VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
STATYBOS FAKULTETAS
STATYBINĖS MECHANIKOS KATEDRA

Aivaras Jokšas

OPTIMALI VIRANDELIO SANTVARA: PRISITAIKYMAS IR RIBOJAMI POSLINKIAI

(**Optimal shakedown design of Vierendeel truss under stiffness constraints**)

Baigiamasis magistro darbas

Statinių konstrukcijų studijų programa
Statinių projektavimo ir optimizacijos kompiuterinių technologijų specializacija
Technologijos mokslų sritis (T000),
Statybos inžinerijos kryptis (02T)

Vilnius, 2013

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
STATYBOS FAKULTETAS
STATYBINĖS MECHANIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
_____
(Parašas)

prof. habil. dr. Juozas Atkočiūnas
(Vardas, pavardė)
_____
(Data)

Aivaras Jokšas

OPTIMALI VIRANDELIO SANTVARA: PRISITAIKYMAS IR RIBOJAMI POSLINKIAI

(Optimal shakedown design of Vierendeel truss under stiffness constraints)

Baigiamasis magistro darbas

Statinių konstrukcijų studijų programa
Statinių projektavimo ir optimizacijos kompiuterinių technologijų specializacija
Technologijos mokslų sritis (T000), Statybos inžinerijos kryptis (02T)

Vadovas prof. habil. dr. Juozas Atkočiūnas _____ _____
(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė) (Parašas) (Data)

Konsultantas _____ _____ _____
(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė) (Parašas) (Data)

Konsultantas _____ _____ _____
(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė) (Parašas) (Data)

Lietuvių kalbos konsultantas _____ _____ _____
(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė) (Parašas) (Data)

Vilnius, 2013

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Statybos fakultetas

Statybinės mechanikos katedra

ISBN ISSN

Egz. sk. 1

Data 2013-05-29

Optimali Virandelio santvara: prisitaikymas ir ribojami poslinkiai. Baigiamasis darbas statybos magistro laipsniui. Technologijos mokslų sritis (T000), statybos inžinerijos kryptis (02T); Specializacija: Statinių projektavimo ir optimizacijos kompiuterinės technologijos. Vilniaus Gedimino technikos universitetas. Vilnius, 2013. 116 p**.**

Autorius: Aivaras Jokšas Vadovas: prof. habil. dr. Juozas Atkočiūnas

Kalba

[x] lietuvių

[ ] užsienio

Anotacija

Darbo tikslas – prisitaikančių tampriųjų-plastinių Virandelio santvarų (lenkimas-gniuždymas), veikiamų kartotinės-kintamosios apkrovos, įtempių ir deformacijų būvio analizės ir optimizavimo metodikos tobulinimas.

Darbo aktualumas siejamas su optimizavimo uždavinių matematinių modelių sąlygų-apribojimų tikslinimu. Haro ir Karmano principo taikymas prisitaikančių konstrukcijų analizei yra problemiškas – šis principas ignoruoja galimą skerspjūvio nusikrovimą. Todėl darbe dar pasitelkiama Koiterio nelygybė konstrukcijos standumui įvertinti. Šie analizės būvio tyrimai panaudojami, sudarant ir realizuojant santvaros patikslintą optimizavimo uždavinį.

Tyrimai atlikti pasitelkus idealiai tampriai-plastinių strypinių konstrukcijų techniškosios skaičiavimo teorijos prielaidas (maži poslinkiai ir deformacijos), matricinį skaičiavimą, baigtinius elementus. Plačiai panaudoti ekstreminiai energiniai mechanikos principai, matematinio programavimo teorija ir metodai, Matlab sistema. Pateikti išsamūs skaitinių eksperimentų rezultatai.

Prasminiai žodžiai: ekstreminiai energiniai mechanikos principai, prisitaikomumas, tampriai-plastinė Virandelio santvara, optimalus projektavimas, matematinis programavimas, *MATLAB*.

Vilnius Gediminas Technical University
Faculty of Civil Engineering
Department of Structural Mechanics

ISBN ISSN
Copies No. 1
Date 2013-05-29

Optimal shakedown design of Vierendeel truss under stiffness constraints. Final work for reception of a level of the master. Technological sciences domain (T000), civil engineering (02T); Specialization: computer technologys of building design and optimization. Vilnius Gediminas Technical University. Vilnius, 2011. 116 p.

Author: Aivaras Jokšas Academic supervisor: prof. habil. dr. Juozas Atkočiūnas

Thesis language

[x] Lithuanian
[ ] Foreign (English)

Annotation

The aim of this work is to show the analysis and improvement of optimization method of exposed multiple – variable load, stress and strain limit and of elastic – plastic Vierendeel trusse's at shakedown (bending – compression).

Work relevance is associated with optimization tasks mathematical models conditions – restriction's adjustment. Using of Haar and Karman principle in shakedown structures analysis is problematic – this principle ignores possibly cross – section unloading. For that reason there is inequality of Koiter measure structure rigidity deployed in this work. This research of analysis limit is used for creating and realizing adjusted optimization task of truss.

Researches were carried out using perfectly elastic – plastic framed construction's assumptions of technical structures theory (small displacements and strains), matrix calculation, finite elements. Extremum energy mechanic principles, mathematical programming theory and methods, Matlab system were widely used. Detailed results of numerical experiments are represented.

Keywords: extremum energy principles of mechanics, unloading, elastic – plastic Vierendeel truss, optimal design, mathematical programming, *MATLAB.*

TURINYS

PAVEISKLŲ SĄRAŠAS 8
LENTELIŲ SĄRAŠAS 10
ĮVADAS 11
1. LITERATŪROS APIE KONSTRUKCIJŲ PRISITAIKOMUMĄ ANALITINĖ APŽVALGA 14
1.1. Konstrukcijų prisitaikomumo samprata 14
1.2. Klasikinės prisitaikomumo teoremos 18
1.3. Apie šiuolaikinės prisitaikomumo teorijos vystymosi kryptis 19
1.4. Apie optimizacijos uždavinius prisitaikomumo sąlygomis 20
1.5. Dualieji prisitaikančių konstrukcijų analizės uždaviniai 22
1.6. Analitinės literatūros apžvalgos baigiamoji išvada 24
2. PAGRINDINĖS STRYPINIŲ KONSTRUKCIJŲ PRIKLAUSOMYBĖS IR UŽDAVINIŲ MATEMATINIAI MODELIAI 25
2.1. Diskretinės sistemos įrąžos ir deformacijos 25
2.2. Išsami Virandelio santvaros takumo sąlygų analizė 26
2.3. Įžanginiai matematiniai modeliai strypinių konstrukcijų optimizavimui 30
2.3.1. Takumo sąlygos, kai apkrova kartotinė kintamoji 30
2.3.2. Bendrasis prisitaikančios konstrukcijos optimizavimo uždavinio modelis 31
2.4. Antrojo skyriaus išvados ir apibendrinimai 32
3. VIENKARTĖ APKROVA: MINIMALAUS TŪRIO SANTVARA, ESANT KOMPLEKSINIAMS APRIBOJIMAMS 33
3.1. Virandelio santvaros diskretinis modelis 33
3.2. Ribinės pusiausvyros uždavinys: matematiniai modeliai ir pagrindinės priklausomybės 34
3.2.1. Matematiniai modeliai 34
3.2.2. Pagrindinės priklausomybės 35
3.2.3. Santvaros optimizavimo (3.1)–(3.8) uždavinio sprendimas 40
3.2.4. Santvaros optimizavimo (3.1)–(3.8) uždavinio skaičiavimų rezultatų analizė 45
3.3. Santvaros įtempių ir deformacijų analizės uždavinys 50
3.3.1. Analizės uždavinio matematinis modelis 50
3.3.2. Analizės uždavinio sprendimas 51
3.3.3. Analizės uždavinio sprendinio rezultatų apibendrinimas 57
3.4. Minimalaus tūrio santvaros optimizacijos uždavinys, esant standumo apribojimams 64
3.4.1. Uždavinio matematinis modelis 64
3.4.2. Minimalaus santvaros tūrio uždavinio sprendimas 65
3.4.3. Minimalaus tūrio santvaros optimizacijos uždavinio sprendimo rezultatai 75
3.5. 3 skyriaus išvados ir apibendrinimai 79

4. PRISITAIKANČIOS SANTVAROS RIBINĖS ĮRĄŽOS PASISKIRSTYMO OPTIMIZAVIMO UŽDAVINYS 80
4.1. Bendros pastabos 80
4.2. Santvaros optimizavimo uždavinio matematinis modelis 80
4.3. Skaitinis eksperimentas 82
4.4. (4.2)–(4.7) uždavinio sprendimas ir rezultatų apibendrinimas 84
4.5. Profilių parinkimas pagal gautus duomenis 92
4.6. Konstrukcinių apribojimų įtaka santvaros optimaliam projektavimui 93
4.7. Papildomo optimizavimo uždavinio detalesnis konstruktyvinis apribojimas 96
4.8. 4 skyriaus išvados ir apibendrinimai 96
BAIGIAMOSIOS DARBO IŠVADOS IR PASTABOS 97
LITERATŪRA 98
A PRIEDAS 103
Mokslinis pranešimas Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijoje 103
B PRIEDAS 112
(4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo MATLAB paketu programos tekstas 112

PAVEISKLŲ SĄRAŠAS

1 pav. Virandelio santvara 12

1.1 pav. Dviejų tarpangių sija su trimis skaičiuojamaisiais pjūviais (Atkočiūnas 2012) 14

1.2 pav. Tamprių ir liekamųjų momentų pasiskirstymas nuo jėgos F_1 (a); tamprių ir liekamųjų momentų prieaugių pasiskirstymas nuo jėgos F_2 (b) (Atkočiūnas 2012) 16

1.3 pav. Optimalaus prisitaikančių konstrukcijų projektavimo algoritmo schema 21

2.1 pav. Deformacijų ir įtempių pasiskirstymas (Jirásek, Bažant 2002) 28

2.2 pav. Bendrasis plastinis lankstas (Jirásek, Bažant 2002) 28

2.3 pav. Tampri ir plastinė skerspjūvio ribos stačiakampiui skerspjūviui 30

3.1 pav. Skaičiuojamoji Virandelio santvaros schema 33

3.2 pav. Virandelio santvaros diskretinis modelis 33

3.3 pav. Santvarinio elemento stačiakampis skerpjūvis 37

3.3 pav. Santvaros lenkimo momentų *M* diagrama plastinio suirimo metu 46

3.4 pav. Santvaros ašinių jėgų *N* reikšmės plastinio suirimo metu 46

3.5 pav. Optimalios santvaros dalinis plastinio irimo mechanizmas 47

3.6 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiuose elemento pjūvyje 21 48

3.7 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiuose elemento pjūvyje 22 48

3.8 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiuose elemento pjūvyje 23 48

3.9 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiuose elemento pjūvyje 24 49

3.10 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiuose elemento pjūvyje 25 49

3.11 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiuose elemento pjūvyje 26 49

3.6 pav. Santvaros lenkimo momentų *M* diagrama prieš plastiškąjį suirimą, (kNm) 63

3.7 pav. Santvaros ašinių jėgų *N* reikšmės prieš plastiškąjį suirimą, (kN) 63

3.8 pav. Santvaros (3.2 pav.) apkrovos ir vertikaliojo poslinkio u_{15} priklausomumas 63

3.9 pav. Santvaros elemento stačiakampis skerspjūvis 76

3.10 pav. Santvaros poslinkis u_{15} kryptimi 77

3.11 pav. Santvaros lenkimo momentų *M* diagrama (3.4.3. poskyris) 78

3.12 pav. Santvaros ašinių jėgų *N* diagrama (3.4.3. poskyris) 78

4.1 pav. Santvaros ribinių momentų optimalaus pasiskirtsymo uždavinio sprendimo algoritmo schema 81

4.2 pav. Virandelio santvara, veikiama KKA $F_1(t)$, $F_2(t)$ ir pastovios apkrovos *F* 82

4.3 pav. Santvaros diskretinis modelis 82

4.4 pav. Apkrovų kitimo sritis, kN 83

4.5 pav. Suminių lenkimo momentų diagrama nuo pirmos apkrovimo kombinacijos ($F_1 =$ [0 0 70 0 0 15 0 0 0 0 0 0 0 0 0 80 0 0 50 0 0 0 0 0 30 0 0 0]^T) 89

4.6 pav. Suminių ašinių jėgų diagrama nuo pirmos apkrovimo kombinacijos, kN 89

4.7 pav. Ribinių lenkimo momentų skaičiavimas iteracijų metu 90
4.8 pav. Plastinių deformacijų atsiradimo pjūviai 91
4.9 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiuose elemento pjūvyje 12 92
4.10 pav. Virandelio santvaros mazgas (dėžinio skerspjūvio) 93
4.11 pav. T mazgo ašinės galios $N_{i,Rd}$ skaičiavimas, kuris pateiktas normose 7.11 lentelėje 94
4.12 pav. T mazgo lenkiamosios galios plokštumoje $M_{ip,i,Rd}$ ir lenkiamosios galios iš plokštumos $M_{op,i,Rd}$ skaičiavimas, kuris pateiktas normose 7.14 lentelėje 95

LENTELIŲ SĄRAŠAS

3.1 lentelė. Santvaros (3.2 pav.) pusiausvyros lygtys 35

3.2 lentelė. Takumo sąlygų išraiškos (santvara pavaizduota 3.1 paveiksle) 38

3.3 lentelė. Santvaros (3.1 pav. ir 3.2 pav.) ribinių momentų ir tikslo funkcijos reikšmės iteracijų metu 45

3.4 lentelė. Įtempto ir deformuoto būvio dydžių dinamika (analizės (3.10)–(3.17) uždavinys), santvara pavaizduota 3.1 ir 3.2 paveiksle 58

3.4 lentelė. Santvaros (3.1 pav.) optimizavimo, ribojant poslinkius, skaičiavimo rezultatai, matematinis (3.41)–(3.47) modelis 75

3.5 lentelė. Santvaros (3.1 pav.) įrąžos išsprendus (3.41)–(3.47) ir (3.10)–(3.12) uždavinius 76

3.6 lentelė. Virandelio santvaros (3.10 pav.) poslinkis u_{15} (mm) 78

4.1 lentelė. Tamprių įrąžų reikšmės nuo apkrovų kombinacijų, liekamosios ir suminės įrąžos (4.1 pav.) 88

4.2 lentelė. Tamprių, liekamųjų ir suminių poslinkių vektoriai 90

ĮVADAS

Baigiamajame magistrantūros studijų darbe nagrinėjamas idealiai tampriai plastinės Virandelio santvaros, veikiamos kartotinės – kintamos apkrovos, optimizavimo metodikos tobulinimas. Bendroji konstrukcijos optimizavimo schema yra tokia: konstrukcijos diskretinio modelio sudarymas, lygčių ir priklausomybių sistemos, nusakančių tikrąjį įtempių ir deformacijų būvį, formavimas, apribojimų (stiprumo, konstruktyvinių) įjungimas į optimizavimo procesą ir pagaliau paties optimalumo kriterijaus parinkimas. Visuma šių išvardintų dalykų ir sudaro konstrukcijos optimizavimo uždavinio matematinį modelį. Modelio sudarymo etapai ir yra nagrinėjami Virandelio santvarai: iš esmės sprendžiamas tamprių plastinių prisitaikančių strypų konstrukcijų optimizavimas kintamos kartotinės apkrovos atveju, ribojant jos poslinkius (įlinkius). Prisitaikančių konstrukcijų deformacijų būvis (poslinkiai, įlinkiai) priklauso nuo apkrovimo istorijos (Capurso 1974). Haro ir Karmano principo taikymas prisitaikančių konstrukcijų analizei yra problemiškas – šis principas ignoruoja galimą diskretinės konstrukcijos skerspjūvio nusikrovimą. Todėl darbe dar taikoma ir Koiterio nelygybė konstrukcijos bendrajam standumui įvertinti (nors pagrindiniuose uždaviniuose bus naudojamos atitinkamos infliuentinės matricos, kurių išvedimas pagrįstas Haro principu). Šie analizės būvio tyrimai panaudojami, sudarant ir realizuojant Virandelio santvaros patikslintą optimizavimo uždavinį. Baigiamojo darbo aktualumas siejamas su optimizavimo uždavinių matematinių modelių sąlygų – apribojimų tikslinimu, matematinio programavimo uždavinių sprendimu *MATLAB* aplinkoje.

Matematika ir mechanika visada rėmė viena kitą idėjomis. Šis tarpusavio bendravimo procesas dėl išplitusios kompiuterizacijos tik stiprėja. Konstrukcijų mechanikos metodai ir algoritmai įgauna svarbias testavimo priemones – skaitinius matematikos metodus, matematinio programavimo aparatą, susietą su šiuolaikinėmis kompiuterinėmis technologijomis. Ypač didelės perspektyvos optimizacijos problemoms spręsti atsiveria pasitelkus ir ekstreminius energinius mechanikos principus (optimizavimo uždavinių modelių sudarymas ir jų skaitinė realizacija). Ši pastaroji („energinė“) kryptis taip pat rado atgarsį šiame baigiamajame magistrantūros studijų darbe.

Vis dėlto šiame darbe apsiribojama tolydinės optimizacijos uždaviniais: diskretinei konstrukcijų optimizacijai plastinėje darbo stadijoje reikėtų skirti atskirą mokslinę studiją. Optimizavimo uždavinių matematiniuose modeliuose apkrovimo istorijos įvertinimas yra gana sudėtingas ir neparankus. Todėl prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematiniuose modeliuose įlinkių ribojimą realizuosime pasitelkdami visame optimizavimo procese nesikeičiančią liekamųjų poslinkių influentinę matricą (Ferris ir Tin–Loi 1999; Atkočiūnas ir Merkevičiūtė 2006).

Tradiciškai įvade glaustai aptarsime prisitaikančių konstrukcijų optimalaus projektavimo uždavinio matematinio modelio struktūrą. Tikslo funkcija išreiškia ribinės įrąžos optimalų pasiskirstymą arba generuoja aiškią fizinę minimalaus tūrio ar minimalaus svorio (masės) prasmę. Uždavinio apribojimus sudaro stiprumo (plastiškumo), standumo (ribojami įlinkiai) sąlygos. Stiprumo sąlygos užtikrina optimizuojamos konstrukcijos prisitaikomumo būvį. Šiame magistro darbe nagrinėjami ir santvaros stabilumo klausimai (EC3). Optimizavimo uždavinio matematiniame modelyje gali būti naudojami ir konstruktyviniai apribojimai (skerspjūvio plotui, elementų ribinės įrąžos dydžiams ir t.t.). Taip suformuluotas uždavinys yra neiškilojo matematinio projektavimo uždavinys – jo neiškilumą sąlygoja matematinio programavimo griežtumo sąlyga. Todėl magistro darbe galime kalbėti tik apie lokalinį optimalų sprendinį. Išsprendus pagrindinį prisitaikančios konstrukcijos optimalaus projektavimo uždavinį (t.y. radus bent lokalų sprendinį, mes jį kartais vadinsime tiesiog „racionaliu sprendiniu“), perskaičiuojamos tamprių ir liekamųjų įrąžų, tamprių ir liekamųjų poslinkių influentinės matricos. Vėl kartojamas pagrindinio optimalaus projektavimo uždavinio sprendimas tol, kol optimizuojamų parametrų reikšmės pokytis bus kiek norima mažas. Toks algoritmas iki šiol ir buvo dažniausiai taikomas prisitaikančių konstrukcijų optimaliam projektavimui (Atkočiūnas 2011). Tokia metodika šiame darbe yra plėtojama Virandelio santvarai. Santvara pavaizduota 1 paveiksle.



1 pav. Virandelio santvara

Mokslinės literatūros analizė rodo, kad prisitaikančių konstrukcijų analizei ir optimizacijai pastaraisiais metais skiriamas nemažas dėmesys užsienio mokslo centruose (Čyras 1983; Stein, Zhang *et.al* 1993; Mróz, Weichert *et.al* 1995; Staat, Heitzer 2002; Weichert, Maier 2002).

Glaustai apibendrinsime darbo strukturą. Pirmame skyriuje pateikta naujausios literatūros apie strypinių konstrukcijų prisitaikomumą analytinė apžvalga. Itin trumpai aprašomos klasikinės prisitaikomumo teoremos (1.2 poskyris). Pirmasis skyrius baigiamas samprotavimais apie optimizavimo uždavinius prisitaikomumo sąlygomis, matematinio programavimo dualumo teorija, apibendrinama išvadomis.

Antrame skyriuje nagrinėjama pagrindinių strypinių konstrukcijų priklausomybė ir uždaviniai. Išraiška orientuojama į Virandelio santvarą.

Trečiame skyriuje nagrinėjama vienkartė apkrova. Sprendžiami Virandelio santvaros ribinės pusiausvyros, vėliau – santvaros įtempių ir deformacijų analizės – uždaviniai. Esminis dėmesys skirtas minimalaus tūrio santvarai.

Svarbiausias darbe yra ketvirtas skyrius. Jame nagrinėjama prisitaikančios santvaros ribinės įrąžos pasiskirstymo optimizavimo uždavinys. Čia sudaryti uždavinio matematiniai modeliai. Pateikti skaitiniai eksperimentai, nagrinėjama konstrukcijų apribojimų įtaka santvaros optimaliam projektavimui.

Magistro darbo pabaigoje pateiktos išvados ir literatūros sąrašas.

Visas darbas baigiamas PRIEDAIS (Jaunųjų mokslininkų konferencijos medžiaga; *MATLAB* tekstinis failas).

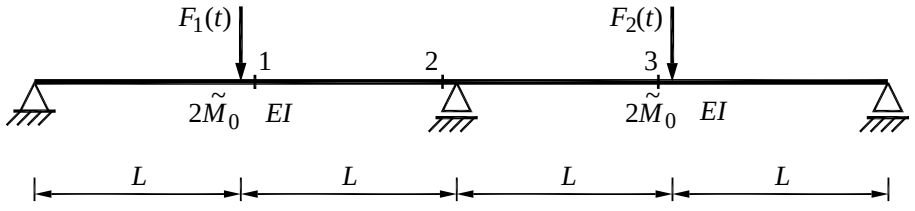
1. LITERATŪROS APIE KONSTRUKCIJŲ PRISITAIKOMUMĄ ANALITINĖ APŽVALGA

1.1. Konstrukcijų prisitaikomumo samprata

Kompiuterinės technologijos atveria naujus tyrimo kelius statybinei mechanikai, apskritai deformuojamo kūno mechanikai. Atsiveria galimybės realiau įvertinti konstrukcijos medžiagų įvairovę, apkrovų veikimo pobūdžius, sudėtingesnes šalutines (kraštines) sąlygas.

Šiame magisto darbe atsižvelgiama į plastines medžiagos savybes ir kartotinį-kintamą apkrovų (KKA) pobūdį. KKA – tai sistema jėgų, veikiančių nepriklausomai viena nuo kitos (tai tinka ir paskiroms jėgų grupėms). Dažniausiai KKA nusakoma ne konkrečia apkrovimo istorija, o tik ją sudarančių jėgų apatinėmis ir viršutinėmis kitimo ribomis (jas žymėsime $\boldsymbol{F}_{\inf}$, $\boldsymbol{F}_{\sup}$). Jeigu veikiant $\boldsymbol{F}_{\inf}$, $\boldsymbol{F}_{\sup}$ atsiranda plastinių deformacijų, konstrukcijos elgsena gali būti trejopa: gali būti suirimas dėl išplitusių didelių plastinių deformacijų (progresyvinis arba momentinis suirimas kaip ir vienkartės apkrovos atveju); suirimas dėl kintamo plastiškumo (lankstomos vielos principas); pagaliau konstrukcija gali prisitaikyti prie KKA veikimo. Prisitaikomumą sąlygoja liekamųjų įrąžų atsiradimas, kurios su pseudotampriomis įrąžomis suformuoja būvį, nepažeidžiantį stiprumo (takumo) sąlygų.

Prisitaikomumo reiškinį paaiškinsime dviangės sijos pavyzdžiu, pavaizduotu 1.1 paveiksle (Atkočiūnas 2012). Nagrinėjama pastovaus skerspjūvio dviejų tarpangių vientisa sija, kurios lenkiamasis standis *EI*, ribinis lenkimo momentas $M_0 = 2\tilde{M}_0$ yra žinomi (daugiklis 2 imamas taikyti skaičiavimo patogumui). Sija veikiama kartotinės apkrovos, t. y. dvi sutelktosios jėgos $F_1(t)$ ir $F_2(t)$, užtikrinančios sijos prisitaikomumo būvį, atitinkamai kinta nepriklausomai viena nuo kitos taip: $0 \le F_1(t) \le 5{,}0\tilde{M}_0 L^{-1}$, $0 \le F_2(t) \le 5{,}053\tilde{M}_0 L^{-1}$.



1.1 pav. Dviejų tarpangių sija su trimis skaičiuojamaisiais pjūviais (Atkočiūnas 2012)

Lenkiamos sijos takumo sąlygos, esant mazginei apkrovai, visuose trijuose pjūviuose užrašomos taip:

$$\left| M_{i,j} \right| \le M_{0i}, \quad M_{0i} = 2\tilde{M}_0, \quad i = 1, 2, [\zeta = 3]; \quad j = 1, 2, [p = 3]. \tag{1.1}$$

Čia $i = 1, 2, ..., \zeta, i \in I$ – konstrukcijos pjūvių skaičius; $j = 1, 2, ..., p, j \in J$ – kintamų kartotinių apkrovų kombinacijų (apkrovų kitimo hodografo viršūnių) skaičius. Panagrinėsime ir prisitaikomumo būvį, ir apkrovimo istorijos įtaką deformuotam būviui. Tam atliekamas etapinis skaičiavimas.

● ***I etapas.*** Pradžioje veikia tik jėga F_1, kol pasiekia viršutinę savo reikšmę $5{,}0\,\tilde{M}_0 L^{-1}$. Tampraus skaičiavimo momentai

$$\boldsymbol{M}_e = \boldsymbol{\alpha F} = \boldsymbol{\alpha}\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = 5{,}0\tilde{M}_0 L^{-1}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0{,}4062 & -0{,}0937 \\ 0{,}1875 & 0{,}1875 \\ 0{,}0937 & -0{,}4062 \end{bmatrix},$$

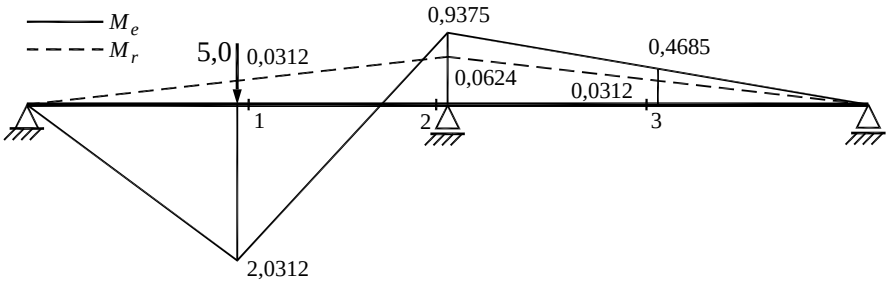
nuo jėgos $F_1 = 5{,}0\tilde{M}_0 L^{-1}$ pavaizduoti 2 paveikslo a dalyje ištisine linija, o liekamieji $\boldsymbol{M}_r$ – punktyrine (čia $\boldsymbol{\alpha}$ – tamprios sijos momentų infliuentinė matrica). Šie momentai surašyti į vektorius

$$\boldsymbol{M}_e = \begin{bmatrix} 2{,}0312 \\ 0{,}9375 \\ 0{,}4685 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_r = \begin{bmatrix} -0{,}0312 \\ 0{,}0624 \\ 0{,}0312 \end{bmatrix}.$$

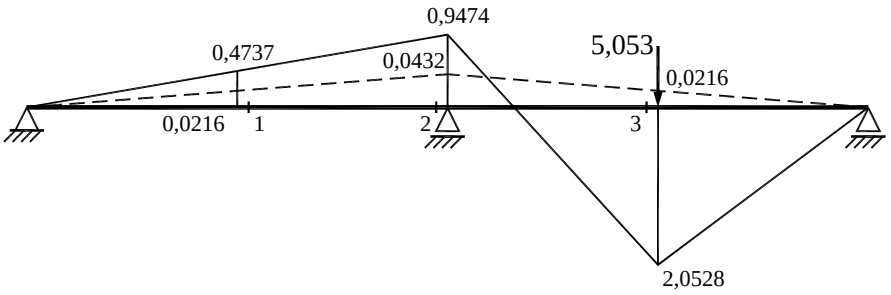
Plastinių deformacijų atsirado tik *1* pjūvyje, nes $M_{e1} = 2{,}0312$ viršija ribinio momento reikšmę $M_0 = 2{,}0$. Geometrinėse lygtyse $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{D}\boldsymbol{M}_r + \boldsymbol{\Theta}_p$ nežinomieji yra u_{r1}, u_{r2} ir Θ_{p1} (kituose pjūviuose plastinių deformacijų nėra, t. y. $\Theta_{p2} = \Theta_{p3} = 0$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}0312 \\ 0{,}0624 \\ 0{,}0312 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_{p1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0312 \\ 0{,}05208 \\ 0{,}0312 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_{p1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a



b



1.2 pav. Tamprių ir liekamųjų momentų pasiskirstymas nuo jėgos F_1 (a);
tamprių ir liekamųjų momentų prieaugių pasiskirstymas nuo jėgos F_2 (b) (Atkočiūnas 2012)

Išsprendus geometrinių lygčių sistemą, gaunama:

$$u_{r1} = 0,0677\tilde{M}_0 L^2 / EI,\ u_{r2} = -0,01562\tilde{M}_0 L^2 / EI,\ \Theta_{p1} = 0,1667\tilde{M}_0 L / EI.$$

Liekamųjų poslinkių u_{r1}, u_{r2} reikšmes čia reikia dauginti iš $\tilde{M}_0 L / EI$, liekamųjų momentų M_{r1}, M_{r2}, M_{r3} – iš M_0.

- ***II etapas.*** Toliau nagrinėjama prisitaikomumo būvį lemianti apkrovimo istorija. Kadangi sijoje jau yra atsiradusių plastinių deformacijų $\Theta_{p1} = 0,1667\tilde{M}_0 L / EI$, tai pašalinus jėgą F_1, šios plastinės deformacijos niekur nedingsta. Niekur nedingsta ir jų sukelti liekamieji momentai $\boldsymbol{M}_r = \left[-0,0312\ \ 0,0624\ \ 0,0312\right]^T$. Šie momentai yra sau pusiausviri, t. y. tenkina pusiausvyros lygtis $\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_r = \boldsymbol{0}$, kai nėra apkrovos, t. y. kai $\boldsymbol{F} = \left[0\ \ 0\right]^T$ (čia $\boldsymbol{A}$ – sijos pusiausvyros lygčių koeficientų matrica). Taigi, tolydžiai „nuėmus“ jėgą F_1, kitu etapu kvazistatiškai pridedama jėga F_2. Ši jėga tolydžiai pasiekia savo viršutinę ribą $F_2 = 5,053\tilde{M}_0 L^{-1}$. Tamprūs momentai $\boldsymbol{M}_e = \left[-0,4737\ \ 0,9474\ \ -2,0528\right]^T$, atsiradę nuo jėgos F_2, parodyti 2 paveikslo b dalyje ištisine linija. Jėga F_2 lemia naujų plastinių deformacijų, tiksliau, jų prieaugio $\Delta\Theta_{p3}$, susidarymą trečiame pjūvyje. Deformacijos $\Delta\Theta_{p3}$ savo ruožtu lemia liekamųjų momentų prieaugį $\Delta\boldsymbol{M}_r = \left[\Delta M_{r1}\ \ \Delta M_{r2}\ \ \Delta M_{r2}\right]^T$ (šie momentų prieaugiai $\Delta\boldsymbol{M}_r$ parodyti 2 paveikslo b dalyje punktyrine linija). Vėl išsprendus geometrinių lygčių sistemą

$$\boldsymbol{A}^T \Delta \boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{D} \Delta \boldsymbol{M}_r + \Delta \boldsymbol{\Theta}_p ,$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0216 \\ 0,0432 \\ 0,0216 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{p3} \end{bmatrix},$$

randami liekamųjų poslinkių $\Delta \boldsymbol{u}_r$ ir plastinės deformacijos $\Delta \Theta_{p3}$ prieaugiai:

$$u_{r1} = -0,01079 \tilde{M}_0 L^2 / EI, \;\; u_{r2} = -0,04679 \tilde{M}_0 L^2 / EI, \;\; \Delta \Theta_{p3} = -0,1152 \tilde{M}_0 L / EI.$$

Suminiai liekamieji momentai, poslinkiai ir deformacijos apkrovimo ciklo τ pabaigoje gaunami tokie:

$$\boldsymbol{M}_r(\tau) = \left[-0,0528 \;\; 0,1056 \;\; 0,0528\right]^T, \;\; \boldsymbol{u}_r(\tau) = \left[0,0569 \;\; 0,0311\right]^T,$$

$$\boldsymbol{\Theta}_p(\tau) = \left[0,1667 \;\; 0 \;\; -0,1152\right]^T.$$

Pjūvis *1* patyrė nusikrovimą, tačiau negalima pamiršti, kad šiame pjūvyje jau yra plastinių deformacijų $\Theta_{p1} = 0,1667 \tilde{M}_0 L / EI$.

Galima nesunkiai įsitikinti, kad nuo kitų apkrovimo istorijų (pvz., kai pradžioje veikianti jėga F_1 keičiasi, nepasiekdama viršutinės savo kitimo ribos) prisitaikomumo būvis pasiekiamas, esant dar ir kitokiam plastinių deformacijų pasiskirstymui. Liekamieji momentai $\boldsymbol{M}_r = \left[-0,0528 \;\; 0,1056 \;\; 0,0528\right]^T$ užtikrina tai, jog naujų plastinių deformacijų nebeatsiras, kokios bebūtų jėgų $F_1, \; F_2$ kitimo trajektorijos (uždavinio sąlygose užduotose ribose). O tai ir yra konstrukcijos prisitaikomumo reiškinys: *apkrovimo pradžioje pasiekus takumo ribą atsiradusios liekamosios įrąžos kartu su kintamąja (tampriąja) įrąžų dalimi niekur neišeina už leistinų ribų, konstrukcija prisitaiko prie duotosios apkrovos*.

Konstrukcijos, veikiamos kartotinai kintamos apkrovos, gali netekti laikomosios galios dėl progresyvinio, t. y. prieaugiminio suirimo, mainiojo plastiškumo. Tačiau bet kokia suirimo požiūriu saugi apkrovimo istorija gali sukelti pradinėse apkrovimo stadijose liekamuosius įtempius, leidžiančius toliau konstrukcijai dirbti kaip visiškai tampriai. Pastarasis reiškinys, kaip minėta anksčiau, yra prisitaikomumo teorijos tyrimų objektas.

