lambda [\nabla \varphi(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_r)] \mathbf{M}_r - \lambda^T [\mathbf{C} - \mathbf{f}(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_r)] \right\}, \quad (2.25)$$

esant sąlygoms

$$\mathbf{D} \mathbf{M}_r + [\nabla \varphi(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_r)]^T \lambda - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

$$\lambda \geq \mathbf{0}, k \in K. \quad (2.27)$$

Čia

$$f(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_r) = [\Gamma(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_r)] \Pi(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_r), \quad (2.28)$$

Γ , Π yra kvazidiagonalinės matricos.

Uždavinys (2.25) – (2.27) (pakeitus tikslo funkcijos ženklą priešingu) atitinka tokį energijos principą: iš visų kinematikai leistinų liekamųjų poslinkių vektorių $\mathbf{u}_r$ tikrasis atitinka pilnutinės potencinės energijos minimumą.

Optimalus uždavinio (2.25) – (2.27) sprendinys yra momentai $\mathbf{M}_r^*$, įlinkiai $\mathbf{u}_r^*$ ir plastiniai daugikliai λ^* . Plastinio deformavimo proceso metu išsklaidoma energija:

$$D_{max} = \lambda^T \mathbf{M}_0. \quad (2.29)$$

Plokštės tikrosios liekamosios deformacijos $\boldsymbol{\theta}_r^* = \mathbf{D} \mathbf{M}_r^* + \boldsymbol{\theta}_p^*$ (deformacijos $\boldsymbol{\theta}_p^*$ apskaičiuotos pagal formules (2.6), (2.7)).

Apkrovos optimizavimo uždavinių (jų problematikai ir skirtas šis magistrinis darbas) matematinių modelių sprendimo algoritmai remiasi kompleksiskai taikant *Mizeso* ir *Treska* takumo sąlygas. Todėl analizės uždavinius (2.22) – (2.24) ir (2.25) – (2.27) užrašysime ir tiesinių *Treska* takumo sąlygų (2.5 pav.) atveju.

Statinė analizės uždavinio formuluotė:

rasti

$$\min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \mathbf{M}_{r,k}^T \mathbf{D}_k \mathbf{M}_{r,k}, \quad (2.30)$$

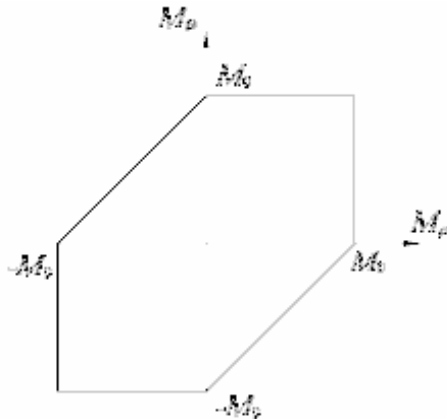
esant sąlygoms

$$\sum_{k=1}^s \mathbf{A}_k \mathbf{M}_{r,k} = \mathbf{0}, \quad (2.31)$$

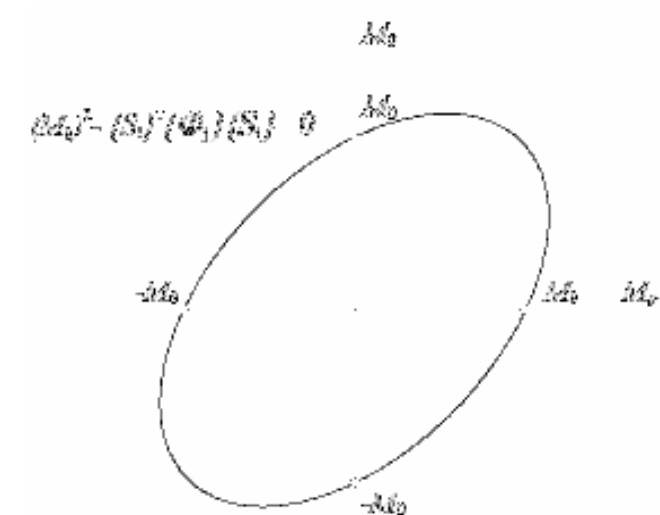
$$\boldsymbol{\varphi}_{kl} = \mathbf{C}_{kl} - \boldsymbol{\Phi}_{kl}(\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl}) \geq \mathbf{0}, \quad k \in K, \quad l \in L. \quad (2.32)$$

Į vektorių $\mathbf{C}_{kl}$ sujungiami ribiniai momentai. Matematinio modelio (2.30) – (2.32) tiesinių *Treska* takumo sąlygų matrica $\boldsymbol{\Phi}_{kl}$ yra tokia (žr. 2.5 pav.):

$$\Phi_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & -1 & & 1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$



2.5 pav. Treska takumo sąlygos apvaliai plokštei



2.6 pav. von Mizeso takumo sąlygos apvaliai plokštei

Uždavinys (2.30) – (2.32) yra kvadratinio matematinio programavimo problema, jo optimalus sprendinys yra $\mathbf{M}_r^*$. Jeigu apvalios plokštės baigtiniame elemente yra 3 mazginiai taškai (iš viso jų s), tai vektorius $\mathbf{M}_r^*$ būtų:

$$\mathbf{M}_r^* = [\mathbf{M}_{r,11}^* \quad \mathbf{M}_{r,12}^* \quad \mathbf{M}_{r,13}^* \quad \mathbf{M}_{r,21}^* \quad \mathbf{M}_{r,22}^* \quad \mathbf{M}_{r,23}^* \quad \dots \quad \mathbf{M}_{r,s3}^*]^T. \quad (2.34)$$

Tiesinių takumo sąlygų atveju gaunama tokia analizės uždavinio kinematinė formuluotė:

rasti

$$\max \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \mathbf{M}_{r,k}^T \mathbf{D}_k \mathbf{M}_{r,k} - \sum_{k,l} \lambda_{kl}^T (\mathbf{C}_{kl} - \Phi_{kl} \mathbf{M}_{r,kl}) \right\}, \quad (2.35)$$

esant sąlygoms

$$\mathbf{D}_k \mathbf{M}_{r,k} + \Phi_k^T \lambda_k - \mathbf{A}_k^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

$$\lambda_k \geq \mathbf{0}, \quad k \in K. \quad (2.37)$$

Čia (2.36), (2.37) – geometrinės lygtys $\Theta_r - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$, $\Theta_p = [\Theta_{p,kl}]$; $\Theta_{p,kl} = \Phi_{kl}^T \lambda_{kl}$ – plastinės deformacijos; $\Theta_r = \mathbf{D} \mathbf{M}_r + \Theta_p$ – liekamosios deformacijos. Optimalus uždavinio (2.35) – (2.37) sprendinys yra $\mathbf{M}_r^*$, $\mathbf{u}_r^*$, λ^* .

Liekamųjų įlinkių ir momentų influentinės matricos. Jeigu analizės uždavinio statinės (2.22) – (2.24) ir kinematinės (2.25) – (2.27) formuluočių sprendinys nėra žinomas, jį galima rasti iš netiesinių lygčių sistemos

$$\mathbf{A} \mathbf{M}_r = \mathbf{0}, \quad (2.38)$$

$$\varphi_{kl} = M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl})^T \mathbf{H}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl}) \geq 0, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{M}_r + [\nabla \varphi(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_r)]^T \lambda - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (2.40)$$

$$\lambda^T [\mathbf{C} - \mathbf{f}(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_r)] = 0, \quad \lambda \geq \mathbf{0}, \quad k \in K, \quad l \in L. \quad (2.41)$$

sprendimo. Šią sistemą sudaro statinės formuluotės uždavinio (2.22) – (2.24) apribojimai (2.38), (2.39) ir *Kuno ir Takerio* sąlygos (Bazaraa et al. 2004; Atkočiūnas 1996) (2.40), (2.41). Kai žinomos plastinės deformacijos Θ_p^* , iš sistemos

$$\mathbf{A} \mathbf{M}_r^* = \mathbf{0}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{M}_r^* + \Theta_p^* - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r^* = \mathbf{0}, \quad (2.43)$$

galima rasti tikrąsias liekamųjų momentų $\mathbf{M}_r^*$, poslinkių $\mathbf{u}_r^*$ reikšmes. Iš geometrinių lygčių (2.43) išreiškiami $\mathbf{M}_r^*$:

$$\mathbf{M}_r^* = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r^* - \mathbf{D}^{-1} \Theta_p^*, \quad (2.44)$$

įrašant juos į pusiausvyros lygtis

$$A D^{-1} A^T u_r^* - A D^{-1} \theta_p^* = 0. \quad (2.45)$$

Pagal (2.45) formulę gaunama

$$u_r^* = (A D^{-1} A^T)^{-1} A D^{-1} \theta_p^* = [\beta] A D^{-1} \theta_p^* = \alpha^T \theta_p^* = \overline{H} \theta_p^*. \quad (2.46)$$

Čia $\overline{H}$ – liekamųjų poslinkių influentinė matrica, susiejanti liekamuosius poslinkius u_r^* su žinomomis plastinėmis deformacijomis θ_p^* . Įrašius (2.46) į formulę (2.44), gaunamas tikrasis liekamųjų plokštės momentų vektorius M_r^* :

$$\begin{aligned} M_r^* &= D^{-1} A^T (A D^{-1} A^T)^{-1} A D^{-1} \theta_p^* - D^{-1} \theta_p^* = \\ &= [D^{-1} A^T (A D^{-1} A^T)^{-1} A D^{-1} - D^{-1}] \theta_p^* = \overline{G} \theta_p^*. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Matrica $\overline{G}$ yra „išsigimusi“, t.y. neegzistuoja jos atvirkštinė matrica. Pagal formules (2.47) ir (2.46) suskaičiuoti vektoriai M_r^* ir u_r^* visiškai sutampa su momentais ir poslinkiais, gaunamais atskirų matematinio programavimo uždavinių (2.22) – (2.24) ir (2.25) – (2.27) sprendimu. Tik būtina nepamiršti, kad tikrosios plastinės deformacijos θ_p^* turi būti žinomos. Priešingu atveju θ_p^* , M_r^* , u_r^* gali būti nustatomi tik netiesinių lygčių sistemos (2.38) – (2.41) sprendimu.

Sistema (2.38) – (2.41) *tiesinių takumo sąlygų* atveju įgauna pavidalą:

$$A M_r = 0, \quad (2.48)$$

$$\varphi_{kl} = C_{kl} - \Phi_{kl} (M_{e,kl} + M_{r,kl}) \geq 0, \quad (2.49)$$

$$D M_r + \Phi^T \lambda - A^T u_r = 0, \quad (2.50)$$

$$\lambda^T [C - f(M_e + M_r)] = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad k \in K, \quad l \in L. \quad (2.51)$$

Tuomet pagal formules (2.46), (2.47) gauname:

$$u_r^* = \overline{H} \Phi^T \lambda^* = H \lambda^*, \quad M_r^* = \overline{G} \Phi^T \lambda^* = G \lambda^*. \quad (2.52)$$

Nesunku pastebėti, kad tiesinių takumo sąlygų atveju poslinkių ir liekamųjų įrašų influentinės matricos H ir G nepriklauso nuo įrašų M . Tai turi svarbią reikšmę, sudarant apkrovos uždavinių matematinius modelius: pradžioje taikomos *Treska* takumo sąlygos, ir tik baigiamajame uždavinio sprendimo etape – *Mizeso*.