Išsamiau panagrinėjus tamprios plastinės konstrukcijos darbą, kai apkrova kartotinė kintama, gaunama, kad poslinkių u_{r1} ir u_{r2} reikšmės – maksimali ir minimali – gaunamos per prisitaikomumo procesą, t. y. liekamieji poslinkiai gali kisti nemonotoniškai. Sprendžiant optimizavimo uždavinius dažniausiai bus nustatomi tokie $\boldsymbol{u}_{r,\inf}$, $\boldsymbol{u}_{r,\sup}$, kad $\boldsymbol{u}_{r,\inf} \le \boldsymbol{u}_{r,\inf}(\tau)$,

$\boldsymbol{u}_{r,\sup}(\tau) \le \boldsymbol{u}_{r,\sup}$ bus „apgaubiantys“ prisitaikomumo būvio liekamuosius poslinkius (τ – prisitaikomumo būvio pasiekimo laikas). Tai bus svarbu, sudarant optimizavimo uždavinių matematinius modelius.

1.2. Klasikinės prisitaikomumo teoremos

Prisitaikomumo teorijos pradžia (apie 1926 metus) sietina su M. Gruningo (M. Grüning), H. Bleicho (H. Bleich), E. Melano (E. Melan) vardais. Plačiausiai žinomos dvi, taip vadinamos klasikinės E. Melano ir kiek vėliau W. Koiterio (W. Koiter) prisitaikomumo teoremos. Glaustai jas aptarsime.

Statinė Melano prisitaikomumo teorema yra tokia:

konstrukcija, veikiama KKA, kintančios duotose ribose, prisitaikys prie jos veikimo, jeigu egzistuoja sau pusiausvirų liekamųjų įtempių laukas ρ_{ij}, *kuris, sudėtas su tampriais (kintamaisiais) įtempiais* σ_{ij}^{e}, *kiekviename konstrukcijos taške tenkins šalutines ir takumo sąlygas* $f(\sigma_{ij}^{e} + \rho_{ij}) < 0.$

Čia $f(\sigma_{ij}) = 0$ yra takumo paviršiaus lygtis. Būtent pasinaudoję šia teorema, mes ir įsitikinome, kad dviejų angų sija prisitaiko.

Antroji, arba vadinamoji Koiterio kinematinė (neprisitaikomumo) teorema, yra tokia:

prisitaikomumas neįmanomas, jeigu egzistuoja kinematiškai leistinas plastinių deformacijų greičių ciklas $\dot{\varepsilon}_{ij,p}(\tau)$, *charakterizuojamas tuo, kad negrįžtamų deformacijų prieaugiai* $\Delta\varepsilon_{ij,p} = \frac{1}{2}(\Delta u_{ij,p} + \Delta u_{ji,p})$ *yra taip pat darnūs ir tenkinama sąlyga:*

$$\int_0^T \left\{ \int X_i \dot{u}_{ip} dV + \int_{S_f} q\dot{u}_{ip} dS \right\} d\tau > \int_0^T d\tau \int \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij,p} \quad \textit{laike } T.$$

Čia $\Delta\varepsilon_{ij,p} = \int_0^T \dot{\varepsilon}_{ij,p} d\tau$, $\Delta u_{ip} = \int_0^T \Delta\dot{u}_{i,p} d\tau$; X_i, q_i – tūrinės ir paviršinės jėgos. Šių teoremų įrodymus galima rasti šaltiniuose (Koiter 1960; König 1987; Melan 1936).

Panaudojant klasikines Melano ir Koiterio teoremas, elementariais metodais galima analizuoti tik nesudėtingų sistemų prisitaikymą. Todėl statybinės mechanikos disciplinos kryptis – diskretiniai konstrukcijų modeliai, baigtiniai elementai, matematinis programavimas – yra pagrįsta ir perspektyvi. Čia tik dera paminėti, kad prisitaikomumo teorija pastaruoju metu sėkmingai taikoma ne tik kvazistatinei, bet ir dinaminei apkrovai bei konstrukcijoms iš sustiprėjančios medžiagos (magistro darbe nagrinėjama tik kintama –

kartotonė kvazistatinė apkrova, idealiai tampriai plastinė medžiaga). Tačiau norint nors nežymiai patobulinti metodiką, pravartu prisiminti posakį: „nežinodamas klasikos, nebūsi modernus“.

1.3. Apie šiuolaikinės prisitaikomumo teorijos vystymosi kryptis

Šiame poskyryje bus tęsiama mokslinės literatūros apie konstrukcijų skaičiavimą, optimizavimą prisitaikomumo sąlygomis glausta analitinė apžvalga. Daugelyje inžinerinių situacijų statybinės konstrukcijos patiria tokį apkrovų poveikį, kai tiksli apkrovimo istorija yra nežinoma ir egzistuoja akivaizdūs išorinių poveikių cikliškumo požymiai. Štai kodėl pastaruoju metu prisitaikomumo teorija tampa apibendrinamąja priemone, analizuojant statybinių konstrukcijų įtempių ir deformacijų būvį, ypač atsižvelgiant į galimą plastinių deformacijų pasireiškimą.

Prisitaikomumo būvio analizės teorija ir metodai yra klasikinės mechanikos dalis apie konstrukcijas, veikiamas kartotinai kintamos apkrovos, ir gali būti laikoma reikšmingu ribinės analizės apibendrinimu. Šiuo požiūriu klasikinė teorija ir pagrindinė jos raida sistemingai pateikti, pavyzdžiui, Kionigo ir Majerio (König, Maier 1981), Polizoto (Polizzotto 1982), Kionigo (König 1987), Steino ir kitų (Stein *et al*. 1993), Mrozo ir Veicherto (Mróz, Weichert 1995), Veicherto ir Majerio (Weichert, Maier 2002), Jiraseko ir Bažanto (Jirasek, Bažant 2002), Stato ir Heizerio (Staat, Heitzer 2002), apžvalgose, knygose ir straipsnių rinkiniuose.

Metodai, kurie leidžia numatyti, konstrukcija prisitaikys ar neprisitaikys (priešingu atveju reikia įvertinti stiprumo atsargą), turi didelę praktinę svarbą. Tačiau siekiant kontroliuoti plastinę konstrukcijų elgseną būtina žinoti plastinių deformacijų bei liekamųjų poslinkių dydžius, susikaupusius iki konstrukcijos prisitaikomumo (klasikinės Melano ir Koiterio teoremos tokios informacijos nesuteikia). Iki 1972 metų praktiškai momento τ nebuvo jokių metodų tamprioms plastinėms deformacijoms įvertinti iki prisitaikomumo būvio. Vėliau tokie metodai pateikti mokslininkų darbuose (Ponter 1972, 1975; Capurso *et al*. 1978; Dorosz 1978). Juose net įrodyta, kad iki pasiekiant prisitaikomumo būvį praktinėse situacijose, poslinkiai yra tamprumo ribose, net jei stiprumo atsarga neprisitaikymo požiūriu yra maža.

Apibendrinant išvardintąją literatūrą, minėtini G. Majerio darbai (König, Maier 1981; Weichert, Maier 2002). Būtent juose suformuotas taikomasis požiūris: diskretinis konstrukcijos modelis, klasikinių teoremų pertvarkymas praktiniams uždaviniams. Čia diskretizacija derinama su atitinkamu baigtinio elemento plastinių savybių įvertinimu. Majerio darbuose korektiškai ir aiškiai sudaryti prisitaikančių konstrukcijų analizės uždavinių

matematiniai modeliai, diskutuojama, kaip tiksliau suskaičiuoti prisitaikomumo buvio poslinkius (įlinkius).

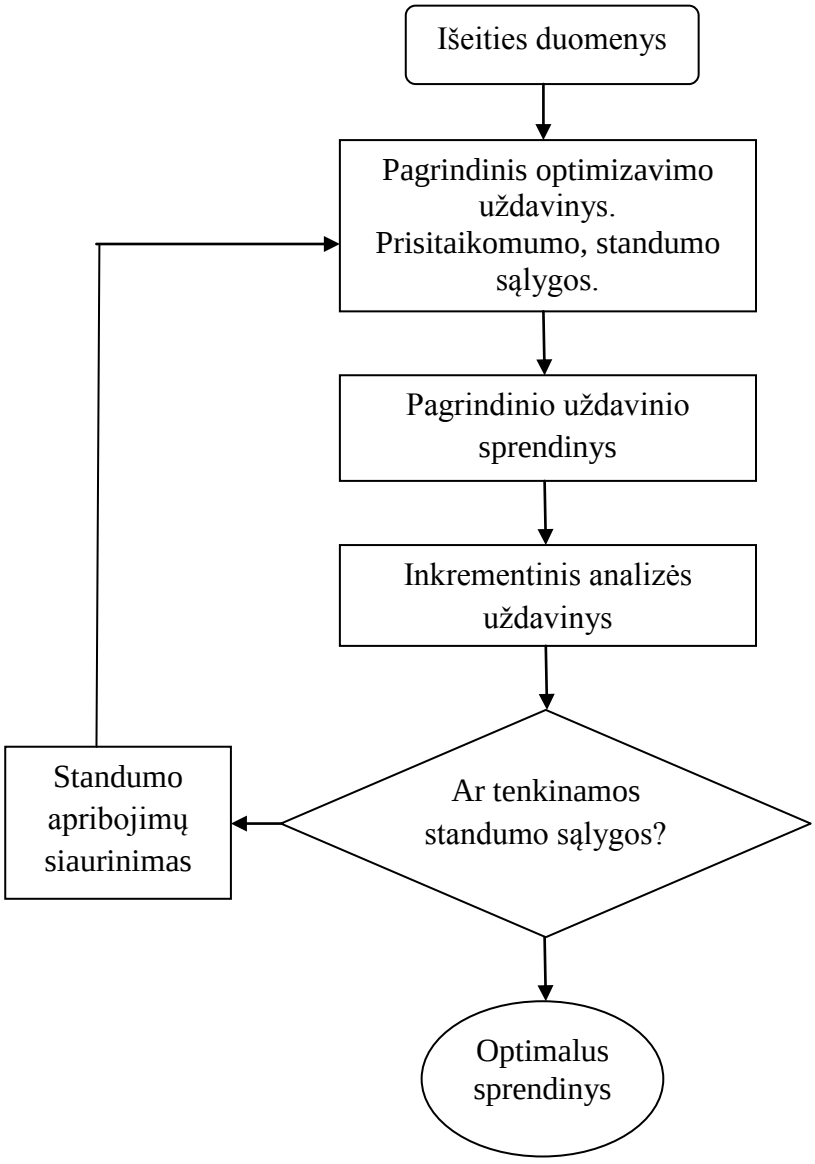
Tamprių plastinių kūnų prisitaikomumo teorija ir toliau vystosi, apimdama vis daugiau praktinių inžinerinių sričių. Kompozitinių medžiagų įvertinimas ir konstrukcijų projektavimas prisitaikomumo teorijos ribose pateikiamas Veicherto darbuose (Weichert *et al*. 1999 a; 1999 b). Geometriškai netiesinių konstrukcijų (esant didelėms deformacijoms) prisitaikomumo teoremos apibendrinimą pateikė Majeris (Maier 1973). Pagrindinė šio darbo idėja: nustatyti mažai deformuotos konstrukcijos geometriją kaip naują būvį, ir remiantis tuo ištirti prisitaikomumo būvį, esant įvestoms mažoms deformacijoms. Būdingas šių metodų pritaikymas yra plonų plokštelių ir kevalų konstrukcijoms. Tačiau šiame baigiamajame darbe nagrinėjami tik maži poslinkiai.

1.4. Apie optimizacijos uždavinius prisitaikomumo sąlygomis

Pirmosios studijos apie struktūrų optimalų projektavimą prisitaikomumo sąlygomis, minimizuojant rėminių konstrukcijų svorį pagal klasikinius optimalumo kriterijus, buvo atliktas Heimano (Heyman 1958). Heimano iteracinė metodika vėliau buvo pritaikyta kitų autorių (Čyras 1983; Cohn, Parimi 1973; König 1975; Borkowski, Atkočiūnas 1975; Save, Prager 1985; Nguyen, Morelle 1990). Bandymas apjungti optimizacijos uždavinyje (minimalaus svorio nustatymo) prisitaikomumą su riboto tamprumo ribojimais ir išspręsti šio uždavinio bendriausius atvejus atliktas Polizoto (Polizzotto 1984). Polizzotto prieaugiminio priartėjimo esmė yra ta, kad kiekvienos iteracijos metu projekto kintamieji lieka pastovūs ir pakoreguojami kiekvieną kartą prieš kitą iteraciją. Pasiūlytąjį modelį, puikiai tinkantį mažiems pavyzdžiams, sudėtingesnėms konstrukcijoms, patobulino Tin – Lojus (Tin – Loi 2000), taikydamas matematinį programavimą kartu su pramoninio modeliavimo sistema didelio masto optimizacijos uždavinio tiesioginiam sprendimui. Čia optimizacijos uždavinys suformuluotas, remiantis klasikine apatinės ribos prisitaikomumo teorema, papildyta liekamųjų poslinkių apribojimais. Jau minėjome, kad toks poslinkių ribojimas nėra tikslus.

Optimalaus projekto paieškos (dažniausiai minimalaus svorio arba tūrio) problemos tinkamas formulavimas labiausiai priklauso nuo konkretaus optimalaus kriterijaus pasirinkimo, o tai priklauso nuo pasirinkto konstrukcijos ribinio būvio. Įvairias metodikas pasiūlė nemažai mokslininkų: pasirenkant tampraus būvio optimizacijos uždavinį Cinkuinis ir kiti (Cinquini *et al.* 1980); jei pasirenkamas prisitaikymo kriterijus – formuluojamas prisitaikomumo optimalus projektas (Cohn, Parimi 1973; König 1975; Giambanco *et al* 1994 a, 1994 b, 1998 b; Giambanco, Palizzolo 1995); pagaliau, jei taikomas suirimo ribinis būvis, sudaromas standartinis plastinis optimizacijos uždavinys (Rozvany 1976, 1989; Save,

Prager 1985). Kadangi bet kurioje iš trijų aukščiau minėtų formuluočių pasirenkamas tik vienas apribojimo kriterijus, tuo užtikrinamas konstrukcijos optimalus projektas, atitinkantis būtent šį kriterijų. Deja, tokiu būdu ignoruojamos visos kitos galimos ribinės būklės. Taigi, taip suprojektuota konstrukcija gali turėti pakankamą stiprumo atsargą staigaus suirimo atžvilgiu, tačiau negali pademonstruoti tinkamos elgsenos kitose inžinerinėse situacijose, pavyzdžiui, eksploatacijos metu. Pastaruoju metu keletas tyrėjų, pvz., Giambancas ir Palizolas (Giambanco 2000; Palizzolo 2000) pasiūlė vienu metu įvertinti visus tris kriterijus – tai vadinama daugiakriterių optimizacija.



1.3 pav. Optimalaus prisitaikančių konstrukcijų projektavimo algoritmo schema

Tiek matematikos, tiek mechanikos požiūriu *dualumas*, kuris jungia Melano ir Koiterio apatinės ir viršutinės ribų teoremas, yra labai patraukli prisitaikomumo teorijos savybė. Ši savybė leidžia taikyti vieną iš matematinių optimizacijos teorijų, būtent

matematinio programavimo teoriją. Todėl mokslinėje literatūroje apie prisitaikomumą kreipinys į dualumą aptinkamas labai dažnai. Majeris (Maier 1973) pirmasis parodė, kad taikant matematinio programavimo metodą, gaunamas tikslus statinio ir kinematinio priėjimo dualumas. Dualumo studijos analizės prisitaikomume vėliau buvo atliktos De Sakso (De Saxe 1986), Morelio (Morelle 1989), Kamenjaržo ir Veicherto (Kamenjarzh, Weichert 1992) ir kitų. Pastarieji autoriai, panaudodami iškilos analizės priėjimą, iš statinės Melano teoremos nustatė kinematinį atsargos koeficientą, kuris dažniausiai žymimas *s*. Dualumas tuokart buvo apribotas plonasienių konstrukcijų iškilo takumo paviršiaus atvejais. Tačiau nors apatinės ir viršutinės prisitaikomumo teoremų dualūs ryšiai plačiai taikomi optimizacijoje, diskretinių konstrukcijų dualumas prisitaikomumo analizėje vis dar retas reiškinys. Štai kodėl šiame baigiamajame magistro darbe ir kreipiamas dėmesys į matematinio programavimo dualumo teoriją (statinę ir kinematinę analizės uždavinių formuluotę).

1.5. Dualieji prisitaikančių konstrukcijų analizės uždaviniai

Klasikiniai kvazistatinio apkrovimo prisitaikomumo problemų sprendimo metodai iš pradžių buvo paremti tiesiniu arba netiesiniu tolydiniu matematiniu programavimu (Maier 1969; Maier *et al.* 1972; Corradi, Zavelani 1974; Čyras 1983; Karadeniz, Ponter 1984), vėliau buvo išplėsti įvairiems baigtinių elementų tipams (Belytschko 1972; Nguyen, Morelle 1981; Alwis, Grundy 1985; Morelle 1986; Ponter *et al.*1990). Kadangi praktiniams inžineriniams konstrukcijų skaičiavimams labiau tinka diskretiniai matematiniai modeliai, dauguma realių konstrukcijų skaičiuojama baigtinių elementų metodu. Taigi uždavinys suvedamas į lygčių sprendimą: lygtys yra algebrinės, o ne diferencialinės. Todėl daug šiuolaikinių programinių paketų priedų, skirtų konstrukcijų optimizacijai, plačiai naudoja nuolat augančių kompiuterinių technologijų galingumą, derinant konstrukcijų diskretizaciją su tiesioginio sprendimo metodais. Pavyzdžiui, netiesinio programavimo metodo realizacija komerciniame baigtinių elementų programų pakete, sprendžiant prisitaikomumo problemas, aprašoma Ponterio ir Engelhardto (Ponter *et al.* 2000; Ponter ir Engelhardt 2000) darbuose; prisitaikymo apkrovos apatinės ribos skaičiavimas, taikant baigtinių elementų programinį paketą nagrinėjamas Muscato ir kt. darbuose (Muscat *et al.*2003).

Matematinio programavimo teorija nuo pat pirmųjų jos taikymų prisitaikomumo tyrimams yra ne tik efektyvi priemonė skaitiniams prisitaikomumo uždaviniams spręsti, bet ir priemonė pačių matematiniams modeliams sudaryti (Maieris 1969, 1970; Corradi, Zavelani 1974; Atkočiūnas 1999, 2011). Tarp sunkumų praktiniam inžineriniam matematinio programavimo taikymui prisitaikomume reikėtų paminėti prisitaikančios konstrukcijos lokalinių liekamųjų poslinkių ir plastinių deformacijų įvertinimą (Atkočiūnas *et al.* 1981).

Šios problemos sprendimas optimizuojant prisitaikančias strypines sistemas analizuojamos Ferio ir Tin-Lojaus (Ferris and Tin-Loi 1999), Kališkio ir Logo (Kaliszky, Logo 1997, 2002) darbuose. Pažymėtina matematiniame modelyje taikomo takumo kriterijaus svarba. Ankstesniuose prisitaikomumo tyrimuose buvo plėtojamas tiesinis programavimas, taikant Treska kriterijų arba linearizuotą takumo kriterijų. Taikant Mizeso kriterijų, prisitaikomumo uždavinys tampa netiesinio programavimo problema, kurios sprendimas esant sudėtingai konstrukcijai ar apkrovimui praktiniams inžineriniams tikslams vis dar yra iššūkis. Netiesinio programavimo metodo realizacija komerciniame baigtinių elementų programų pakete aprašoma Ponterio ir Engelharto (Ponter *et al.* 2000; Ponter and Engelhardt 2000) darbuose.

Prisitaikančių konstrukcijų statiškai leistinų liekamųjų įrąžų $\mathbf{S}_r$ analizės (1.2)–(1.4) uždavinys yra sudaromas pagal papildomos deformavimo energijos minimumo principą (Čyras, Atkočiūnas 1984).

Tamprios – plastinės sistemos, veikiamos ciklinės apkrovos, liekamųjų įrąžų skaičiavimo uždavinys kintamųjų *x* erdvėje matematinio programavimo teorijos terminais yra užrašomas taip:

rasti $$\min \ \tilde{F}(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

kai $$h_i(\mathbf{x})=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{1.3}$$

$$g_i(\mathbf{x}) \geq 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \zeta. \tag{1.4}$$

Funkcija $F(\mathbf{x})$ išreiškia papildomą deformacijos energiją, (1.3) lygybės – pusiausvyros lygtis, o (1.4) nelygybės yra takumo sąlygos. Analizės uždavinio (1.2)–(1.4) matematiniame modelyje eliminavus (1.3) lygybes, gaunamas toks uždavinys:

rasti $$\min \ F(\mathbf{x}), \tag{1.5}$$

kai $$\varphi_i(\mathbf{x}) \geq 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \zeta. \tag{1.6}$$

Lygybių eliminacija čia gali būti atlikta taikant Žordano pertvarkymus (kintamieji ir toliau žymimi **x**). Priminsime, kad ζ yra skaičiuojamųjų pjūvių skaičius.

Iš matematinio programavimo teorijos yra žinoma, kad kiekvienam ekstreminiam uždaviniui galima sudaryti dualų uždavinį (Bazaraa, Shetty 1979). Tuo patvirtinamas ir plačiai žinomas mechanikos teiginys, pagal kurį kiekvieną ekstreminį kietojo kūno mechanikos principą, formuluotą jėgų kintamaisiais, atitinka dualus principas, išreikštas deformacijų būvio terminais (Atkočiūnas, Čižas 2002). Dualus (1.5)–(1.6) uždaviniui uždavinys gali būti užrašytas taip:

rasti $$\max \left\{ \mathsf{F}(\mathbf{x}) - \sum_i \lambda_i \varphi_i(\mathbf{x}) \right\}, \tag{1.7}$$

kai $$\frac{\partial \mathsf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}, \tag{1.8}$$

$$\lambda_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\zeta. \tag{1.9}$$

Matematinio programavimo griežtumo sąlygos

$$\lambda_i \varphi_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \zeta \tag{1.10}$$

jau įtrauktos į tikslo (1.7) funkciją. Tampriai plastinių konstrukcijų holonominės analizės uždaviniuose kintamieji λ_i įgauna plastinių daugiklių fizinę prasmę.

Pakeitus tikslo (1.7) funkcijos ženklą priešingu, gaunamas uždavinys:

rasti $$\min \left\{ -\mathsf{F}(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i \varphi_i(\mathbf{x}) \right\}, \tag{1.11}$$

kai tenkinamos (1.8) ir (1.9) sąlygos. Šis uždavinys išreiškia pilnutinės potencinės energijos minimumo principą kinematiškai leistiniems liekamiesiems poslinkiams $\boldsymbol{u}_r$ (Bazaraa *et al.* 2004). (1.5)–(1.6) uždavinių, (1.7)–(1.9) formuluotės naudojamos sudarant dualius prisitaikiusių konstrukcijų liekamųjų įrąžų ir deformacijų (poslinkių) analizės uždavinių matematinius modelius.

Kuno ir Takerio (1.8)–(1.10) sąlygos tamprumo teorijoje yra deformacijų darnos (Sen–Venano) lygtys, plastiškumo teorijoje – liekamųjų deformacijų darnos lygtys. Pastarosios lygtys gali būti naudojamos liekamųjų poslinkių ribų skaičiavimo uždavinių matematiniuose modeliuose.

1.6. Analitinės literatūros apžvalgos baigiamoji išvada

Atlikus literatūros analizę, pastebima, kad matematinio programavimo taikymas prisitaikančioms konstrukcijoms optimizuoti yra aktuali mokslinių tyrimų dabarties problema. Tam reikia sudaryti konstrukcijos diskretinį modelį, o po to – ir patį optimizavimo uždavinio modelį. Čia konstrukcijos apkrovos kitimo ribos yra žinomos (konkreti apkrovimo istorija per laiką nenagrinėjama), o nustatoma ribinių įrąžų optimali situacija. Prisitaikiusios prie ciklinės apkrovos konstrukcijos liekamosios įrąžos, poslinkiai ir deformacijos randami sprendžiant dualias – statinę ir kinematinę – analizės uždavinio lygtis. Vienintelis liekamųjų įrąžų pasiskirstymas įmanomas tik prieš pat ciklinę plastiškąją suirtį. Šie teiginiai išsamiau nagrinėjami kituose skyriuose, reikalui esant nevengiant vėl grįžti prie paskirų literatūros šaltinių.

2. PAGRINDINĖS STRYPINIŲ KONSTRUKCIJŲ PRIKLAUSOMYBĖS IR UŽDAVINIŲ MATEMATINIAI MODELIAI

2.1. Diskretinės sistemos įrąžos ir deformacijos

Statybinės mechanikos konstrukcijų analizės ir optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai grindžiami diskretiniu konstrukcijos modeliu, pagrindinėmis mechanikos lygtimis ir matematinio programavimo teorija. Tokiam modeliui rašomi visi – tiek bendrieji, tiek daliniai (mūsų atveju susieti su strypinėmis sistemomis) – skaičiavimo uždavinių matematiniai modeliai. Parenkant charakterizuojančius konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvį apibendrintus statinius ir kinematinius kintamuosius, atsižvelgiama į statinių (pusiausvyros) ir kinematinių (geometrinių) lygčių dualius ryšius (Atkočiūnas 2012).

Diskretinės konstrukcijos įtempių būvis išreiškiamas įrąžų vektoriumi $\boldsymbol{S} = \left[\boldsymbol{S}_1 \; \boldsymbol{S}_2 \; ... \; \boldsymbol{S}_\zeta \right]^T$, $\zeta = s \times \nu$. Čia s – diskretinį modelį sudarančių baigtinių elementų ($k = 1, \; 2, \; ..., \; s, \; k \in K$) skaičius, o ν – kiekvieno elemento mazgų (skaičiuojamųjų pjūvių) ($l = 1, \; 2, \; ..., \; \nu, \; l \in L$) skaičius. Taigi dydis ζ yra bendras sistemos diskretinio modelio mazgų ($i = 1, \; 2, \; ..., \; \zeta, \; i \in I$) skaičius. Kiekviename elemente yra po du mazgus (skaičiuojamuosius pjūvius), taigi $\nu = 2$ ir $l = 1, \; 2$. Vektoriaus $\boldsymbol{S}$ komponentais gali būti lenkimo momentai M, ašinės jėgos N. Pvz., atsižvelgiant į lankstinės santvaros plastinį darbą dažniausiai įvertinamos tik ašinės jėgos N, o rėmo ir Virandelio santvaros atveju (standūs mazgai!) lenkimo momentai M ir ašinės jėgos N (arba tik M). Su įrąžų vektoriumi $\boldsymbol{S} = \left[\boldsymbol{S}_1 \; \boldsymbol{S}_2 \; ... \; \boldsymbol{S}_\zeta \right]^T = \left[S_1 \; S_2 \; ... \; S_n \right]^T$ yra suderintas deformacijų vektorius $\boldsymbol{\Theta} = \left[\boldsymbol{\Theta}_1 \; \boldsymbol{\Theta}_2 \; ... \; \boldsymbol{\Theta}_\zeta \right]^T = \left[\Theta_1 \; \Theta_2 \; ... \; \Theta_n \right]^T$ – kiekvieno vektoriaus $\boldsymbol{S}$ ir $\boldsymbol{\Theta}$ komponentų skaičius yra vienodas ir lygus n ($n = s \times \nu \times n_\nu = \zeta \times n_\nu$, čia n_ν yra įrąžų skaičius elemento mazge (pjūvyje)). Pvz., jei laikoma, kad pjūvyje plastines deformacijas lemia ir M, ir N, įrąžų rodiklis $n_\nu = 2$.

Kita diskretinio modelio dualių kintamųjų pora yra išorinių jėgų $\boldsymbol{F}$ ir poslinkių $\boldsymbol{u}$ vektoriai; kiekvieno iš šių vektorių komponentų skaičius yra lygus konstrukcijos diskretinio modelio laisvumo laipsniui m. Diskretinio modelio globalieji poslinkiai m bei įrąžos n nustato konstrukcijos pusiausvyros lygčių koeficientų matricos $\boldsymbol{A}(m \times n)$ eilučių ir stulpelių skaičių ($n = \zeta$, jeigu konstrukcijos pjūvyje veikia tik viena įrąža; kitais atvejais ζ dar tektų padauginti iš įrąžų skaičiaus pjūvyje n_ν). Tuomet visos diskretinės sistemos pusiausvyros lygtys yra

$$\boldsymbol{AS} = \boldsymbol{F} \text{ arba } \sum_k \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{F}, \tag{2.1}$$

čia $\boldsymbol{S} = \left[S_1\ S_2\ ...\ S_n\right]^T$, $\boldsymbol{F} = \left[F_1\ F_2\ ...\ F_m\right]^T$ – įrąžų ir išorinių apkrovų vektoriai, $\boldsymbol{A}_k$ – pusiausvyros lygčių matricos $\boldsymbol{A}$ pamatricė, susieta su *k*-tuoju baigtiniu elementu. Tuomet pasitelkus mažų poslinkių prielaidą geometrinės lygtys užrašomos taip:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Theta}, \tag{2.2}$$

čia $\boldsymbol{\Theta} = \left[\Theta_1\ \Theta_2\ ...\ \Theta_n\right]^T$, $\boldsymbol{u} = \left[u_1\ u_2\ ...\ u_m\right]^T$ – deformacijų ir poslinkių vektoriai.

Laikoma, kad konstrukcijos pjūvis gali būti arba tampriame, arba plastiniame būvyje. Kokio būvio yra konstrukcijos pjūvis, nustatoma, pasitelkus takumo sąlygas. Pritaikius skaliarinę ir iškiląją takumo funkciją *f*, takumo sąlygos užrašomos kiekvienam diskretinio modelio mazgui *i* (iš viso jų yra $i = 1, 2, ..., \left[\zeta = s \times \nu\right]$; mazgui, kaip minėta, tuomet įgauna skaičiuojamųjų pjūvių prasmę):

$$f_i(\boldsymbol{S}_i) \le S_{0i},\ i = 1, 2,\ ..., \zeta. \tag{2.3}$$

Čia S_{0i} yra pjūvio ribinė įrąža (pvz., lenkiamai sijai tai būtų ribinis lenkimo momentas M_0). Labai dažnai netiesinė (2.3) sąlyga užrašoma pavidalu:

$$\varphi_i = S_{0i} - f_i(\boldsymbol{S}_i) \ge 0. \tag{2.4}$$

Uždavinių matematiniuose modeliuose dažnai takumo sąlygos yra tiesinės:

$$\left|M\right| + c\left|N\right| \le M_0,\ \ c = \frac{M_0}{N_0}. \tag{2.5}$$

Visam diskretiniam konstrukcijos modeliui netiesinės takumo (2.3) sąlygos užrašomos taip:

$$f(\boldsymbol{S}) \le \boldsymbol{S}_0, \tag{2.6}$$

o jų reikšmių vektorius $\boldsymbol{\varphi}$ yra

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{S}_0 - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{S}). \tag{2.7}$$

Čia ribinių įrąžų vektorius $\boldsymbol{S}_0 = \left[S_{01}\ S_{02}\ ...\ S_{0\zeta}\right]^T$ dažniausiai siejamas su konstrukcijos pjūviais. Konstrukcijos baigtinio elemento ribose ribinė įrąža $\boldsymbol{S}_{0k} (k \in K)$ yra laikoma pastovia ir todėl kai kurių skaičiuojamųjų pjūvių ribinės įrąžos yra vienodos.

Išnagrinėjus Virandelio santvaros takumo sąlygas (lenkimas – gniuždymas), antriausia šio skyriaus poskyryje bus atliktas jų apibendrinimas kintamai – kartotinei apkrovai.

2.2. Išsami Virandelio santvaros takumo sąlygų analizė

Šiame poskyryje išsamiau nagrinėjamos strypinės konstrukcijos takumo sąlygos (Jirásek, Bažant 2002; Atkočiūnas 1999). Dažnai plėtojama mintis, kad skerspjūvyje plastinis

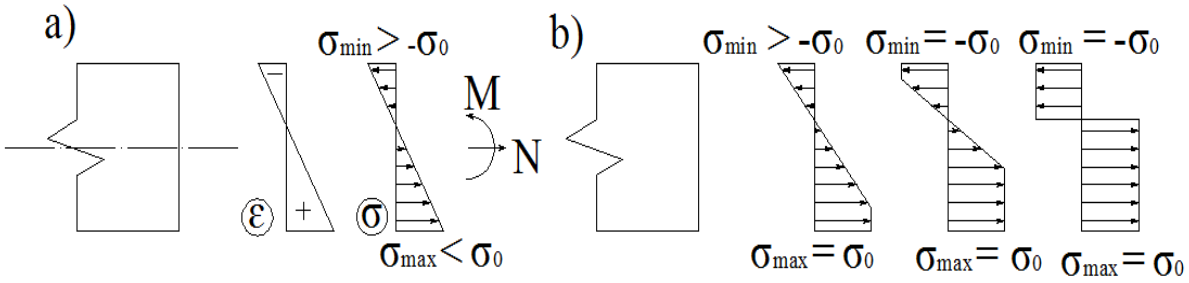
lankstas atsiranda pasiekus ribinę lenkimo momento reikšmę M_0. Taip, tai teisinga, jei pjūvyje veikia viena lenkimo įrąža ir nekreipiamas dėmesys į kitų vidinių jėgų poveikį, susidarant skerspjūvyje plastinio tekėjimo galimybei (*bendrajam plastiniam lankstui*). Kompleksinis *M* ir *N* poveikis gali būti pastebimas daugiaaukščiuose rėmuose ar rėmuose, kuriuose veikia didelė horizontali apkrova (pavyzdžiui, vėjo apkrovos), sukelianti dideles ašinės jėgas. Taigi, čia apsvarstoma sąveika tarp lenkimo momento *M* ir ašinės jėgos *N*, atsirandant plastiniam tekėjimui. Todėl visas plastinis skerspjūvis bus nurodytas kaip *bendrasis plastinis lankstas.* Skersinių jėgų Q poveikis yra mažiau svarbus, jas takumo sąlygose ignoruosime (suprantama, skersinės jėgos pusiausviros lygtyse išlieka).

Tipinis deformacijų ir įtempių atsiradimas, formuojantis bendrajam plastiniam lankstui, pavaizduotas 2.1 paveiksle (Jirásek, Bažant 2002). Daroma prielaida, kad skerspjūvis išlieka plokščias visais apkrovimo atvejais. Tik tokiu atveju normalinių įtempių pasiskirstymai skerspjūvio aukštyje yra tiesiniai (linijiniai) (pagal medžiagų atsparumą tamprioje darbo stadijoje, 2.1 a pav.). Tęsiant apkrovimą, tekėjimas prasideda viršutinėje ar apatinėje pluoštų dalyje, ir plastinė zona pereina į vidinę skerspjūvio dalį (2.1 b pav.). Tampriai plastinio deformavimo metu, skerspjūvio centras turi tamprų linijinių įtempių pasiskirstymą ir vieną (ar dvi) plastines zonas su pastoviu takumo įtempių lygiu (teigiamiems ar neigiamiems takumo įtempiams). Dėl didelio išlenktos ašies kreivio, tamprus centras tampa nereikšmingai mažas, ir įtempių pasiskirstymas artėja į laužtinėmis pastovų pasiskirstymą, kur viena skerspjūvio dalis teka kai vyksta tempimas, o likusi dalis – kai vyksta gniuždymas.

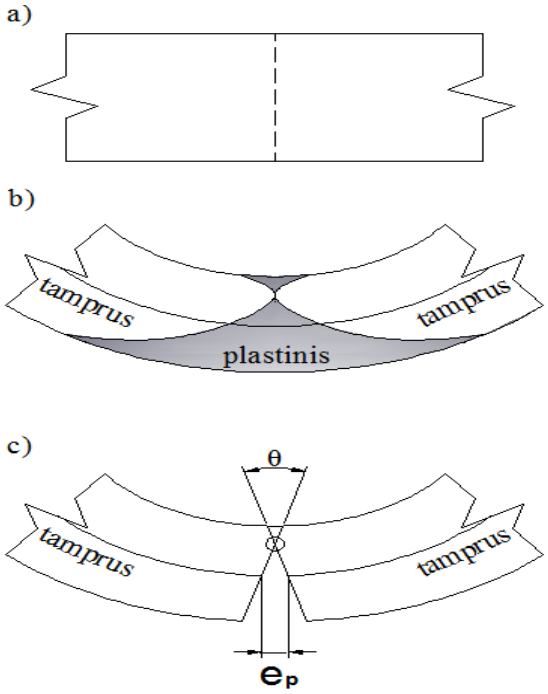
Tęsiant apkrovimą, plastinio deformavimo procesas perima greta esančias skerspjūvio dalis, ir plastinė zona užima 2.2 b paveiksle pavaizduotą padėtį. Lanksto aiškinimas tęsiamas pasitelkus 2.2 pav. (2.2 a pav. bendras strypo vaizdas, 2.2 b pav. – plastinių zonų plitimas). Visos plastinės deformacijos idealizuotame lankste aprašomos kampu θ, ir išilginiu poslinkiu e_p (2.2 c pav). Kinematinių sprendimų dėka, seka tai, kad plastinis tempimas pasirinktame taške, plastiniame skerspjūvyje, gali būti užrašomas linijine funkcija:

$$\bar{e}_p(z) = e_p + \theta_z. \tag{2.8}$$

Čia z – koordinatė, statmena lenkimo ašiai. Plastinis pailgėjimas centre (kai $z=0$) yra $\bar{e}_p(0) = e_p$. Tai atinka dvi tamprias skerspjūvio dalis, sujungtas bendruoju plastiniu lankstu (2.2 c pav.).



2.1 pav. Deformacijų ir įtempių pasiskirstymas (Jirásek, Bažant 2002)



2.2 pav. Bendrasis plastinis lankstas (Jirásek, Bažant 2002)

Priklausomai nuo neutralios ašies padėties, bendrasis plastinis lankstas gali leisti ”tekėti”, esant skirtingomis vidinių jėgų *M* ir *N* kombinacijomis. Visų kombinacijų nustatymui gali būti naudojama *plastinio vystymosi sritis*, kitaip vadinama tekėjimo paviršiumi arba surimo sritimi. Šių vystymosi sričių išorėje būvis niekados negali būti pasiektas. Reikia atkreipti dėmesį, kad dažnai vartojamas įvaizdis – srities viduje nėra plastinio tekėjimo – nėra visai teisingas. Plastinio vystymosi sritis galėtų būti apibrėžta kaip tampraus vystymosi sritis, kuri atitiktų ribas, kuriose pirmasis skerspjūvio taškas pradėtų tekėti (panašu į ribinį tampruųjį momentą grynajame lenkime). Ribos nuo tampriųjų ir plastinių vystymosi ribų yra tampriai – plastinės.

Tokiuo būdu sugrįžtame prie (2.5) formulės. Lygtys, atskirai aprašančios viršutinę ir apatinę plastinio deformavimo vystymosi srities dalį, gali būti užrašomos viena formule

$$f(N,M) \equiv \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 + \left|\frac{M}{M_0}\right| - 1 = 0. \tag{2.9}$$

Svarbu tai kad, plastinio vystymosi srities vidinė dalis apibūdinama $f(N,M) < 0,$ o išorinė dalis $f(N,M) > 0.$ Funkcija f, kaip pažymėta anksčiau, vadinama *takumo funkcija.*

Tamprumo vystymosi sritis gali būti nustatyta naudojant gerai žinomą įtempių išraišką skerspjūvio pavojingiausiuose taškuose:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_{el}}; \tag{2.10}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_{el}}. \tag{2.11}$$

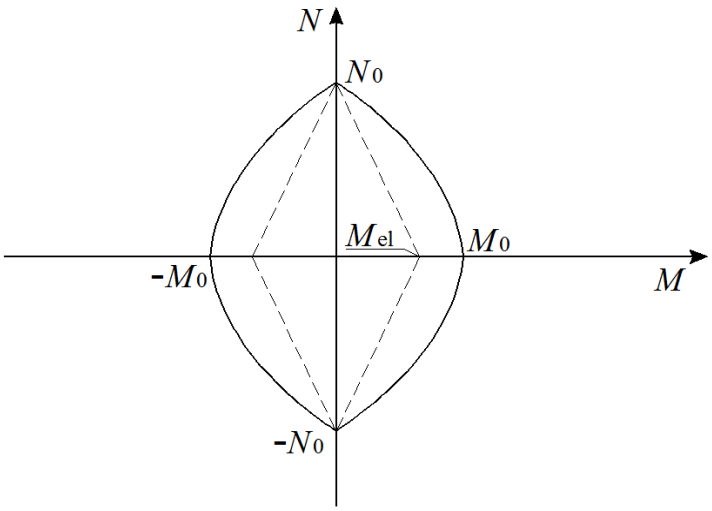
Čia $A = bh -$ skerspjūvio plotas (stačiakampis skerspjūvis) ir $W_{el} = bh^2/6$ – tamprus atsparumo momentas. Skerspjūvio dalis išlieka tampri tol kol $|\sigma| \le \sigma_y,$ ir vidinių jėgų reikšmės tamprioje stadijoje tenkina sąlygą

$$\left|\frac{N}{\sigma_y A} \pm \frac{M}{\sigma_y W_{el}}\right| \le 1. \tag{2.12}$$

Pažymėkime tai, kad (2.9) arba (2.12) pateikia keturias nelygybes, kurios turi būti tenkinamos tuo pačiu metu. Naudojant santykius $\sigma_y A = N_0$ ir $\sigma_y W_{el} = M_{el}$ galime perrašyti sąlygą taip

$$\left|\frac{N}{N_0} \pm \frac{M}{M_{el}}\right| \le 1 \tag{2.13}$$

Gautoji skerspjūvio tamprios darbo stadijos išraiška taikoma visoms galimoms skerspjūvių formoms, ne tik stačiakampiams. Atsižvelgiant į (2.13), tampri skerspjūvio dalis apibrėžta lygiagretainiu, kurio viršūnė atitinka tamprumo ribas ašiniam tempimui ar gniuždymui ir grynajam lenkimui. Veikiant ašiniam tempimui ar gniuždymui, nuo tamprumo ribos prasideda plastinė riba. Veikiant grynajam lenkimui, santykis $M_0 / M_{el} = \alpha$ priklauso nuo skerspjūvio formos. Stačiakampiam skerspjūviui, $\alpha = 1{,}5,$ ir atitinkamai tampri vystymosi sritis pažymėta punktyrine linija 2.3 paveiksle.



2.3 pav. Tampri ir plastinė skerspjūvio ribos stačiakampiui skerspjūviui

2.3. Įžanginiai matematiniai modeliai strypinių konstrukcijų optimizavimui

2.3.1. Takumo sąlygos, kai apkrova kartotinė kintamoji

Pritaikius tampraus konstrukcijos skaičiavimo vektorius $\boldsymbol{S}_{ej}$, $j \in J$, takumo (2.3) sąlygas galima užrašyti taip:

$$\varphi_{kl,j} = S_{0k} - f_{kl,j}(S_{rkl} + S_{ekl,j}) \geq 0, \quad k \in K,\ l \in L,\ j \in L, \tag{2.14}$$

arba

$$\varphi_{kl,j} = S_{0k} - f_{kl,j}(S_{kl,j}) \geq 0, \quad \boldsymbol{S}_{kl,j} = (\boldsymbol{S}_{rkl} + \boldsymbol{S}_{ekl,j}).$$

Taigi takumo sąlygos tikrinamos kiekviename *k*-tojo baigtinio elemento mazgo taške *l*, esant visoms apkrovos kombinacijoms *p* ($j = 1, 2, \ ..., p,\ j \in J$).

Visai konstrukcijai netiesinės takumo sąlygos $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S}) \leq \boldsymbol{S}_0$ tuomet gali būti užrašomos taip:

$$\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{S}_r + \boldsymbol{S}_{ej}) \leq \boldsymbol{S}_0,\ j \in J. \tag{2.15}$$

Konstrukcijos, kai veikia lenkimo momentas *M* ir ašinė jėga *N*, atveju

$$\boldsymbol{S}_{i,j} = \begin{bmatrix} M_{ri} + M_{ei,j} \\ N_{ri} + N_{ei,j} \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Pasitelkus matricą

$$\boldsymbol{\Phi}_i = \begin{bmatrix} 1 & c_i \\ -1 & c_i \\ 1 & -c_i \\ -1 & -c_i \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

tiesinės takumo sąlygos i – tajam pjūviui užrašomos taip:

$$\boldsymbol{\varphi}_{i,j} = \boldsymbol{M}_{0i} - \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{S}_{i,j} \geq \mathbf{0},\ i \in I,\ j \in J. \tag{2.18}$$

Čia ribinių momentų vektorius $\boldsymbol{M}_{0i} = \left[M_{0i}\ M_{0i}\ M_{0i}\ M_{0i}\right]^T$ priderintas prie matricos $\boldsymbol{\Phi}_i$ eilučių skaičiaus, o $c_i = \frac{M_{0i}}{N_{0i}}$. Visai konstrukcijai takumo sąlygos $\boldsymbol{\varphi}_j \left[\varphi_{1,j}\ \varphi_{2,j}\ ...\ \varphi_{z,j}\right]^T$ rėmui užrašomos taip:

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{S}_j \geq \mathbf{0}, \tag{2.19}$$

čia: $\boldsymbol{S}_j = \left[M_r + M_{e,j}\ N_r + N_{e,j}\right]^T$, $\boldsymbol{\Phi} = diag\ \boldsymbol{\Phi}_i$ – tiesinių takumo sąlygų kvazidiagonalioji matrica, o $\boldsymbol{M}_0 = \left[\boldsymbol{M}_{01}\ \boldsymbol{M}_{02}\ ...\ \boldsymbol{M}_{0\zeta}\right]^T$ – ribinių jėgų vektorius, taikomas visai konstrukcijai.

2.3.2. Bendrasis prisitaikančios konstrukcijos optimizavimo uždavinio modelis

Tiesinių takumo sąlygų (o tokias ir taikysime Virandelio santvarai) atveju prisitaikančios konstrukcijos projektinio uždavinio matematinis modelis (Atkočiūnas 1999) yra toks:

rasti
$$\min\ \psi(\boldsymbol{S}_0), \tag{2.20}$$

kai
$$\boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{S}_0 - \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{G}\lambda + \boldsymbol{S}_{ej}\right) \geq \mathbf{0}, \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j = 0,\ \ \boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_j \boldsymbol{\lambda}_j,\ \ j \in J; \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{u}_{r,\min} \leq \boldsymbol{u}_{r,\inf}, \tag{2.24}$$

$$\boldsymbol{u}_{r,\sup} \leq \boldsymbol{u}_{r,\max}. \tag{2.25}$$

(2.20) – (2.25) uždavinyje nežinomieji yra ribinių įrąžų vektorius $\boldsymbol{S}_0$ ir plastinių daugiklių vektoriai $\boldsymbol{\lambda}$. Tikslo funkcijos (2.20) skaliarinei funkcijai ψ galima suteikti konkrečią ekonominę interpretaciją. Paprasčiausias ir praktiškai įdomus atvejis yra minimalaus svorio konstrukcijos uždavinys. Idealios skerspjūvio formos ir homogeninės takumo sąlygos atveju minimalus konstrukcijos svoris koreliuoja su tiesine tikslo funkcija $\min \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{S}_0$. Čia $\boldsymbol{L}$ yra optimalumo kriterijaus (2.21) svorio koeficientų vektorius. Minimalaus svorio konstrukcijos projektavimo atveju visos medžiagos savybės pateiktos, gali kisti tik elemento ar pjūvio matmenys. Taigi tampriosios konstrukcijos skaičiavimo įrąžų vektorius $\boldsymbol{S}_e$ kinta; sprendžiant (2.20)–(2.25) uždavinį jis turėtų būti perskaičiuojamas pagal naują skaičiuojamojo pjūvio geometriją.

2.4. Antrojo skyriaus išvados ir apibendrinimai

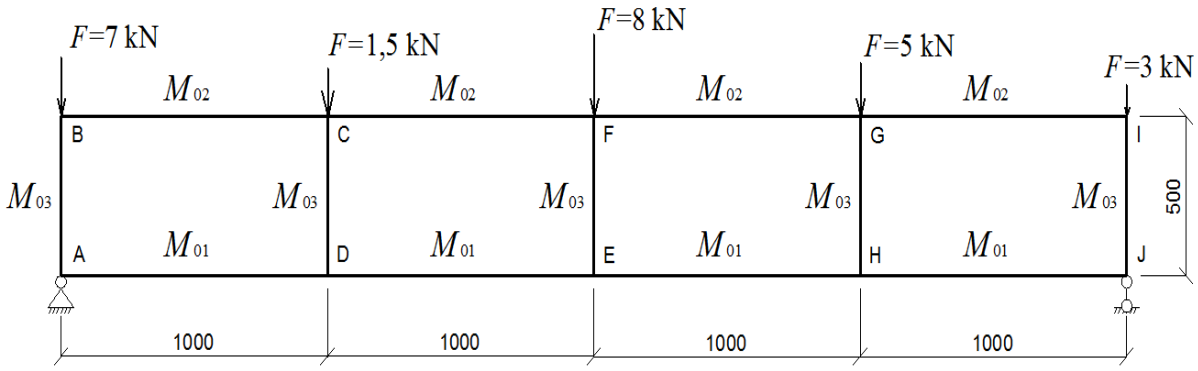
Konstrukcijų, sudarytų iš tamprios – plastinės medžiagos, plastinė analizė bei projektavimas užima svarbią poziciją konstrukcijų teorijoje. Sprendimo metodai ir rezultatai pradėti sėkmingai ir taikyti inžinerinėje praktikoje. Deformacijų ir poslinkių nustatymas konstrukcijos prisitaikimo momentu reikalauja pilnos apkrovimo istorijos analizės. Šioje srityje keletas metodų ir sprendimų technikų buvo išvystytos skirtingų tipų konstrukcijoms, apkrautoms statine apkrova, bei minėtina inkrementinė analizė. Šie metodai suteikia pilną informaciją apie tamprią – plastinę konstrukcijos elgsena, bet sudėtingų uždavinių ir dinaminių apkrovų atveju reikalauja daug skaičiavimo pajėgumų. Tiksli apkrovimo istorija dažniausiai nėra žinoma konstrukcijoms, apkrautoms daugiaparametre apkrova ir dėl to apkrovimo tvarka ir plastinių deformacijų vystymasis negali būti apskaičiuotas. Kai apkrovimų kombinacijos ir jų seka yra duotos ir galima taikyti inkrementinę analizę, tada gaunama sunki skaičiavimo atžvilgiu užduotis.

Šiame magistro darbe yra panaudojamos liekamųjų įrąžų ir poslinkių infliuentinės matricos, taip siekiama išvengti apkrovimo istorijos nagrinėjimo. Antrame skyriuje sudarytas optimizavimo uždavinio modelis tinka tiek vienkartei apkrovai (trečias baigiamojo darbo skyrius), tiek kintamai kartotinei (ketvirtasis darbo skyrius). Pažymime, kad trečias skyrius parengtas R. Karkausko (Atkočiūnas, Karkauskas 2010) pasiūlyta metodika. Baigiamojo darbo autoriu ją išplėtojo Virandelio santvarai.

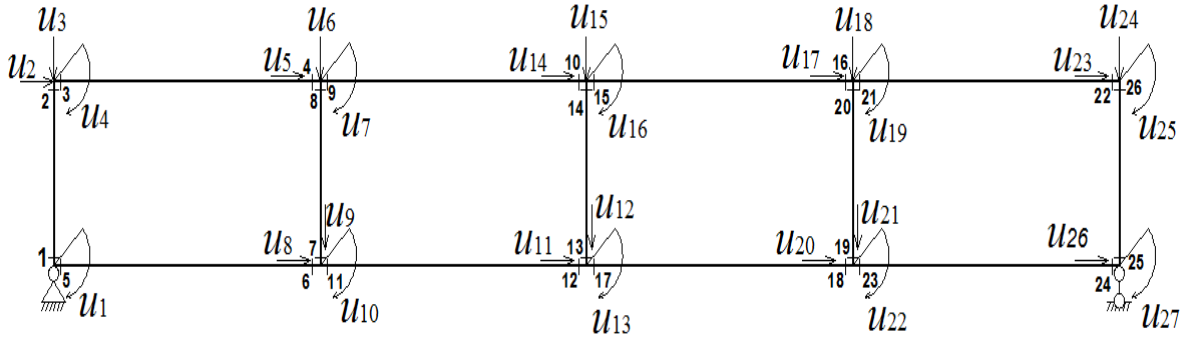
3. VIENKARTĖ APKROVA: MINIMALAUS TŪRIO SANTVARA, ESANT KOMPLEKSINIAMS APRIBOJIMAMS

3.1. Virandelio santvaros diskretinis modelis

Visi Virandelio santvaros elementai sudaryti iš pilnavidurių kvadratinio skerspjūvio profiliuočių, kurie yra lenkiami ir kartu tempiami arba gniuždomi. Visi santvaros mazgai standūs. Konstrukcijos skaičiuojamoji schema pavaizduota 3.1 paveiksle, diskretinis modelis – 3.2 paveiksle.



3.1 pav. Skaičiuojamoji Virandelio santvaros schema



3.2 pav. Virandelio santvaros diskretinis modelis

Santvara sudaryta iš 13 elementų, kiekvienam strypui priskiriami du skaičiuojamieji pjūviai (žr. 2.1 poskyrį $\zeta = s \times \nu = 13 \times 2$), iš viso susidaro 26 skaičiuojamieji pjūviai, todėl tikrųju įrąžų vektorius turi 39 nežinomuosius (n = 39), nes prie 26 lenkimo momentų M pridedama 13 elementinių ašinių jėgų N:

$\boldsymbol{S} = [M_1\ M_2\ N_{1\text{-}2}\ M_3\ M_4\ N_{3\text{-}4}\ M_5\ M_6\ N_{5\text{-}6}\ M_7\ M_8\ N_{7\text{-}8}\ M_9\ M_{10}\ N_{9\text{-}10}\ M_{11}\ M_{12}\ N_{11\text{-}12}\ M_{13}\ M_{14}\ N_{13\text{-}14}\ M_{15}\ M_{16}\ N_{15\text{-}16}\ M_{17}\ M_{18}\ N_{17\text{-}18}\ M_{19}\ M_{20}\ N_{19\text{-}20}\ M_{21}\ M_{22}\ N_{21\text{-}22}\ M_{23}\ M_{24}\ N_{23\text{-}24}\ M_{25}\ M_{26}\ N_{25\text{-}26}]^T$.

Taigi, įtempių būvio nežinomųjų skaičius $n = 39$, statinio neišsprendžiamumo laipsnis lygus: $k = 3 \cdot 5 - 3 = 12$. Santvaros diskretinio modelio laisvės laipsnis $m = 39 - 12 = 27$, bus rašomos 27 pusiausvyros lygtys.

Deformuotą būvį charakterizuoja poslinkiai ir deformacijos:

$$\boldsymbol{u} = [u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6\ u_7\ u_8\ u_9\ u_{10}\ u_{11}\ u_{12}\ u_{13}\ u_{14}\ u_{15}\ u_{16}\ u_{17}\ u_{18}\ u_{19}\ u_{20}\ u_{21}\ u_{22}\ u_{23}\ u_{24}\ u_{25}\ u_{26}\ u_{27}]^T.$$

$$\boldsymbol{\Theta}_p = [\Theta_{p1}\ \Theta_{p2}\ \Theta_{p3}\ \Theta_{p4}\ \Theta_{p5}\ \Theta_{p6}\ \Theta_{p7}\ \Theta_{p8}\ \Theta_{p9}\ \Theta_{p10}\ \Theta_{p11}\ \Theta_{p12}\ \Theta_{p13}\ \Theta_{p14}\ \Theta_{p15}\ \Theta_{p16}\ \Theta_{p17}\ \Theta_{p18}\ \Theta_{p19}\ \Theta_{p20}\ \Theta_{p21}\ \Theta_{p22}\ \Theta_{p23}\ \Theta_{p24}\ \Theta_{p25}\ \Theta_{p26}\ \Theta_{p27}\ \Theta_{p28}\ \Theta_{p29}\ \Theta_{p30}\ \Theta_{p31}\ \Theta_{p32}\ \Theta_{p33}\ \Theta_{p34}\ \Theta_{p35}\ \Theta_{p36}\ \Theta_{p37}\ \Theta_{p38}\ \Theta_{p39}]^T.$$

Apatinės, viršutinės juostos ir spyrių ribiniai momentai yra skirtingi (3.1 pav.), todėl ribinių įrąžų vektorius yra toks:

$$\boldsymbol{S_0} = \left[M_{01}\ M_{02}\ M_{03}\right]^T.$$

3.2. Ribinės pusiausvyros uždavinys: matematiniai modeliai ir pagrindinės priklausomybės

3.2.1. Matematiniai modeliai

Uždavinio statinė formuluotė. Optimizacijos uždavinio plastiškos suirties metu matematinis modelis sudaromas panaudojus ekstreminį energinį principą paprastos plastiškosios suirties metu. Tai yra tiesinio programavimo uždavinys.

Rasti
$$\min\ \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{S}_0, \tag{3.1}$$

kai
$$\boldsymbol{AS} = \boldsymbol{F}, \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\Gamma S}_0 - \boldsymbol{\Phi S} \geq \boldsymbol{0}, \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{S_0} \geq \boldsymbol{0}. \tag{3.4}$$

Čia $\boldsymbol{L}$ – strypų (su tokiu pačiu skerspjūvio plotu) ilgio vektorius, $\boldsymbol{S}_0$ – ieškomų ribinių įrąžų vektorius, $\boldsymbol{A}$ – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica, $\boldsymbol{F}$ – išorinės apkrovos vektorius, $\boldsymbol{\Gamma}$ – konfigūracijos matrica, $\boldsymbol{\Phi}$ – tiesinių takumo sąlygų koeficientų matrica.

Tikslo (3.1) funkcija išreiškia minimalaus teorinio svorio (tūrio) konstrukciją. (3.2) uždavinys aprašo santvaros pusiausvyros lygtis, (3.3) – takumo sąlygų išraiškos ir (3.4) – konstrukciniai apribojimai.

Išsprendus (3.1)–(3.4) uždavinį, gaunami optimalūs ribinių momentų dydžiai M_{01}, M_{02}, M_{03} ir įrąžų vektorius $\boldsymbol{S}$ plastinio suirimo metu. Pagal gautus optimalius ribinių momentų dydžius parenkami skerspjūviai (apie tai bus kalbama vėliau).

Uždavinio kinematinė formuluotė. Ši formuluotė gaunama formaliu matematiniu keliu, panaudojus matematinio programavimo teorijoje žinomą dualaus uždavinio sudarymo metodiką. Atlikus formalius pertvarkymus gaunama tokia kinematinės formuluotės išraiška:

rasti $$\max \ \boldsymbol{F}^T \dot{\boldsymbol{u}}, \tag{3.5}$$

kai $$\boldsymbol{\Phi}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{A}^T \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}, \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} \le \boldsymbol{L}, \tag{3.7}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} \ge \boldsymbol{0}. \tag{3.8}$$

Išsprendus dualų (3.5)–(3.8) uždavinį nustatomi poslinkių greičių vektorius $\dot{\boldsymbol{u}}$ ir plastinių daugiklių vektorius $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ konstrukcijai plastiškai yrant.

3.2.2. Pagrindinės priklausomybės

Aptarsime 3.1 poskyryje parodytos santvaros diskretinio modelio pagrindines priklausomybes pagal optimizavimo uždavinio matematinį modelį. Santvaros skirtingų ribinių momentų išsidėstymas parodytas 3.1 paveiksle. Taigi, $n_0 = 3$ ir tikslo funkcija įgauna tokį pavidalą:

$$\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{S}_0 = (L_1 M_{01} + L_2 M_{02} + L_3 M_{03}) = (4 \cdot M_{01} + 4 \cdot M_{02} + 2{,}5 \cdot M_{03}) \to \min.$$

Čia L_1 – strypų su M_{01} ribinių lenkimo momentų bendras ilgis, L_2 – strypų su M_{02} ribinių lenkimo momentų bendras ilgis ir L_3 – strypų su M_{03} ribinių lenkimo momentų bendras ilgis.

Pusiausvyros lygčių sudarymas. Sudaromos apribojimų – lygybių sąlygos $\boldsymbol{AS} = \boldsymbol{F}$, pagal konstrukcijos diskretinį modelį (3.2 pav.). Pusiausvyros lygtys surašomos į 3.1 lentelę.

3.1 lentelė. Santvaros (3.2 pav.) pusiausvyros lygtys

Mazgas	Mazgo poslinkis	Pusiausvyros lygtys
A	1.	$M_1 + M_5 = 0;$
B	2.	$-\frac{1}{0{,}5} M_1 + \frac{1}{0{,}5} M_2 - N_{3\text{–}4} = 0;$
	3.	$-N_{1\text{–}2} + \frac{1}{1} M_3 - \frac{1}{1} M_4 = 7;$
	4.	$-M_2 + M_3 = 0;$
C	5.	$N_{3\text{–}4} - \frac{1}{0{,}5} M_7 + \frac{1}{0{,}5} M_8 - N_{9\text{–}10} = 0;$

3.1 lentelės tęsinys

Mazgas	Mazgo poslinkis	Pusiausvyros lygtys
C	6.	$-N_{7-8}-\frac{1}{1}M_3+\frac{1}{1}M_4+\frac{1}{1}M_9-\frac{1}{1}M_{10}=1,5;$
	7.	$-M_4-M_8+M_9=0;$
D	8.	$N_{5-6}+\frac{1}{0,5}M_7-\frac{1}{0,5}M_8-N_{11-12}=0;$
	9.	$-\frac{1}{1}M_5+\frac{1}{1}M_6+N_{7-8}+\frac{1}{1}M_{11}-\frac{1}{1}M_{12}=0;$
	10.	$-M_6+M_7+M_{11}=0;$
E	11.	$N_{11-12}+\frac{1}{0,5}M_{13}-\frac{1}{0,5}M_{14}-N_{17-18}=0;$
	12.	$-\frac{1}{1}M_{11}+\frac{1}{1}M_6+N_{13-14}+\frac{1}{1}M_{17}-\frac{1}{1}M_{18}=0;$
	13.	$-M_{12}+M_{13}+M_{17}=0;$
F	14.	$N_{9-10}-\frac{1}{0,5}M_{13}+\frac{1}{0,5}M_{14}-N_{15-16}=0;$
	15.	$-N_{13-14}-\frac{1}{1}M_9+\frac{1}{1}M_{10}+\frac{1}{1}M_{15}-\frac{1}{1}M_{16}=8;$
	16.	$-M_{10}-M_{14}+M_{15}=0;$
G	17.	$N_{15-16}-\frac{1}{0,5}M_{19}+\frac{1}{0,5}M_{20}-N_{21-22}=0;$
	18.	$-N_{19-20}-\frac{1}{1}M_{15}+\frac{1}{1}M_{16}+\frac{1}{1}M_{21}-\frac{1}{1}M_{22}=5;$
	19.	$-M_{16}-M_{20}+M_{21}=0;$
H	20.	$N_{17-18}+\frac{1}{0,5}M_{19}-\frac{1}{0,5}M_{20}-N_{23-24}=0;$
	21.	$-\frac{1}{1}M_{17}+\frac{1}{1}M_{18}+N_{19-20}+\frac{1}{1}M_{23}-\frac{1}{1}M_{24}=0;$
	22.	$-M_{18}+M_{19}+M_{23}=0;$
I	23.	$N_{21-22}-\frac{1}{0,5}M_{25}+\frac{1}{0,5}M_{26}=0;$

3.1 lentelės tęsinys

Mazgas	Mazgo poslinkis	Pusiausvyros lygtys
I	24.	$\frac{1}{1}M_{21}+\frac{1}{1}M_{22}-N_{25-26}=3;$
	25.	$-M_{22}-M_{26}=0;$
J	26.	$N_{23-24}+\frac{1}{0,5}M_{25}-\frac{1}{0,5}M_{26}=0;$
	27.	$-M_{24}+M_{25}=0.$

Takumo sąlygų sudarymas. Sudaromos apribojimų – nelygybių sąlygos $\boldsymbol{\Gamma S_0 - \Phi S \geq 0}$.

Čia $\boldsymbol{\Gamma}$ yra santvaros konfiguracijos matrica, turinti *t* (bendras takumo sąlygų skaičius) eilučių ir n_0 stulpelių. Konstrukcijos pjūviai turi tenkinti kvadratinio skerspjūvio takumo sąlygas.

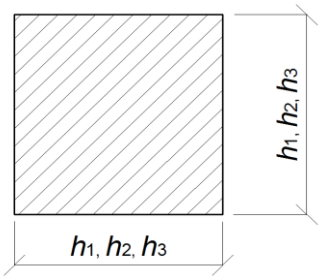
Kiekvienam element pjūviui sudaromos tokios takumo sąlygos:

$$\begin{aligned} -M_i+\frac{h}{4}N_j &\leq M_{0,i},\\ M_i-\frac{h}{4}N_j &\leq M_{0,i},\\ -M_i+\frac{h}{4}N_j &\leq M_{0,i},\\ -M_i-\frac{h}{4}N_j &\leq M_{0,i}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Čia M_i – skaičiuojamojo pjūvio lenkimo momentas, N_j – skaičiuojamojo pjūvio ašinė jėga, $M_{0,i}$ – skaičiuojamo pjūvio ribinis lenkimo momentas.

Skaičiavimams įvedami koeficientai *C1*, *C2* ir *C3*, kurie atitinkamai lygūs $\frac{h_1}{4}, \frac{h_2}{4}$ ir $\frac{h_3}{4}$.

Kaip ir buvo minėta elementai yra pilnavidurių kvadratinio skerspjūvio profiliuočių.



3.3 pav. Santvarinio elemento stačiakampis skerpjūvis

Čia h_1 – apatinės juostos skerspjūvio aukštis, h_2 – viršutinės juostos skerspjūvio aukštis, h_3 – spyrių skerspjūvio aukštis.

Pirmo pjūvio takumo sąlygos:

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} -M_1 + \frac{h_1}{4} N_{1-2} \le M_{0,1} \\ M_1 - \frac{h_1}{4} N_{1-2} \le M_{0,1} \\ M_1 + \frac{h_1}{4} N_{1-2} \le M_{0,1} \\ -M_1 - \frac{h_1}{4} N_{1-2} \le M_{0,1} \end{bmatrix}.$$

Takumo sąlygų išraiškos kiekvienam pjūviui surašomos į 3.2 lentelę, tik kiekvienoje išraiškoje įvedami koeficientai *C1*, *C2* ir *C3*.