2.4. Vienkartės apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis

Pradžioje sudaromas apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis, kai takumo sąlygos yra netiesinės (*Mizeso* sąlygos):

rasti

$$\max \mathbf{T}^T \mathbf{F}, \quad (2.53)$$

esant sąlygoms

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{M}_r^T \mathbf{D} \mathbf{M}_r, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{M}_r = \mathbf{0}, \quad (2.55)$$

$$\varphi_{kl} = M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl})^T \mathbf{\Pi}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl}) \geq 0, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{M}_e = \alpha \mathbf{F}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{u}_{r,\min} \leq \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}_p \leq \mathbf{u}_{r,\max}, \quad (2.58)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_p = (\boldsymbol{\Theta}_{p,kl})^T, \quad \boldsymbol{\Theta}_p = [\nabla \varphi(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_r)]^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{F} \geq \mathbf{0}. \quad (2.60)$$

Čia $\mathbf{T}$ – apkrovos optimalumo kriterijaus svorio koeficientų vektorius. Uždavinyje (2.53) – (2.59) ieškomaiais yra $\mathbf{F}^*$, $\mathbf{M}_r^*$ ir $\boldsymbol{\lambda}^*$. Žinomais dydžiais yra plokštės diskretinio modelio ribinis momentas $\mathbf{M}_0$. Tokia apkrovos optimizavimo uždavinio matematinio modelio struktūrą lemia keletas aplinkybių. Jeigu nebūtų taikomos standumo sąlygos (2.58), matematinis modelis (2.53) – (2.57) atitiktų plastinio suirimo atvejį. Tuomet nebūtina spręsti analizės uždavinį (2.54) – (2.57). Užtektų išspręsti ribinės pusiausvyros uždavinį:

rasti

$$\max \mathbf{T}^T \mathbf{F}, \quad (2.61)$$

esant sąlygoms

$$\mathbf{A} \mathbf{M}_r = \mathbf{0}, \quad (2.62)$$

$$\varphi_{kl} = M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl})^T \mathbf{\Pi}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl}) \geq 0, \quad k \in K, \quad l \in L, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{M}_e = \alpha \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \geq \mathbf{0}. \quad (2.64)$$

Tuo tarpu nagrinėjamas uždavinys (2.53) – (2.60), kuriame atsižvelgiama į standumo sąlygą

$$\mathbf{u}_{r,\min} \leq \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}_p \leq \mathbf{u}_{r,\max}$$

nėra klasikinis matematinio programavimo uždavinys. Kadangi konstrukcijų skaičiavimo normose ribojami suminiai įlinkiai, tai sąlygas (2.58) nesudėtinga perrašyti pavidalu:

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \boldsymbol{\beta} \mathbf{F} + \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}_p \leq \mathbf{u}_{\max} . \quad (2.65)$$

Čia $\boldsymbol{\beta}$ – tamprus skaičiavimo poslinkių influentinė matrica. Taigi, į standumo sąlygas (2.58) arba (2.65) (kai ribojami suminiai poslinkiai, o jų norminės kitimo ribos yra $\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max}$) įeina plastinės deformacijos $\boldsymbol{\Theta}_p$. Netiesinių takumo sąlygų atveju plastinės deformacijos

$$\boldsymbol{\Theta}_{p,kl} = [\nabla \varphi_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl})]^T \lambda_{kl}$$

priklauso nuo liekamųjų momentų $\mathbf{M}_r^*$ (tam tikra prasme ir nuo $\mathbf{F}$, nes į plastinių deformacijų išraišką įeina ir takumo momentai $\mathbf{M}_r^*$).

Matematinis modelis (2.53) – (2.60) yra sunkiai algoritmizuojamas, nes tik išsprendus uždavinį (2.54) – (2.57) galima nustatyti vektorių λ ir tik tuomet patikslinti standumo sąlygas-apribojimus (2.58). Tai matyti ir pagal darbo (Atkočiūnas *et al.* 2007) rezultatus, kuriame uždavinio (2.53) – (2.60) sprendimas pakeistas trijų etapų realizavimo procedūra.

Šiame magistriniame darbe numatomas iš esmės naujas sprendimo algoritmas (jam bus skirtas ketvirtas skyrius). Šis algoritmas pagrįstas tiesinių takumo sąlygų panaudojimu. Gavus optimalų uždavinio sprendinį, paskutiniame etape vėl pasitelkiamos netiesinės *Mizeso* takumo sąlygos (laikant, kad poslinkių influentinė matrica $\mathbf{H}$ žinoma). Taigi sudaromas naujas apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis, esant tiesinėms takumo sąlygoms:

rasti

$$\max \mathbf{T}^T \mathbf{F} , \quad (2.66)$$

esant sąlygoms

$$\boldsymbol{\varphi}_{kl} = \mathbf{C}_{kl} - \boldsymbol{\Phi}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{G} \lambda) \geq \mathbf{0} , \quad (2.67)$$

$$\lambda_{kl}^T [\mathbf{C}_{kl} - \boldsymbol{\Phi}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{G} \lambda)] = 0 , \quad (2.68)$$

$$\lambda_{kl} \geq 0 , \quad \lambda = (\lambda_{kl})^T , \quad (2.69)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \boldsymbol{\beta} \mathbf{F} + \mathbf{H} \lambda \leq \mathbf{u}_{\max} . \quad (2.70)$$

Matematiniam modelyje nežinomaisiais yra apkrovos ir plastinių daugiklių vektoriai, o pats optimalus sprendinys žymimas F^* ir λ^* . Tuo tarpu žinomas yra plokštės ribinis lenkimo momentas M_0 . Uždavinys (2.66) – (2.70) nėra iškilo matematinio programavimo problema. Todėl jam spręsti šiame magistriniame darbe ir kuriamas specialus iteracinis algoritmas.

2.5. Kintamos-kartotinės apkrovos optimizavimas

Magistrinio darbo, skirto tamprių plokščių apkrovos optimizavimui, tyrimų išbaigtumas reikalauja trumpai aptarti ir kintamos-kartotinės apkrovos optimizavimo uždavinio aspektus, palyginti vienkartinę ir kintamos-kartotinės apkrovos maksimizavimo uždavinių matematinius modelius (Atkočiūnas 1999; Atkočiūnas (rusų k.) 1994).

Kintama-kartotinė apkrova $F(t)$ charakterizuojama savo kitimo ribomis: $F_{inf} \leq F(t) \leq F_{sup}$. Tamprios įrašos (jos kinta laike t) tuomet išreiškiamos taip:

$$M_{kl}(t) = M_{e,kl}(t) + M_{r,kl}, \quad (2.71)$$

$$k=1, 2, \dots, s; \quad l=1, 2, \dots, s_k.$$

Atsižvelgdami į galimą kintamos-kartotinės apkrovos kombinacijų skaičių p ($j=1, 2, \dots, p; j \in J$), (2.71) sąlygas galime perrašyti taip:

$$M_{kl,j} = M_{ekl,j} + M_{rkl}, \quad k \in K, \quad l \in L, \quad j \in J. \quad (2.72)$$

Suminiai plokštės poslinkiai (dažniausiai tai yra įlinkiai) kintamos kartotinės apkrovos atveju skaičiuojami pagal formules

$$u(t) = u_e(t) + u_r(t) = \beta F(t) + H \Theta_p(t). \quad (2.73)$$

Tamprus ekstreminiai poslinkiai $u_{e,sup}$, $u_{e,inf}$ gali būti nustatyti pagal formules

$$u_{e,sup} = \beta_{sup} F_{sup} + \beta_{inf} F_{inf}, \quad (2.74)$$

$$u_{e,inf} = \beta_{sup} F_{inf} + \beta_{inf} F_{sup}. \quad (2.75)$$

Čia β_{sup} , β_{inf} – matricos, gaunamos poslinkių influentinės matricos β , laikantis reikalavimo, kad $\beta_{ij} \geq 0$ ($\beta = \beta_{sup} + \beta_{inf}$). Liekamieji poslinkiai $u_r(t)$ priklauso nuo apkrovimo istorijos, t.y. plastinio deformavimo istorijos $\Theta_p(t)$. Štai kodėl užrašomos nepriklausančios nuo laiko poslinkių ribos:

$$\mathbf{u}_{sup} = \mathbf{u}_{e,sup} + \mathbf{u}_{r,sup} , \quad (2.76)$$

$$\mathbf{u}_{inf} = \mathbf{u}_{e,inf} + \mathbf{u}_{r,inf} . \quad (2.77)$$

Liekamųjų poslinkių kitimo ribos $\mathbf{u}_{r,inf}$, $\mathbf{u}_{r,sup}$ yra tokios, kad

$$\mathbf{u}_{r,inf} \leq \mathbf{u}_r(t) \leq \mathbf{u}_{r,sup} . \quad (2.78)$$

Tuomet galima sudaryti kintamos-kartotinės apkrovos optimizavimo uždavinio matematinį modelį tiesinių takumo sąlygų atveju:

rasti

$$\max \left(\mathbf{T}_{sup}^T \mathbf{F}_{sup} + \mathbf{T}_{inf}^T \mathbf{F}_{inf} \right) , \quad (2.79)$$

esant sąlygoms

$$\boldsymbol{\varphi}_{kl} = \mathbf{C}_{kl} - \boldsymbol{\Phi}_{kl} (\mathbf{M}_{e,klj} + \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda}) \geq \mathbf{0} , \quad (2.80)$$

$$\lambda_{kl,j}^T [\mathbf{C}_{kl} - \boldsymbol{\Phi}_{kl} (\mathbf{M}_{e,klj} + \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda})] = 0 , \quad (2.81)$$

$$\lambda_{kl,j} \geq 0 , \quad \boldsymbol{\lambda} \equiv \lambda_{kl,j} , \quad k \in K , \quad l \in L , \quad (2.82)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_{r,inf} + \mathbf{u}_{e,inf} , \quad (2.83)$$

$$\mathbf{u}_{r,sup} + \mathbf{u}_{e,sup} \leq \mathbf{u}_{max} . \quad (2.84)$$

Pagrindinis skirtumas tarp vienkartės apkrovos optimizavimo uždavinio matematinio modelio (2.66) – (2.70) ir ką tik sudaryto kintamos-kartotinės apkrovos optimizavimo uždavinio matematinio modelio (2.79) – (2.84) – sudarant standumo sąlygas. Standumo sąlygos (2.83), (2.84) reikalauja papildomo tiesinio programavimo uždavinio sprendimo ([Atkočiūnas et al. 2004](#)).

2.6. Antrojo skyriaus rezultatai ir išvados

1. Išnagrinėtos lenkiamosios plokštės diskretinio modelio pusiausvyros ir geometrinės lygtys. Diskretizacijai pasitelkti pusiausviri baigtiniai elementai.
2. Netiesinės *Hubero-Mizeso* takumo sąlygos tiesinamos apvalioms lenkiamoms plokštėms (skaitiniame eksperimente jos bus pagrindinis tyrimo objektas).
3. Sudaryti tampriai platinės plokštės analizės uždavinio matematiniai modeliai esant netiesinėms ir tiesinėms (tiesioginis magistrinio darbo tyrimo objektas) sąlygoms.
4. Sudarant liekamųjų poslinkių ir momentų influentines matricas parodyta galimybė taikyti matematinio programavimo *Kuno* ir *Takerio* sąlygas.

5. Sudarytas patikslintas vienkartinės apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis. Atlikta jo analizė.
6. Parodyta, kad kintamos-kartotinės apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis nėra klasikinio matematinio programavimo uždavinys.