3.2 lentelė. Takumo sąlygų išraiškos (santvara pavaizduota 3.1 paveiksle)

Elemento pjūvis	Takumo sąlygų išraiškos	Elemento pjūvis	Takumo sąlygų išraiškos
1	$M_1 + C3N_{1-2} - M_{0,1} \le 0;$ $M_1 - C3N_{1-2} - M_{0,1} \le 0;$ $-M_1 + C3N_{1-2} - M_{0,1} \le 0;$ $-M_1 - C3N_{1-2} - M_{0,1} \le 0;$	2	$M_2 + C3N_{1-2} - M_{0,2} \le 0;$ $M_2 - C3N_{1-2} - M_{0,2} \le 0;$ $-M_2 + C3N_{1-2} - M_{0,2} \le 0;$ $-M_2 - C3N_{1-2} - M_{0,2} \le 0;$
3	$M_3 + C2N_{3-4} - M_{0,3} \le 0;$ $M_3 - C2N_{3-4} - M_{0,3} \le 0;$ $-M_3 + C2N_{3-4} - M_{0,3} \le 0;$ $-M_3 - C2N_{3-4} - M_{0,3} \le 0;$	4	$M_4 + C2N_{3-4} - M_{0,4} \le 0;$ $M_4 - C2N_{3-4} - M_{0,4} \le 0;$ $-M_4 + C2N_{3-4} - M_{0,4} \le 0;$ $-M_4 - C2N_{3-4} - M_{0,4} \le 0;$
5	$M_5 + C1N_{5-6} - M_{0,5} \le 0;$ $M_5 - C1N_{5-6} - M_{0,5} \le 0;$ $-M_5 + C1N_{5-6} - M_{0,5} \le 0;$ $-M_5 - C1N_{5-6} - M_{0,5} \le 0;$	6	$M_6 + C1N_{5-6} - M_{0,6} \le 0;$ $M_6 - C1N_{5-6} - M_{0,6} \le 0;$ $-M_6 + C1N_{5-6} - M_{0,6} \le 0;$ $-M_6 - C1N_{5-6} - M_{0,6} \le 0;$
7	$M_7 + C3N_{7-8} - M_{0,7} \le 0;$ $M_7 - C3N_{7-8} - M_{0,7} \le 0;$ $-M_7 + C3N_{7-8} - M_{0,7} \le 0;$ $-M_7 - C3N_{7-8} - M_{0,7} \le 0;$	8	$M_8 + C3N_{7-8} - M_{0,8} \le 0;$ $M_8 - C3N_{7-8} - M_{0,8} \le 0;$ $-M_8 + C3N_{7-8} - M_{0,8} \le 0;$ $-M_8 - C3N_{7-8} - M_{0,8} \le 0;$

3.2 lentelės tęsinys

Elemento pjūvis	Takumo sąlygų išraiškos	Elemento pjūvis	Takumo sąlygų išraiškos
9	$M_9 + C2N_{9-10} - M_{0,9} \le 0;$ $M_9 - C2N_{9-10} - M_{0,9} \le 0;$ $-M_9 + C2N_{9-10} - M_{0,9} \le 0;$ $-M_9 - C2N_{9-10} - M_{0,9} \le 0;$	10	$M_{10} + C2N_{9-10} - M_{0,10} \le 0;$ $M_{10} - C2N_{9-10} - M_{0,10} \le 0;$ $-M_{10} + C2N_{9-10} - M_{0,10} \le 0;$ $-M_{10} - C2N_{9-10} - M_{0,10} \le 0;$
11	$M_{11} + C1N_{11-12} - M_{0,11} \le 0;$ $M_{11} - C1N_{11-12} - M_{0,11} \le 0;$ $-M_{11} + C1N_{11-12} - M_{0,11} \le 0;$ $-M_{11} - C1N_{11-12} - M_{0,11} \le 0;$	12	$M_{12} + C1N_{11-12} - M_{0,12} \le 0;$ $M_{12} - C1N_{11-12} - M_{0,12} \le 0;$ $-M_{12} + C1N_{11-12} - M_{0,12} \le 0;$ $-M_{12} - C1N_{11-12} - M_{0,12} \le 0;$
13	$M_{13} + C3N_{13-14} - M_{0,13} \le 0;$ $M_{13} - C3N_{13-14} - M_{0,13} \le 0;$ $-M_{13} + C3N_{13-14} - M_{0,13} \le 0;$ $-M_{13} - C3N_{13-14} - M_{0,13} \le 0;$	14	$M_{14} + C3N_{13-14} - M_{0,14} \le 0;$ $M_{14} - C3N_{13-14} - M_{0,14} \le 0;$ $-M_{14} + C3N_{13-14} - M_{0,14} \le 0;$ $-M_{14} - C3N_{13-14} - 14 - M_{0,14} \le 0;$
15	$M_{15} + C2N_{15-16} - M_{0,15} \le 0;$ $M_{15} - C2N_{15-16} - M_{0,15} \le 0;$ $-M_{15} + C2N_{15-16} - M_{0,15} \le 0;$ $-M_{15} - C2N_{15-16} - M_{0,15} \le 0;$	16	$M_{16} + C2N_{15-16} - M_{0,16} \le 0;$ $M_{16} - C2N_{15-16} - M_{0,16} \le 0;$ $-M_{16} + C2N_{15-16} - M_{0,16} \le 0;$ $-M_{16} - C2N_{15-16} - M_{0,16} \le 0;$
17	$M_{17} + C1N_{17-18} - M_{0,17} \le 0;$ $M_{17} - C1N_{17-18} - M_{0,17} \le 0;$ $-M_{17} + C1N_{17-18} - M_{0,17} \le 0;$ $-M_{17} - C1N_{17-18} - M_{0,17} \le 0;$	18	$M_{18} + C1N_{17-18} - M_{0,18} \le 0;$ $M_{18} - C1N_{17-18} - M_{0,18} \le 0;$ $-M_{18} + C1N_{17-18} - M_{0,18} \le 0;$ $-M_{18} - C1N_{17-18} - M_{0,18} \le 0;$
19	$M_{19} + C3N_{19-20} - M_{0,19} \le 0;$ $M_{19} - C3N_{19-20} - M_{0,19} \le 0;$ $-M_{19} + C3N_{19-20} - M_{0,19} \le 0;$ $-M_{19} - C3N_{19-20} - M_{0,19} \le 0;$	20	$M_{20} + C3N_{19-20} - M_{0,20} \le 0;$ $M_{20} - C3N_{19-20} - M_{0,20} \le 0;$ $-M_{20} + C3N_{19-20} - M_{0,20} \le 0;$ $-M_{20} - C3N_{19-20} - M_{0,20} \le 0;$
21	$M_{21} + C2N_{21-22} - M_{0,21} \le 0;$ $M_{21} - C2N_{21-22} - M_{0,21} \le 0;$ $-M_{21} + C2N_{21-22} - M_{0,21} \le 0;$ $-M_{21} - C2N_{21-22} - M_{0,21} \le 0;$	22	$M_{22} + C2N_{21-22} - M_{0,22} \le 0;$ $M_{22} - C2N_{21-22} - M_{0,22} \le 0;$ $-M_{22} + C2N_{21-22} - M_{0,22} \le 0;$ $-M_{22} - C2N_{21-22} - M_{0,22} \le 0;$

3.2 lentelės tęsinys

Elemento pjūvis	Takumo sąlygų išraiškos	Elemento pjūvis	Takumo sąlygų išraiškos
23	$M_{23}+C1N_{23-24}-M_{0,23}\le 0;$ $M_{23}-C1N_{23-24}-M_{0,23}\le 0;$ $-M_{23}+C1N_{23-24}-M_{0,23}\le 0;$ $-M_{23}-C1N_{23-24}-M_{0,23}\le 0;$	24	$M_{24}+C1N_{23-24}-M_{0,24}\le 0;$ $M_{24}-C1N_{23-24}-M_{0,24}\le 0;$ $-M_{24}+C1N_{23-24}-M_{0,24}\le 0;$ $-M_{24}-C1N_{23-24}-M_{0,24}\le 0;$
25	$M_{25}+C3N_{25-26}-M_{0,25}\le 0;$ $M_{25}-C3N_{25-26}-M_{0,25}\le 0;$ $-M_{25}+C3N_{25-26}-M_{0,25}\le 0;$ $-M_{25}-C3N_{25-26}-M_{0,25}\le 0;$	26	$M_{26}+C3N_{25-26}-M_{0,26}\le 0;$ $M_{26}-C3N_{25-26}-M_{0,26}\le 0;$ $-M_{26}+C3N_{25-26}-M_{0,26}\le 0;$ $-M_{26}-C3N_{25-26}-M_{0,26}\le 0.$

3.2.3. Santvaros optimizavimo (3.1)–(3.8) uždavinio sprendimas

Sprendžiamas 3.1 paveiklse parodytos Virandelio santvaros ribinio momento $\boldsymbol{M}_0$ optimalaus pasiskirstymo nustatymo (3.1)–(3.8) uždavinys.

Santvaros ribinių momentų skaičiavimas atliekamas matematiniu paketu *MATLAB*. Uždavinio sprendimo *MATLAB* aplinkoje taikant paprogramę **linprog** valdymo programos tekstas yra toks:

```
close all
clear all
clc
% optimizacijos plastiskojo suirimo metu uzdavinys
% sudarau pradinius duomenis
% tikslo funkcijos koeficientu vektorius
zingsnis=5;
c=zeros(42,1);
c(40,1)=4;
c(41,1)=4;
c(42,1)=2.5;
c;
% sudarau apribojimu koef matrica Aeq
Aeq=zeros(27,42);
L1 = 1; L2 = 1; L3=0.5;
% pusiausvyros lygciu matrica
A=[1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
```

(3.1)–(3.8) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys

```
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0];
Aeq(1:27,1:39)=A;
A;
beq=[0;0;7;0;0;1.5;0;0;0;0;0;0;0;0;8;0;0;5;0;0;0;0;0;3;0;0;0]
Anq=zeros(107,42);
C1=(0.025);
C2=(0.0375);
C3=(0.0125);
for iteracija=1:zingsnis
Fi=[  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
-1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  -1  0 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  -1 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0;
```

(3.1)–(3.8) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys

```
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
```

(3.1)–(3.8) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys

```
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0
-C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1
-C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  -1  0 C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  -1 C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C3;
```

(3.1)–(3.8) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys

```
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3];
Anq(1:104,1:39)=Fi;
Fi;
G=[0 0 -1;                          0 -1 0;                          -1 0 0;
   0 0 -1;                          0 -1 0;                          -1 0 0;
   0 0 -1;                          0 -1 0;                          0 0 -1;
   0 0 -1;                          0 -1 0;                          0 0 -1;
   0 0 -1;                          0 -1 0;                          0 0 -1;
   0 0 -1;                          -1 0 0;                          0 0 -1;
   0 0 -1;                          -1 0 0;                          0 0 -1;
   0 0 -1;                          -1 0 0;                          0 0 -1;
   0 -1 0;                          -1 0 0;                          0 0 -1;
   0 -1 0;                          -1 0 0;                          0 0 -1;
   0 -1 0;                          -1 0 0;                          0 -1 0;
   0 -1 0;                          -1 0 0;                          0 -1 0;
   0 -1 0;                          -1 0 0;                          0 -1 0;
   0 -1 0;                          0 0 -1;                          0 -1 0;
   0 -1 0;                          0 0 -1;                          0 -1 0;
   0 -1 0;                          0 0 -1;                          0 -1 0;
   -1 0 0;                          0 0 -1;                          0 -1 0;
   -1 0 0;                          0 0 -1;                          0 -1 0;
   -1 0 0;                          0 0 -1;                          -1 0 0;
   -1 0 0;                          0 0 -1;                          -1 0 0;
   -1 0 0;                          0 0 -1;                          -1 0 0;
   -1 0 0;                          0 -1 0;                          -1 0 0;
   -1 0 0;                          0 -1 0;                          -1 0 0;
   -1 0 0;                          0 -1 0;                          -1 0 0;
   0 0 -1;                          0 -1 0;                          -1 0 0;
   0 0 -1;                          0 -1 0;                          -1 0 0;
   0 0 -1;                          0 -1 0;                          0 0 -1;
   0 0 -1;                          0 -1 0;                          0 0 -1;
   0 0 -1;                          0 -1 0;                          0 0 -1;
   0 0 -1;                          -1 0 0;                          0 0 -1;
   0 0 -1;                          -1 0 0;                          0 0 -1;
   0 0 -1;                          -1 0 0;                          0 0 -1;
   0 -1 0;                          -1 0 0;                          0 0 -1;
   0 -1 0;                          -1 0 0;                          0 0 -1];
   0 -1 0;                          -1 0 0;
Anq(1:104,40:42)=G
G;
Anq(105,40)=-1;
Anq(106,41)=-1;
Anq(107,42)=-1;
bnq=zeros(107,1);
[x,fval,exitflag]= linprog(c,Anq,bnq,Aeq,beq);
x
% nauji ribiniai momentai
mo1=x(40,1); mo2=x(41,1); mo3=x(42,1);
% nauji skerspjuvio auksciai
sigmay=235e3
h1=((4*mo1)/sigmay)^(1/3); h2=((4*mo2)/sigmay)^(1/3);
```

(3.1)–(3.8) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys

```
h3=((4*mo3)/sigmay)^(1/3);
A1=h1*h1; A2=h2*h2; A3=h3*h3;
C1=h1/4; C2=h2/4; C3=h3/4;
for i=1:3
rez(iteracija,i)=x(39+i); rez(iteracija,5)=fval;
end;
end;
rez
auksciai=[h1 h2 h3]
h=[h1 h2 h3]
A=[A1 A2 A3]
C=[C1 C2 C3]
irazos=x(1:42,1)
kontrole=Anq*x
%nustatysime opt uzdavinio kinematines formuluotes dydzius. Siuo atveju
%kreipinys i programa linprog
[x,fval,exitflag,output,lambda]= linprog(c,Anq,bnq,Aeq,beq);
posgr=-lambda.eqlin
y=lambda.ineqlin
def=Fi'*y(1:104,1)
```

3.2.4. Santvaros optimizavimo (3.1)–(3.8) uždavinio skaičiavimų rezultatų analizė

Skaičiavimo procesas buvo atliekamas iteracijomis. Pirmos iteracijos metu buvo užsiduoti tokie skerspjūvių aukščiai: apatinės juostos skerspjūvio aukštis $h_{pr} = 0{,}1\ \text{cm}^2$, viršutinės juostos skerspjūvio aukštis $h_{pr} = 0{,}15\ \text{cm}^2$ ir spyrių skerspjūvio aukštis $h_{pr} = 0{,}05\ \text{cm}^2$. 3.3 lentelėje pateikiami Virandelio santvaros ribinės pusiausvyros statinės (3.1)–(3.4) ir kinematinės (3.5)–(3.8) uždavinių iteracinio skaičiavimo rezultatai.

3.3 lentelė. Santvaros (3.1 pav. ir 3.2 pav.) ribinių momentų ir tikslo funkcijos reikšmės iteracijų metu

Iteracija	M_{01} (kNm)	M_{02} (kNm)	M_{03} (kNm)	$\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{M_0}$ (kNm^2)
1	2,2344	2,3359	2,0687	23,4531
2	2,0996	2,1006	2,0558	21,9401
3	2,0982	2,0982	2,0558	21,9248
4	2,0981	2,0981	2,0558	21,9246
5	2,0981	2,0981	2,0558	21,9246

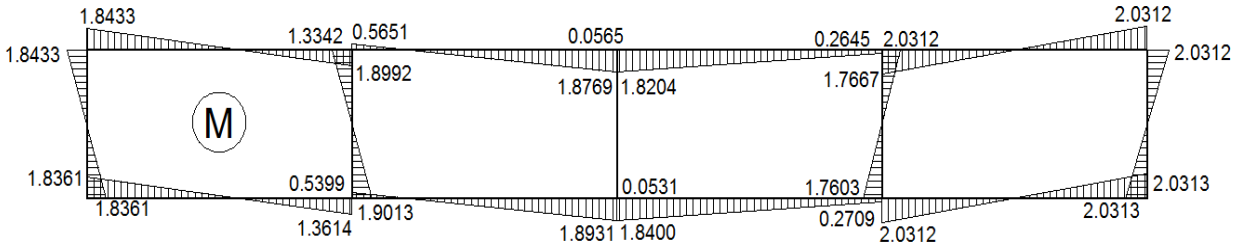
Paskutinės iteracijos metu gauti tokie skerspjūvių plotai: $A_1 = 0{,}0011\ \text{m}^2$, $A_2 = 0{,}0011\ \text{m}^2$ ir $A_3 = 0{,}0011\ \text{m}^2$.

Gautos tokios statinės formuluotės uždavinio nežinomųjų reikšmės:

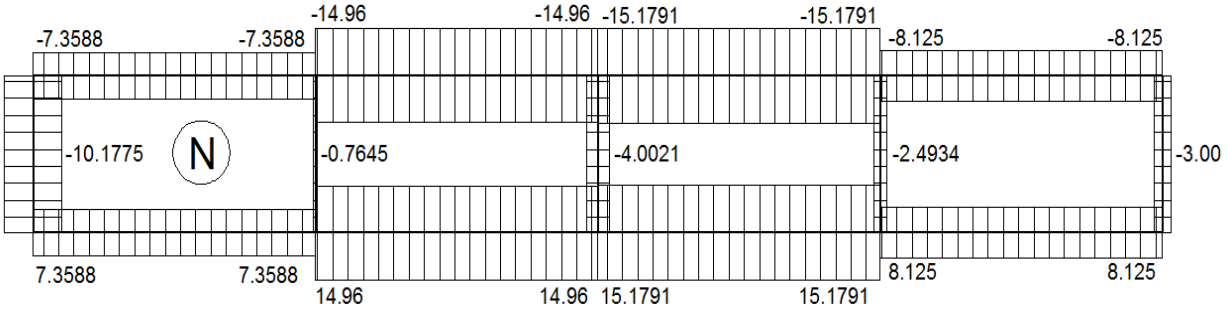
$$[\boldsymbol{S}] = [1{,}8361 \quad -1{,}8433 \quad -10{,}1775 \quad -1{,}8433 \quad 1{,}3342 \quad -7{,}3588 \quad -1{,}8361 \quad 1{,}3614$$
$$7{,}3588 \quad 1{,}9013 \quad -1{,}8992 \quad -0{,}7645 \quad -0{,}5651 \quad 1{,}8769 \quad -14{,}96 \quad -0{,}5399 \quad 1{,}8931 \quad 14{,}96 \quad 0{,}0531$$
$$-0{,}0565 \quad -4{,}0021 \quad 1{,}8204 \quad 0{,}2645 \quad -15{,}1791 \quad 1{,}84 \quad 0{,}2709 \quad 15{,}1791 \quad -1{,}7603 \quad 1{,}7667$$
$$-2{,}4934 \quad 2{,}0313 \quad -2{,}0313 \quad 8{,}125 \quad 2{,}0312 \quad -2{,}0313 \quad -8{,}125 \quad 2{,}0312 \quad -2{,}0312 \quad -3{,}0]^T,$$

$$[\boldsymbol{M_0}] = [2{,}0981 \quad 2{,}0981 \quad 2{,}0558]^T.$$

Lenkimo momentų diagrama santvaroje plastinio suirimo metu pavaizduota 3.3 paveiksle, ašinių jėgų reikšmės pavaizduotos 3.4 paveiksle.



3.3 pav. Santvaros lenkimo momentų *M* diagrama plastinio suirimo metu



3.4 pav. Santvaros ašinių jėgų *N* reikšmės plastinio suirimo metu

Išsprendus statinės formuluotės optimizavimo (3.1)–(3.4) uždavinio paskutinę iteraciją, galima pereiti prie optimizavimo uždavinio kinematinės (3.5)–(3.8) formuluotės sprendinio ir pritaikius dualiąsias sąlygas gaunami kinematinės formuluotės uždavinio kintamieji.

Poslinkių greičių reikšmės gautos tokios:

$$[\dot{\boldsymbol{u}}] = [0{,}6727 \quad 0{,}3364 \quad 0{,}0 \quad 0{,}6727 \quad 0{,}3364 \quad 0{,}6727 \quad 0{,}6727 \quad 0{,}0 \quad 0{,}6727 \quad 0{,}6727 \quad 0{,}0$$
$$1{,}3454 \quad 0{,}6727 \quad 0{,}3364 \quad 1{,}3454 \quad 0{,}6727 \quad 0{,}3364 \quad 2{,}0181 \quad 0{,}6727 \quad 0{,}0 \quad 2{,}0181 \quad 0{,}6727 \quad 0{,}3034$$
$$0{,}0204 \quad -0{,}709 \quad 0{,}0329 \quad -0{,}709].$$

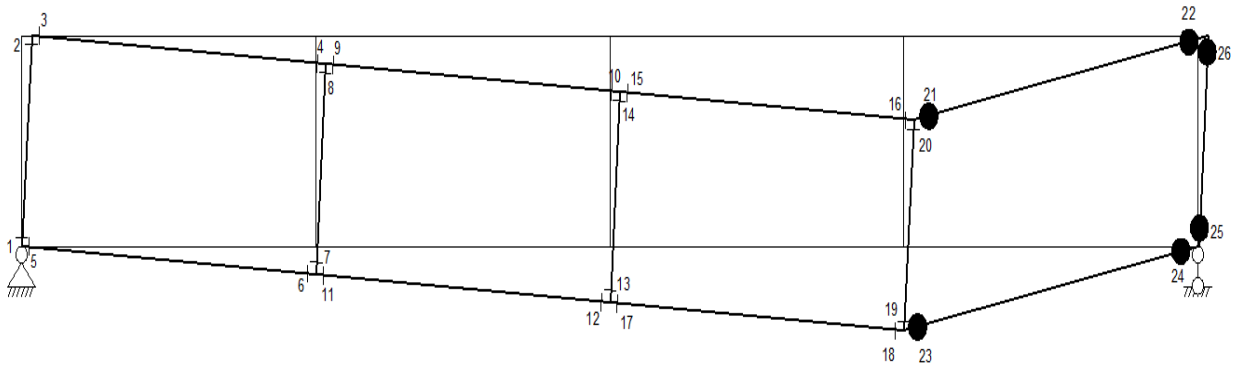
Pagal matematinį (3.5)–(3.8) nustatomi plastinių deformacijų greičiai:

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}_p = \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}};$$

$$\left[\dot{\boldsymbol{\Theta}}_p\right] = [0{,}0\ \ -0{,}0\ \ -0{,}0\ \ -0{,}0\ \ 0{,}0\ \ -0{,}0\ \ -0{,}0\ \ 0{,}0\ \ 0{,}0\ \ 0{,}0\ \ -0{,}0\ \ -0{,}0\ \ -0{,}0\ \ 0{,}0$$
$$-0{,}0\ \ -0{,}0\ \ 0{,}0\ \ 0{,}0\ \ 0{,}0\ \ -0{,}0\ \ -0{,}0\ \ 0{,}0\ \ 0{,}0\ \ -0{,}0\ \ 0{,}0\ \ -0{,}0\ \ 0{,}0\ \ -0{,}0\ \ 0{,}0\ \ -0{,}0\ \ 2{,}7113$$
$$-1{,}2887\ \ -0{,}0329\ \ 2{,}6909\ \ -1{,}3091\ \ 0{,}0329\ \ -1{,}25\ \ 1{,}25\ \ -0{,}0204].$$

Suirimo mechanizmą identifikuoti padeda poslinkių greičių $\dot{\boldsymbol{u}}$ ir plastinių deformacijų $\dot{\boldsymbol{\Theta}}_p$ vektoriai. Pagal plastinių deformacijų greičių $\dot{\boldsymbol{\Theta}}_p$ vektorių nustatome plastinių lankstų atsiradimo vietas. Vektoriuje gauti nenuliniai komponentai: matyti devynios nenulinės plastinių deformacijų reikšmės. Šešiuose santvaros pjūviuose atsivėrė plastiniai lankstai. Gautasis planas yra išsigimęs, nes statinio neišsprendžiamumo laipsnis k = 12, o suirimo metu atsivėrė tik 6 plastiniai lankstai. Tai neatitinka vienintelio įrąžų pasiskirstymo pobūdžio santvaros pilnojo plastinio irimo mechanizme.

Optimalus santvaros plastinio irimo mechanizmas pavaizduotas 3.5 paveiksle.



3.5 pav. Optimalios santvaros dalinis plastinio irimo mechanizmas

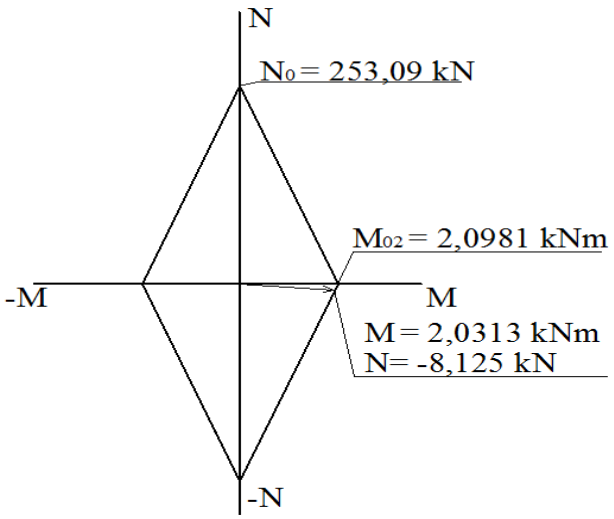
Skaičiuojame elementų pjūviuose patyrusiuose pilnutinį tekėjima N_0 reikšmes.

$$\frac{h}{4} N_0 \le M_{0,i},$$

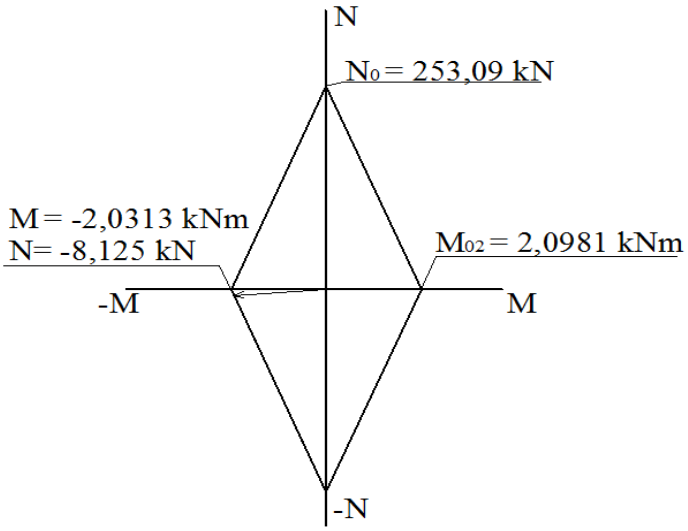
čia h – skerspjūvio aukštis išskaičiuotas 3 iteracijos metu, h = 0,03316 m. $M_{0,\mathrm{i}}$ – ribinis lenkimo momentas skaičiuojamajame pjūvyje, šiuo atveju $M_{0,1}$ = 2,0981 kNm.

$$N_0 = \frac{2{,}0981 \cdot 4}{0{,}03316} = 253{,}09 \text{ kN}.$$

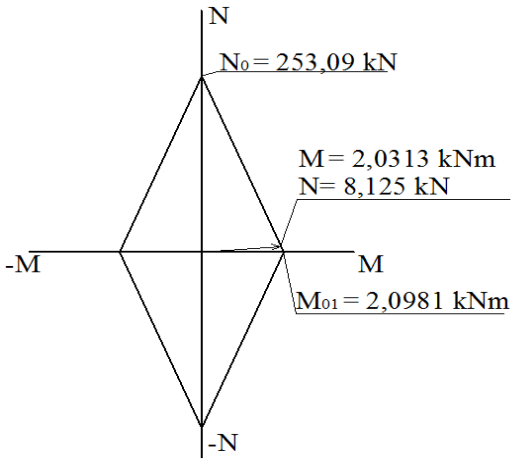
Kiekvieno elemento pjūviai, kuriuose buvo pasiektas pilnutinis tekėjimas pavaizduoti 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 paveiksluose.



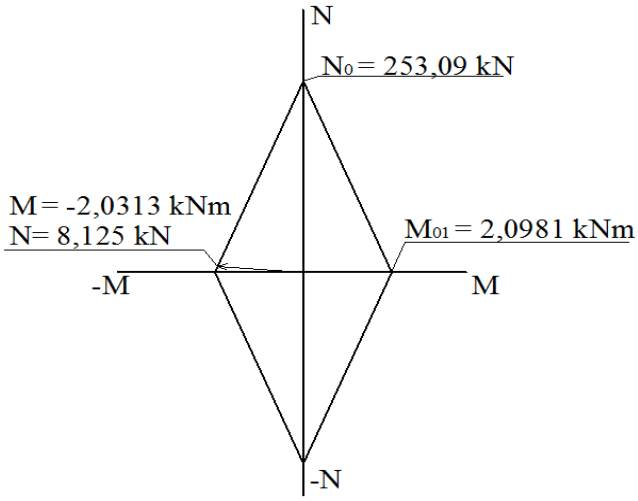
3.6 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiame elemento pjūvyje 21



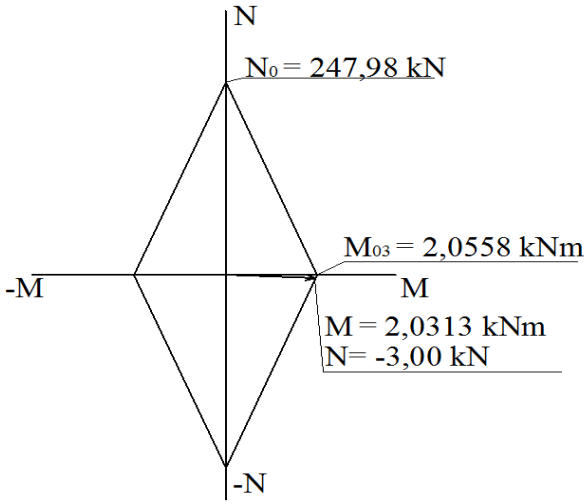
3.7 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiame elemento pjūvyje 22



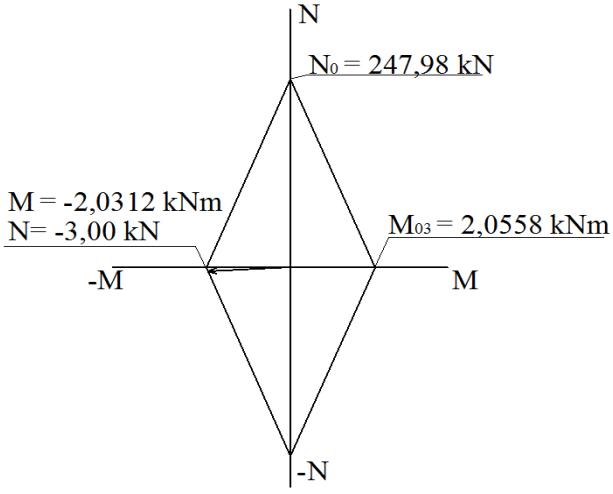
3.8 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiame elemento pjūvyje 23



3.9 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiame elemento pjūvyje 24



3.10 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiame elemento pjūvyje 25



3.11 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiame elemento pjūvyje 26

3.3. Santvaros įtempių ir deformacijų analizės uždavinys

3.3.1. Analizės uždavinio matematinis modelis

Ribinis pusiausvyros būvis, kai Virandelio santvara tampa plastiniu irimo mechanizmu. Projektuotoją dažnai domina ne plastinis irimas, bet situacija, kai pasireiškia viename ar kitame pjūvyje plastinės deformacijos. Šiame magistrantūros darbe analizės uždavinys sudaromas Haro ir Karmano principu (Koiter 1960). Statinės analizės uždavinio formuluotė išreiškia: *iš visų statiškai leistinų liekamųjų įrąžų vektorių sistemoje, kuri visiškai plastiškai nesuiro, tikrasis yra tas, kuris atitinka minimalią papildomo deformavimo energiją.*

Uždavinio statinė formuluotė:

rasti $$\min \ \frac{1}{2}\boldsymbol{S}_r^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}_r, \tag{3.10}$$

kai $$-\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{S}_r \geq \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{S}_e - \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{S}_0, \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{0}. \tag{3.12}$$

Čia $\boldsymbol{S_r}$ – liekamųjų įrąžų vektorius, $\boldsymbol{S_e}$ – tamprių įrąžų vektorius, $\boldsymbol{D}$ – pasiduodamumo matrica.

Tamprių įrąžų išraiška:

$$\boldsymbol{S}_e = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{F}. \tag{3.13}$$

Priklausomybė tarp įrąžų:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_r. \tag{3.14}$$

Uždavinio kinemtinė formuluotė:

rasti $$\max \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_r{}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}_r + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{S}_e - \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{S}_0) \right), \tag{3.15}$$

kai $$\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}_r - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}, \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}. \tag{3.17}$$

Gautas matematinis modelis gali būti tobulinamas pasitelkus lygybę. Šiose lygybėse matrica $\boldsymbol{D}$ yra kvadratinė, todėl iš čia mes galime išreikšti $\boldsymbol{S_r}$ per kvadratinius dydžius

$$\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}_r - \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\lambda}). \tag{3.18}$$

Gaunamos liekamosios įrąžos išreikštos per kinematinius dydžius. Liekamosios įrąžos yra savaiminėje pusiausvyroje – tenkina pusiausvyros lygtis

$$\boldsymbol{AKA^T u_r} - \boldsymbol{AK\Phi^T \lambda} = \boldsymbol{0}; \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{u_r} = (\boldsymbol{AKA^T})^{-1} \boldsymbol{AK\Phi^T \lambda}; \tag{3.20}$$

$$\bar{\boldsymbol{H}} = (\boldsymbol{AKA^T})^{-1} \boldsymbol{AK}. \tag{3.21}$$

Šita matrica vadinama liekamųjų poslinkų influentinė matrica. Jos bet kurio elemento H_{ij} fizinė prasmė reiškia liekamojo poslinkio dydį gautą nuo vienetinės plastinės deformacijos.

$$\boldsymbol{u_r} = \bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{\Phi^T \lambda}; \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{S_r} = \boldsymbol{KA^T \bar{H} \Phi^T \lambda} - \boldsymbol{K\Phi^T \lambda}; \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{S_r} = (\boldsymbol{KA^T \bar{H}} - \boldsymbol{K})\boldsymbol{\Phi^T \lambda}; \tag{3.24}$$

$$\bar{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{KA^T \bar{H}} - \boldsymbol{K}; \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{S_r} = \bar{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\Phi^T \lambda}. \tag{3.26}$$

Galutinio analizės uždavinio matematinio modelio, kurį išsprendus randamos plastiškųjų deformacijų dydžiai, išraiška yra tokia:

rasti $$\max \left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda^T \Phi \bar{G}^T D \bar{G} \Phi^T \lambda} + \boldsymbol{\lambda^T (\Phi S_e - \Gamma S_0)} \right), \tag{3.27}$$

kai $$\boldsymbol{DS_r} - \boldsymbol{A^T u_r} + \boldsymbol{\Phi^T \lambda} = \boldsymbol{0}, \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}. \tag{3.29}$$

Tamprių poslinkių išraiška:

$$\boldsymbol{u_e} = (\boldsymbol{AD^{-1}A^T})^{-1} \boldsymbol{F}. \tag{3.30}$$

Priklausomybė tarp poslinkių:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_e} + \boldsymbol{u_r}. \tag{3.31}$$

3.3.2. Analizės uždavinio sprendimas

Santvarą veikia vienkartė apkrova:

$$F = [0\ 0\ 7\ 0\ 0\ 1{,}5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 8\ 0\ 0\ 5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0].$$

3 skyriaus 2 poskyryje buvo išspręstas ribinio momento optimalaus pasiskirstymo (3.1) – (3.4) uždavinys. Gauta: santvaros ribinių momentų reikšmės

$$\boldsymbol{M_0} = \left[2{,}0981\ \ 2{,}0981\ \ 2{,}0558\right]^T$$

ir santvaros nežinomųjų reikšmės

$$\boldsymbol{S} = [1{,}8361 \;\; -1{,}8433 \;\; -10{,}1775 \; -1{,}8433 \;\; 1{,}3342 \;\; -7{,}3588 \;\; -1{,}8361 \;\; 1{,}3614 \;\; 7{,}3588 \;\; 1{,}9013 \;\; -1{,}8992 \;\; -0{,}7645 \;\; -0{,}5651 \;\; 1{,}8769 \;\; -14{,}96 \;\; -0{,}5399 \;\; 1{,}8931 \;\; 14{,}96 \;\; 0{,}0531 \;\; -0{,}0565 \;\; -4{,}0021 \;\; 1{,}8204 \;\; 0{,}2645 \;\; -15{,}1791 \;\; 1{,}84 \;\; 0{,}2709 \;\; 15{,}1791 \;\; -1{,}7603 \;\; 1{,}766 \; -2{,}4934 \;\; 2{,}0313 \;\; -2{,}0313 \;\; 8{,}125 \;\; 2{,}0312 \;\; -2{,}0313 \;\; -8{,}125 \;\; 2{,}0312 \;\; -2{,}0312 \;\; -3{,}0]^T$$

plastinio suirimo metu.

Dabar bus sprendžiamas analizės uždavinys $(3.10)-(3.12)$. Tamprios įrąžos $\boldsymbol{S}_e = \boldsymbol{\alpha F}$. Taigi $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_r$, išsprendus analizės uždavinį gaunamos $\boldsymbol{S}_r$ reikšmės. Šiuo atveju įmanoma patikrinti optimalų uždavinio $\boldsymbol{S}$.