3. APVALIOS PLOKŠTĖS RIBINĖS PUSIAUSVYROS UŽDAVINYS

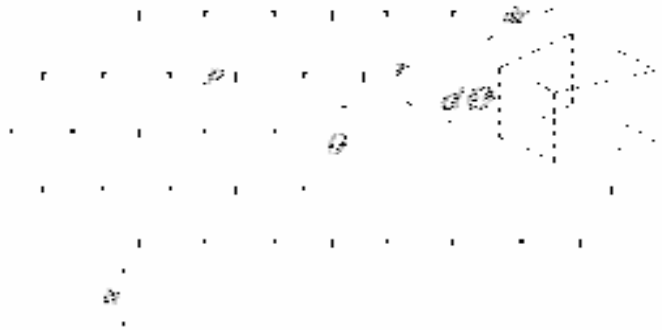
3.1. Bendros pastabos

Pagrindinis baigiamojo magistro darbo tikslas, kaip nurodyta darbo įvade, yra tamptariai plastinės lenkiamosios plokštės apkrovos optimizavimo, esant stiprumo ir standumo apribojimams, patobulintos metodikos sukūrimas. Pasitelkiamos tiesinės *Treska* ir netiesinės *von Mizeso* takumo sąlygos. Apie siūlomą sprendimo algoritmą bus išsamiau kalbama 4 skyriuje. Šiame skyriuje, kuris tam tikra prasme yra parengiamasis ketvirtajam, nagrinėjami mokslo literatūroje žinomi uždaviniai: plokštės ribinės pusiausvyros ir analizės uždaviniai (Cohn and Maier 1978, Čyras 1983; Karkauskas *et al.* 1995; Čyras *et al.* 2004). Tačiau magistrinio darbo autorius turi būti juos giliai įsisavinęs, pagaliau analizės uždavinio rezultatai leidžia nustatyti ikisuiriminės stadijos įlinkius. Visa tai turi tiesioginę įtaką ketvirtame skyriuje siūlomo algoritmo struktūrai. Pagaliau darbo autorius turėjo gerą progą įsisavinti darbo *Matlab* aplinkoje ypatumus, pasinaudoti kitų autorių sukurta netiesinių uždavinių sprendimo programa SM4 (Karkauskas *et al.* 1995). Programa SM4 skiriama vienodo storio tampriųjų plastiškųjų lenkiamųjų plokščių ir lėkštų sferinių kevalų, veikiamų vienkartinės apkrovos, ribinės pusiausvyros, analizės ir statybinės mechanikos optimizacijos uždaviniams spręsti. Daromos lenkiamųjų plokščių techniškosios skaičiavimo teorijos sąlygojamos prielaidos. Visiems nagrinėjamiems uždaviniams naudojamas idealiai tampraus plastiško izotropinio kūno fizinis modelis. Įrašų leistinumo sąlyga yra *Hubero-Mizeso* plastiškumo kriterijus. Pagal programą SM4 galima spręsti tik geometrinio tiesiškumo uždavinius. Diskretizacijai galima naudoti *pusiausvirų baigtinių elementų* (PBE) arba *baigtinių skirtumų* (BS) metodus.

3.2. Ribinės apkrovos nustatymo skaitinis eksperimentas

3.2.1. Plokštės diskretizacija ir matematiniai modeliai

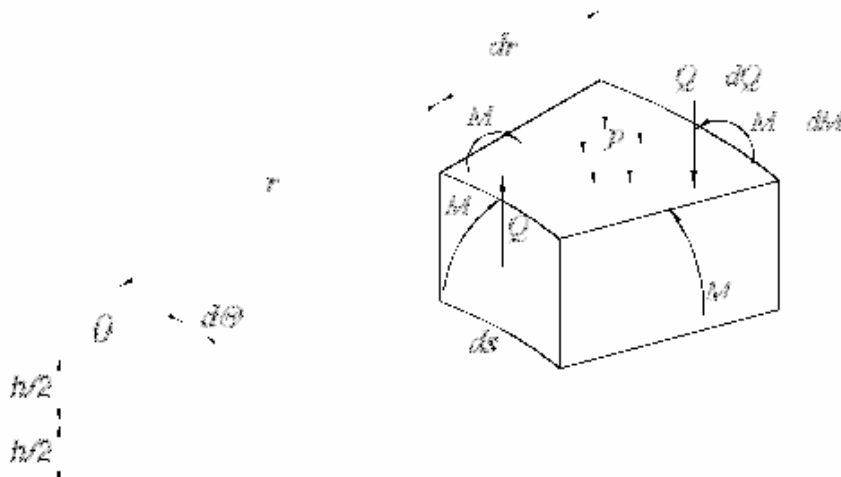
Reikia apskaičiuoti išoriniu kontūru lankstais atremtos standžiai plastinės spindulio R apvalios plokštės, apkrautos simetriškai paskirstytu vienodo intensyvumo krūviu p (3.1 pav.), ribinę apkrovą p_0 . Plokštės medžiaga izotropinė, jai galioja *Treska* takumo sąlyga. Lenkimo ribinis momentas $M_0 = const$ ir žinomas. Diskretizacijai naudojamas pusiausvirų baigtinių elementų metodas. Iliustracijai diskretizacijai naudojami tik du baigtiniai elementai.



3.1 pav. Simetriškai apkrauta apvali plokštė

Skaičiuojant apvalias plokštes, patogiu naudoti polinę koordinačių sistemą, kurioje kiekvieno taško padėtis nusakoma spinduliu r ir kampine koordinate θ . Plokštė deformuojasi simetriškai, kiekvienas radialinis jos pjūvis yra simetrinis, todėl taikoma, jog veikia tik radialinis M_r , žiedinis M_θ momentai bei skersinė jėga Q_r (3.2 pav.). Visi šie dydžiai, kaip ir plokštės įlinkiai w , yra koordinatės r funkcijos. Plokštės vidurinio paviršiaus lygtis yra $w = w(r)$.

Skaičiuojant apvalias standžias plonas plokštes laikomasi techninės plokščių skaičiavimo teorijos prielaidų. Viena iš šių prielaidų teigia, kad plokštės storis h turi būti mažas, palyginti su jos skersmeniu d ($2R$), o įlinkis ribojamas nelygybe $w \leq \frac{1}{5} h$.



3.2 pav. Įrąžų paskirstymas radialiniame apvalios plokštės pjūvyje

Pusiausvyros lygčių koeficientų matrica A yra sudaroma, pasitelkus pusiausvyrus baigtinius elementus ir programą SM3 (Karkauskas *et al.* 1995) testinio pavyzdžio (232 psl.)

ir yra parodyta 3.1 lentelėje. Ribinės apkrovos skaičiavimas buvo atliktas pagal tokį matematinį modelį:

rasti

$$\max F, \quad (3.1)$$

esant sąlygoms

$$AS - \eta F = 0, \quad i=1, 2, \dots, s. \quad (3.2)$$

$$\Phi S \leq S_0 \quad (3.3)$$

Diskretinis modelis parodytas 3.3 pav. Kad skaičiavimas būtų paprastesnis, plokštė suskaidyta tik į du baigtinius elementus (3.3 pav.).



3.3 pav. Apvalios plokštės suskaidymas į BE

Bendras skaičiuojamųjų pjūvių skaičius lygus 6 (kiekviename elemente po tris (3.4 pav.)).



3.4 pav. Apvalios plokštės dviejų elementų skaičiuojamieji pjūviai

Įtempimų būvis skaičiuojamajame pjūvyje i apibūdinamas dvimačiu įrąžų vektoriumi $S_i \equiv \{M_{\rho,i} \quad M_{\theta,i}\}^T$; čia lenkimo radialinis momentas pažymėtas indeksu ρ , žiedinis momentas – indeksu θ . Šių momentų teigiamos kryptys pavaizduotos 3.2 paveiksle. Visos

plokštės baigtinių elementų diskretinio modelio įtempimų būvį apibūdina 12-matis įrašų vektorius:

$$S \equiv \{M_{\rho,1} \ M_{\theta,1} \ M_{\rho,2} \ M_{\theta,2} \ M_{\rho,3} \ M_{\theta,3} \\ M_{\rho,4} \ M_{\theta,4} \ M_{\rho,5} \ M_{\theta,5} \ M_{\rho,6} \ M_{\theta,6}\}^T$$

3.1 lentelė. Testinio pavyzdžio pusiausvyros lygčių koeficientų matrica A

Mp,1	Mθ,1	Mp,2	Mθ,2	Mp,3	Mθ,3	Mp,4	Mθ,4	Mp,5	Mθ,5	Mp,6	Mθ,6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6,2832	6,2832	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6,2832	-5,236	0	4,1888	-6,2832	1,0472	0	0	0	0	0	0
-6,2832	-1,0472	25,133	-4,1888	-18,85	5,236	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-3,1416	0	3,1416	0	0	0	0	0
6,2832	0	-25,133	0	25,133	-6,2832	12,566	6,2832	-25,133	0	6,2832	0
0	0	0	0	0	0	-6,2832	-5,236	25,133	4,1888	-18,85	1,0472
0	0	0	0	0	0	-18,85	-1,0472	50,265	-4,1888	-31,416	5,236
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6,2832	0

3.2.2. Sprendimas *Matlab* aplinkoje

Bendruoju atveju *Matlab* programinis paketas sprendžia labai daug matematinio programavimo problemų. Apvalios plokštės, išoriniu kontūru lanksčiai atremtos, simetriškai apkrautos vienodo intensyvumo krūviu p skaičiavimui *Matlab* programa bus panaudota paprogramė *Linprog*. *Linprog* paprogramė sprendžia linijinio programavimo problemą, kurios matematinis modelis atrodo taip:

rasti

$$\min f^T x, \quad (3.4)$$

esant sąlygoms

$$A_{eq} x = b_{eq}, \quad (3.5)$$

$$A_{nq} x \leq b_{nq}. \quad (3.6)$$

Arba pertvarkant apvaliai lenkiamajai plokštei (kur naudojamos *Treska* takumo sąlygos):

rasti

$$\min F, \quad (3.7)$$

esant sąlygoms

$$AS - \eta F = 0, \quad (3.8)$$

$$\Phi S \leq S_0. \quad (3.9)$$

Nagrinėjamoje plokštėje pagrindinė įraža yra lenkimo momentas, todėl ir uždavinio stiprumo sąlygos turi išreikšti reikalavimą, kad absoliutinė lenkimo momento reikšmė neviršytų plokštės ribinės įražos lenkimui.

Kadangi programa sprendžia minimizacijos problemą, yra pertvarkomas pats matematinis modelis (3.7) – (3.9):

rasti

$$\min (-F), \quad (3.10)$$

esant sąlygoms

$$AS - \eta F = 0, \quad (3.11)$$

$$-\Phi S \geq S_0. \quad (3.12)$$

Yra naudojamos *Treska* takumo sąlygos (pagal 2.5 pav.):

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

Matematinis modelis (3.10) – (3.12) matricinėje-operatorinėje formoje yra parodytas 3.2 lentelėje, konkrečia skaitine išraiška – 3.3 lentelėje.

3.2 lentelė. Testinio pavyzdžio matematinis modelis – matricinė-operatorinė forma

Taškas 1		Taškas 2		Taškas 3		Taškas 4		Taškas 5		Taškas 6		η	Ženklas	Reikšmė
Mp	Mθ	Mp	Mθ	Mp	Mθ	Mp	Mθ	Mp	Mθ	Mp	Mθ	q		
L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L		
												-F	----->	MAX
A												η	=	0
													=	
													=	
													=	
													=	
													=	
-Φi													=>	S ₀
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
		-Φi											=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
				-Φi									=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
						-Φi							=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
								-Φi					=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
										-Φi			=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	
													=>	

3.3 lentelė. Testinio pavyzdžio matematinis modelis – skaitinė forma

Taškas 1		Taškas 2		Taškas 3		Taškas 4		Taškas 5		Taškas 6		η	Ženklas	Reikšmė
Mp	Mb	Mp	Mb	Mp	Mb	Mp	Mb	Mp	Mb	Mp	Mb	q		
L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L		
												-1	----->	MAX
-6,2832	6,2832												=	0
6,2832	-5,236		4,1888	-6,2832	1,0472							-0,2618	=	0
-6,2832	-1,0472	25,133	-4,1888	-18,85	5,236							-0,5236	=	0
				-3,1416		3,1416							=	0
6,2832		-25,133		25,133	-6,2832	12,566	6,2832	-25,133		6,2832			=	0
						-6,2832	-5,236	25,133	4,1888	-18,85	1,0472	-1,0472	=	0
						-18,85	-1,0472	50,265	-4,1888	-31,416	5,236	-1,309	=	0
										-6,2832			=	0
1	0												=>	1
-1	0												=>	1
0	1												=>	1
0	-1												=>	1
1	-1												=>	1
-1	1												=>	1
		1	0										=>	1
		-1	0										=>	1
		0	1										=>	1
		0	-1										=>	1
		1	-1										=>	1
		-1	1										=>	1
				1	0								=>	1
				-1	0								=>	1
				0	1								=>	1
				0	-1								=>	1
				1	-1								=>	1
				-1	1								=>	1
						1	0						=>	1
						-1	0						=>	1
						0	1						=>	1
						0	-1						=>	1
						1	-1						=>	1
						-1	1						=>	1
								1	0				=>	1
								-1	0				=>	1
								0	1				=>	1
								0	-1				=>	1
								1	-1				=>	1
								-1	1				=>	1
										1	0		=>	1
										-1	0		=>	1
										0	1		=>	1
										0	-1		=>	1
										1	-1		=>	1
										-1	1		=>	1

Matlab programos vykdomoje byloje visos nagrinėjamos plokštės (esant *Treska* takumo sąlygoms) apkrovos optimizacijos uždavinį atitinka toks tekstas:

```
% Apvalios lenkiamos plokštės pusiausvyros lygčių koeficientų matrica
A=zeros(8,12);
A(1,1)=-6.2832; A(2,1)=6.2832; A(3,1)=-6.2832; A(5,1)=6.2832; A(1,2)=6.2832;
A(2,2)=-5.236; A(3,2)=-1.0472; A(3,3)=25.133; A(5,3)=-25.133; A(2,4)=4.1888;
A(3,4)=-4.1888; A(2,5)=-6.2832; A(3,5)=-18.85; A(4,5)=-3.1416; A(5,5)=25.133;
A(2,6)=1.0472; A(3,6)=5.236; A(5,6)=-6.2832; A(4,7)=3.1416; A(5,7)=12.566;
A(6,7)=-6.2832; A(7,7)=-18.85; A(5,8)=6.2832; A(6,8)=-5.236; A(7,8)=-1.0472;
A(5,9)=-25.133; A(6,9)=25.133; A(7,9)=50.265; A(6,10)=4.1888; A(7,10)=-4.1888;
A(5,11)=6.2832; A(6,11)=-18.85; A(7,11)=-31.416; A(8,11)=-6.2832;
A(6,12)=1.0472;
A(7,12)=5.236
% Niu matrica
B=zeros(8,1);
B(2,1)=.2618; B(3,1)=.5236; B(6,1)=1.0472; B(7,1)=1.309
% Atskiro pjūvio Treska takumo sąlyga
Fil=zeros(6,2);
Fil(1,1)=1; Fil(2,1)=-1; Fil(3,2)=1; Fil(4,2)=-1;
Fil(5,1)=1; Fil(5,2)=-1; Fil(6,1)=-1; Fil(6,2)=1;
% Visos plokštės Treska takumo sąlygos
Fi=zeros(36,12);
Fi(1:6,1:2)=Fil; Fi(7:12,3:4)=Fil; Fi(13:18,5:6)=Fil; Fi(19:24,7:8)=Fil;
Fi(25:30,9:10)=Fil; Fi(31:36,11:12)=Fil
% Vienetinė matrica
G=ones(36,1);
% Aeq matricos sudarymas
Aeq=zeros(8,13); Aeq(1:8,1:12)=A; Aeq(1:8,13)=-B
% beq matricos sudarymas
beq=zeros(8,1)
% Anq matricos sudarymas
Anq=zeros(37,13); Anq(1:36,1:12)=Fi; Anq(37,13)=-1
% bnq matricos sudarymas
bnq=zeros(37,1); bnq(1:36,1)=G
% Tikslų funkcija (neigiamos apkrovos maksimizavimas)
f=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1]
% Spausdinimo pasirinktis
[x,fval,exitflag]=linprog(f, Anq, bnq, Aeq, beq)
```

Rezultatai atrodo taip (atspausdinti tik radialinių ir žiedinių momentų reikšmės (žr. 3.5 ir 3.6 pav.), tikslo funkcijos rezultatas ir operatoriaus „exitflag“ reikšmė):

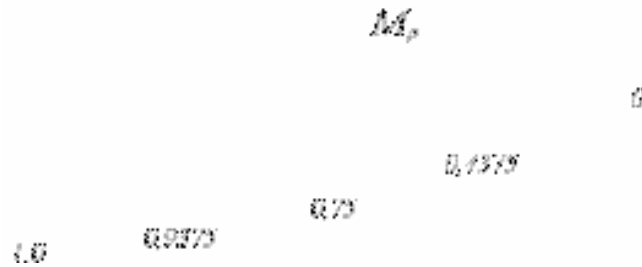
```
Optimization terminated.
```

```
x =
    1.0000
    1.0000
    0.9375
    1.0000
    0.7500
    1.0000
    0.7500
    1.0000
    0.4375
    0.9999
    0.0000
    1.0000
    5.9996
```

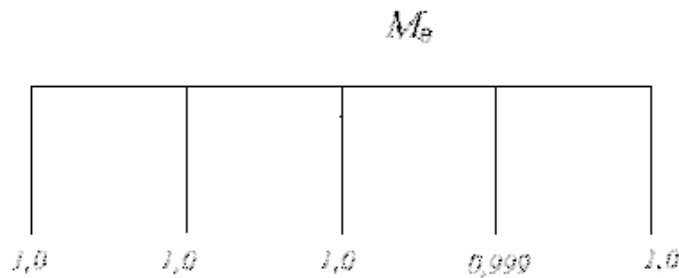
```
fval =
   -5.9996
```

```
exitflag =
     1
```

Momentų rezultatai yra parodyti 3.5 paveiksle (radialiniai momentai M_ρ) ir 3.6 paveiksle (žiediniai momentai M_θ).



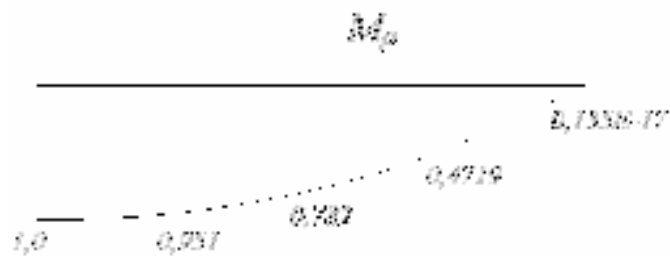
3.5 pav. Matlab programoje nustatyti radialiniai testinio uždavinio momentai esant Treska takumo sąlygoms



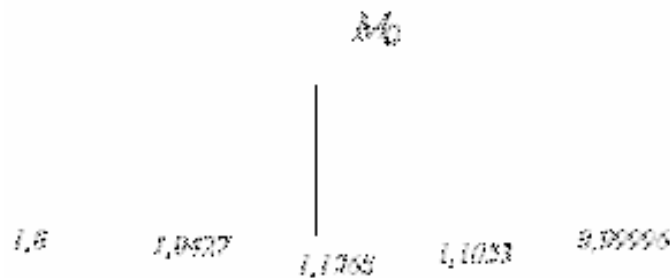
3.6 pav. Matlab programoje nustatyti žiediniai testinio uždavinio momentai esant Treska takumo sąlygoms

Palyginant: tikslo funkcijos rezultatas, gautas programa SM4 (naudojant netiesinės *Mizeso* takumo sąlygas) yra $6.42338 M_0 R^{-2}$. Nagrinėjamo uždavinio analitinis sprendinys žinomas – $6.5 M_0 R^{-2}$.

Tuo tarpu suskaičiavus apvalios plokštės apkrovos optimizavimo uždavinį su *von Mizeso* takumo sąlygomis (programa *Rozen* arba SM4) atitinkamai gauti sekantys rezultatai:



3.7 pav. Rozen programoje nustatyti radialiniai testinio uždavinio momentai esant von Mizeso takumo sąlygoms



3.8 pav. Rozen programoje nustatyti žiediniai testinio uždavinio momentai esant von Mizeso takumo sąlygoms

Dualaus uždavinio sprendimui, pasinaudojus (3.4) – (3.6) figūruojančiomis reikšmėmis, galima užrašyti tokį matematinį modelį:

rasti

$$\min (\mathbf{b}_{eq} \mathbf{u} + \mathbf{b}_{nq} \boldsymbol{\lambda}), \quad (3.14)$$

esant sąlygoms

$$\mathbf{A}_{eq}^T \mathbf{u} + \mathbf{A}_{nq}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c}, \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

Tokiu būdu pasinaudojus anksčiau turėtomis matricomis testinio pavyzdžio dualus uždavinys *Matlab* programos vykdomajame lange atrodys taip:

```
% Apvalios lenkiamosios plokštės pusiausvyros lygčių koeficientų matrica
A=zeros(8,12);
A(1,1)=-6.2832; A(2,1)=6.2832; A(3,1)=-6.2832; A(5,1)=6.2832; A(1,2)=6.2832;
```

```

A(2,2)=-5.236; A(3,2)=-1.0472; A(3,3)=25.133; A(5,3)=-25.133; A(2,4)=4.1888;
A(3,4)=-4.1888; A(2,5)=-6.2832; A(3,5)=-18.85; A(4,5)=-3.1416; A(5,5)=25.133;
A(2,6)=1.0472; A(3,6)=5.236; A(5,6)=-6.2832; A(4,7)=3.1416; A(5,7)=12.566;
A(6,7)=-6.2832; A(7,7)=-18.85; A(5,8)=6.2832; A(6,8)=-5.236; A(7,8)=-1.0472;
A(5,9)=-25.133; A(6,9)=25.133; A(7,9)=50.265; A(6,10)=4.1888; A(7,10)=-4.1888;
A(5,11)=6.2832; A(6,11)=-18.85; A(7,11)=-31.416; A(8,11)=-6.2832; A(6,12)=1.0472;
A(7,12)=5.236;
B=zeros(8,1);
B(2,1)=.2618; B(3,1)=.5236; B(6,1)=1.0472; B(7,1)=1.309;
T=zeros(13,8);
T(1:12,1:8)=A'; T(13,1:8)=B';
% Visos plokštės Treska takumo sąlygos
Fil=zeros(6,2);
Fil(1,1)=1; Fil(2,1)=-1; Fil(3,2)=1; Fil(4,2)=-1;
Fil(5,1)=1; Fil(5,2)=-1; Fil(6,1)=-1; Fil(6,2)=1;
Fi=zeros(36,12);
Fi(1:6,1:2)=Fil; Fi(7:12,3:4)=Fil; Fi(13:18,5:6)=Fil; Fi(19:24,7:8)=Fil;
Fi(25:30,9:10)=Fil; Fi(31:36,11:12)=Fil;
N=zeros(13,36);
N(1:12,1:36)=Fi';
% Vienetinė matrica
c=diag(-ones(1,36),0);
% Aeq matricos sudarymas
Aeq=zeros(13,44); Aeq(1:13,1:8)=T; Aeq(1:13,9:44)=N;
% beq matricos sudarymas
beq=zeros(13,1); beq(13,1)=1;
% Anq matricos sudarymas
Anq=zeros(36,44); Anq(1:36,9:44)=c;
% bnq matricos sudarymas
bnq=zeros(36,1);
% Tikslų funkcija (neigiamos apkrovos maksimizavimas)
f=[0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1];
% Spausdinimo pasirinktis
[x,fval,exitflag]=linprog(f, Anq, bnq, Aeq, beq)