$(3.10)-(3.12)$ ir $(3.27)-(3.29)$ uždavinių sprendimo *MATLAB* paketu programos tekstas yra toks:

```
close all
clear all
clc
echo on
sigmay=235e3;
mo1=2.0981; mo2=2.0981; mo3=2.0558;
E=210e6;
h1=((4*mo1)/sigmay)^(1/3); h2=((4*mo2)/sigmay)^(1/3);
h3=((4*mo3)/sigmay)^(1/3);
A1=h1*h1; A2=h2*h2; A3=h3*h3;
I1=(h1*(h1^3))/12; I2=(h2*(h2^3))/12; I3=(h3*(h3^3))/12;
L1=1; L2=1; L3=0.5;
% pusiausvyros lygciu matrica
A=[1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0];
A
% apkrovos vektorius
Fk =[0;0;7;0;0;1.5;0;0;0;0;0;0;0;0;8;0;0;5;0;0;0;0;0;3;0;0;0];
F = Fk*0.982;
F;
% pasiduodamumo matrica
```

(3.10) – (3.12) ir (3.27) – (3.29) uždavinių sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys

```
D=zeros(39,39);
D(1,1)=L3/(3*E*I3); D(1,2)=L3/(6*E*I3);
D(2,1)=L3/(6*E*I3); D(2,2)=L3/(3*E*I3); D(3,3)=L3/(E*A3);
D(4,4)=L2/(3*E*I2); D(4,5)=L2/(6*E*I2);
D(5,4)=L2/(6*E*I2); D(5,5)=L2/(3*E*I2); D(6,6)=L2/(E*A2);
D(7,7)=L1/(3*E*I1); D(7,8)=L1/(6*E*I1);
D(8,7)=L1/(6*E*I1); D(8,8)=L1/(3*E*I1); D(9,9)=L1/(E*A1);
D(10,10)=L3/(3*E*I3); D(10,11)=L3/(6*E*I3);
D(11,10)=L3/(6*E*I3); D(11,11)=L3/(3*E*I3); D(12,12)=L3/(E*A3);
D(13,13)=L2/(3*E*I2); D(13,14)=L2/(6*E*I2);
D(14,13)=L2/(6*E*I2); D(14,14)=L2/(3*E*I2); D(15,15)=L2/(E*A2);
D(16,16)=L1/(3*E*I1); D(16,17)=L1/(6*E*I1);
D(17,16)=L1/(6*E*I1); D(17,17)=L1/(3*E*I1); D(18,18)=L1/(E*A1);
D(19,19)=L3/(3*E*I3); D(19,20)=L3/(6*E*I3);
D(20,19)=L3/(6*E*I3); D(20,20)=L3/(3*E*I3); D(21,21)=L3/(E*A3);
D(22,22)=L2/(3*E*I2); D(22,23)=L2/(6*E*I2);
D(23,22)=L2/(6*E*I2); D(23,23)=L2/(3*E*I2); D(24,24)=L2/(E*A2);
D(25,25)=L1/(3*E*I1); D(25,26)=L1/(6*E*I1);
D(26,25)=L1/(6*E*I1); D(26,26)=L1/(3*E*I1); D(27,27)=L1/(E*A1);
D(28,28)=L3/(3*E*I3); D(28,29)=L3/(6*E*I3);
D(29,28)=L3/(6*E*I3); D(29,29)=L3/(3*E*I3); D(30,30)=L3/(E*A3);
D(31,31)=L2/(3*E*I2); D(31,32)=L2/(6*E*I2);
D(32,31)=L2/(6*E*I2); D(32,32)=L2/(3*E*I2); D(33,33)=L2/(E*A2);
D(34,34)=L1/(3*E*I1); D(34,35)=L1/(6*E*I1);
D(35,34)=L1/(6*E*I1); D(35,35)=L1/(3*E*I1); D(36,36)=L1/(E*A1);
D(37,37)=L3/(3*E*I3); D(37,38)=L3/(6*E*I3);
D(38,37)=L3/(6*E*I3); D(38,38)=L3/(3*E*I3); D(39,39)=L3/(E*A3);
D;
K=A*inv(D)*A'; ue=inv(K)*F; Se=(inv(D))*A'*ue;
Se
% matrica Anq
C1=(h1/4);
C2=(h2/4);
C3=(h3/4);
Fi=[  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
-1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
```

(3.10) – (3.12) ir (3.27) – (3.29) uždavinių sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys

```
 0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0 -1  0 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0 -1 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
```

(3.10) – (3.12) ir (3.27) – (3.29) uždavinių sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys

```
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0
-C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1
-C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0;
```

(3.10) – (3.12) ir (3.27) – (3.29) uždavinių sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys

```
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  -1  0 C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  -1 C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3];
Anq = Fi;
Anq
```

```
Gk=[0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   -1 0 0;
   -1 0 0;
   -1 0 0;
   -1 0 0;
   -1 0 0;
   -1 0 0;
   -1 0 0;
   -1 0 0;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 0 -1;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   0 -1 0;
   -1 0 0;
   -1 0 0;
```

```
0 0 -1;
0 0 -1;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
```

```
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 0 -1;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
0 -1 0;
-1 0 0;
-1 0 0;
```

(3.10) – (3.12) ir (3.27) – (3.29) uždavinių sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys

```
   -1 0 0;                    -1 0 0;                    0 0 -1;
   -1 0 0;                    -1 0 0;                    0 0 -1;
   -1 0 0;                    0 0 -1;                    0 0 -1;
   -1 0 0;                    0 0 -1;                    0 0 -1;
                              0 0 -1;                    0 0 -1];
```

```
G = -1*Gk;
S0 = [mo1 mo2 mo3]';
bnq = G*S0-Fi*Se;
bnq;
Aeq = -1*A;
Aeq
beq = zeros(27,1);
beq
[x,fval,exitkvad] = quadprog(D,[],Anq,bnq,Aeq,beq)
IRAZOS = [Se x Se+x]
%analizes uzdavinys sprendziant pagal 7 matematini modeli
K=A*inv(D)*A';
K
H=inv(K)*A*inv(D);
H
GS=inv(D)*A'*H-inv(D);
GS
V=-Fi*GS*Fi';
V
V1=G*S0-Fi*Se;
V1
Anq=zeros(104,104);
bnq=zeros(104,1)
for i=1:104
    Anq(i,i)=-1;
end
[x,fval,exitkvad] = quadprog(V,V1,Anq,bnq,[],[])
Sr=GS*Fi'*x
S=Se+Sr
irazos=[S Se Sr]
Ur=H*Fi'*x
x
Ue =((A*inv(D)*A')^-1)*F;
Ue
U=(Ue+Ur)*1000
teta=Fi'*x
```

3.3.3. Analizės uždavinio sprendinio rezultatų apibendrinimas

Nagrinėjama Virandelio santvara (3.1 pav. ir 3.2 pav.). Buvo išspręstas analizės (3.10)–(3.17) uždavinys. Kiekvienam įtempių ir deformacijų būvio etapui nustatyti yra atliekamas skaičiavimo ciklas. Apkrova žinoma ir ji didinama etapais. Iteracinio skaičiavimo rezultatai pateikiami 3.4 lentelėje.

3.4 lentelė. Įtempto ir deformuoto būvio dydžių dinamika (analizės (3.10)–(3.17) uždavinys), santvara pavaizduota 3.1 ir 3.2 paveiksle

Apkrova	Lenkimo momentai ir ašinės jėgos			Poslinkiai ($u\ 10^{-3}$)		
Etapas ΔF	S_e	S_r	S	u_e	u_r	u
	1,3439	0,0011	1,3450	5,7689	–0,0132	5,7557
	–1,3429	–0,0012	–1,3442	0,0869	–0,0086	0,0782
	–8,2100	–0,0002	–8,2102	0,0183	0,0000	0,0183
	–1,3429	–0,0012	–1,3442	5,7571	–0,0117	5,7454
	1,2251	–0,0010	1,2241	0,0633	–0,0087	0,0546
	–5,3736	–0,0047	–5,3783	17,6048	0,0166	17,6214
	–1,3439	–0,0011	–1,3450	8,6197	0,0434	8,6630
	1,2264	–0,0013	1,2250	0,0236	0,0000	0,0236
	5,3736	0,0047	5,3783	17,6034	0,0155	17,6189
	2,0534	–0,0025	2,0508	8,6238	0,0457	8,6695
	–2,0530	0,0022	–2,0508	0,0833	–0,0000	0,0833
	–0,6064	0,0002	–0,6062	30,4153	0,0320	30,4472
	–0,8279	0,0012	–0,8268	1,0964	–0,0126	1,0838
	1,1375	0,0012	1,1386	0,0036	–0,0086	–0,0050
	–13,5864	0,0047	–13,5817	30,4225	0,0320	**30,4544**
	–0,8270	0,0012	–0,8258	1,0995	–0,0129	1,0867
	1,1368	0,0012	1,1380	–0,0614	–0,0086	–0,0700
	13,5864	–0,0047	13,5817	21,4326	0,0171	21,4497
	0,3021	0,0011	0,3032	–8,8789	–0,0169	–8,8958
0,806*F*	–0,3023	–0,0011	–0,3034	0,1482	–0,0000	0,1482
	–3,2230	0,0000	–3,2230	21,4281	0,0171	21,4452
	0,8352	0,0001	0,8352	–8,8739	–0,0170	–8,8909
	–0,4244	0,0001	–0,4243	–0,0906	–0,0086	–0,0993
	–14,7951	0,0003	–14,7948	0,0055	–0,0000	0,0055
	0,8348	0,0001	0,8349	–7,4683	–0,0173	–7,4856
	–0,4244	0,0001	–0,4243	0,1775	–0,0000	0,1775
	14,7951	–0,0003	14,7948	–7,4676	–0,0173	–7,4848
	–2,0325	0,0001	–2,0324			
	2,0329	–0,0001	2,0328			
	–2,0150	0,0000	–2,0150			
	1,6085	0,0000	1,6085			
	–1,6661	0,0000	–1,6661			
	–6,6642	0,0000	–6,6642			
	1,6081	0,0000	1,6081			
	–1,6660	0,0000	–1,6660			
	6,6642	–0,0000	6,6642			
	–1,6660	0,0000	–1,6660			
	1,6661	–0,0000	1,6661			
	–2,4756	0,0000	–2,4756			

3.4 lentelės tęsinys

	1,3489	0,0048	1,3537	5,7904	–0,0499	5,7404
	–1,3479	–0,0052	–1,3531	0,0872	–0,0342	0,0530
	–8,2406	–0,0005	–8,2411	0,0183	0,0000	0,0183
	–1,3479	–0,0052	–1,3531	5,7785	–0,0455	5,7330
	1,2297	–0,0046	1,2250	0,0635	–0,0343	0,0292
	–5,3936	–0,0199	–5,4135	17,6703	0,0757	17,7459
	–1,3489	–0,0048	–1,3537	8,6518	0,1927	8,8444
	1,2309	–0,0053	1,2256	0,0237	0,0001	0,0238
	5,3936	0,0199	5,4135	17,6689	0,0707	17,7396
	2,0610	–0,0102	2,0508	8,6559	0,1954	8,8513
	–2,0607	0,0098	–2,0508	0,0836	–0,0000	0,0836
	–0,6086	0,0009	–0,6078	30,5285	0,1450	30,6735
	–0,8310	0,0052	–0,8258	1,1005	–0,0497	1,0508
	1,1417	0,0048	1,1466	0,0036	–0,0342	–0,0306
	–13,6369	0,0201	–13,6168	30,5357	0,1450	**30,6807**
	–0,8301	0,0049	–0,8252	1,1036	–0,0512	1,0524
	1,1411	0,0052	1,1463	–0,0616	–0,0342	–0,0958
	13,6369	–0,0201	13,6168	21,5124	0,0775	21,5898
	0,3032	0,0044	0,3076	–8,9119	–0,0860	–8,9979
0,809*F*	–0,3034	–0,0043	–0,3077	0,1488	–0,0000	0,1488
	–3,2350	–0,0006	–3,2356	21,5079	0,0771	21,5850
	0,8383	0,0006	0,8389	–8,9069	–0,0839	–8,9908
	–0,4260	0,0008	–0,4252	–0,0910	–0,0342	–0,1252
	–14,8502	0,0028	–14,8474	0,0055	0,0000	0,0055
	0,8379	0,0008	0,8387	–7,4961	–0,0695	–7,5657
	–0,4260	0,0006	–0,4254	0,1781	–0,0000	0,1781
	14,8502	–0,0028	14,8474	–7,4953	–0,0698	–7,5652
	–2,0401	0,0008	–2,0393			
	2,0405	–0,0012	2,0393			
	–2,0225	0,0002	–2,0223			
	1,6145	–0,0004	1,6141			
	–1,6723	–0,0003	–1,6726			
	–6,6890	–0,0013	–6,6903			
	1,6141	–0,0003	1,6139			
	–1,6722	–0,0003	–1,6726			
	6,6890	0,0013	6,6903			
	–1,6722	–0,0003	–1,6726			
	1,6723	0,0003	1,6726			
	–2,4848	–0,0007	–2,4855			
0,918*F*	1,5306	0,1338	1,6644	6,5705	0,4651	7,0357
	–1,5295	–0,1429	–1,6724	0,0989	–0,0269	0,0720
	–9,3509	–0,0120	–9,3628	0,0208	0,0000	0,0208
	–1,5295	–0,1429	–1,6724	6,5571	0,5782	7,1353
	1,3953	–0,1309	1,2645	0,0721	–0,0293	0,0427
	–6,1203	–0,5533	–6,6736	20,0511	3,9517	24,0027
	–1,5306	–0,1338	–1,6644	9,8174	7,2281	17,0455

3.4 lentelės tęsinys

	1,3968	–0,1458	1,2510	0,0269	0,0024	0,0293
	6,1203	0,5533	6,6736	20,0495	3,8126	23,8622
	2,3387	–0,2883	2,0504	9,8222	7,2572	17,0793
	–2,3383	0,2879	–2,0504	0,0948	–0,0002	0,0946
	–0,6906	0,0270	–0,6637	34,6417	7,4853	42,1270
	–0,9430	0,1571	–0,7859	1,2488	–0,0335	1,2153
	1,2955	0,1421	1,4376	0,0041	–0,0267	–0,0226
	–15,4743	0,5992	–14,8751	34,6499	7,4853	**42,1352**
	–0,9419	0,1425	–0,7994	1,2523	–0,0391	1,2132
	1,2948	0,1576	1,4524	–0,0699	–0,0242	–0,0940
	15,4743	–0,5992	14,8751	24,4108	3,9745	28,3854
	0,3440	0,0042	0,3483	–10,1126	–7,0951	–17,2077
	–0,3443	–0,0038	–0,3481	0,1688	–0,0028	0,1661
	–3,6709	–0,0289	–3,6998	24,4057	3,8399	28,2456
	0,9512	0,1383	1,0895	–10,1070	–7,1446	–17,2516
	–0,4834	0,1522	–0,3312	–0,1032	–0,0265	–0.1297
0,918*F*	–16,8510	0,5831	–16,2679	0,0063	0,0021	0,0084
	0,9508	0,1533	1,1041	–8,5061	–0,7974	–9,3035
	–0,4834	0,1394	–0,3440	0,2021	–0,0004	0,2017
	16,8510	–0,5831	16,2679	–8,5052	–0,5918	–9,0970
	–2,3150	0,2778	–2,0372			
	2,3154	–0,2782	2,0372			
	–2,2950	0,0209	–2,2741			
	1,8320	–0,1260	1,7060			
	–1,8976	–0,1330	–2,0306			
	–7,5903	–0,5288	–8,1191			
	1,8316	–0,1384	1,6933			
	–1,8975	–0,1314	–2,0289			
	7,5903	0,5288	8,1191			
	–1,8975	–0,1314	–2,0289			
	1,8976	0.1330	2,0306			
	–2,8196	–0,2591	–3,0787			
	1,6273	0,1950	1,8223	6,9857	5,8408	12,8264
	–1,6262	–0,2087	–1,8349	0,1052	2,5434	2,6486
	–9,9417	–0,0186	–9,9603	0,0221	0,0000	0,0222
	–1,6262	–0,2087	–1,8349	6,9714	6,0125	12,9838
	1,4835	–0,1901	1,2934	0,0766	2,5399	2,6165
	–6,5070	–0,8074	–7,3143	21.3179	10,9322	32,2502
	–1,6273	–0,1950	–1,8223	10,4377	15,7009	26,1386
0,976*F*	1,4850	–0,2136	1,2714	0,0286	0,0035	0,0321
	6,5070	0,8074	7,3143	21,3163	10,7283	32,0446
	2,4865	–0,4363	2,0502	10,4427	15,7668	26,2096
	–2,4860	0,4359	–2,0502	0,1008	–0,0006	0,1002
	–0,7343	0,0448	–0,6894	36,8304	20,8731	57,7035
	–1,0026	0,2458	–0,7567	1,3277	4,3106	5,6383
	1,3774	0,2196	1,5970	0,0044	2,5440	2,5484

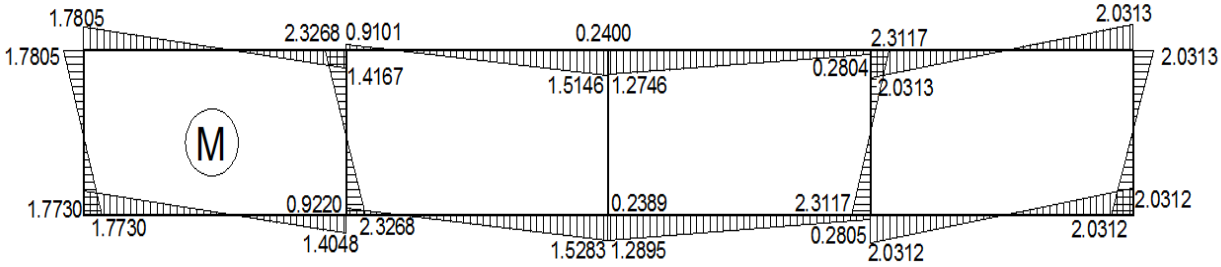
3.4 lentelės tęsinys

	–16,4520	0,9370	–15,5150	36,8391	20,8733	**57,7124**
	–1,0014	0,2227	–0,7788	1,3314	4,3934	5,7248
	1,3766	0,2489	1,6255	–0,0743	2,5512	2,4769
	16,4520	–0,9370	15,5150	25,9531	15,4141	41,3672
	0,3658	–0,1805	0,1853	–10,7516	–15,6050	–26,3566
	–0,3661	0,1739	–0,1922	0,1795	–0,0078	0,1717
	–3,9028	–0,0624	–3,9652	25,9477	15,0458	40,9935
	1,0113	0,3935	1,4048	–10,7456	–15,6720	–26,4176
	–0,5140	0,4297	–0,0843	–0,1097	2,3880	2,2783
	–17,9157	1,6457	–16,2700	0,0067	0,1493	0,1559
	1,0108	0,4294	1,4402	–9,0435	4,7175	–4,3261
	–0,5139	0,3932	–0,1207	0,2149	0,0009	0,2158
0,976*F*	17,9157	–1,6457	16,2700	–9,0426	–13,5351	–22,5777
	–2,4612	0,4249	–2,0363			
	2,4617	–0,4254	2,0363			
	–2,4400	0,0542	–2,3858			
	1,9477	0,0043	1,9520			
	–2,0175	–0,0137	–2,0312			
	–8,0699	–0,0550	–8,1248			
	1,9473	–0,0318	1,9156			
	–2,0174	–0,0138	–2,0312			
	8,0699	0,0550	8,1248			
	–2,0174	–0,0138	–2,0312			
	2,0175	0,0137	2,0312			
	–2,9978	–0,0094	–3,0072			
	1,6373	0,2013	1,8386	7,0286	6,4230	13,4516
	–1,6362	–0,2155	–1,8517	0,1058	2,8222	2,9280
	–10,0028	–0,0192	–10,0220	0,0223	0,0000	0,0223
	–1,6362	–0,2155	–1,8517	7,0142	6,5999	13,6141
	1,4926	–0,1963	1,2963	0,0771	2,8185	2,8956
	–6,5470	–0,8336	–7,3806	21,4490	11,6799	33,1289
	–1,6373	–0,2013	–1,8386	10,5019	16,6045	27,1064
	1,4941	–0,2205	1,2736	0,0287	0,0037	0,0324
	6,5470	0,8336	7,3806	21,4473	11,4693	32,9166
	1,6373	0,2013	1,8386	7,0286	6,4230	13,4516
0,982*F*	–1,6362	–0,2155	–1,8517	0,1058	2,8222	2,9280
	–10,0028	–0,0192	–10,0220	0,0223	0,0000	0,0223
	–1,6362	–0,2155	–1,8517	7,0142	6,5999	13,6141
	1,4926	–0,1963	1,2963	0,0771	2,8185	2,8956
	–6,5470	–0,8336	–7,3806	21,4490	11,6799	33,1289
	–1,6373	–0,2013	–1,8386	10,5019	16,6045	27,1064
	1,4941	–0,2205	1,2736	0,0287	0,0037	0,0324
	6,5470	0,8336	7,3806	21,4473	11,4693	32,9166
	2,5017	–0,4516	2,0501	10,5069	16,6709	27,1778
	–2,5013	0,4512	–2,0501	0,1014	–0,0006	0,1008
	–0,7388	0,0460	–0,6928	37,0568	22,3088	59,3657

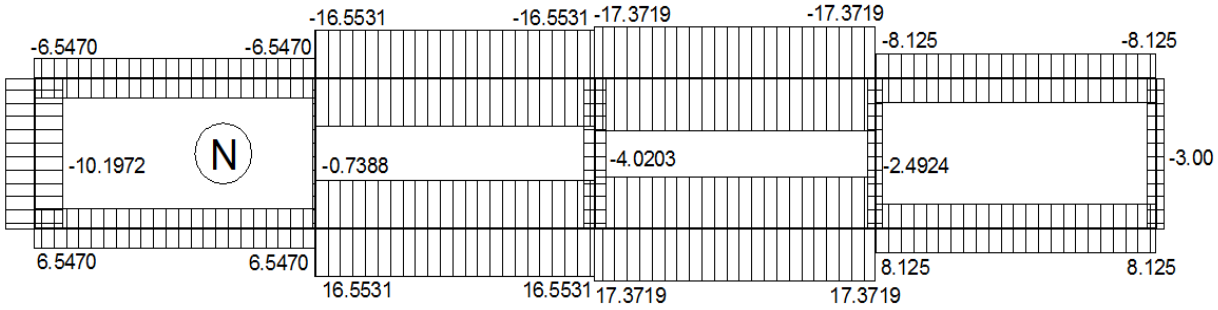
3.4 lentelės tęsinys

	–1,0087	0,2549	–0,7538	1,3358	4,7914	6,1272
	1,3859	0,2281	1,6140	0,0044	2,8228	2,8272
	–16,5531	0,9720	–15,5811	37,0656	22,3090	**59,3745**
	–1,0076	0,2311	–0,7765	1,3396	4,8704	6,2100
	1,3851	0,2579	1,6430	–0,0748	2,8305	2,7557
	16,5531	–0,9720	15,5811	26,1127	16,6683	42,7810
	0,3680	–0,1993	0,1688	–10,8177	–16,4334	–27,2510
	–0,3683	0,1929	–0,1754	0,1806	–0,0083	0,1723
	–3,9268	–0,0616	–3,9883	26,1072	16,2757	42,3829
	1,0175	0,4211	1,4386	–10,8116	–16,5759	–27,3875
	–0,5171	0,4558	–0,0613	–0,1104	2,6515	2,5411
	–18,0258	1,7564	–16,2694	0,0067	–0,0000	0,0067
	1,0171	0,4572	1,4742	–9,0991	4,9675	–4,1316
0,982*F*	–0,5170	0,4224	–0,0947	0,2162	0,1652	0,3815
	18,0258	–1,7564	16,2694	–9,0982	4,9666	–4,1316
	–2,4763	0,4402	–2,0361			
	2,4768	–0,4407	2,0361			
	–2,4550	0,0513	–2,4038			
	1,9597	0,0152	1,9749			
	–2,0299	–0,0013	–2,0312			
	–8,1195	–0,0054	–8,1248			
	1,9593	–0,0178	1,9415			
	–2,0298	–0,0014	–2,0312			
	8,1195	0,0054	8,1248			
	–2,0298	–0,0014	–2,0312			
	2,0299	0,0013	2,0312			
	–3,0162	0,0138	–3,0023			

Iš gautų rezultatų matyti, kad santvaros būklė tampri iki tol kol apkrovos parametras nesiekia **0,806*F*** reikšmę. Visi liekamieji poslinkiai ir įražos yra lygūs nuliui. Pirmųjų lankstų atsiradimo vieta yra ties 7 ir 8 pjūvių, kai apkrovos parametras pasiekia **0,806*F*** reikšmę. Nors susidarė plastiniai lankstai, bet rėmas gali dirbti tampriai, t.y. jis netapo plastiniu mechanizmu (nesuiro). Didinant apkrovą iki suiriminės **0,982*F*** plastiniai lankstai atsiras dar 19, 20, 22 ir 24 pjūviuose. Šią apkrovos reikšmė pakėlus labai mažu dydžiu, konstrukcija suirs. 3.6 paveiksle pateikiama momentų diagrma prieš plastiškąjį suirimą, 3.7 paveiksle pavaizduotos ašinių jėgų reikšmės.

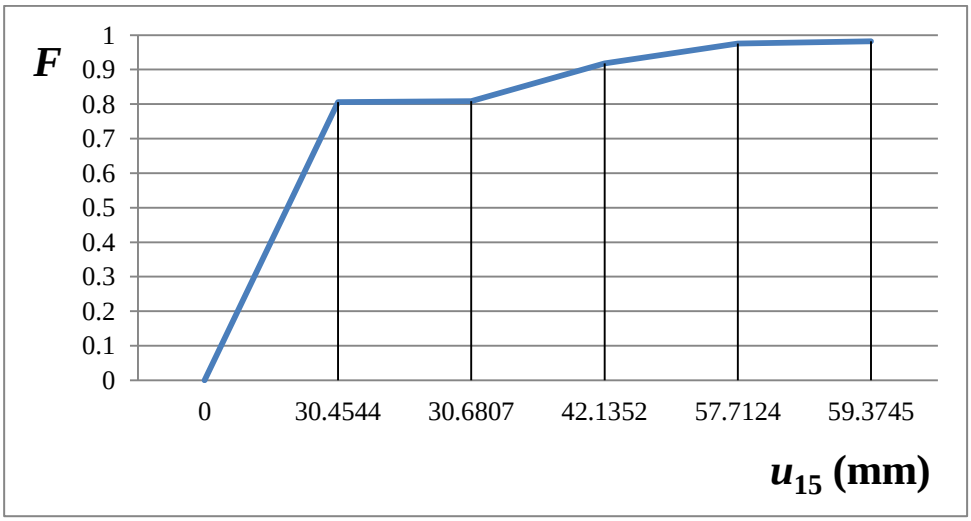


3.6 pav. Santvaros lenkimo momentų *M* diagrama prieš plastiškąjį suirimą, (kNm)



3.7 pav. Santvaros ašinių jėgų *N* reikšmės prieš plastiškąjį suirimą, (kN)

Atliekant iteracinius skaičiavimus, buvo stebimas maksimalus santvaros poslinkis 15 poslinkio kryptimi. 3.8 paveiksle pavaizduotas santvaros apkrovos ir vertikaliojo poslinkio u_{15} priklausomumas, įvertinant tampruįį ir plastinį konstrukcijos darbą. Iš gautų rezultatų matyti, kad pjūviuose atsirandant plastinėms deformacijoms, bendrasis santvaros standumas mažėja. Didžiausia vertikaliojo poslinkio reikšmė $u_{15} = 59,3745$ mm, ši reikšmė beveik du kartus didesnė už tampraus sprendinio poslinkį $u_{15} = 30,44$ mm.



3.8 pav. Santvaros (3.2 pav.) apkrovos ir vertikaliojo poslinkio u_{15} priklausomumas

3.4. Minimalaus tūrio santvaros optimizacijos uždavinys, esant standumo apribojimams

Optimizacijos rezultatai pagal plastinio irimo kriterijų ne visuomet yra lemiami, nes optimalios konstrukcijos eksploatacinė galimybė gali būti prarasta net ir nepasiekus plastinio irimo dėl per didelių plastinių deformacijų ir kartu su jomis atsiradusių poslinkių.

Deformuoto būvio parametrus įvertinimas dažniausiai yra atliekamas ribojant konstrukcijos mazgų ar atskirų pjūvių poslinkius.

Uždavinys ribojant poslinkius formuluojamas žinant konstrukcijos konfigūraciją, veikiančias išorines jėgas, jų dydžius, kryptis, pridėjimo vietą; pasirinktas pagal norminių dokumentų reikalavimų poslinkių kitimo ribas (viršutinę ir apatinę ribas); pagal konstrukcijos reikalavimus pasirinktas elementų, ribinių įrąžų kitimo apatinės ribas; optimalumo kriterijų.

3.4.1. Uždavinio matematinis modelis

Reikia rasti tokį konstrukcijos ribinių įrąžų pasiskirstymą kuriame esant konstrukcijos tūris būtų minimalus, bet nebūtų pasiekta plastiško suirimo stadija. Šio uždavinio matematinis modelis sudaromas panaudojant apibendrintą Lagranžo uždavinį, užrašomos analizės uždavinio sąlygos ir konstrukcijos reikalavimai bei poslinkių ribojimo sąlygos (Atkočiūnas, Karkauskas 2010), taip gaunamas minimalaus tūrio santvaros optimizavimo uždavinio matematinis modelis:

rasti $$\min \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{S}_0, \tag{3.32}$$

kai $$\boldsymbol{\Gamma S}_0 - \boldsymbol{\Phi S}_r \geq \boldsymbol{\Phi S}_e, \tag{3.33}$$

$$\boldsymbol{A S}_r = \boldsymbol{0}, \tag{3.34}$$

$$\boldsymbol{D S}_r + \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}, \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T (\boldsymbol{\Gamma S}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{S}_r + \boldsymbol{S}_e)) = \boldsymbol{0}, \tag{3.37}$$

$$\boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{u}_e \leq \boldsymbol{u}^+, \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{u}_e \geq \boldsymbol{u}^-, \tag{3.39}$$

$$\boldsymbol{S}_0 \geq \boldsymbol{S}_0^{min}. \tag{3.40}$$

Šis uždavinys sprendžiamas iteraciniu būdu pasirenkant pradines elementų skerspjūvio charakteristikas. Sudarant takumo sąlygų matricą, standumo matricą, reikia žinoti

priklausomumą tarp atskirų konstrukcijos elementų, ribinių įrąžų ir šių charakteristikų. Dėl griežtumo sąlygų šis uždavinys yra netiesinio matematinio programavimo uždavinys. Galutinis matematinis modelis ribojant poslinkius:

rasti
$$\min \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{S}_0, \tag{3.41}$$

kai
$$\boldsymbol{\Gamma S}_0 - \boldsymbol{\Phi \bar{G} \Phi}^T \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{\Phi S}_e, \tag{3.42}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \tag{3.43}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T (\boldsymbol{\Gamma S}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\bar{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{S}_e)) = \boldsymbol{0}, \tag{3.44}$$

$$\bar{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{u}_e \leq \boldsymbol{u}^+, \tag{3.45}$$

$$\bar{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{u}_e \leq \boldsymbol{u}^-, \tag{3.46}$$

$$\boldsymbol{S}_0 \geq \boldsymbol{S}_0^{\min}, \tag{3.47}$$

kur

$$\bar{\boldsymbol{H}} = (\boldsymbol{A D}^{-1} \boldsymbol{A}^T)^{-1} \boldsymbol{A D}^{-1},$$
$$\bar{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{A}^T \bar{\boldsymbol{H}} - \boldsymbol{D}^{-1}.$$

Gautoje modifikacijoje nežinomieji yra tik ribinės įrąžos ir daugikliai.

Kaip minėjome šis uždavinys sprendžiamas iteraciniu būdu. Kiekvienoje iteracijoje tampraus atsako parametrai nustatomi pagal gautus optimalumo rezultatus. Toks iteracijų skaičiavimas tęsiamas tol, kol uždavinio sprendimo procesas pasiekia konvergenciją.

(3.41)–(3.47) matematiniuose modeliuose įvedami įlinkių apribojimai (jų ribojimu realizuojami reikalavimai santvaros mazgų poslinkiams). Pasirinktas poslinkio ribojimas (bendras poslinkių skaičius *m*) turi tenkinti nelygybę:

$$u_{i,\,\min} \leq u_i \leq u_{i,\,\max}.$$

Poslinkių minimalios ir maksimalios ribos imamos iš 3 skyriaus, iš analizės uždavinio, kada buvo nustatoma apkrovos dydis atsirandant pirmam plastiniam lankstui ir apkrova suirimo metu. Šiuo atveju minimalus poslinkis u_{min} = 30,4544 mm – atsivėrus pirmajam plastiniam lankstui, o maksimalus poslinkis u_{max} = 59,3745 mm – poslinkio reikšmė prieš pat suirimą. Uždaviniui užduodamas ribinis poslinkis (15 vertikaliojo poslinkio reikšmė) $u_{15} = 50,00$ mm.