```

Kad neužimtų daug vietos atspausdinami tik dualaus uždavinio (3.14) – (3.16) galutiniai rezultatai (rezultatai pertvarkyti lentelės forma):

Optimization terminated.

```

x =
    0.9228    0.9549    0.5730   -0.7638    0.5730    0.1910    0.1910
   -0.8598    0.0000    0.2012    0.0000    0.1988    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    1.5997    0.0000    0.0000    0.0000

```

0.0000	0.0000	0.3999	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	2.4000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6017
0.5983	0.0000					

```
fval =
    5.9996
```

```
exitflag =
    1
```

3.2.3. *Sprendimas Simplex programa. Rezultatai*

Simplex programa skirta tiesinio programavimo uždaviniams spręsti. Ji pritaikyta darbui langų aplinkoje ir skirta maksimizavimo uždaviniams spręsti. Todėl minimizavimo uždaviniai sprendžiami juos pertvarkius į maksimizavimo uždavinius. Kadangi simpleksų algoritmas universalus, tai „Simplex“ programa galima spręsti visus tiesinius optimizavimo uždavinius (Kalanta 2007). Naudojant šią programą ir taikant šakų ir rėžių ar prioritetų metodą, t.y. formuluojant ir sprendžiant uždavinius su papildomais tiesiniais apribojimais, iteraciniu būdu galima išspręsti ir tiesinius sveikaskaičius bei diskrečiojo ar tikslinio programavimo uždavinius. Programa susideda iš trijų dalių:

- 1) pradinių duomenų įvedimo programa, skirta pradinių duomenų rinkmenai sukurti;
- 2) tiesinio programavimo uždavinių sprendimo programa, realizuojanti simpleksų algoritmą;
- 3) skaičiavimo rezultatų vizualizavimo ir spausdinimo programa.

Skaiciavimui naudota *SimplST* paprogramė, kurios skaitinis vaizdas parodytas 3.4 lentelėje.

Simplex programa pateikia tiek tiesioginio, tiek dualaus uždavinio sprendimo rezultatus.

TIESINIŲ OPTIMIZACIJOS UŽDAVINIŲ SPRENDIMO PROGRAMA *SIMPLEX*

PRADINIAI DUOMENYS (INITIAL DATE)

Pradinis 2009 03 03

K O N S T A N T O S:

APRIBOJIMŲ SKAIČIUS	M =	40
LYGYBIŲ SKAIČIUS	ME =	8
NEŽINOMUJŲ SKAIČIUS	N =	13
NERIBOTO ŽENKLO KINTAMŲJŲ SKAIČIUS	NX =	12
REZULTATŲ IRAŠYMO POŽYMIS	ISP =	0

SKAIČIAVIMO REZULTATAI (RESULTS)

ATRAMINIS SPRENDINYS (FEASIBLE SOLUTION)	ITER=	0
OPTIMALUS SPRENDINYS (OPTIMAL SOLUTION)	ITER=	2

TIKSLO FUNKCIJOS REIKŠMĖ = .5999601D+01

REZULTATŲ LENTELĖ (TABLE OF RESULTS)

I	EILĖS	I	TIESIOGINIAI	I	LAGRANŽO DAUGIKLIAI	I	NELYGYBIŲ	I
I		I		I		I	PAPILDOMI	I
I	NR.	I	KINTAMIEJI	I	LYGYBIŲ	I	NELYGYBIŲ	I
							KINTAMIEJI	
I	1	I	.100000D+01	I	-.891214D+00	I	.399925D+00	I
I	2	I	.100000D+01	I	-.954864D+00	I	.000000D+00	I
I	3	I	.937509D+00	I	-.572965D+00	I	.000000D+00	I
I	4	I	.100000D+01	I	.763817D+00	I	.000000D+00	I
I	5	I	.750017D+00	I	-.572965D+00	I	.000000D+00	I
I	6	I	.100000D+01	I	-.190991D+00	I	.000000D+00	I
I	7	I	.750017D+00	I	-.190991D+00	I	.000000D+00	I
I	8	I	.100000D+01	I	.954974D+00	I	.000000D+00	I
I	9	I	.437499D+00	I		I	.159970D+01	I
I	10	I	.999895D+00	I		I	.000000D+00	I
I		I		I		I		I
I	11	I	.000000D+00	I		I	.000000D+00	I
I	12	I	.100000D+01	I		I	.000000D+00	I
I	13	I	.599960D+01	I		I	.000000D+00	I
I	14	I		I		I	.000000D+00	I
I	15	I		I		I	.399925D+00	I
I	16	I		I		I	.000000D+00	I
I	17	I		I		I	.000000D+00	I
I	18	I		I		I	.000000D+00	I
I	19	I		I		I	.000000D+00	I
I	20	I		I		I	.000000D+00	I
I		I		I		I		I
I	21	I		I		I	.240002D+01	I
I	22	I		I		I	.000000D+00	I
I	23	I		I		I	.000000D+00	I
I	24	I		I		I	.000000D+00	I
I	25	I		I		I	.000000D+00	I
I	26	I		I		I	.000000D+00	I
I	27	I		I		I	.000000D+00	I
I	28	I		I		I	.000000D+00	I

I	29	I	I	I	.000000D+00	I	.156240D+01	I
I	30	I	I	I	.000000D+00	I	.437604D+00	I
I		I	I	I		I		I
I	31	I	I	I	.120003D+01	I	.000000D+00	I
I	32	I	I	I	.000000D+00	I	.200000D+01	I

APRIBOJIMŲ-LYGYBIŲ SKAIČIUS ME= 8
 NELYGIŲ 0 LAGRANŽO DAUGIKLIŲ ŽENKLO RIBOJIMAMS SKAIČIUS LGZ = 0

Taigi, visu pirma, tikslo funkcijos reikšmė, gauta pasinaudojus *Simplex* programa, pilnai atitinka tikslo funkcijos reikšmę, gauta *Matlab* programoje, pasitelkus *Treska* takumo sąlygas. *Simplex* rezultatų lentelėje nurodyti: tiesioginiai uždavinio kintamieji (turintys 12 eilučių įrašų vektorius S , ir tikslo funkcijos reikšmė), dualių kintamųjų (*Lagranžo* daugikliai) reikšmės, bei papildomų kintamųjų reikšmės. Nelygybių papildomi kintamieji rodo neišnaudotų išteklių reikšmes $x_p = b - Ax$ (Kalanta 2007). Jų skaičius lygus nelygybių skaičiui. Nulinė ar labai artima nuliui papildomo kintamojo reikšmė rodo, kad jį atitinkanti nelygybė yra aktyvi – optimaliame plane tenkinama kaip griežta lygybė. Pagal nelygybių *Lagranžo* daugiklių ir papildomų kintamųjų reikšmes galima atlikti sprendinio analizę – nustatyti, ar uždavinys turi tik vienintelį sprendinį, t.y. ar tiesioginių ir dualių kintamųjų reikšmės yra vienintelės.

Atliekama gautų rezultatų analizė. Uždavinys turi vienintelį sprendinį tiesioginių kintamųjų požiūriu, jeigu įvykdoma sąlyga (Kalanta 2007):

$$m^* = m_1 + m_2 \geq n.$$

Čia n – nežinomųjų skaičius; m_1 – lygybių skaičius; $m_2 = m_n + m_z$ – aktyvių nelygybių, įskaitant ir ženklų apribojimus, skaičius; m_n – aktyvių nelygybių skaičius; m_z – aktyvių ženklų apribojimų skaičius.

Taigi, uždavinyje yra 13 nežinomųjų, 8 lygybės, 32 nelygybės ir 1 kintamųjų ženklų apribojimas:

$$m^* = m_1 + m_2 = 8 + 5 = 13 \geq n = 13.$$

Anksčiau minėta sąlyga yra įvykdyta, todėl nagrinėjamas uždavinys turi vienintelį sprendinį.

3.3. Analizės uždavinio skaitinis eksperimentas

Šiek tiek sumažinę gautąją ribinės apkrovos $6,42338 M_0 R^{-2}$ reikšmę (kuri gaunama pasitelkus netiesines *von Miseso* takumo sąlygas) sprendžiamas plokštės analizės uždavinys. Matematinis analizės uždavinio modelis jau sudarytas antrame skyriuje:

rasti

$$\min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \mathbf{M}_{r,k}^T \mathbf{D}_k \mathbf{M}_{r,k}, \quad (3.17)$$

esant sąlygoms

$$\sum_{k=1}^s \mathbf{A}_k \mathbf{M}_{r,k} = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

$$\varphi_{kl} = M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl})^T \mathbf{H}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl}) \geq 0, \quad (3.19)$$

$$k \in K, l \in L.$$

Čia $\mathbf{M}_{r,k}$ yra plokštės k -jo baigtinio elemento liekamųjų momentų reikšmės visuose jo mazginiuose taškuose.

Yra skaičiuota apvali plokštė su *von Mizeso* takumo sąlygomis, suskaidyta į du baigtinius elementus. Analizės uždavinyje prieš tai gautas apkrovos maksimumo parametras ($6,42338 M_0 R^{-2}$) yra sumažintas 0,1% ir lygus $6,41601 M_0 R^{-2}$.

Programoje *Rozen 2002* gauti tokie analizės uždavinio rezultatai:

PLASTINES DEFORMACIJOS

DEFOR-JOS S K A I C I U O J A M I E J I P J U V I A I

0.31296E+00 0.44470E+01 0.61150E+00 0.14020E+01 0.00000E+00 0.00000E+00

0.31296E+00 0.58694E+01 0.20587E+01 0.47204E+01 0.00000E+00 0.00000E+00

LIEKAMIEJI POSLINKAI

0.31299E+01 0.33013E+01 0.20587E+01 -0.34488E+01 0.19362E+01 0.13669E+01

0.22209E+00 -0.31409E+01

LIEK. IRAZU KONTROLE: SR=G*QPL

1 -0.32363E+00

2 -0.32363E+00

3 -0.28999E+00

4 -0.23349E+00

5 -0.21063E+00

6 -0.61810E-02

7 -0.21063E+00

8 -0.61705E-02

9 -0.10686E+00

10 0.20908E+00

11 -0.28356E-13

12 0.43360E+00

Energijos disipacijos viršutinė riba D max

1 0.10097E+02

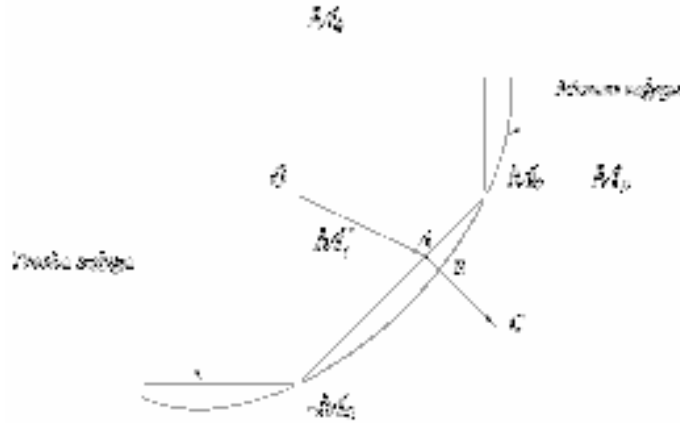
3.4 Skyriaus rezultatai ir išvados

Sprendžiant analizės uždavinį, gaunami plokštės įlinkiai (poslinkiai). Surašius konkrečius plokštės duomenis, gauname plokštės įlinkius metrais. Palyginus juos su norminiais plokštės įlinkiais, matome, kad optimizacijos uždaviniai turi būti sprendžiami, atsižvelgus ir į standumo sąlygas. Standumo sąlygomis ateityje laikysime įlinkius ribojančius apribojimus.