3.4.2. Minimalaus santvaros tūrio uždavinio sprendimas

Nagrinėjama 3.1 paveiksle pavaizduota santvara. Tikslo funkcija:

$$\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{S}_0 = (L_1M_{01} + L_2M_{02} + L_3M_{03}) = (4\cdot M_{01} + 4\cdot M_{02} + 2{,}5\cdot M_{03}) \to \min.$$

(3.41) – (3.47) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos tekstas:

```
close all
clear all
clc
%skaiciavimas pagal matematini modeli 9 pagal relizacijos ypatumus
%aprasytus 11.3 skyrelyje
%Pradines ribiniu iražu reikšmes (kNm)
m01=2.3; m02=2.3; m03=2.2;
m0=[m01;m02;m03];
%Apatines ribiniu iražu reikšmes (kNm)
M01ar=2.0981; M02ar=2.0981; M03ar=2.0558;
%Poslinkiu viršutines reikšmes metrais
U15vr=0.05;
% 1. Pradiniu duomenu parengimas
sigmay=235e3;  E=210e6;
% Pradiniai skerspjuviu plotai
h1=((4*m01)/sigmay)^(1/3); h2=((4*m02)/sigmay)^(1/3);
h3=((4*m03)/sigmay)^(1/3);
A1=h1*h1; A2=h2*h2; A3=h3*h3;
I1=(h1*(h1^3))/12; I2=(h2*(h2^3))/12; I3=(h3*(h3^3))/12;
C1=h1/4; C2=h2/4; C3=h3/4;
% Duotoji apkrova
F =[0;0;7;0;0;1.5;0;0;0;0;0;0;0;0;8;0;0;5;0;0;0;0;0;3;0;0;0];
%Pradines matricos [A] ir [B], kurios oprimizavimo ciklo metu nekinta,
%parengimas
L1 = 1; L2 = 1; L3=0.5;
A=[1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0];
% Konfiguracijos matrica
B1=[0 0 -1;                    0 -1 0;                    -1 0 0;
    0 0 -1;                    0 -1 0;                    -1 0 0;
    0 0 -1;                    0 -1 0;                    -1 0 0;
    0 0 -1;                    0 -1 0;                    -1 0 0;
    0 0 -1;                    0 -1 0;                    -1 0 0;
    0 0 -1;                    0 -1 0;                    -1 0 0;
    0 0 -1;                    0 -1 0;                    0 0 -1;
    0 0 -1;                    -1 0 0;                    0 0 -1;
    0 -1 0;                    -1 0 0;                    0 0 -1;
```

(3.41) – (3.47) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
 0 0 -1;                    0 0 -1;                    0 0 -1;
 0 0 -1;                    0 0 -1;                    0 -1 0;
 0 0 -1;                    0 0 -1;                    0 -1 0;
 0 0 -1;                    0 -1 0;                    0 -1 0;
 0 0 -1;                    0 -1 0;                    0 -1 0;
 0 -1 0;                    0 -1 0;                    0 -1 0;
 0 -1 0;                    0 -1 0;                    0 -1 0;
 0 -1 0;                    0 -1 0;                    0 -1 0;
 0 -1 0;                    0 -1 0;                    0 -1 0;
 0 -1 0;                    0 -1 0;                    -1 0 0;
 0 -1 0;                    0 -1 0;                    -1 0 0;
 0 -1 0;                    -1 0 0;                    -1 0 0;
 0 -1 0;                    -1 0 0;                    -1 0 0;
 -1 0 0;                    -1 0 0;                    -1 0 0;
 -1 0 0;                    -1 0 0;                    -1 0 0;
 -1 0 0;                    -1 0 0;                    -1 0 0;
 -1 0 0;                    -1 0 0;                    -1 0 0;
 -1 0 0;                    -1 0 0;                    0 0 -1;
 -1 0 0;                    -1 0 0;                    0 0 -1;
 -1 0 0;                    0 0 -1;                    0 0 -1;
 -1 0 0;                    0 0 -1;                    0 0 -1;
 0 0 -1;                    0 0 -1;                    0 0 -1;
 0 0 -1;                    0 0 -1;                    0 0 -1;
 0 0 -1;                    0 0 -1;                    0 0 -1;
 0 0 -1;                    0 0 -1;                    0 0 -1;
 0 0 -1;                    0 0 -1;
```

```
B=-1*B1
global B
%Pradine tikslo funkcija
ilg=[4 4 2.5]; Tfs=ilg*m0
% 2. Optimizavimo ciklo pradžia
for iteracija = 1:5
% 2.1. Matricu [D] ir [Fi], kurios optimizavimo ciklo metu kinta,
D=zeros(39,39);
D(1,1)=L3/(3*E*I3); D(1,2)=L3/(6*E*I3);
D(2,1)=L3/(6*E*I3); D(2,2)=L3/(3*E*I3); D(3,3)=L3/(E*A3);
D(4,4)=L2/(3*E*I2); D(4,5)=L2/(6*E*I2);
D(5,4)=L2/(6*E*I2); D(5,5)=L2/(3*E*I2); D(6,6)=L2/(E*A2);
D(7,7)=L1/(3*E*I1); D(7,8)=L1/(6*E*I1);
D(8,7)=L1/(6*E*I1); D(8,8)=L1/(3*E*I1); D(9,9)=L1/(E*A1);
D(10,10)=L3/(3*E*I3); D(10,11)=L3/(6*E*I3);
D(11,10)=L3/(6*E*I3); D(11,11)=L3/(3*E*I3); D(12,12)=L3/(E*A3);
D(13,13)=L2/(3*E*I2); D(13,14)=L2/(6*E*I2);
D(14,13)=L2/(6*E*I2); D(14,14)=L2/(3*E*I2); D(15,15)=L2/(E*A2);
D(16,16)=L1/(3*E*I1); D(16,17)=L1/(6*E*I1);
D(17,16)=L1/(6*E*I1); D(17,17)=L1/(3*E*I1); D(18,18)=L1/(E*A1);
D(19,19)=L3/(3*E*I3); D(19,20)=L3/(6*E*I3);
D(20,19)=L3/(6*E*I3); D(20,20)=L3/(3*E*I3); D(21,21)=L3/(E*A3);
D(22,22)=L2/(3*E*I2); D(22,23)=L2/(6*E*I2);
D(23,22)=L2/(6*E*I2); D(23,23)=L2/(3*E*I2); D(24,24)=L2/(E*A2);
D(25,25)=L1/(3*E*I1); D(25,26)=L1/(6*E*I1);
D(26,25)=L1/(6*E*I1); D(26,26)=L1/(3*E*I1); D(27,27)=L1/(E*A1);
D(28,28)=L3/(3*E*I3); D(28,29)=L3/(6*E*I3);
D(29,28)=L3/(6*E*I3); D(29,29)=L3/(3*E*I3); D(30,30)=L3/(E*A3);
D(31,31)=L2/(3*E*I2); D(31,32)=L2/(6*E*I2);
D(32,31)=L2/(6*E*I2); D(32,32)=L2/(3*E*I2); D(33,33)=L2/(E*A2);
D(34,34)=L1/(3*E*I1); D(34,35)=L1/(6*E*I1);
D(35,34)=L1/(6*E*I1); D(35,35)=L1/(3*E*I1); D(36,36)=L1/(E*A1);
D(37,37)=L3/(3*E*I3); D(37,38)=L3/(6*E*I3);
D(38,37)=L3/(6*E*I3); D(38,38)=L3/(3*E*I3); D(39,39)=L3/(E*A3);
D;
% 2.2. Takumo salygu matricos i-toje iteracijoje sudarymas
Fi=[  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
```

(3.41) – (3.47) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
 -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
-1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  -1  0 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  -1 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
```

(3.41) – (3.47) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0
-C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
```

(3.41) – (3.47) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1
-C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0;
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  -1  0 C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  -1 C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3];
global Fi;
% 2.3. Tampraus atsako i-toje iteracijoje skaiciavimas
K=A*inv(D)*A'; ue=inv(K)*F; Se=(inv(D))*A'*ue;
% 2.4. Liekamuju dydžiu i-toje iteracijoje skaiciavimas
global Se;
b1=B*m0-Fi*Se;
Aeq=-1*A; beq=zeros(27,1); A1=Fi; % H=D;
[xx,fval,exitflag,output,liambda]=quadprog(D,[],A1,b1,Aeq,beq)
% 2.5. Suminiu iražu i-toje iteracijoje skaiciavimas
S=Se+xx; Liekuc=liambda.eqlin; u=Liekuc+ue;
CIKSU=zeros(39,2); CIKSU(1:39,1)=S; CIKSU(1:27,2)=u; CIKSU
% 2.6 Infliuentiniu matricu Hsubr ir Gsubr sudarymas optimizavimo ciklui
Hsubr=inv(K)*A*inv(D); Gsubr=inv(D)*A'*Hsubr-inv(D);
```

(3.41) – (3.47) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
Hp=Hsubr*Fi';
global Gsubr;
% 2.7. Sudarome tiesiniu apribojimu nelygybiu koeficientu matricu AN ir
% laisvuju nariu vektoriu bn
An=zeros(212,107); global bn; bn=zeros(212,1);
An(1:104,1:104)=Fi*Gsubr*Fi'; An(1:104,105:107)=-B;
for i= 1:104 An(104+i,i)=-1;
    An(209,i)=Hp(15,i);  end;
An(210,105)=-1; An(211,106)=-1; An(212,107)=-1;
bn(1:104,1)=-Fi*Se;
bn(209,1)=U15vr-ue(15,1);
bn(210,1)=-M01ar; bn(211,1)=-M02ar; bn(212,1)=-M03ar;
%Tiesiniu apribojimuju lygybiu nera, todel
Aeq=[]; beq=[];
% 2.8. Duomenu griežtumo salygoms sudaryti parengiamas
global z;
z=Fi*Gsubr*Fi'; lb=[]; ub=[]; x0=zeros(107,1);
% 2.9. Netiesinio uždavinio sprendimas paprograme fmincon.
% Tam tikslui reikia sudaryti funkcijas (functiona handle):
% myfunpos- tikslo funkcijai skaiciuoti
% myconpos- netiesiniams apribojimams skaiciuoti
[x,fval,exitflag,output,liambda]=fmincon(@myfunpos,x0,An,bn,Aeq,beq,lb,ub,@my
conpos)
Apr=An*x-bn; xr=x(1:104,1); ur=Hp*xr;
ug=Hp*xr+ue; utarp=[ur ue ug];
%2.10. Duomenu parengimas naujai iteracijai vykdyti
% Naujos ribiniu momentu reikšmes i+1 iteracijai
m01=x(105,1); m02=x(106,1); m03=x(107,1);
%Nauji skerspjuviu plotai ir santykiai c i+1 iteracijai
h1=((4*m01)/sigmay)^(1/3); h2=((4*m02)/sigmay)^(1/3);
h3=((4*m03)/sigmay)^(1/3);
A1=h1*h1; A2=h2*h2; A3=h3*h3;
I1=(h1*(h1^3))/12; I2=(h2*(h2^3))/12; I3=(h3*(h3^3))/12;
C1=h1/4; C2=h2/4; C3=h3/4;
for i= 1:3 rez(iteracija,i)=x(104+i);
    rez(iteracija,4)=A1; rez(iteracija,5)=A2;
    rez(iteracija,6)=A3; rez(iteracija,7)=fval; rez(iteracija,8)=exitflag;
end;
CikloMoirA=[m01 m02 m03 A1 A2 A3]
% 2.11. Tikslumo Salygu tikrinimas
% Tikrinama salyga :ar pasiektas pasirinktas tikslumas?
% eps=((fval-Tfs)*100)\fval; if abs(eps)<=0.5 break; end
%Jei ne, tai optimizavimo procesas tesiamas toliau
Tfs=fval;
end;
%Jei taip, tai spausdinami visi iteracinio proceso optimizavimo rezultatai
rez
m0=[m01; m02; m03];
GalutiniaiMoirA=[m01 m02 m03 A1 A2 A3]
%3. Atliekame IDB analize prie galutiniu Mo.
%Galutiniu matricu [D] ir [Fi] parengimas
I1 = (h1^4)/12; I2 = (h2^4)/12; I3 = (h3^4)/12;
D = zeros(39,39);
D(1,1)=L3/(3*E*I3); D(1,2)=L3/(6*E*I3);
D(2,1)=L3/(6*E*I3); D(2,2)=L3/(3*E*I3); D(3,3)=L3/(E*A3);
D(4,4)=L2/(3*E*I2); D(4,5)=L2/(6*E*I2);
D(5,4)=L2/(6*E*I2); D(5,5)=L2/(3*E*I2); D(6,6)=L2/(E*A2);
D(7,7)=L1/(3*E*I1); D(7,8)=L1/(6*E*I1);
D(8,7)=L1/(6*E*I1); D(8,8)=L1/(3*E*I1); D(9,9)=L1/(E*A1);
D(10,10)=L3/(3*E*I3); D(10,11)=L3/(6*E*I3);
D(11,10)=L3/(6*E*I3); D(11,11)=L3/(3*E*I3); D(12,12)=L3/(E*A3);
```

(3.41) – (3.47) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
D(13,13)=L2/(3*E*I2); D(13,14)=L2/(6*E*I2);
D(14,13)=L2/(6*E*I2); D(14,14)=L2/(3*E*I2); D(15,15)=L2/(E*A2);
D(16,16)=L1/(3*E*I1); D(16,17)=L1/(6*E*I1);
D(17,16)=L1/(6*E*I1); D(17,17)=L1/(3*E*I1); D(18,18)=L1/(E*A1);
D(19,19)=L3/(3*E*I3); D(19,20)=L3/(6*E*I3);
D(20,19)=L3/(6*E*I3); D(20,20)=L3/(3*E*I3); D(21,21)=L3/(E*A3);
D(22,22)=L2/(3*E*I2); D(22,23)=L2/(6*E*I2);
D(23,22)=L2/(6*E*I2); D(23,23)=L2/(3*E*I2); D(24,24)=L2/(E*A2);
D(25,25)=L1/(3*E*I1); D(25,26)=L1/(6*E*I1);
D(26,25)=L1/(6*E*I1); D(26,26)=L1/(3*E*I1); D(27,27)=L1/(E*A1);
D(28,28)=L3/(3*E*I3); D(28,29)=L3/(6*E*I3);
D(29,28)=L3/(6*E*I3); D(29,29)=L3/(3*E*I3); D(30,30)=L3/(E*A3);
D(31,31)=L2/(3*E*I2); D(31,32)=L2/(6*E*I2);
D(32,31)=L2/(6*E*I2); D(32,32)=L2/(3*E*I2); D(33,33)=L2/(E*A2);
D(34,34)=L1/(3*E*I1); D(34,35)=L1/(6*E*I1);
D(35,34)=L1/(6*E*I1); D(35,35)=L1/(3*E*I1); D(36,36)=L1/(E*A1);
D(37,37)=L3/(3*E*I3); D(37,38)=L3/(6*E*I3);
D(38,37)=L3/(6*E*I3); D(38,38)=L3/(3*E*I3); D(39,39)=L3/(E*A3);
%Takumo sallygu matricos sudarymas
Fi=[  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
-1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  -1  0 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  -1 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
```

(3.41) – (3.47) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
```

(3.41) – (3.47) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0  C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1  C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  1  0
-C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  -1  0
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 1  0
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  1
-C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  -1
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 1
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -
C3  0  0   0  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  1  0  -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  -1  0 C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0 1  0  C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0 -1  0 -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  1  -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  -1 C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0 1  C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0 -1 -C2  0  0   0  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  1  0  -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  -1  0 C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0 1  0  C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0 -1  0 -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  1  -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  -1 C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0 1  C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0 -1 -C1  0  0   0;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  1  0  -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  -1  0 C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0 1  0  C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0 -1  0 -C3;
```

(3.41) – (3.47) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  1  -C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0  -1 C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0 1  C3;
 0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0   0  0  0
0  0  0   0  0  0   0  0 -1 -C3];
%Tampriu dydžiu skaiciavimas
K=A*inv(D)*A'; ue=inv(K)*F; Se=(inv(D))*A'*ue;
%Liekamuju dydžiu skaiciavimas
daug=Fi*Se; b1=B*m0-daug;
Aeq=-A; beq=zeros(27,1); A1=Fi; H=D;
[xx,fval,exitflag,output,liambda]=quadprog(D,[],A1,b1,Aeq,beq)
%Tikrieji IDB rezultatai
S=Se+xx; Lieku=liambda.eqlin; u=Lieku+ue
Galsu=zeros(39,2); Galsu(1:39,1)=S; Galsu(1:27,2)=u; Galsu
 % paprograme netiesiniu apribojimu isreikstu netiesinemis lygybemis Ceq ir
nelygybemis
% Cnq funkcijoms skaiciuoti
function [Cnq,Ceq]=myconpos(x);
global  B Fi Se Gsubr
Cnq=[];
Ceq=x(1:104,1)'*(B*x(105:107,1)-Fi*(Gsubr*Fi'*x(1:104,1)+Se));

% paprograme netiesinio uzdavinio tikslo funkcijai skaiciuoti
function F=myfunpos(x);
F = 4*x(105,1)+4*x(106,1)+2.5*x(107,1);
```

3.4.3. Minimalaus tūrio santvaros optimizacijos uždavinio sprendimo rezultatai

Pateikiami minimalaus tūrio santvaros optimizacijos uždavinio esant standumo apribojimams rezultatai. Santvaros diskretinis modelis pavaizduotas 3.2 paveiksle, naudotas matematinis (3.41)–(3.47) modelis.

Atlikus nagrinėjamos santvaros iteracinį skaičiavimą, optimalus pasirinkto tikslumo projektas buvo atliktas po 5 iteracijų. Duomenys iteracijų metu surašyti į 3.4 lentelę.

3.4 lentelė. Santvaros (3.1 pav.) optimizavimo, ribojant poslinkius, skaičiavimo rezultatai, matematinis (3.41)–(3.47) modelis

Iteracija	M_{01} (kNm)	M_{02} (kNm)	M_{03} (kNm)	A_1 (mm^2)	A_2 (mm^2)	A_3 (mm^2)	$\boldsymbol{L^T M_0}$	V (m^3)
1	2,0981	2,1114	2,2147	108,45	108,90	112,43	22.3750	0,00115
2	2,0981	2,0983	2,3327	108,45	108,45	116,39	22.6175	0,001158
3	2,0981	2,0982	2,3337	108,45	108,45	116,42	22.6194	0,001159
4	2,0981	2,0982	2,3338	108,45	108,45	116,42	22.6195	0,001159
5	2,0981	2,0982	2,3330	108,45	108,45	116,40	22.6176	0,001159
6	2,0981	2,0982	2,3330	108,45	108,45	116,40	22.6176	0,001159
				L_1 = 4,0 m	L_2 = 4,0 m	L_3 = 2,5 m		

3.4 lentelės 6-osios iteracijos optimizacijos (3.41)–(3.47) uždavinio ribojant poslinkius sprendimu buvo gauti optimalūs skerspjūvių plotai (mm^2) ir aukščiai (mm):

$$\boldsymbol{A} = [108{,}45\ 108{,}45\ 116{,}40]^T,$$

$$\boldsymbol{h} = [10{,}41\ 10{,}41\ 10{,}79]^T.$$

Pritaikius šias reikšmes iš asortimento parenkami pilnavidūrio kvadratinio skerspjūvio profiliuočiai. Kadangi skerspjūvių plotų reikšmės beveik tokios pačios, tai skerspjūvis parenkamas vienos reikšmės visiems strypams: h = 35 mm, kurio plotas A = 122,5 mm^2.

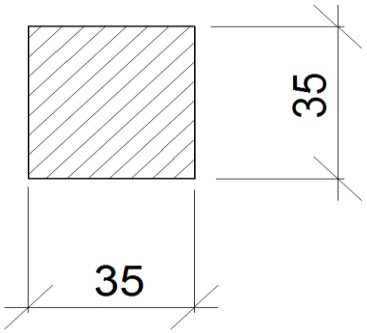
Gautas visų santvaros element tūris lygus

$$V = \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{A} \cdot 10^{-6} = (10{,}5 \cdot 122{,}5 \cdot 10^{-6}) = 0{,}01286 \text{ m}^3.$$

Santvaros masė:

$$G = (10{,}5 \cdot 9{,}62) = 101{,}01 \text{ kg}.$$

Iš asortimento parinktas elementų skerspjūvis pavaizduotas 3.9 paveiksle.



3.9 pav. Santvaros elemento stačiakampis skerspjūvis

Apie gautų optimizavimo ribojant poslinkius rezultatų patikimumą sprendžiame iš suprojektuotos santvaros įtempių ir deformacijų būvio analizės uždavinio sprendinio.

Paskutinės iteracijos metu gautos tampriosios, liekamosios ir tikrosios lenkimo momentų ir ašinių jėgų reikšmės surašytos į 3.5 lentelę. Taip pat palyginimui šioje lentelėje pateikiami rezultatai prieš pat plastinį suirimą. Apkrovos išdėstymo schema pateikta 3.1 paveiksle.

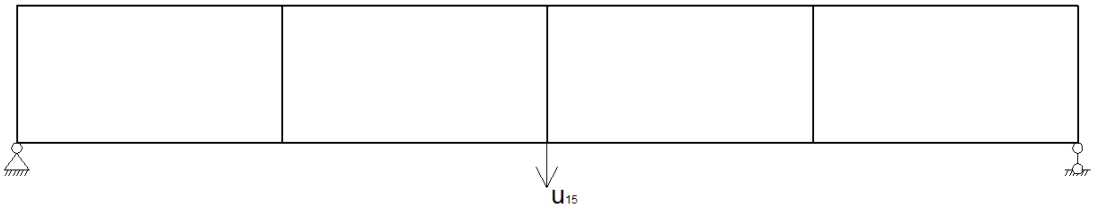
3.5 lentelė. Santvaros (3.1 pav.) įrąžos išsprendus (3.41)–(3.47) ir (3.10)–(3.12) uždavinius

Įrąža	Ribojant poslinkius Matematinis (3.41)–(3.47) modelis			Prieš suirimą Matematinis (3.10)–(3.12) modelis		
	S_e	S_r	S	S_e	S_r	S
M_1	1,6588	0,1142	1,7730	1,6373	0,2013	1,8386
M_2	–1,6577	–0,1228	–1,7805	–1,6362	–0,2155	–1,8517
$N_{1\text{-}2}$	–10,1862	–0,0110	–10,1972	–10,0028	–0,0192	–10,0220
M_3	–1,6577	–0,1228	–1,7805	–1,6362	–0,2155	–1,8517
M_4	1,5285	–0,1118	1,4167	1,4926	–0,1963	1,2963
$N_{3\text{-}4}$	–6,6329	–0,4741	–7,1070	–6,5470	–0,8336	–7,3806

3.5 lentelės tęsinys

Įrąža	Ribojant poslinkius Matematinis (3.41)–(3.47) modelis			Prieš suirimą Matematinis (3.10)–(3.12) modelis		
	S_e	S_r	S	S_e	S_r	S
M_5	–1,6588	–0,1142	–1,7730	–1,6373	–0,2013	–1,8386
M_6	1,5300	–0,1252	1,4048	1,4941	–0,2205	1,2736
$N_{5\text{-}6}$	6,6329	0,4741	7,1070	6,5470	0,8336	7,3806
M_7	2,5830	–0,2562	2,3268	2,5017	–0,4516	2,0501
M_8	–2,5826	0,2558	–2,3268	–2,5013	0,4512	–2,0501
$N_{7\text{-}8}$	–0,7522	0,0248	–0,7275	–0,7388	0,0460	–0,6928
M_9	–1,0540	0,1440	–0,9101	–1,0087	0,2549	–0,7538
M_{10}	1,3844	0,1302	1,5146	1,3859	0,2281	1,6140
$N_{9\text{-}10}$	–16,9640	0,5498	–16,4142	–16,5531	0,9720	–15,5811
M_{11}	–1,0530	0,1309	–0,9220	–1,0076	0,2311	–0,7765
M_{12}	1,3836	0,1447	1,5283	1,3851	0,2579	1,6430
$N_{11\text{-}12}$	16,9640	–0,5498	16,4142	16,5531	–0,9720	15,5811
M_{13}	0,3830	–0,1441	0,2389	0,3680	–0,1993	0,1688
M_{14}	–0,3833	0,1433	–0,2400	–0,3683	0,1929	–0,1754
$N_{13\text{-}14}$	–3,9988	–0,0215	–4,0203	–3,9268	–0,0616	–3,9883
M_{15}	1,0011	0,2735	1,2746	1,0175	0,4211	1,4386
M_{16}	–0,5617	0,2812	–0,2804	–0,5171	0,4558	–0,0613
$N_{15\text{-}16}$	–18,4966	1,1246	–17,3719	–18,0258	1,7564	–16,2694
M_{17}	1,0006	0,2888	1,2895	1,0171	0,4572	1,4742
M_{18}	–0,5616	0,2811	–0,2805	–0,5170	0,4224	–0,0947
$N_{17\text{-}18}$	18,4966	–1,1246	17,3719	18,0258	–1,7564	16,2694
M_{19}	–2,5599	0,2481	–2,3117	–2,4763	0,4402	–2,0361
M_{20}	2,5604	–0,2487	2,3117	2,4768	–0,4407	2,0361
$N_{19\text{-}20}$	–2,5000	0,0075	–2,4924	–2,4550	0,0513	–2,4038
M_{21}	1,9987	0,0326	2,0313	1,9597	0,0152	1,9749
M_{22}	–2,0641	0,0328	–2,0313	–2,0299	–0,0013	–2,0312
$N_{21\text{-}22}$	–8,2561	0,1311	–8,1250	–8,1195	–0,0054	–8,1248
M_{23}	1,9982	0,0330	2,0312	1,9593	–0,0178	1,9415
M_{24}	–2,0640	0,0327	–2,0312	–2,0298	–0,0014	–2,0312
$N_{23\text{-}24}$	8,2561	–0,1311	8,1250	8,1195	0,0054	8,1248
M_{25}	–2,0640	0,0327	–2,0312	–2,0298	–0,0014	–2,0312
M_{26}	2,0641	–0,0328	2,0313	2,0299	0,0013	2,0312

Ribojamas santvaros vertikalus poslinkis u_{15} pavaizduotas 3.10 paveiksle.



3.10 pav. Santvaros poslinkis u_{15} kryptimi

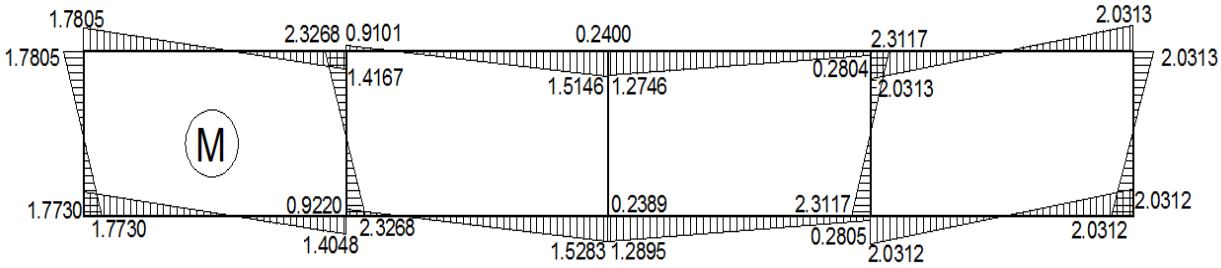
Santvaros vertikaliojo u_{15} poslinkio tamprioji, liekamoji ir suminės reikšmės pateiktos 3.6 lentelėje (palyginimui įrašytos reikšmės prieš pat santvaros plastinį suirimą).

3.6 lentelė. Virandelio santvaros (3.10 pav.) poslinkis u_{15} (mm)

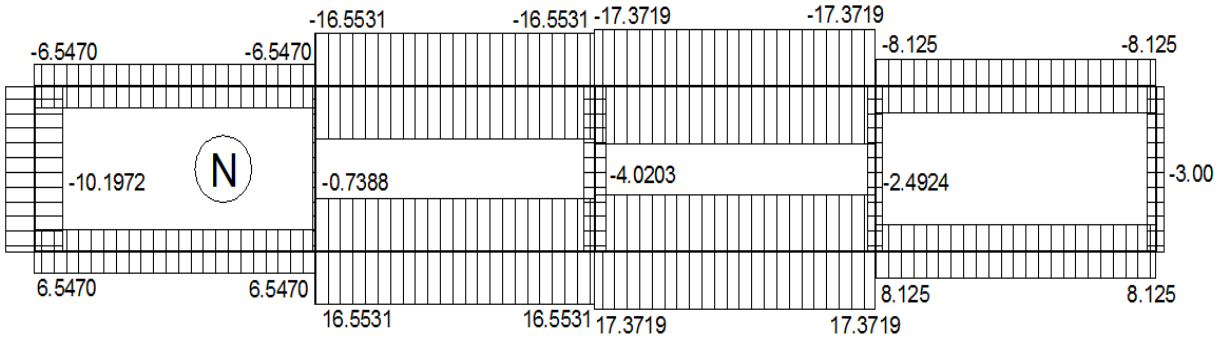
Poslinkis	Ribojant poslinkius Matematinis (3.41)–(3.47) modelis			Prieš suirimą Matematinis (3.10)–(3.12) modelis		
	u_e	u_r	u	u_e	u_r	u
u_{15}	35,6263	14,3737	50	37,0656	22,3090	59,3745

Optimizavimo uždavinio ribojant poslinkius plane, yra šeši nelygūs nuliui plastiniai daugikliai, užrašyti 7, 8, 19, 20, 22, 24 skaičiuojamiesiems pjūviams. Šiose vietose atsiranda plastiškų lankstų.

Lenkimo momentų diagrama, atitinkanti poslinkių ribojimų rezultatus pavaizduota 3.11 paveiksle ir ašinių jėgų reikšmės pavaizduotos 3.12 paveiksle.



3.11 pav. Santvaros lenkimo momentų *M* diagrama (3.4.3. poskyris)



3.12 pav. Santvaros ašinių jėgų *N* diagrama (3.4.3. poskyris)

3.5. 3 skyriaus išvados ir apibendrinimai

1. Norint konstrukcijos skaičiavimus pagrįsti realiomis jos darbo sąlygomis, būtina į skaičiavimus įtraukti ir medžiagos plastines savybes, kuriomis pasižymi daug konstrukcijų, jų tarpe metalinės.

2. Efektyvus kelias, kuriant šiuolaikinius optimizavimo metodus, yra skaitiniai mechanikos metodai, matematinio programavimo teorija.

3. Virandelio santvaros būvių (suiriminis, iki suiriminis) analizei, vienkartės apkrovos atveju, tinka rėmams optimizuoti sukurtoji metodika.

4. Virandelio santvaros atveju būtina atsakingai vertinti sandumo ir stabilumo apribojimus. Darbe strypų stabilumo klausimai nebuvo nagrinėti.

5. Virandelio santvaros charakteringesnė kintama – kartotinė apkrova: todėl tokių santvarų skaičiavimas turi būti siejamas su jų prisitaikomumu.

4. PRISITAIKANČIOS SANTVAROS RIBINĖS ĮRĄŽOS PASISKIRSTYMO OPTIMIZAVIMO UŽDAVINYS

4.1. Bendros pastabos

Įvadinėje baigiamojo darbo dalyje pažymėjome, kad kintamos – kartotinės apkrovos (KKA) atveju konstrukcija gali išeiti iš rikiuotės, t.y. patirti ciklinį plastinį suirimą dėl susikaupusių per didelių plastinių deformacijų $\boldsymbol{\theta}_p$ (vadinamoji progresinė suirtis) arba mažaciklinio nuovargio (suirtis dėl kintamojo plastiškumo). Galimas ir trečias atvejis, kai apkrovimo proceso pradžioje atsiradusios $\boldsymbol{\theta}_p$ sukuria liekamąsias įrąžas $\boldsymbol{S}_r$, kurios su kintamąja dalimi $\boldsymbol{S}_e$ suformuoja statiškai leistiną įrąžų pasiskirstymą – šis atvejis vadinamas konstrukcijos prisitaikomumu (A priedas). Darbe laikysime, kad $\boldsymbol{S}_r$ pasiskirstymas nepriklauso nuo laiko *t*. Svarbu pabrėžti, kad takumo sąlygos (2.19)

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{S}_j \geq \boldsymbol{0},$$

gali įvertinti ir pastovios (nekintamos) apkrovos įtaką. Tai realizuojama, įvedant tampraus skaičiavimo įrąžas $\boldsymbol{S}_{ec} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{F}_c$ nuo pastovios apkrovos $\boldsymbol{F}_c$:

$$\boldsymbol{S}_j = \begin{bmatrix} M_r + M_{ec} + M_{e,j} \\ N_r + N_{ec} + N_{e,j} \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

4.2. Santvaros optimizavimo uždavinio matematinis modelis

Prisitaikančios santvaros ribinių momentų optimalaus pasiskirtsymo uždavinio matematinis modelis yra:

rasti
$$\min \sum_k L_k M_{0k}, \tag{4.2}$$

kai
$$\boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{S}_{ej}) \geq \boldsymbol{0}, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \left[\boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{S}_{ej}) \right] = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_j \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \sum_j \boldsymbol{\lambda}_j, \tag{4.4}$$

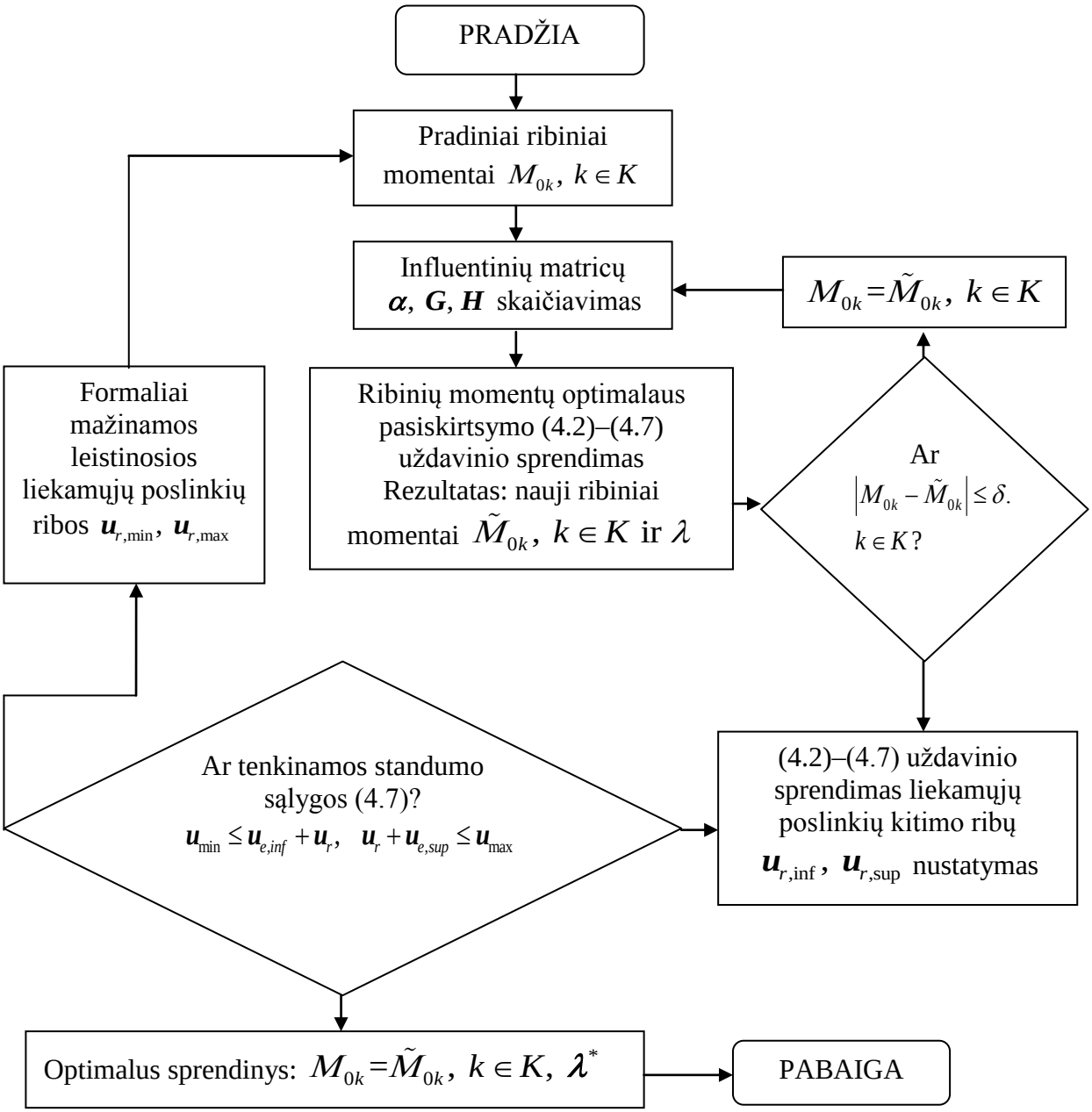
$$M_{0k,\min} \leq M_{0k} \leq M_{0k,\max}, \quad k \in K, \quad j \in J; \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda}, \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{u}_{\min} \leq \boldsymbol{u}_{e,inf} + \boldsymbol{u}_r, \quad \boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{u}_{e,sup} \leq \boldsymbol{u}_{\max}. \tag{4.7}$$

Šis modelis sudarytas analizės (3.27)–(3.29) uždavinio ir Kuno – Takerio sąlygų panaudojimo pagrindu. Tai netiesinio matematinio programavimo uždavinys, nežinomieji yra ribiniai

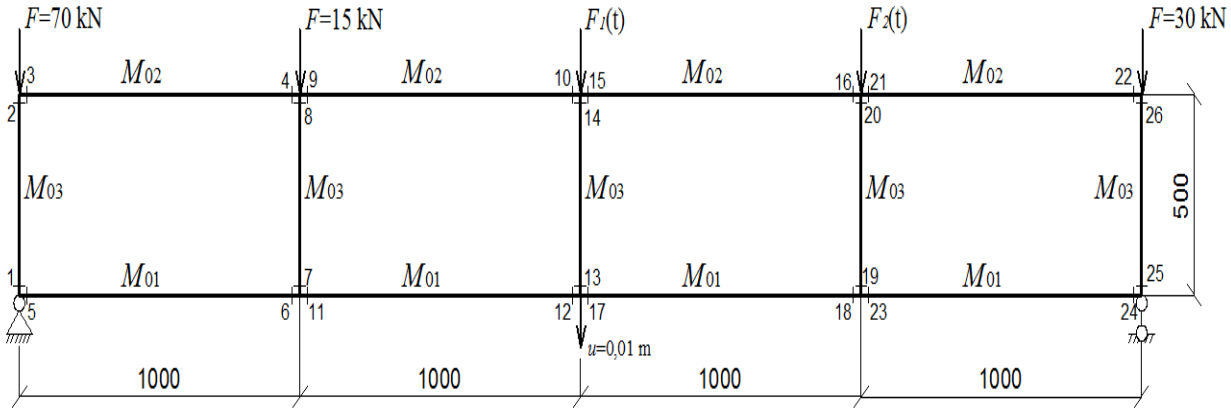
momentai M_{0k} ir daugikliai λ_j ($k \in K, j \in J$). Nustačius ribinių momentų $M_{0k}, k \in K$ pasiskirstymą, perskaičiuojami vektoriai $\boldsymbol{u}_{e,inf}$, $\boldsymbol{u}_{e,sup}$, $\boldsymbol{S}_{ej}$, $j \in J$, ir vėl sprendžiamas uždavinys (4.2)–(4.7). Procesas baigiamas tada, kai dviejų gretimų sprendimo etapų gauti skerspjūvio plotai nesiskiria vienas nuo kito norimu tikslumu. Taip gaunamas optimalus (4.2)–(4.7) uždavinio sprendinys $M_{0k}^*, \lambda_j^*, k \in K, j \in J$.



4.1 pav. Santvaros ribinių momentų optimalaus pasiskirstymo uždavinio sprendimo algoritmo schema

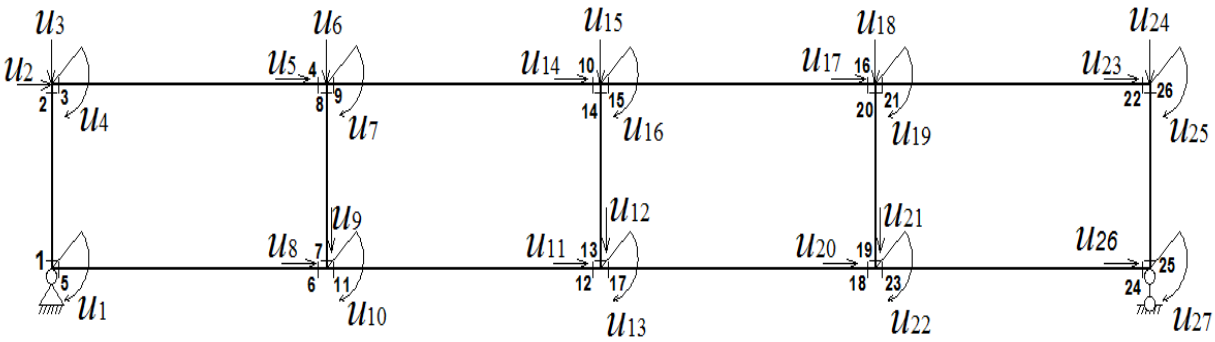
4.3. Skaitinis eksperimentas

Skaitiniam eksperimentui pasirinkta tampri – plastinė Virandelio santvara, pavaizduota 4.2 paveiksle. Santvara yra veikiama pastovios ir kartotinės kintamos apkrovos. Pastovi apkrova yra $F = 70$ kN (veikia 2–3 mazge), $F = 15$ kN (veikia 4–9 mazge), $F = 30$ kN (veikia 22 mazge), o kintama kartotinė $F_1(t)$ (veikia 10–15 mazge), apkrovos kitimo ribos: $-70\ \text{kN} \le F_1 \le 80\ \text{kN}$, ir $F_2(t)$ (veikia 16–21 mazge), apkrovos kitimo ribos $-30\ \text{kN} \le F_2 \le 50\ \text{kN}$. Sprendžiant optimizacijos (4.2)–(4.7) uždavinį, standumo apribojimu yra mazgo 12–13–17 poslinkio ribojimas (tai yra santvaros apatinės juostos įlinkis $u = 0{,}01$ m)



4.2 pav. Virandelio santvara, veikiama KKA $F_1(t)$, $F_2(t)$ ir pastovios apkrovos F

Santvaroje įvertinami lenkimo momentai ir ašinės jėgos. Nagrinėjamos santvaros (4.2 pav.) diskretinis modelis išlieka toks pat kaip ir vienkartės apkrovos atveju; jis pavaizduotas 4.3 paveiksle.



4.3 pav. Santvaros diskretinis modelis

Santvara sudaryta iš 13 elementų, kiekvienam strypui priskiriami du skaičiuojamieji pjūviai (žr. 2.1 poskyrį $\zeta = s \times \nu = 13 \times 2$), iš viso susidaro 26 skaičiuojamieji pjūviai, todėl

tikrųju įrąžų vektorius turi 39 nežinomuosius (n = 39), nes prie 26 lenkimo momentų M pridedami 13 elementinių ašinių jėgų N:

$$\boldsymbol{S} = [M_1\ M_2\ N_{1\text{-}2}\ M_3\ M_4\ N_{3\text{-}4}\ M_5\ M_6\ N_{5\text{-}6}\ M_7\ M_8\ N_{7\text{-}8}\ M_9\ M_{10}\ N_{9\text{-}10}\ M_{11}\ M_{12}\ N_{11\text{-}12}\ M_{13}\ M_{14}\ N_{13\text{-}14}\ M_{15}\ M_{16}\ N_{15\text{-}16}\ M_{17}\ M_{18}\ N_{17\text{-}18}\ M_{19}\ M_{20}\ N_{19\text{-}20}\ M_{21}\ M_{22}\ N_{21\text{-}22}\ M_{23}\ M_{24}\ N_{23\text{-}24}\ M_{25}\ M_{26}\ N_{25\text{-}26}]^T.$$

Taigi, įtempių būvio nežinomųjų skaičius lygus: n=39, statinio neišsprendžiamumo laipsnis lygus: $k = 3 \cdot 5 - 3 = 12.$ Santvaros diskretinio modelio laisvės laipsnis lygus $m = 39 - 12 = 27,$ bus rašomos 27 pusiausvyros lygtys.

Deformuotą būvį charakterizuoja poslinkiai ir deformacijos:

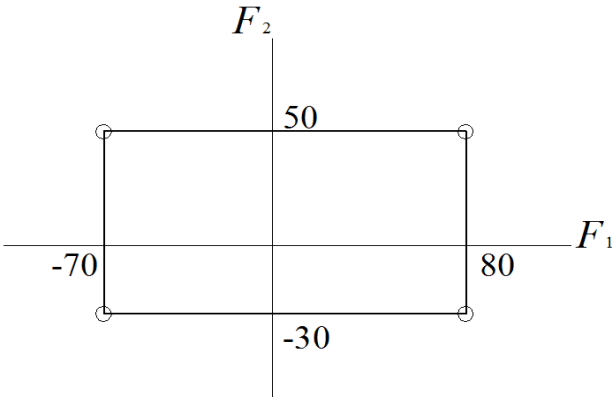
$$\boldsymbol{u} = [u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6\ u_7\ u_8\ u_9\ u_{10}\ u_{11}\ u_{12}\ u_{13}\ u_{14}\ u_{15}\ u_{16}\ u_{17}\ u_{18}\ u_{19}\ u_{20}\ u_{21}\ u_{22}\ u_{23}\ u_{24}\ u_{25}\ u_{26}\ u_{27}]^T.$$

Kaip minėta kintamai kartotinai apkrovos yra tokios:

$$-70 \text{ kN} \le F_1 \le 80 \text{ kN},$$

$$-30 \text{ kN} \le F_2 \le 50 \text{ kN}.$$

Apkrovų kitimo sritis parodyta 4.4 paveiksle. Tampraus skaičiavimo įrąžų viršūnių yra $p = 2^2 = 4$.



4.4 pav. Apkrovų kitimo sritis, kN

Sudaromos apkrovų kombinacijos. Kombinacijų skaičius yra lygus hodografo viršūnių skaičiui ir atitinka jų koordinates (4.4 pav.).

$$F_1 = [0\ 0\ 70\ 0\ 0\ 15\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 80\ 0\ 0\ 50\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 30\ 0\ 0\ 0]^T,$$

$$F_2 = [0\ 0\ 70\ 0\ 0\ 15\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -70\ 0\ 0\ -30\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 30\ 0\ 0\ 0]^T,$$

$$F_3 = [0\ 0\ 70\ 0\ 0\ 15\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 80\ 0\ 0\ -30\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 30\ 0\ 0\ 0]^T,$$

$$F_4 = [0\ 0\ 70\ 0\ 0\ 15\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -70\ 0\ 0\ 50\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 30\ 0\ 0\ 0]^T.$$

4.4. (4.2)–(4.7) uždavinio sprendimas ir rezultatų apibendrinimas

Sprendžiamas 4.2 paveiklse parodytos Virandelio santvaros ribinių momentų optimalaus pasiskirtsymo (4.2)–(4.7) uždavinys.

Duomenų įvedimas ir rezultatų skaičiavimas atliekamas matematiniu paketu *MATLAB*. (4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos tekstas:

```
close all; clear all; format short;

% Remo optimizacija
% Pagal mat. modeli
%
% 10.22-10.27 knygos
%
%==============================
global Fi G Gama Se
%pradiniai duomenys
sigmay=235e3; %kPa
E=205e6;      %tamprumo modulis

%Elementu tipu ilgiai
L1=1;   %santvaros tinklelio tarpatramis
L2=1;   %santvaros tinklelio tarpatramis
L3=0.5; %tinklelio elemento ilgis

%Bendras elementu ilgis
global ilg
ilg=[4 4 2.5];

%Pradines ribiniu momentu reiksmes
M01=1000; %kNm
M02=1000;  %kNm
M03=700; %kNm

% Apatine ribiniu momentu riba
M01ar=10; % kNm
M02ar=10;
M03ar=10;

% Koeficientai inercijos momentam skaiciuoti
a11=0.7885; b11=2.3210; %IPE profiliai (A1)
a12=0.7885; b12=2.3210; %IPE profiliai (A2)
a13=0.7885; b13=2.3210; %IPE profiliai (A3)


% Koeficientai plastiniam atsparumo momentui skaiciuoti
a31=0.8411; b31=1.6572; %IPE profiliai (A1)
a32=0.8411; b32=1.6572; %IPE profiliai (A2)
a33=0.8411; b33=1.6572; %IPE profiliai (A3)

% pusiausvyros lygciu matrica
A=[1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0;
```

(4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0];

% Apkrovos vektorius
F1=[0;0;70;0;0;15;0;0;0;0;0;0;0;80;0;0;50;0;0;0;0;0;30;0;0;0];
F2=[0;0;70;0;0;15;0;0;0;0;0;0;0;-70;0;0;-30;0;0;0;0;0;30;0;0;0];
F3=[0;0;70;0;0;15;0;0;0;0;0;0;0;80;0;0;-30;0;0;0;0;0;30;0;0;0];
F4=[0;0;70;0;0;15;0;0;0;0;0;0;0;-70;0;0;50;0;0;0;0;0;30;0;0;0];

%konfiguracijos matrica Gama
%dydis:eiluciu=elementai*2(pjuvius)*6(salygos)=13*2*6=156
%stulpeliu-tiek kiek M0=3
G1=ones(12,1); G0=zeros(12,1); %Pagalbines matricos
Gama=[G0 G0 G1
      G0 G1 G0
      G1 G0 G0
      G0 G0 G1
      G0 G1 G0
      G1 G0 G0
      G0 G0 G1
      G0 G1 G0
      G1 G0 G0
      G0 G0 G1
      G0 G1 G0
      G1 G0 G0
      G0 G0 G1];
  %optimizacijos ciklo pradzia
  %pradinis taskas
  x0=zeros(627,1); %159 nezinomuju, 4*156+3=627 lamda ir 3 M0;

  iter=30;
  for i = 1:iter
      %Skerspjuvio plotai cm^2
      A1=((M01*1e6)/(sigmay*a31))^(1/b31);
      A2=((M02*1e6)/(sigmay*a32))^(1/b32);
      A3=((M03*1e6)/(sigmay*a33))^(1/b33);

      %Ekscentricitetai m:
      c1=M01/(sigmay*A1*10^-4);
      c2=M02/(sigmay*A2*10^-4);
      c3=M03/(sigmay*A3*10^-4);

      %Inercijos momentai
      I1=a11*A1^b11*10^-8;
      I2=a12*A2^b12*10^-8;
      I3=a13*A3^b13*10^-8;


     % visos konstrukcijos pasiduodamumo matrica:
     D=zeros(39,39);
D(1,1)=L3/(3*E*I3); D(1,2)=L3/(6*E*I3);
D(2,1)=L3/(6*E*I3); D(2,2)=L3/(3*E*I3); D(3,3)=L3/(E*A3);
D(4,4)=L2/(3*E*I2); D(4,5)=L2/(6*E*I2);
D(5,4)=L2/(6*E*I2); D(5,5)=L2/(3*E*I2); D(6,6)=L2/(E*A2);
D(7,7)=L1/(3*E*I1); D(7,8)=L1/(6*E*I1);
D(8,7)=L1/(6*E*I1); D(8,8)=L1/(3*E*I1); D(9,9)=L1/(E*A1);
D(10,10)=L3/(3*E*I3); D(10,11)=L3/(6*E*I3);
D(11,10)=L3/(6*E*I3); D(11,11)=L3/(3*E*I3); D(12,12)=L3/(E*A3);
D(13,13)=L2/(3*E*I2); D(13,14)=L2/(6*E*I2);
D(14,13)=L2/(6*E*I2); D(14,14)=L2/(3*E*I2); D(15,15)=L2/(E*A2);
D(16,16)=L1/(3*E*I1); D(16,17)=L1/(6*E*I1);
D(17,16)=L1/(6*E*I1); D(17,17)=L1/(3*E*I1); D(18,18)=L1/(E*A1);
D(19,19)=L3/(3*E*I3); D(19,20)=L3/(6*E*I3);
D(20,19)=L3/(6*E*I3); D(20,20)=L3/(3*E*I3); D(21,21)=L3/(E*A3);
D(22,22)=L2/(3*E*I2); D(22,23)=L2/(6*E*I2);
D(23,22)=L2/(6*E*I2); D(23,23)=L2/(3*E*I2); D(24,24)=L2/(E*A2);
D(25,25)=L1/(3*E*I1); D(25,26)=L1/(6*E*I1);
D(26,25)=L1/(6*E*I1); D(26,26)=L1/(3*E*I1); D(27,27)=L1/(E*A1);
D(28,28)=L3/(3*E*I3); D(28,29)=L3/(6*E*I3);
```

(4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
D(29,28)=L3/(6*E*I3); D(29,29)=L3/(3*E*I3); D(30,30)=L3/(E*A3);
D(31,31)=L2/(3*E*I2); D(31,32)=L2/(6*E*I2);
D(32,31)=L2/(6*E*I2); D(32,32)=L2/(3*E*I2); D(33,33)=L2/(E*A2);
D(34,34)=L1/(3*E*I1); D(34,35)=L1/(6*E*I1);
D(35,34)=L1/(6*E*I1); D(35,35)=L1/(3*E*I1); D(36,36)=L1/(E*A1);
D(37,37)=L3/(3*E*I3); D(37,38)=L3/(6*E*I3);
D(38,37)=L3/(6*E*I3); D(38,38)=L3/(3*E*I3); D(39,39)=L3/(E*A3);
     %Tamprus skaiciavimas
     alfa=D^-1*A'*(A/D*A')^-1 %irazu influentine matrica
     beta=inv(A/D*A');        %poslinkiu influentine matrica

     global Se1 Se2 Se3 Se4
     Se1=alfa*F1; Se2=alfa*F2; Se3=alfa*F3; Se4=alfa*F4;
     ue1=beta*F1;  ue2=beta*F2;  ue3=beta*F3;  ue4=beta*F4;

     %Takumo salygu matrica
     s=1/1.18; %vieno elemento takumo matrica:
     fi=@(c) [1 0 0
             -1 0 0
              s 0 c
             -s 0 c
              s 0 -c
             -s 0 -c
              0 1 0
              0 -1 0
              0 s c
              0 -s c
              0 s -c
              0 -s -c];

     %Visos konstrukcijos takumo matrica:

Fi=blkdiag(fi(c3),fi(c2),fi(c1),fi(c3),fi(c2),fi(c1),fi(c3),fi(c2),fi(c1),fi(c3),fi(c2),fi(c1),fi
(c3));

     %Influentines liekamuju dydziu matricos
     Hsubr=inv(A*inv(D)*A')*A*inv(D);
     Gsubr=inv(D)*A'*Hsubr-inv(D);
     H=Hsubr*Fi';   %liekmuju poslinkiu influentine matrica
     G=Gsubr*Fi';   %liekmuju irazu influentine matrica

     %tiesiniu apribojimu lygybemis nera
     Aeq=[]; beq=[];

     %tiesiniai apribojimai nelygybemis
     %eiluciu skaicius: takumo salygos 156*4
     %lambda ribojimai:156*4
     %M0 ribojimai: 3
     %poslinkiu ribojimai: 1*4
     %stulpeliu tiek kiek kintamuju: t.y. lambdos 156*4+3=627, M0-3

     Anq=zeros(1255,627);

     Anq(1:624,1:624)=[Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G   %takumo salygos
                      Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G
                      Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G
                      Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G];

     Anq(1:624,625:627)=[-Gama                %takumo salygos
                         -Gama
                         -Gama
                         -Gama];

     Anq(625:1248,1:624)=-eye(624);  %lambda ribojimas

     Anq(1249:1251,625:627)=-eye(3);  % M0 ribojimas
     Anq(1252:1255,1:624)=  [H(12,:) H(12,:) H(12,:) H(12,:)       %12 poslinkio ribojimas
                         H(12,:) H(12,:) H(12,:) H(12,:)
                         H(12,:) H(12,:) H(12,:) H(12,:)
                         H(12,:) H(12,:) H(12,:) H(12,:)];

      global z
     z=[Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G   %pagalbine matrica
        Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G
```

(4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo *MATLAB* paketu programos teksto tęsinys:

```
       Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G
       Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G];

    global w
   w=[Fi*Se1
      Fi*Se2
      Fi*Se3
      Fi*Se4];

    %laisvieji tiesiniu nelygybiu nariai
    bnq=zeros(1255,1);
    bnq(1:624,1)=[-Fi*Se1
                  -Fi*Se2
                  -Fi*Se3
                  -Fi*Se4]; %takumo salygos
    bnq(1249:1251,1)=-[M01ar; M02ar; M03ar];
    bnq(1252:1255,1)=0.01-[ue1(12); ue2(12); ue3(12); ue4(12)];   %12 poslinkio ribojimas

    %virsutines ir apatines kintamuju ribos
    ub=[]; lb=[];
    [x,fval,exitflag]=fmincon(@tfunkcijakintama,x0,Anq,bnq,Aeq,beq,lb,ub,@apribkintama);

    %Pradinis taskas naujai iteracijai:
    x0=x;

    M01=x(625);  %nauji ribiniai momentai
    M02=x(626);
    M03=x(627);


    %Skerspjuvio plotai cm^2
     A1=((M01*1e6)/(sigmay*a31))^(1/b31);
     A2=((M02*1e6)/(sigmay*a32))^(1/b32);
     A3=((M03*1e6)/(sigmay*a33))^(1/b33);


   lambda=repmat(eye(156),1,4)*x(1:624)
   %liekamieji poslinkiai
   ur=H*lambda;

   for j=1:3
       rez(i,j)=x(624+j);
       rez(i,5)=A1;
       rez(i,6)=A2;
       rez(i,7)=A3;
       rez(i,8)=fval;
       rez(i,9)=exitflag;
   end
end