4. APKROVOS OPTIMIZAVIMO UŽDAVINIO SPRENDIMO ALGORITMAS, SKAITINIS EKSPERIMENTAS

4.1. Sprendimo algoritmas

Pagrindinis plokštės apkrovos optimizavimo uždavinys (2.53) – (2.60), užrašytas *Mizeso* takumo sąlygų atveju kartu su įlinkių apribojimu.



4.1 pav. Perėjimo nuo Treska prie Mizeso takumo sąlygos fragmentas

4.1 paveiksle taškas A nurodo apkrovos optimizavimo uždavinio optimalų sprendinį (*Treska* takumo sąlygos) pagal matematinį modelį (2.66) – (2.70). Šiame modelyje naudojamos liekamųjų momentų ir liekamųjų poslinkių influentinės matricos $\mathbf{G}$ ir $\mathbf{H}$ apskaičiuojamos pagal formules (2.52):

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}} \Phi^T = \left[\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \left(\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1} \right] \Phi^T, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}} \Phi^T = \left(\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \Phi^T. \quad (4.2)$$

Gavus optimalią apkrovą pagal uždavinį (2.66) – (2.70), formuojamos naujos influentinės matricos $\tilde{\mathbf{G}}$ ir $\tilde{\mathbf{H}}$ *Mizeso* takumo sąlygoms iki daugiklio λ :

$$\tilde{\mathbf{G}} = \left[\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \left(\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1} \right] [\nabla \phi], \quad (4.3)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \left[\left(\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \right] [\nabla \phi]. \quad (4.4)$$

Čia $[\nabla \phi]$ yra *Mizeso* takumo sąlygų taške A gradientas (2.8).

Tuomet apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis paskutiniame sprendimo etape užrašomas taip:

rasti

$$\max \mathbf{T}^T \mathbf{F}, \quad (4.5)$$

esant sąlygoms

$$\varphi_{kl} = M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{H}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\lambda}) \geq 0, \quad (4.6)$$

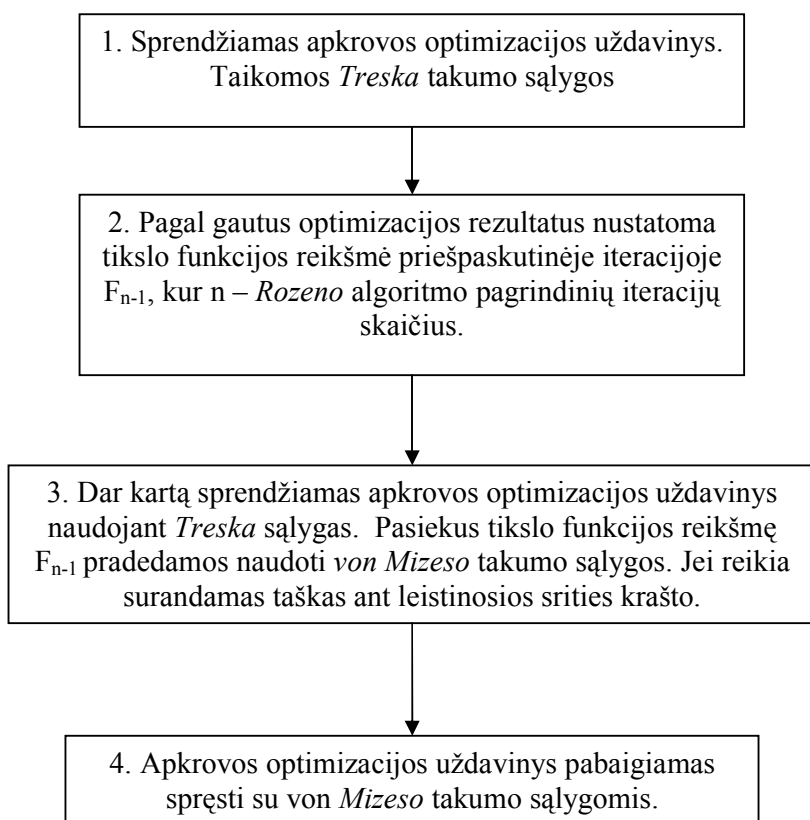
$$\mathbf{M}_e = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{F}, \quad (4.7)$$

$$\lambda_{kl} [M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{H}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\lambda})] = 0, \quad \lambda_{kl} \geq 0, \quad (4.8)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{kl})^T, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \boldsymbol{\beta} \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{H}} \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{u}_{\max}. \quad (4.10)$$

4.2 paveiksle parodytas apkrovos optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmas pereinant nuo *Treska* prie *Mizeso* takumo sąlygų.



4.2 pav. Apkrovos optimizavimo (*Treska-Mizeso*) principinė algoritmo schema

Matematinis modelis (4.5) – (4.10) vis dėlto yra taip pat sunkiai realizuojamas. Todėl naudojant *Mizeso* takumo sąlygas juose paliekama matrica $\mathbf{G}$. Tuomet išvengiama sunkaus ieškojimo *Rozeno* algoritmo pradinio taško.

Toliau sprendžiamas toks apkrovos optimizavimo uždavinys:

rasti

$$\max \mathbf{T}^T \mathbf{F}, \quad (4.11)$$

esant sąlygoms

$$\varphi_{kl} = M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \overline{\mathbf{G}} \boldsymbol{\Theta}_p)^T \boldsymbol{\Pi}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \overline{\mathbf{G}} \boldsymbol{\Theta}_p) \geq 0, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{M}_e = \alpha \mathbf{F}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \beta \mathbf{F} + \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Theta}_p \leq \mathbf{u}_{\max}. \quad (4.14)$$

Čia:

$$\boldsymbol{\Theta}_p = (\boldsymbol{\Theta}_{p,kl})^T, \quad \boldsymbol{\Theta}_p = [\nabla \varphi(\mathbf{M}_e + \mathbf{M}_r)]^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad (4.15)$$

$$\lambda_{kl} \varphi_{kl} = \lambda_{kl} \left[M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl})^T \boldsymbol{\Pi}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{M}_{r,kl}) \right] = 0. \quad (4.16)$$

Situacija tampa sunki: $\boldsymbol{\lambda}$ įeina į $\mathbf{M}_r = \overline{\mathbf{G}} \boldsymbol{\Theta}_p$, o $\boldsymbol{\lambda}$ ir $\boldsymbol{\Theta}_p$ kartu negali būti nežinomi.

Tada siūloma išeitis:

Uždavinį su *Mizeso* takumo sąlygomis pradėti spręsti su *Treska* takumo sąlygomis, gauti (2.66) – (2.70) optimalumo planą, ir tik tada pertvarkyti (4.11) – (4.16) taip:

rasti

$$\max \mathbf{T}^T \mathbf{F}, \quad (4.17)$$

esant sąlygoms

$$\varphi_{kl} = M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda})^T \boldsymbol{\Pi}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda}) \geq 0, \quad (4.18)$$

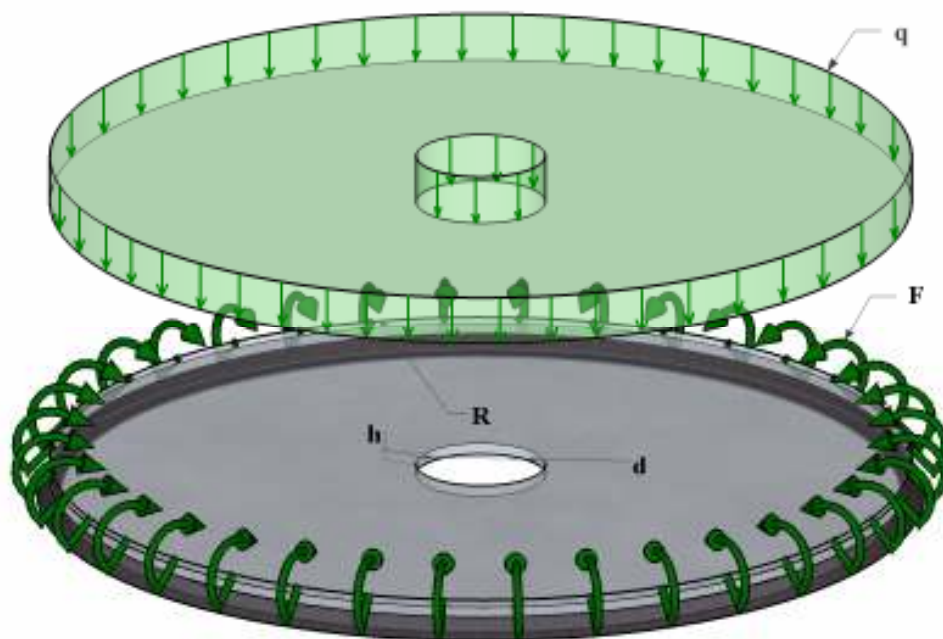
$$\mathbf{M}_e = \alpha \mathbf{F}, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \beta \mathbf{F} + \mathbf{H} \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{u}_{\max}. \quad (4.20)$$

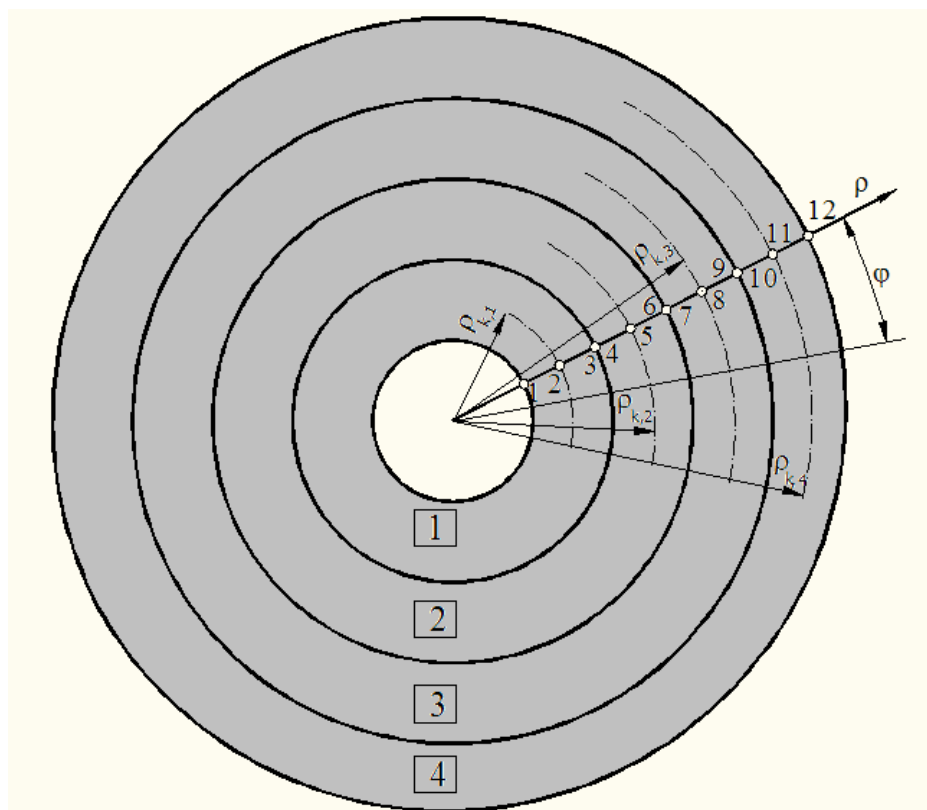
$$\lambda_{kl} \varphi_{kl} = \lambda_{kl} \left[M_{0,kl}^2 - (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda})^T \boldsymbol{\Pi}_{kl} (\mathbf{M}_{e,kl} + \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda}) \right] = 0. \quad (4.21)$$

4.2. Skaitinis eksperimentas

Nagrinėjama žiedinė su apvalia skylė viduryje paremta išoriniu kontūru lankstine nepaslankia atrama plokštė, kurios geometrija ir kraštinės sąlygos parodytos 4.3 paveiksle. Plokštės spindulys $R = 1,0\text{ m}$, aukštis $h = 0,025\text{ m}$ ir skylės diametras $d = 0,3\text{ m}$. Išorinis kontūras apkrautas išskirstytu pastoviu momentu $F = 5,0 \frac{\text{KNm}}{\text{m'}}$ (nuolatinė apkrova). Medžiaga – plienas, jo tamprumo modulis $E = 210 \cdot 10^9 \text{ MPa}$, Puasono koeficientas $\nu = 0,3$ ir takumo riba $\sigma_y = 235 \cdot 10^6 \text{ MPa}$. Plokštės ribinis momentas $M_0 = \frac{1}{4} \sigma_y t^2 = 36718,75 \text{ Nm'}$. Diskretinis modelis parodytas 4.4 paveiksle. Jį atitinka įrašų vektorius $\mathbf{M} = (M_{\rho,1}, M_{\theta,1}, M_{\rho,2}, M_{\theta,2}, \dots, M_{\rho,12}, M_{\theta,12})^T$.



4.3 pav. Apvalios plokštės geometrija ir kraštinės sąlygos



4.4 pav. Apvalios plokštės diskretinis modelis

Apvalios plokštės apkrovos optimizacija (Treska takumo sąlygos). Plokštės geometrija, medžiaga, kraštinės sąlygos bei diskretizacija aprašyti 4.2 poskyrio pradžioje. Apkrovos optimizacijos uždavinys sprendžiamas pagal (2.66) – (2.70) matematinį modelį. Naudojamos Treska takumo sąlygos parodytos 2.5 paveiksle. Tamprus plokštės atsakas nuo pastovios apkrovos $F = 5,0 \frac{KNm}{m'}$ parodytas 4.1 lentelėje.

4.1 lentelė. Plokštės įrąžos ir poslinkiai nuo pastovios apkrovos

Elementas, k	Mazgas, i	$M_{\rho,i}$ [Nm']	$M_{\theta,i}$ [Nm']	$u_{i,}$ [m]
1	1	-.236128D-09	.585465D+04	.751228D-02
	2	.311938D+04	.816412D+04	
	3	.418344D+04	.430762D+04	.629556D-02
2	4	.418344D+04	.575411D+04	.629556D-02
	5	.455494D+04	.580188D+04	
	6	.474872D+04	.531644D+04	.471731D-02
3	7	.474872D+04	.543632D+04	.471731D-02
	8	.485604D+04	.541770D+04	
	9	.492391D+04	.528072D+04	.263256D-02
4	10	.492391D+04	.530423D+04	.263256D-02
	11	.496859D+04	.528860D+04	
	12	.500000D+04	.523317D+04	.000000D+00

Uždavinio nežinomieji yra tolygiais išskirstytos apkrovos parametras F^* ($=q^*$) ir plastiniai daugikliai λ^* . Uždavinio sprendimui naudota *Rozeno* projektuojamųjų gradientų metodo pagrindu veikianti programa *MaxFopt1.03* (Atkočiūnas *et al.* 2008).

Išsprendus gautas apkrovos parametras $q^* = 131246 \text{ Pa}$ ir plastiniai daugikliai $\lambda^* = \{\lambda_1 = 0, 0, \dots, \lambda_8 = 0.021494, 0, 0, \dots, \lambda_{20} = 0.00083365, 0, 0, \dots, \lambda_{144} = 0\}^T$. Tamprios įrašos ir poslinkiai nuo pastovios apkrovos bei q^* parodyti 4.2 lentelėje:

4.2 lentelė. Plokštės įrašos ir poslinkiai nuo pastovios apkrovos ir q^*

Elementas, k	Mazgas, i	$M_{\rho,i}$ [Nm']	$M_{\theta,i}$ [Nm']	u_i , [m]
1	1	-.174259D-08	.343150D+05	.392823D-01
	2	.178273D+05	.480291D+05	
	3	.226964D+05	.243500D+05	.321256D-01
2	4	.226964D+05	.329649D+05	.321256D-01
	5	.227544D+05	.321718D+05	
	6	.210983D+05	.277184D+05	.231492D-01
3	7	.210983D+05	.284389D+05	.231492D-01
	8	.182842D+05	.264359D+05	
	9	.146017D+05	.233092D+05	.121773D-01
4	10	.146017D+05	.234524D+05	.121773D-01
	11	.101525D+05	.207115D+05	
	12	.500000D+04	.173420D+05	.000000D+00

Liekamųjų įrašų vektorius: $M = \{-0.89708\text{E-}08, -0.11674\text{E+}05, -0.53662\text{E+}04, -0.11308\text{E+}05, -0.49270\text{E+}04, 0.64746\text{E+}04, -0.49270\text{E+}04, 0.37557\text{E+}04, -0.28195\text{E+}04, 0.45486\text{E+}04, -0.15868\text{E+}04, 0.27172\text{E+}04, -0.15868\text{E+}04, 0.27552\text{E+}04, -0.90905\text{E+}03, 0.26377\text{E+}04, -0.48047\text{E+}03, 0.17726\text{E+}04, -0.48047\text{E+}03, 0.19211\text{E+}04, -0.19834\text{E+}03, 0.18224\text{E+}04, 0.32266\text{E-}10, 0.14724\text{E+}04\}^T$. Šis liekamųjų įrašų vektorius kartu su tamprėmis įrašomis bus panaudotas kaip leistinasis taškas sprendžiant analizės uždavinį padėsiantį nustatyti tikrąjį įtempių būvį, kai naudojamos *von Mizeso* takumo sąlygos.

Apvalios plokštės, parodytos 4.3 ir 4.4 pav., apkrovos optimizacijos rezultatai yra priede Nr.1.

Palyginimui yra įdėta pusiausvyros lygčių koeficientų matrica A (apkrovos optimizacijai) apvaliai plokštei su išpjova centre, kai plokštė yra padalinta į daugiau negu du BE segmentus (kaip buvo testiniame pavyzdyje padalinta į du BE segmentus (3.1 pav.)).

A(IEIL,MM) - STATIKOS LYGCIU KOEFICIENTU MATRICA

	1	2	3	4	5
6					

1	0.94248E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					

2	0.70224E+01	0.62832E+01	-0.17741E+02	0.00000E+00	0.44352E+01
0.00000E+00					
3	-0.25872E+01	-0.52360E+01	0.17741E+02	0.41888E+01	-0.15154E+02
0.10472E+01					
4	-0.15154E+02	-0.10472E+01	0.42873E+02	-0.41888E+01	-0.27720E+02
0.52360E+01					
5	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.22777E+01
0.00000E+00					
6	0.10718E+02	0.00000E+00	-0.42873E+02	0.00000E+00	0.38438E+02
-0.62832E+01					
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
11	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
12	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
13	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
14	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
15	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
16	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
17	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					

	7	8	9	10	11
12					

1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
5	0.22777E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
6	0.25872E+02	0.62832E+01	-0.42874E+02	0.00000E+00	0.10718E+02
0.00000E+00					
7	-0.15154E+02	-0.52360E+01	0.42874E+02	0.41888E+01	-0.27720E+02
0.10472E+01					
8	-0.27720E+02	-0.10472E+01	0.68006E+02	-0.41888E+01	-0.40286E+02
0.52360E+01					
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.36128E+01
0.00000E+00					
10	0.17002E+02	0.00000E+00	-0.68006E+02	0.00000E+00	0.57288E+02
-0.62832E+01					
11	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
12	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					

13	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
14	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
15	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
16	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
17	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
	13	14	15	16	17
18					

1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
5	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
6	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
9	0.36128E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
10	0.44721E+02	0.62832E+01	-0.68006E+02	0.00000E+00	0.17002E+02
0.00000E+00					
11	-0.27720E+02	-0.52360E+01	0.68006E+02	0.41888E+01	-0.40286E+02
0.10472E+01					
12	-0.40286E+02	-0.10472E+01	0.93139E+02	-0.41888E+01	-0.52853E+02
0.52360E+01					
13	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.49480E+01
0.00000E+00					
14	0.23285E+02	0.00000E+00	-0.93139E+02	0.00000E+00	0.76137E+02
-0.62832E+01					
15	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
16	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
17	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
	19	20	21	22	23
24					

1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					

4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
5	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
6	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
7	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
8	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
11	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
12	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
13	0.49480E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00					
14	0.63571E+02	0.62832E+01	-0.93139E+02	0.00000E+00	0.23285E+02
0.00000E+00					
15	-0.40286E+02	-0.52360E+01	0.93139E+02	0.41888E+01	-0.52853E+02
0.10472E+01					
16	-0.52853E+02	-0.10472E+01	0.11827E+03	-0.41888E+01	-0.65419E+02
0.52360E+01					
17	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.62832E+01
0.00000E+00					

Apvalios plokštės analizės uždavinys (Mizeso takumo sąlygos). Plokštės geometrija, medžiaga, kraštinės sąlygos bei diskretizacija aprašyti 4.2. poskyrio pradžioje. Analizės uždavinys sprendžiamas pagal (2.22) – (2.24) matematinį modelį. Naudojamos *von Mizeso* takumo sąlygos, jos parodytos 2.6 paveiksle. Plokštė apkrauta tolygiai paskirstytu išoriniu kontūru momentu $F = 5,0 \frac{KNm}{m'}$ ir tolygiai paskirstyta apkrova $q = 131246 Pa$. Ieškoma liekamųjų plokštės momentų M_r , liekamųjų įlinkių u_r ir plastinių deformacijų θ_p .

$$\text{Išsprendus uždavinį gauta tikslo funkcijos reikšmė } \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s M_{r,k}^T D_k M_{r,k} = 35,91.$$

Ją atitinka liekamieji momentai:

	1	2	3	4
1	0.00000E+00	-0.61518E+04	-0.28674E+04	-0.61889E+04
5		6	7	8
1	-0.27545E+04	0.27148E+04	-0.27545E+04	0.25549E+04
9		10	11	12
1	-0.15000E+04	0.27032E+04	-0.84899E+03	0.10413E+04
13		14	15	16
1	-0.84899E+03	0.14657E+04	-0.48767E+03	0.14033E+04

	17	18	19	20
1	-0.25915E+03	0.94248E+03	-0.25915E+03	0.10360E+04
	21	22	23	24
1	-0.10699E+03	0.98296E+03	0.20940E-12	0.79436E+03

Apvalios plokštės, parodytos 4.3 ir 4.4 pav., analizės uždavinio rezultatai yra priede

Nr.2.

Matematinio modelio (4.5) – (4.10) skaitinė realizacija. Dabar formuojamos matricos $\tilde{G}$ ir $\tilde{H}$ ir sprendžiamas uždavinys (4.5) – (4.10). Gauta tikslo funkcija 140747,12. Perėjimo nuo Treska prie von Miseso takumo sąlygų uždavinio skaitiniai rezultatai yra parodyti priede Nr.3.

REZULTATAI IR IŠVADOS

Magistro baigiamajame darbe sprendžiamos šiuolaikinės tampriai plastinių lenkiamųjų plokščių apkrovos optimizavimo problemos, esant stiprumo ir standumo apribojimams. Sudaryti nauji apkrovos optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai, pasiūlytas sprendimo algoritmas. Pateiktas skaitinis pavyzdys.

Pagrindinės išvados:

1. Atlikta šiuolaikinių tyrimų apžvalga parodė, kad tampriai plastinių plokščių apkrovos optimizacijos uždavinių sprendimo metodika nėra gerai išplėtotą.
2. Apkrovos optimizavimo uždavinys, esant tik stiprumo sąlygoms (ribinė pusiausvyra), gali netenkinti realios plokštės eksploatacijos sąlygų.
3. Apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis turi sujungti ne tik stiprumo, bet ir standumo sąlygas-apribojimus.
4. Pagrindiniais nežinomaisiais optimizavimo uždavinyje – apkrovos parametrai ir plastiškumo daugikliai.
5. *Treska* plastiškumo sąlygų atveju liekamųjų įrašų ir poslinkių influentinės matricos tiesiogiai nepriklauso plastiškumo daugiklių (poslinkių influentinės matricos talkina realizuojant standumo sąlygas-apribojimus).
6. *Mizeso* plastiškumo sąlygų atveju minėtos matricos formuojamos, pasitelkus plastiškumo sąlygų gradientus. Pastarieji savyje sujungia ir plastines deformacijas (kartu ir plastiškumo daugiklius). Pagrindinis apkrovos optimizavimo uždavinys *von Mizeso* sąlygų atveju tampa praktiškai sunkiai realizuojamas.
7. Vienas iš sprendimo kelių – sklandus perėjimas nuo *Treska* prie *von Mizeso* takumo sąlygų. Tam būtina sukurti specialų algoritmą: vienas iš galimų variantų pasiūlytas baigiamajame magistro darbe.
8. Sukurtoji metodika gali būti naudojama ir projektiniuose (ne tik apkrovos optimizavimo) uždaviniuose.

LITERATŪRA

- Aggarwal, H.R.; Ablow, C.M. 1971. *Plastic bending of an annular plate by uniform impulse*. Int J Non-Linear Mech 6, p. 69–80.
- Albul, A. B.; Banichuk, N. W.; Barsuk, A.A. 1983. *Optimal design of elastic columns under thermal loadings*. Mech. Tverdogo Tela, 15(3), 127-133.
- Atkočiūnas J. 1995. *Distorsija statybinėje mechanikoje*. Statyba, Nr. 1(1), p. 3-24 (rusų k.).
- Atkočiūnas J. 1996. *Kuno-Takerio sąlygos prisitaikomojo uždavinioose*. Statyba, Nr. 1(5), Vilnius: Technika, p. 14-28 (rusų k.).
- Atkočiūnas, J. 1999. *Mathematical models of optimization problems at shakedown*. Mechanics Research Communications, Vol. 26, No. 3, p. 319–326.
- Atkočiūnas J.; Jarmolajeva E.; Merkevičiūtė D. 2004. *Optimal shakedown loading for circular plates*. Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 27, No 3. / Berlin: Springer-Verlag, p. 178-188.
- Atkočiūnas, J.; Merkevičiūtė, D.; Venskys, A. 2008. *Optimal shakedown design of bar systems: Strength, stiffness and stability constraints*. Computers & structures : an international journal. Oxford : Pergamon. ISSN 0045-7949. Vol. 86, iss. 17-18, p. 1757-1768.
- Atkočiūnas, J.; Rimkus, L.; Skaržauskas, V.; Jarmolajeva, E. 2007. *Optimal shakedown design of plates*. Mechanika, ISSN 1392-1207, Kaunas: Technologija, No 5(67), p. 14-23.
- Bazant, Z. 1999. *Inelastic Analysis of Structures in Civil Engineering*. New York: John Wiley & Sons.
- Bazaraa, MS.; Sherali, HD.; Shetty, CM. 2004. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. New York, Brijbasi Art Press Ltd., John Wiley & Sons, Inc., 652.
- Bremec, B.; Kosel, F. 2006. *Thickness optimization of circular annular plate at buckling*. Faculty of Mechanical Engineering, University of Ljubljana, Aškerčeva 6, SI-1000 Ljubljana, Slovenia.
- Bryson, A.; Ho Yu-Chi. 1975. *Applied Optimal Control*. Wiley, New York.
- Chakrabarty, J. 2000. *Applied Plasticity*. Springer, Berlin.
- Cherkaev, A. V. 2000. *Variational Methods for Structural optimization*. Springer, New York.
- Cohn M. Z.; Maier G. 1978. *Engineering plasticity by mathematical programming*. Pergamon Press, Elmsford. 648 p.
- Cox, H.L. 1965. *The design of structures of least weight*. Pergamon Press.

- Čyras A. 1983. *Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures*. John Wiley & Sons Ltd., New York.
- Čyras, A. 1989. *Statybinė mechanika*. Vilnius: Mokslas. 444 p.
- Čyras, A.; Borkowski, A.; Karkauskas, R. 2004. *Theory and methods of optimization of rigid-plastic systems*. Vilnius: Technika. 354 p.
- Dunne, F.; Petrinic, N. 2005. *Introduction to Computational Plasticity*. Oxford University Press.
- Gallagher, R. H. 1975. *Finite element analysis*. Fundamentals. Department of Structural Engineering, Cornell University. Prentice-hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975 (vertimas į rusų kalbą: Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы. Москва: Мир. 428 с.
- Giambanco, F.; Palizzolo, L.; Polizzotto, C. 1994. *Optimal Shakedown Design of Circular Plates*, Journal of engineering mechanics.
- Hocking, L. M. 2001. *Optimal control. An Introduction to the Theory with Applications*. Clarendon Press, Oxford.
- Hull, D. G. 2003. *Optimal Control Theory for Applications*. Springer, Berlin.
- Hupfer, P. 1970. *Optimierung der Baukonstruktionen*. Berlin: VEB.
- Jarmolajeva, E.; Atkočiūnas, J. 2001. *Prisitaikančios plokštės apkrovos optimizacijos netiesiniai uždaviniai ir jų sprendimas*, IX Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos asociacijos konferencija, Vilnius, 2001 10 18.
- Kalanta, S. 2007. *Taikomosios optimizacijos pagrindai*. Vadovėlis. Vilnius: Technika. 480 p.
- Kalishky, S. 1989. *Plasticity. Theory and Engineering Applications*. Elsevier, Amsterdam.
- Kalishky, S.; Logo, J. 2002. *Layout and shape optimization of elastoplastic disks with bounds on deformation and displacement*, Mech. Struct. Mach. 30: 177–192.
- Kalishky, S.; Logo, J. 2003. *Layout optimization of rigid-plastic structures under high intensity short-time dynamic pressure*, Mech. Based Design Struct. Mach. 31(2): 131–150.
- Kalishky, S.; Logo, J. 2006. *Optimal design of elasto-plastic structures subjected to normal and extreme loads*, Computers and Structures 84: 1770–1779.
- Karkauskas, R.; Krutinis, A.; Atkočiūnas, J.; Kalanta, S.; Nagevičius, J. 1995. *Statybinės mechanikos uždavinių sprendimas kompiuteriais* (mok. priemonė aukšt. mok.). Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų l-kla. 264 p.
- Koiter W. T. 1960. *General theorems for elastic-plastic solids*. In: Sneddon I. N., Hill R. (eds.). *Progress in solid mechanics*. North Holland, Amsterdam. p. 165–221.

- Kojić, M.; Bathe, K. J. 2005. *Inelastic Analysis of Solids and Structures*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag.
- Kruzelecki, J.; Smaś, P. 2004. *Optimal structures for buckling forces and buckling displacements*. Institute of Applied Mechanics, Cracow University of Technology, Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków, Poland.
- Kruzelecki, J.; Smaś, P. 2004. *Optimal design of annular plates against buckling under loadings controlled by displacements*. Eng. Optimization, 36(6).
- Lellep, J.; Polikarpus, J. 2008. *Optimization of elastic-plastic circular plates under axisymmetric loading*. International Conference 20th EURO Mini Conference "Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies" (EurOPT-2008) May 20–23.
- Lellep, J.; Mürk, A. 2008. *Optimization of inelastic annular plates with cracks*. Struct, Multidisc. Optim. 35(1):1–10.
- Leśniak, Z. 1970. *Methoden der Optimierung von Konstruktionen*. Köln: Ernst und Sohn.
- Mazalov, V.N.; Nemirovsky, J.V. 1976. *Dynamical bending of rigid-plastic annular plates*, Int J Non-Linear Mech 11, p. 25–39.
- Milan, J.; Bazant, Z. 2001. *Inelastic analysis of structures*. Chichester, New York: Wiley.
- Mróz, Z.; Weichert, D.; Dorosz S.(editors). 1995. *Inelastic Behavior of Structures under Variable Loads*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ozakca, M.; Taysi, N.; Colcu, F. 2003. *Buckling analysis and shape optimization of elastic variable thickness circular and annular plates-II*. Shape optimization, University of Gaziantep, Department of Civil Engineering, 27310, Gaziantep, Turkey.
- Pham Duc Chinh. 1997. *Evaluation of shakedown loads for plates*. Institute of Mechanics, 224 Doi can, Hanoi, VIET NAM, vol. 39, no12, pp. 1415-1422 (12 ref.).
- Prager, W. 1974. *Introduction to structural optimization*. Intern. Centre Mech, Sci., Udine.
- Save, M. A.; Massonnet, C. E.; Saxce, G. 1997. *Plastic limit analysis of plates, shells and disks*. Amsterdam: Elsevier. 580 p.
- Stein, E.; Zhang, G.; Mahnken, R. 1993. *Shakedown analysis for perfectly plastic and kinematic hardening materials*. In STEIN, E. (ed.). Progress in Computational Analysis of Inelastic Structures. New York: Springer-Verlag.
- Upadastra, M.; Peddieson, J.; Buchanan, G. R. 2006. *Elastic compensation simulation of elastic/plastic axisymmetric circular plate bending using a deformation model*, Int. J. Non-Linear Mech. 41: 377–387.

- Wang, A.J.; Hopkins, H.G. 1954. On the plastic deformation of built-in circular plates under impulsive load, in *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 3, pp. 22–37.
- Wang, A. J. 1955. *The permanent deflection of a plastic plate under blast loading*. J. Appl. Mech., 22. p. 375-376.
- Žilinskas, A. 2000. *Matematinis programavimas*. Kaunas: VDU leidykla. 228 p.
- Życzkowski, M. 1981. *Combined loadings in the theory of plasticity*. Warsaw: Polish scientific publishers (PWM).
- Życzkowski, M. 1992. *Recent advances in optimal structural design of shells*, Eur. J. Mech. A/Solids 11: 5–24.
- Аткочюнас, Ю. Ю. 1994. *Расчет упругопластических систем при повторных нагрузениях*. Вильнюс: Изд-во науки и энциклопедий. 148 с.
- Каланта С. 1995. *Равновесные конечные элементы в расчетах упругих конструкций*. Statyba, No 1(1). Vilnius: Technika, p. 25-47.