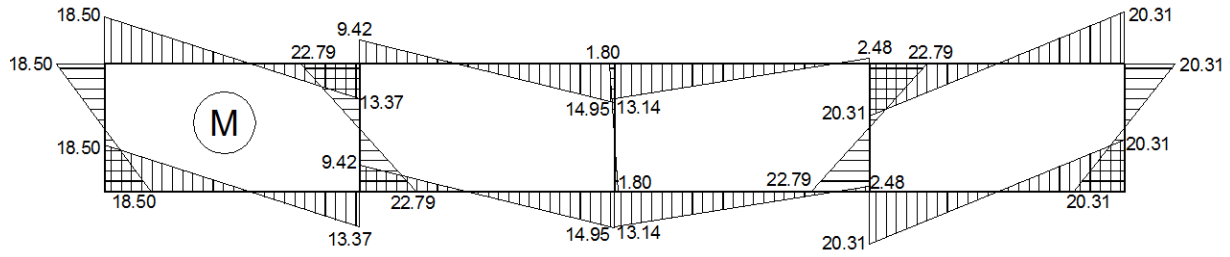
plot(rez(:,8))
 rez
 plast_def=Fi'*lambda;           %plastines deformacijos
 Wpl=1e6*[M01 M02 M03]/sigmay    %plastiniai atsparumo momentai
```

Gautų tamprių skaičiavimų įrąžų nuo apkrovų kombinacijų $\boldsymbol{S}_{e,1}$, $\boldsymbol{S}_{e,2}$, $\boldsymbol{S}_{e,3}$, $\boldsymbol{S}_{e,4}$, liekamosios $\boldsymbol{S}_r^*$ ir suminės įrąžos $\boldsymbol{S}_{e,1}+\boldsymbol{S}_r^*$, $\boldsymbol{S}_{e,2}+\boldsymbol{S}_r^*$, $\boldsymbol{S}_{e,3}+\boldsymbol{S}_r^*$, $\boldsymbol{S}_{e,4}+\boldsymbol{S}_r^*$ pateikiamos 4.1 lentelėje.

4.1 lentelė. Tamprių įrąžų reikšmės nuo apkrovų kombinacijų, liekamosios ir suminės įrąžos (4.1 pav.)

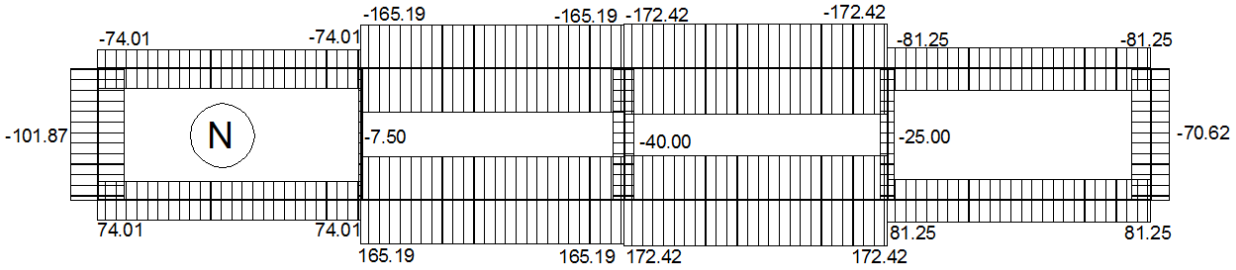
Įrąža	$S_{e,1}$	$S_{e,2}$	$S_{e,3}$	$S_{e,4}$	S_r^*	$S_{e,1}+S_r^*$	$S_{e,2}+S_r^*$	$S_{e,3}+S_r^*$	$S_{e,4}+S_r^*$
M_1	16,64	-8,52	11,31	-3,19	1,86	18,50	-6,65	13,17	-1,32
M_2	-16,64	8,52	-11,30	3,19	-1,86	-18,50	6,65	-13,17	1,32
$N_{1\text{-}2}$	-101,87	-54,37	-91,87	-64,37	-0,00	-101,87	-54,37	-91,87	-64,37
M_3	-16,64	8,52	-11,30	3,19	-1,86	-18,50	6,65	-13,17	1,32
M_4	15,23	-7,10	10,56	-2,43	-1,86	13,37	-8,96	8,70	-4,29
$N_{3\text{-}4}$	-66,56	34,08	-45,23	12,76	-7,45	-74,01	26,62	-52,69	5,30
M_5	-16,64	8,52	-11,31	3,19	-1,86	-18,50	6,65	-13,17	1,32
M_6	15,23	-7,10	10,56	-2,43	-1,86	13,37	-8,96	8,70	-4,29
$N_{5\text{-}6}$	66,56	-34,08	45,23	-12,76	7,45	74,01	-26,62	52,69	-5,30
M_7	25,72	-17,67	16,12	-8,07	-2,93	22,79	-20,61	13,19	-11,01
M_8	-25,72	17,67	-16,12	8,07	2,93	-22,79	20,61	-13,19	11,01
$N_{7\text{-}8}$	-7,50	-7,50	-7,50	-7,50	0,00	-7,50	-7,50	-7,50	-7,50
M_9	-10,49	10,57	-5,56	5,64	1,06	-9,42	11,64	-4,49	6,71
M_{10}	13,88	-12,55	8,81	-7,48	1,06	14,95	-11,48	9,88	-6,41
$N_{9\text{-}10}$	-169,46	104,79	-109,74	45,07	4,27	-165,19	109,06	-105,47	49,34
M_{11}	-10,49	10,57	-5,56	5,64	1,06	-9,42	11,64	-4,49	6,71
M_{12}	13,88	-12,55	8,81	-7,48	1,06	14,95	-11,48	9,88	-6,41
$N_{11\text{-}12}$	169,46	-104,79	109,74	-45,07	-4,27	165,19	-109,06	105,47	-49,34
M_{13}	3,80	-4,89	-4,89	3,80	-1,99	1,80	-6,88	-6,88	1,80
M_{14}	-3,80	4,89	4,89	-3,80	1,99	-1,80	6,88	6,88	-1,80
$N_{13\text{-}14}$	-40,00	35,00	-40,00	35,00	0,00	-40,00	35,00	-40,00	35,00
M_{15}	10,07	-7,65	13,70	-11,28	3,06	13,14	-4,59	16,77	-8,22
M_{16}	-5,54	4,21	-11,91	10,58	3,06	-2,48	7,28	-8,85	13,65
$N_{15\text{-}16}$	-184,68	124,36	-90,17	29,85	12,26	-172,42	136,62	-77,91	42,11
M_{17}	10,07	-7,65	13,70	-11,28	3,06	13,14	-4,59	16,77	-8,22
M_{18}	-5,54	4,21	-11,91	10,58	3,06	-2,48	7,28	-8,85	13,65
$N_{17\text{-}18}$	184,68	-124,36	90,17	-29,85	-12,26	172,42	-136,62	77,91	-42,11
M_{19}	-25,48	17,37	-16,43	8,31	2,69	-22,79	20,06	-13,74	11,01
M_{20}	25,48	-17,37	16,43	-8,31	-2,69	22,79	-20,06	13,74	-11,01
$N_{19\text{-}20}$	-25,00	15,00	15,00	-25,00	0,00	-25,00	15,00	15,00	-25,00
M_{21}	19,94	-13,15	4,51	2,27	0,37	20,31	-12,78	4,88	2,64
M_{22}	-20,68	13,71	-6,11	-0,85	0,37	-20,31	14,09	-5,73	-0,48
$N_{21\text{-}22}$	-82,73	54,87	-24,44	-3,41	1,48	-81,25	56,36	-22,95	-1,92
M_{23}	19,94	-13,15	4,51	2,27	0,37	20,31	-12,78	4,88	2,64
M_{24}	-20,68	13,71	-6,11	-0,85	0,37	-20,31	14,09	-5,73	-0,48
$N_{23\text{-}24}$	82,73	-54,87	24,44	3,41	-1,48	81,25	-56,36	22,95	1,92
M_{25}	-20,68	13,71	-6,11	-0,85	0,37	-20,31	14,09	-5,73	-0,48
M_{26}	20,68	-13,71	6,11	0,85	-0,37	20,31	-14,09	5,73	0,48
$N_{25\text{-}26}$	-70,62	-3,12	-40,62	-33,12	-0,00	-70,62	-3,12	-40,62	-33,12

Suminių lenkimo mementų reikšmės pateiktos 4.5 paveiksle.



4.5 pav. Suminių lenkimo momentų diagrama nuo pirmos apkrovimo kombinacijos ($F_1 =$ [0 0 70 0 0 15 0 0 0 0 0 0 0 0 80 0 0 50 0 0 0 0 0 30 0 0 0]^T)

Suminių ašinių jėgų reikšmės pateiktos 4.6 paveiksle.



4.6 pav. Suminių ašinių jėgų diagrama nuo pirmos apkrovimo kombinacijos, kN

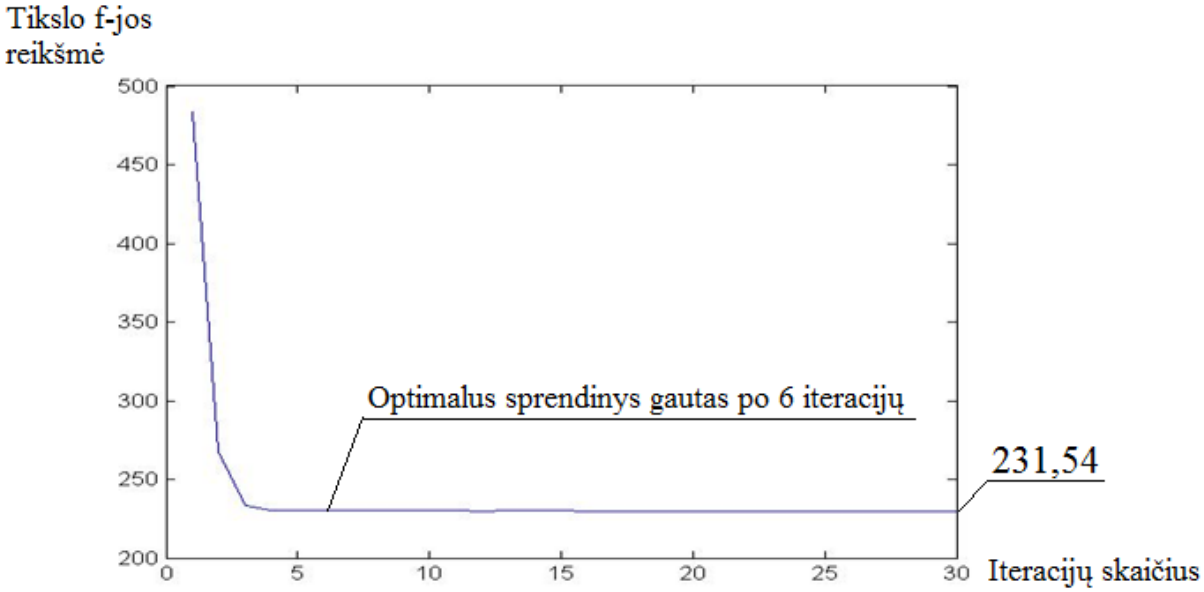
Lenkimo momentai $M_{0k,\min}$ ir $M_{0k,\max}$ užsiduodami. Šiuo atveju priimama:

$$M_{0k,\max} = 1000 \text{ kNm},$$
$$M_{0k,\min} = 10 \text{ kNm}.$$

Santvaros maksimalus leistinasis poslinkis u_{12} poslinkio kryptimi priimamas $u_{\max} = 0,01$ m.

Santvarai naudojami dvitėjai I profiliuočiai. Pradiniams pasirinktiems skerspjūviams $A_k^0, k \in K$ formuojamos pradinės infliuentinės matricos $\boldsymbol{\alpha}^0$, $\boldsymbol{\beta}^0$, $\boldsymbol{G}^0$ ir $\boldsymbol{H}^0$. Pradiniams skerspjūviams skaičiuojami ribiniai lenkimo momentai ir ašinės jegos. Išsprendus (4.2)–(4.7) uždavinį, randamas naujas ribinių moment pasiskirstymas. Apskaičiuojami nauji skerspjūviai. Pagal skerspjūvių plotus perskaičiuojamos naujos influentinės matricos. Skaičiavimai kartojami tol, kol per du gretimus sprendimo etapus gauti skerspjūvio plotai nesiskirs vienas nuo kito norimu tikslumu.

Nagrinėjamai santvarai optimalus sprendinys buvo gautas po 30 iteracijų. Tikslo funkcijos reikšmių grafikas parodytas 4.7 paveiksle.



4.7 pav. Ribinių lenkimo momentų skaičiavimas iteracijų metu

Atlikus visus skaičiavimus buvo gauti santvaros tampriųjų, liekamųjų ir suminių poslinkių vektoriai, jų reikšmės pateiktos 4.2 lentelėje (m).

4.2 lentelė. Tamprių, liekamųjų ir suminių poslinkių vektoriai

Poslinkis	u_{e1}	u_{e2}	u_{e3}	u_{e4}	u_r	$u_{e1}+u_r$	$u_{e2}+u_r$	$u_{e3}+u_r$	$u_{e4}+u_r$
u_1	0,0011	-0,0005	0,0008	-0,0002	0,0008	0,0019	0,0003	0,0016	0,0006
u_2	-0,0000	0,0000	0,0000	-0,0000	0,0004	0,0003	0,0004	0,0004	0,0003
u_3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
u_4	0,0011	-0,0005	0,0008	-0,0002	0,0008	0,0019	0,0003	0,0016	0,0006
u_5	-0,0000	0,0000	0,0000	-0,0000	0,0004	0,0003	0,0004	0,0004	0,0003
u_6	0,0037	-0,0020	0,0025	-0,0008	0,0016	0,0053	-0,0003	0,0042	0,0008
u_7	0,0017	-0,0011	0,0011	-0,0006	0,0024	0,0041	0,0013	0,0036	0,0019
u_8	0,0000	-0,0000	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	-0,0000	0,0000	-0,0000
u_9	0,0037	-0,0020	0,0025	-0,0008	0,0016	0,0053	-0,0003	0,0042	0,0008
u_{10}	0,0017	-0,0011	0,0011	-0,0006	0,0024	0,0041	0,0013	0,0036	0,0019
u_{11}	0,0000	-0,0000	0,0000	-0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
u_{12}	0,0064	-0,0043	0,0040	-0,0019	0,0036	**0,0100**	-0,0007	0,0076	0,0017
u_{13}	0,0002	-0,0003	-0,0003	0,0002	0,0003	0,0005	-0,0000	-0,0000	0,0005
u_{14}	-0,0000	0,0000	0,0000	-0,0000	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
u_{15}	0,0064	-0,0043	0,0040	-0,0019	0,0036	**0,0100**	-0,0007	0,0076	0,0017

4.2 lentelės tęsinys

u_{16}	0,0002	-0,0003	-0,0003	0,0002	0,0003	0,0005	-0,0000	-0,0000	0,0005
u_{17}	-0,0000	0,0000	0,0000	-0,0000	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
u_{18}	0,0045	-0,0030	0,0015	0,0000	0,0026	0,0070	-0,0005	0,0040	0,0026
u_{19}	-0,0017	0,0012	-0,0011	0,0005	-0,0024	-0,0041	-0,0012	-0,0034	-0,0019
u_{20}	0,0000	-0,0000	0,0000	-0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
u_{21}	0,0045	-0,0030	0,0015	0,0000	0,0026	0,0070	-0,0005	0,0040	0,0026
u_{22}	-0,0017	0,0012	-0,0011	0,0005	-0,0024	-0,0041	-0,0012	-0,0034	-0,0019
u_{23}	-0,0000	0,0000	0,0000	-0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
u_{24}	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
u_{25}	-0,0014	0,0010	-0,0004	-0,0001	-0,0002	-0,0016	0,0007	-0,0006	-0,0003
u_{26}	0,0000	-0,0000	0,0000	-0,0000	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
u_{27}	-0,0014	0,0010	-0,0004	-0,0001	-0,0002	-0,0016	0,0007	-0,0006	-0,0003

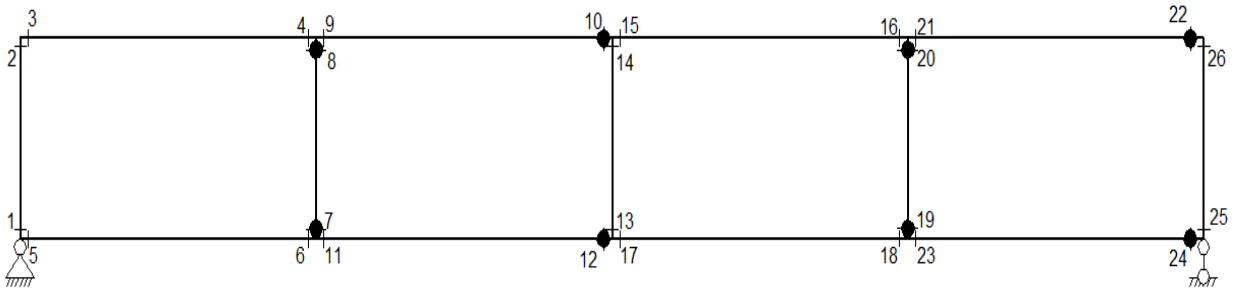
4.1 lentelėje parodytos liekamosios įrąžos $\boldsymbol{S}_r^*$ skaičiuojamos pagal formulę:

$$\boldsymbol{S}_r^* = \bar{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\theta}_r^* = \bar{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda}^*.$$

Pagal uždavinio sprendimo *MATLABO* rezultatus gaunamas plastinių deformacijų greičių vektorius:

$\boldsymbol{\theta}_p^*$ = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,0019 –0,0019 0 0 0,0013 –0,000081 0 0,0013 0,000081 0 0 0 0 0 0 0 0 0 –0,003 0,003 0 0 –0,0025 –0,00015 0 –0,0025 0,00015 0 0 0].

Vietos, kuriose atsirado plastinės deformacijos, pavaizduotos 4.8 paveiksle.



4.8 pav. Plastinių deformacijų atsiradimo pjūviai

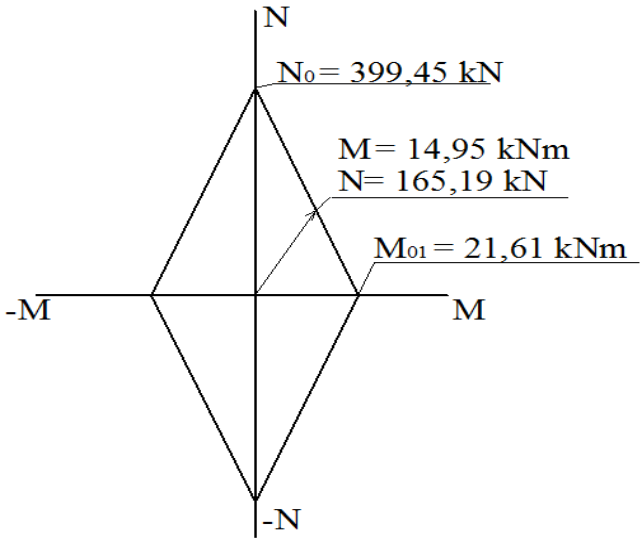
Skaičiuojame elementų pjūviuose patyrusiuose pilnutinį tekėjima N_0 reikšmes.

$$c = \frac{M_{0,i}}{N_0}.$$

Čia $M_{0,i}$ – ribinis lenkimo momentas skaičiuojamajame pjūvyje, šiuo atveju $M_{0,1}$ = 21,61 kNm. Ekscentricitetas c = 0,0541.

$$N_0 = \frac{21,61}{0,0541} = 399,45 \text{ kN}.$$

Vaizduojamas vienas santvaros elemento pjūvis, kuriame buvo pasiektas pilnutinis tekėjimas, jis pavaizduotas 4.9 paveiksle.



4.9 pav. Įtempio būvis pilnutinį tekėjimą patyrusiame elemento pjūvyje 12

4.5. Profilių parinkimas pagal gautus duomenis

Darbe buvo skaičiuojama Virandelio santvara. Buvo apskaičiuotas prisitaikančios santvaros ribinių momentų optimalaus pasiskirstymo uždavinys.

Pradiniai santvaros skerspjūviai visiems strypams buvo priimti vienodi I profiliuočiai.

Atlikus visus skaičiavimus buvo gauti ribiniai momentai:

$$M_{01} = 21,61 \text{ kN},$$
$$M_{02} = 21,61 \text{ kN},$$
$$M_{03} = 22,79 \text{ kN}.$$

Plastiniai atsparumo momentai:

$$W_{pl1} = 91,96 \text{ kN},$$
$$W_{pl2} = 91,96 \text{ kN},$$
$$W_{pl3} = 96,99 \text{ kN}.$$

Pagal šiuos ribinius momentus buvo gauti skerspjūvių plotai:

$$A_1 = 16,99 \text{ cm}^2,$$
$$A_2 = 16,99 \text{ cm}^2,$$
$$A_3 = 17,54 \text{ cm}^2.$$

Šiems skerspjūviams parinkti profiliai:

$$\text{IPE160} - A_1 = 20{,}1\ \text{cm}^2,\ W_{pl} = 124\ \text{cm}^3;$$
$$\text{IPE160} - A_2 = 20{,}1\ \text{cm}^2,\ W_{pl} = 124\ \text{cm}^3;$$
$$\text{IPE160} - A_3 = 20{,}1\ \text{cm}^2,\ W_{pl} = 124\ \text{cm}^3.$$

Didžiausias įlinkis santvaroje atsiranda esant pirmąjam apkrovimo atvejui:

$$u_{12} = u_{e,1} + u_{r,12} = 0{,}0064 + 0{,}0036 = 0{,}01\ \text{m},$$

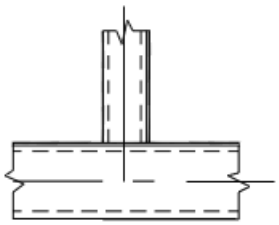
$$u_{15} = u_{e,1} + u_{r,15} = 0{,}0064 + 0{,}0036 = 0{,}01\ \text{m}.$$

4.6. Konstrukcinių apribojimų įtaka santvaros optimaliam projektavimui

(4.2)–(4.7) uždavinys yra tolydinės optimizacijos problema. Statybinių konstrukcijų projektavimas siejamas su profiliuočių asortimento diskretine seka. Esant kintamai kartotinei apkrovai, būtų sudėtinga (4.2) – (4.7) uždavinį paversti diskretinio optimizavimo uždaviniu, tada tektų įjungti šakų ir rėžių metodą.

Norėdami baigiamajame magistro darbe priartėti prie realaus projektavimo išsamiau panagrinėsime konstruktyvines (4.5) sąlygas. Pradžioje aptarsime santvaros mazgo projektavimą pagal EC3, dėžiniam skerspjūviui.

Pagal normose pateiktus nurodymus, Virandelio santvaros mazgai vadinami T mazgo tipu.



4.10 pav. Virandelio santvaros mazgas (dėžinio skerspjūvio)

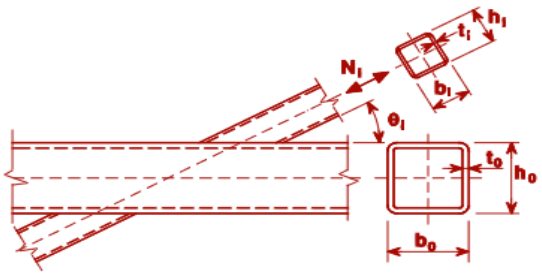
Lenkimo kartu su ašine jėga veikiamos tinklelio elementų jungtys turi atitikti šį reikalavimą:

$$\frac{N_{i,Ed}}{N_{i,Rd}} + \frac{M_{ip,i,Ed}}{M_{ip,i,Rd}} + \frac{M_{op,i,Ed}}{M_{op,i,Rd}} \le 1{,}0. \qquad (4.8)$$

Čia $N_{i,Rd}$ – skačiuotinė elemento ašinė galia; $N_{i,Ed}$ – skaičiuotinis vidinė elemento ašinė galia; $M_{ip,i,Rd}$ – skaičiuotinė lenkiamoji galia plokštumoje; $M_{ip,i,Ed}$ – skaičiuotinis vidinis lenkiamasis momentas plokštumoje; $M_{op,i,Rd}$ – skaičiuotinė lenkiamoji galia iš plokštumos; $M_{op,i,Ed}$ – skaičiuotinis vidinis lenkiamasis momentas iš plokštumos.

Skaičiuotinė virintinių RHS ir RHS juostų elementų T mazgo ašinė galia $N_{i,Rd}$ skaičiuojama pagal normose pateiktą 7.11 lentelę (lentelės numeracija pagal EC3)

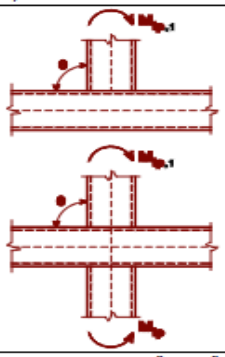
7.11 lentelė. Skaičiuotinė virintinių RHS arba CHS tinklelio elementų ir RHS juostų elementų T, X ir Y mazgų ašinė galia

Mazgo tipas	Skaičiuotinė laikomoji galia [i = 1]
	Juostos viršaus irtis $\beta \le 0{,}85$
	$N_{i,\mathrm{Rd}} = \dfrac{k_n\, f_{y0}\, t_0^2}{(1-\beta)\sin\theta_1}\left(\dfrac{2\,\eta}{\sin\theta_1} + 4\sqrt{1-\beta}\right) / \gamma_{M5}$
	Juostos šoninės sienelės irtis [1] $\beta = 1{,}0$ [2]
	$N_{i,\mathrm{Rd}} = \dfrac{f_b\, t_0}{\sin\theta_1}\left(\dfrac{2\,h_i}{\sin\theta_1} + 10\, t_0\right) / \gamma_{M5}$
	Tinklelio elemento irtis $\beta \ge 0{,}85$
	$N_{i,\mathrm{Rd}} = f_{yi}\, t_i\, (2\,h_i - 4\,t_i + 2\,b_{\mathrm{eff}}) / \gamma_{M5}$
	Praspaudžiamoji kerpamoji irtis $0{,}85 \le \beta \le (1 - 1/\gamma)$
	$N_{i,\mathrm{Rd}} = \dfrac{f_{y0}\, t_0}{\sqrt{3}\sin\theta_1}\left(\dfrac{2\,h_i}{\sin\theta_1} + 2\, b_{e,p}\right) / \gamma_{M5}$
[1] X mazgams, kurių $\theta < 90°$, taikytina mažesnioji iš šių reikšmių, o K bei N mazgams su tarpu – 7.12 lentelėje nurodytos juostos šoninių sienelių skaičiuotinės atsparumo šlyčiai reikšmės. [2] Kai $0{,}85 \le \beta \le 1{,}0$, taikoma tiesinė interpoliacija tarp juostos viršaus irties reikšmės (kai $\beta = 0{,}85$) ir juostos šoninės sienelės irties (šoninės sienelės klupumo ar juostos šlyties) pagrindinės reikšmės (kai $\beta = 1{,}0$).	
Jei tinklelio elementai apskriti, pirmiau minėtos reikšmės dauginamos iš $\pi/4$; b_1 ir h_1 pakeičiami į d_1, o b_2 ir h_2 – į d_2.	
Kai veikia tempimas: $f_b = f_{y0}$. Kai veikia gniuždymas: $f_b = \chi f_{y0}$ (T ir Y mazgai); $f_b = 0{,}8\,\chi f_{y0} \sin\theta_i$ (X mazgai); čia χ yra lenkiamojo klupumo koeficientas, gaunamas pagal EN 1993-1-1, taikant atitinkamą klupumo kreivę ir sąlyginį liaunį $\overline{\lambda}$, apskaičiuojamą taip: $\overline{\lambda} = 3{,}46\dfrac{\left(\dfrac{h_0}{t_0} - 2\right)\sqrt{\dfrac{1}{\sin\theta_i}}}{\pi\sqrt{\dfrac{E}{f_{y0}}}}$.	$b_{\mathrm{eff}} = \dfrac{10}{b_0/t_0}\dfrac{f_{y0}\, t_0}{f_{yi}\, t_i} b_i$, bet $b_{\mathrm{eff}} \le b_i$. $b_{e,p} = \dfrac{10}{b_0\, t_0} b_i$, bet $b_{e,p} \le b_i$. Kai $n > 0$ (gniuždymas): $k_n = 1{,}3 - \dfrac{0{,}4\, n}{\beta}$, bet $k_n \le 1{,}0$. Kai $n \le 0$ (tempimas): $k_n = 1{,}0$.

4.11 pav. T mazgo ašinės galios $N_{i,Rd}$ skaičiavimas, kuris pateiktas normose 7.11 lentelėje

Skaičiuotinė virintinių RHS tinklelio ir RHS juostų elementų mazgo lenkiamoji galia plokštumoje $M_{ip,i,Rd}$ ir lenkiamoji galia iš plokštumos $M_{op,i,Rd}$ skaičiuojama pagal normose pateiktą 7.14 lentelę.

7.14 lentelė. Skaičiuotinė virintinių RHS tinklelio elementų ir RHS juostų elementų mazgų lenkiamoji galia

T ir X mazgai	Skaičiuotinė laikomoji galia
Lenkiamieji momentai plokštumoje ($\theta = 90°$)	Juostos viršaus irtis $\beta \le 0{,}85$
	$M_{ip,1,Rd} = k_n\, f_{y0}\, t_0^2\, h_1 \left(\frac{1}{2\eta} + \frac{2}{\sqrt{1-\beta}} + \frac{\eta}{1-\beta} \right) / \gamma_{M5}$
	Juostos šoninės sienelės sutraiškymas $0{,}85 \le \beta \le 1{,}0$
	$M_{ip,1,Rd} = 0{,}5 f_{yk}\, t_0\, (h_1 + 5\, t_0)^2 / \gamma_{M5}$ $f_{yk} = f_{y0}$ – T mazgų; $f_{yk} = 0{,}8 f_{y0}$ – X mazgų.
	Tinklelio elemento irtis $0{,}85 \le \beta \le 1{,}0$
	$M_{ip,1,Rd} = f_{y1} \left(W_{pl,1} - (1 - b_{eff} / b_1)\, b_1\, h_1\, t_1 \right) / \gamma_{M5}$
Lenkiamieji momentai iš plokštumos ($\theta = 90°$)	Juostos viršaus irtis $\beta \le 0{,}85$
	$M_{op,1,Rd} = k_n\, f_{y0}\, t_0^2 \left(\frac{h_1\,(1+\beta)}{2\,(1-\beta)} + \sqrt{\frac{2\, b_0\, b_1\, (1+\beta)}{1-\beta}} \right) / \gamma_{M5}$
	Juostos šoninės sienelės sutraiškymas $0{,}85 \le \beta \le 1{,}0$
	$M_{op,1,Rd} = f_{yk}\, t_0\, (b_0 - t_0)\, (h_1 + 5\, t_0) / \gamma_{M5}$ $f_{yk} = f_{y0}$ – T mazgų; $f_{yk} = 0{,}8 f_{y0}$ – X mazgų.
	Juostos iškreipiamoji irtis (tik T mazgai) *)
	$M_{op,1,Rd} = 2\, f_{y0}\, t_0 \left(h_1\, t_0 + \sqrt{b_0\, h_0\, t_0\, (b_0 + h_0)} \right) / \gamma_{M5}$
	Tinklelio elemento irtis $0{,}85 \le \beta \le 1{,}0$
	$M_{op,1,Rd} = f_{y1} \left(W_{pl,1} - 0{,}5\, (1 - b_{eff} / b_1)^2\, b_1^2\, t_1 \right) / \gamma_{M5}$
Parametrai b_{eff} ir k_n	
$b_{eff} = \frac{10}{b_0 / t_0} \frac{f_{y0}\, t_0}{f_{y1}\, t_1} b_1$, bet $b_{eff} \le b_1$	Kai $n > 0$ (gniuždymas): $k_n = 1{,}3 - \frac{0{,}4\, n}{\beta}$, bet $k_n \le 1{,}0$. Kai $n \le 0$ (tempimas): $k_n = 1{,}0$.
*) Šis kriterijus netaikomas, jei nuo juostos iškreipiamosios irties apsaugoma kitomis priemonėmis.	

4.12 pav. T mazgo lenkiamosios galios plokštumoje $M_{ip,i,Rd}$ ir lenkiamosios galios iš plokštumos $M_{op,i,Rd}$ skaičiavimas, kuris pateiktas normose 7.14 lentelėje

Atlikus skaičiavimus pagal normose pateiktą metodiką, nelygybė (4.8) turi būti tenkinama.

Mazgų skerspjūviai ir jų ribiniai momentai M_0 suprojektuoti pagal (4.2)–(4.7) matematinį modelį gauti iš tolydinės optimizacijos. Suprojektuoti mazgai pagal normose pateiktą metodiką, parenkami iš asortimentų turintys lenkimo momentus M_{0I}. Tokiu būdu keičiasi konstruktyvinės (4.5) sąlygos ribinių momentų ribos:

$$M_{0I,\min} \le M_{0k} \le M_{0I,\max}.$$

Su gautų profiliuočių naujais (I – skerspjūvio inercijos momentas, A – skerspjūvio plotas) rodikliais perskaičiuojamos tamprios įrąžos S_e bei visas (4.2)–(4.7) uždavinys, jame pakeitus konstruktyvines sąlygas:

rasti

$$\min \sum_k L_k M_{0k},$$

kai

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{S}_{ej}) \geq \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \left[\boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{S}_{ej}) \right] = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \sum_j \boldsymbol{\lambda}_j,$$

$$M_{0\mathrm{I},\min} \leq M_{0k} \leq M_{0\mathrm{I},\max}.$$

$$\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda},$$

$$\boldsymbol{u}_{\min} \leq \boldsymbol{u}_{e,inf} + \boldsymbol{u}_r, \quad \boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{u}_{e,sup} \leq \boldsymbol{u}_{\max}.$$

4.7. Papildomo optimizavimo uždavinio detalesnis konstruktyvinis apribojimas

Atliekamas (4.2)–(4.7) uždavinio papildomas skaičiavimas su kompiuteriniu matematiniu paketu MATLAB.

Kadangi visiems strypams buvo parinkti vienodi skerspjūviai IPE160 – $A_1 = 20{,}1\ \mathrm{cm}^2$, $W_{pl} = 124\ \mathrm{cm}^3$, todėl perskaičiuotas ribinis momentas $M_{0\mathrm{I}} = 29{,}14\ \mathrm{kN}$. Su šiuo ribiniu momentu perskuočiuojamas visas (4.2)–(4.7) uždavinys. *MATLAB* paketo programos tekstas pateiktas B priede.

Perskaičiavus uždavinį buvo gauti tokie ribiniai momentai:

$$M_{01} = 21{,}85\ \mathrm{kN},$$
$$M_{02} = 22{,}48\ \mathrm{kN},$$
$$M_{03} = 22{,}21\ \mathrm{kN}.$$

Dėl įrąžų persiskirstymo ribinių momentų reikšmės nežymiai pakito. Tokie pakitimai didelių pokyčių rezultatams nepadarė, todėl parinkti skerspjūviai taip pat nekinta.

4.8. 4 skyriaus išvados ir apibendrinimai

1. Virandelio santvaros skaičiavimo kintamai kartotinei apkrovai metodikos pagrindas gali būti bendroji tamprių – plastinių konstrukcijų oprimizacijos teorija.

2. Pagrindinė problema prisitaikančių Virandelio santvarų optimizavimo problematikoje – liekamųjų poslinkių (priklausančių nuo apkrovimo istorijos) įvertinimas.

3. Optimizavimo supaprastinimui rekomenduojama naudoti liekamųjų įlinkių influentinę matricą ir tampraus skaičiavimo įlinkių gaubtines.

BAIGIAMOSIOS DARBO IŠVADOS IR PASTABOS

Magistro baigiamajame darbe išskiriamos dvi dalys:

1) bendrosios prisitaikomumo teorijos principų taikymas Virandelio santvarai (matematiniai modeliai, sprendimo algoritmai);

2) algoritmų realizacija *MATLAB* terpėje, skaitinių rezultatų analizė.

Šių dviejų punktų visuma leido sukurti sistemiškai vientisą magistro darbą.

Apibendrinamos baigiamosios išvados (pagal atskirų skyrių dalines išvadas).

1. Statybinės metalinės konstrukcijos yra veikiamos ne vienkartės apkrovos, apkrovų derinius reglamentuoja EC3. Magistro darbo tyrimai parodė, kad plastines deformacijas patyrusi konstrukcija gali būti analizuojama prisitaikomumo teorijos metodais.

2. Projektuotojas privalo suvokti, kad plastinėje darbo stadijoje (kai apkrova ne vienkartė) negalima iš anksto nustatyti vieno pavojingiausio derinio. Būtina naudoti apkrovos ciklo sąvoką.

3. Judamoji apkrova nėra ypatinga apkrovimo rūšis: ji gali būti traktuojama kaip atskiras kartotinės apkrovos atvejis.

4. Būtina ieškoti tolesnių sąsajų tarp sukurtosios magistro baigiamajame darbe metodikos ir pramoninių kompiuterinių skaičiavimo paketų.

LITERATŪRA

Alwis, W. A. M.; Grundy, P. 1985. Shakedown analysis of plates, *International Journal of Mechanical Sciences* 27: 71–82.

Atkočiūnas J. 1999. Mathematical models of optimization problems at shakedown. *Mechanics Research Communications*, Vol. 26, p. 319-326.

Atkočiūnas, J. 2012. *Optimal Shakedown Design of Elastic-Plastic Structures.* Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.

Atkočiūnas, J; Blaževičius, G. 2012. Eurocode stability requirements in optimal shakedown truss design // *Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology,* Dubrowwik, Croatia, 4 – 7 September 2012. Stirlingsture: Civil – Comp Press, 2012. ISSN 1759 – 3433. P. 1 – 11.

Atkočiūnas J., Borkowski A., König J. A. Improved bounds for displacements at shakedown. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 28, 1981. p. 365-376.

Atkočiūnas, J.; Čižas, A. 2002. Aleksandras Čyras ir optimizacija statybinėje mechanikoje. Vilnius: Technika, 88 p.

Atkočiūnas, J.; Karkauskas, R. 2010. Tampriųjų plastinių strypinių konstrukcijų optimizavimas: vadovėlis. Vilnius: Technika. 376 p.

Atkočiūnas, J.; Venskus, A. 2011. Optimal shakedown design of frames under stability conditions according to standards, *Computers & Structures* 3–4(89): 435–443.

Bazaraa, M. S.; Sherall, H.; Shetty, C. 2004. Nonlinear programming theory and algorithms. New York: Brijabsi Art Press Ltd., John Wiley & Sons, Inc. 853 p.

Bazaraa, M. S.; Shetty, C. M. 1979. Nonlinear programming theory and algorithms. New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley,

Belytschko, T. 1972. Plane stress shakedown analysis by finite elements, *Int. J. Mech. Sci*. 14: 619–625.

Borkowski, A.; Atkočiūnas, J. 1975: Optimal design for cyclic loading. *IUTAM, Optimization in Structural Design* (Symposium Warsaw/Poland, 1973). Berlin: Springer Verlag, p. 432–440.

Capurso, M. 1974. A displacement bounding principle in shakedown of structures subjected to cyclic loads, *Int. J. Solids and Struct.* 10(1): 77–92.

Capurso, M.; Corradi, L.; Maier, G. 1978. Bounds on deformations and displacements in shakedown theory, in *Proc. Materiaux et Structures sous Chargement Cyclique*, Palaiseau, France, 213–244.

Cinquini, C.; Guerlement, G.; Lamblin, D. 1980. Finite element iterative methods for optimal elastic design of circular plates, *Computers & Structures* 12: 85–92.

Cohn, M. Z.; Parimi, S. R. 1973. Optimal design of plastic structures for fixed and shakedown loadings. *J. Appl. Mech*., 40., p. 595–599.

Corradi, L.; Zavelani Rossi, A. 1974. A linear programming approach to shakedown analysis of structure, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng*. 3: 37–53.

Čyras A., Atkočiūnas J. 1971. The design of perfectly elastic-plastic body under variable repeated loading. *Lithuanian Proceedings in Mechanics (Proceedings of Lithuanian Higher Education Institutions)*, Vol. 1 (8), p. 71-78.

Čyras, A.; Atkočiūnas, J. 1984. Mathematical model for the analysis of elastic-plastic structures under repeated-cariable loading. *Mech. Res. Comm*., 11, p. 353–360.

Čyras, A.; Borkowski, A.; Karkauskas, R. 2004. *Theory and methods of optimization of rigid – plastic systems.* Vilnius: Tevhnika. 354 p.

Čyras, A., 1983. Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures. Ellis Horwood, Chichester.

De Saxcé G. 1986. Sur quelques problèmes de mécanique des solides considérés comme matériaux à potentiels convexes. These de Doctorat, l'Université de Liège.

Dorosz, St. 1978. An improved bound to maximum deflections of elastic-plastic structures at shakedown, *Journal of Structural Mechanics* 6: 267–287.

Eurocode 3. 2005. Plieninių konstrukcijų projektavimas. 1 - 1 dalis. Bendrosios ir pastatų taisyklės. 104 p.

Eurocode 3. 2005. Plieninių konstrukcijų projektavimas. 1-8 dalis. Mazgų projektavimas. 136 p.

Ferris, M. C.; Tin-Loi, F. 1999. On the solution of a minimum weight elastoplastic problem involving displacement and complementarity constraints, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 174: 107–120.

Giambanco F., Palizzolo L., Polizzotto C. 1994 a. Optimal shakedown design of beam structures. *Structural Optimization*, Vol. 8, p. 156-167.

Giambanco F., Palizzolo L., Polizzotto C. 1994 b. Optimal shakedown design of circular plates. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 120, p. 2535-2355.

Giambanco, F.; Palizzolo, L.; Cirone, L. 1998b. Computational methods for optimal shakedown design of FE structures, *Structural Optimization* 15: 284–295.

Giambanco F., Palizzolo L. 1995. Optimality conditions for shakedown design of trusses. *Computational Mechanics*, Vol. 16, p. 369-378.

Giambanco, F. 2000. Multicriteria optimal design of circular plates, in *IASS–IACM 2000, Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures*, Chania-Crete, June 4–7.

Heyman J. 1958. Minimum weight of frames under shakedown loading. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 84, p. 1-25.

Jankovski, V.; Atkočiūnas, J. 2011. Biparametric shakedown design of steel frame structures, *Mechanika* 17(1): 5–12.

Jirásek, M.; Bažant, Z. 2002. *Inelastic analysis of structures*. Chichester, New York: Wiley. 734 p.

Kalanta. S. 2007. Taikomosios optimizacijos pagrindai: vadovėlis. Vilnius: Technika. 480p.

Kaliszky, S.; Lógó, J. 1997. Optimal plastic limit and shakedown design of bar structures with constraints on plastic deformation, *Engineering Structures* 19(1): 19–27.

Kaliszky, S.; Lógó, J. 2002. Plastic behaviour and stability constraints in the shakedown analysis and optimal design of trusses, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 24(2): 118–124.

Kamenjarzh, J.; Weichert, D. 1992. On kinematic upper bounds for the safety factor in shakedown theory, *Int. J. of Plasticity* 8: 827–837.

Karadeniz S., Ponter, 1984. A. R. S. A linear programming upper bound approach to the shakedown limit of thin shells subjected to variable thermal loading. *Journal of strain analysis for engineering design*, Vol. 19, p. 221-230.

Koiter, W. T. 1960. General theorems for elastic–plastic solids, in Sneddon, I. N.; Hill, R. (Eds.). *Progress in Solid Mechanics.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 165–221.

König, J. A. 1987. *Shakedown of elastic-plastic structures*. Amsterdam: Elsevier. 214 p.

König, J. A.; Maier, G. 1981. Shakedown analysis of elastoplastic structures: a review of recent developments, *J. Nuclear Engineering Design* 66: 81–95.

König, J. A. 1975a. On optimum shakedown design, in Sawczuk, A. and Mróz, Z. (Eds.). *IUTAM Symp. Optimization in Structural Design*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 405–414.

König, J. A. 1975b. Analysis of incremental collapse of framed structures accounting for axial forces, in *Proc. Symp. Theor. Probl. Steel Structs*., Bratislava, 116–122.

Maier, G. 1970. A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes, *Meccanica* 5(1): 54–66.

Maier, G.; Drucker, D. C. 1973. Effects of geometry change on essential features of inelastic behaviour, *J. Eng. Mech. Div.* 99: 819–834.

Maier G. 1973. A shakedown matrix theory allowing for work-hardening and second-order geometric effects. In: Foundations of plasticity. Sawczuk A. (ed.) North-Holland, Amsterdam. p. 417-433.

Maier, G. 1969. Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow laws: A finite element linear programming approach, *Meccanica, AIMETA* 4: 250–260.

Maier G., Zavelani A., Benedetti D. 1972. A finite element approach to optimal design of plastic structures in plane stress. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, p. 455-473.

Melan, E. 1936. Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischem Baustoff, *Sitber. Akad. Wiss. Wien* IIa 145: 195–218.

Merkevičiūtė, D.; Atkočiūnas, J. 2006. Optimal shakedown design of metal structures under stiffness and stability constraints, *Journal of Constructional Steel Research* 62(12): 1270–1275.

Morelle, P., 1989. Analyse duale de l'adaptation plastique des structures par la méthode des éléments finis et la programmation mathématique. Thèse de Doctorat, Universitéde Liège, Belgique.

Morelle, P. 1986. Numerical shakedown analysis of axisymmetric sandwich shells. An upper bound formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 23: 2071–2088.

Mróz, Z.; Weichert, D.; Dorosz, S. 1995. *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Loads*. Memorial Volume König, J. A. Kluwer Academic Publishers. 523 p.

Muscat, M.; Mackenzie, D.; Hamilton, R. 2003. Evaluating shakedown under proportional loading by non-linear static analysis, *Computers & Structures* 81: 1727–1737.

Nguyen-Dang H., Morelle P. 1981. Numerical shakedown analysis of plates and shells of revolution. In: Proceedings of 3rd world congress and exhibition on FEMs. Beverly Hills.

Nguyen-Dang H., Morelle P. 1990. Optimal plastic design and the development of practical software. In: D. Lloyd Smith (Ed.). Mathematical programming methods in structural plasticity. Springer-Verlag, Berlin. p. 207-229.

Rozvany G. I. N. 1976. Optimal design of flexural systems: Beams, grillages, slabs, plates, and shells. Pergamon Press, New York.

Rozvany G. I. N. 1989. Structural design via optimally criteria. Kluwer Academia Publishers, Dordrecht.

Palizzolo, L. 2000. Multicriteria optimal design of continuous beams, in *ECCOMAS 2000, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, September 11–14.

Polizzotto, C. 1982. A unified treatment of shakedown theory and related bounding techniques, *Struct. Arch.* 7: 19–75.

Polizzotto C. 1984. Shakedown analysis and design in presence of limited ductility behaviour. *Engineering Structures*. Vol. 6, p. 80-86.

Ponter, A.R.S., 1972. An Upper Bound on the Small Displacements of Elastic, Perfectly Plastic Structures. Journal of Applied Mechanics 39, 959.

Ponter A. R. S . 1975. General displacement and work bounds for dynamically loaded bodies. *Journal Mechanic Physic and Solids*, Vol. 23, p. 151-163.

Ponter A. R. S., Karadeniz S., Carter K. F. 1990. Extended upper bound shakedown theory and finite element method for axisymmetric thin shells. In: Kleiber M. and Konig J. A. (eds.). Inelastic Solids and Structures. Pineridge Press, Swansea, UK. p. 421-428.

Ponter A. R. S., Engelhardt M. 2000. Shakedown limits for a general yield condition: implementation and application for a von Mises yield condition. In: D. Weichert, G. Maier (eds.). Inealstic Analysis of Structures under Variable Loads. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, Netherlands. p. 11-29.

Ponter A. R. S., Fuschi P., Engelhardt M. 2000. Limit analysis for a general class of yield conditions. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 19, p. 401-421.

Save M. A., Prager W. 1985c. Structural optimization. Plenum Press, New York.

Save, M. A.; Prager, W. (Eds.). 1985a. *Structural Optimization.* Vol. 1. *Optimality Criteria*. London, New York: Plenum Press. 334 p.

Save, M. A.; Prager, W. (Eds.). 1985b. *Structural Optimization.* Vol. 2. *Mathematical Programming*. London, New York: Plenum Press. 398 p.

Staat, M., Heitzer, M. (Eds.), 2002. Numerical Methods for Limit and Shakedown Analysis - Deterministic and Probabilistic Problems. John von Neumann Institute for Computing.

Stein, E., Zhang, G., Mahnken, R., 1993. Shakedown analysis for perfectly plastic and kinematic hardening materials. In: CISM. Progress in Computernal Analysis or Inelastic Structures. Springer Verlag, Wien, New York, pp. 175–244.

Tin-Loi, F., 2000. Optimum shakedown design under residual displacement constraints. Structural and Multidisciplinary Optimization 19, 130–139.

Weichert, D.; Maier, G. (Eds.). 2002. *Inelastic behavior of structures under variable repeated loads*. New York, Vienna: Springer-Verlag. 393 p.

Weichert D., Hachemi A., Schwabe F. 1999 a. Shakedown analysis of composites. *Mechanics Research Communications*, Vol. 26, p. 309-318.

Weichert D., Hachemi A., Schwabe F. 1999 b. Application of shakedown analysis to the plastic design of composites. *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69, p. 623-633.

A PRIEDAS

Mokslinis pranešimas Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijoje

Magistro baigiamojo darbo rengimo procese buvo padarytas mokslinis pranešimas. Jo bibliografinis aprašas pateikiamas žemiau:

Jokšas, A., Blaževičius, G., Atkočiūnas, J. *Optimalis Virandelio santvara: prisitaikomumas ir ribojami poslinkiai.* Pranešimas Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijoje "Mokslas – Lietuvos ateitis" (programos sekcija "Statyba"/ "Statybinės konstrukcijos. Konstrukcijų mechanika"), įvykusios Vilniuje 2013 m.kovo 22d.

Pateikiame pranešimo skaidres.



Virandelio santvara
(Vierendeel truss)





Virandelio tiltas: šis tiltas kitaip nei kitos santvaros neturi trikampių ertmių, turi keturkampes ertmes ir standžius elementų sujungimus (mazgus), kurie be ašinių jėgų turi atlaikyti ir didelius lenkimo momentus.

1897 metais Pasaulinėje mugėje Briuselyje, A. Virandelis pademonstravo savo sąskaita pastatytą 31,5 metrų ilgio tiltą ir akrovė jį, kad parodytų *skirtumus* tarp matavimų ir jo skaičiavimų analizės.

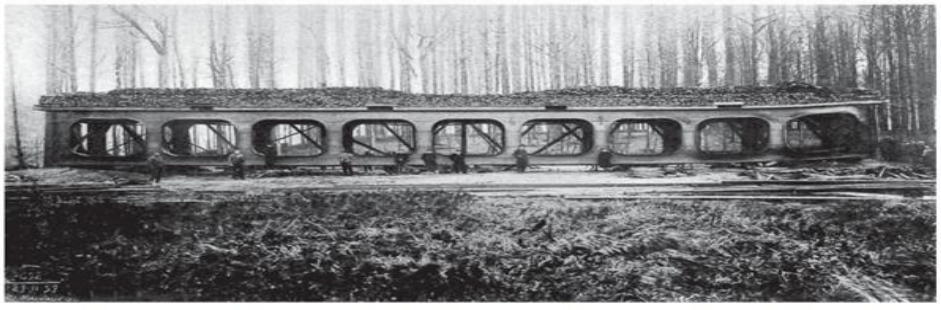
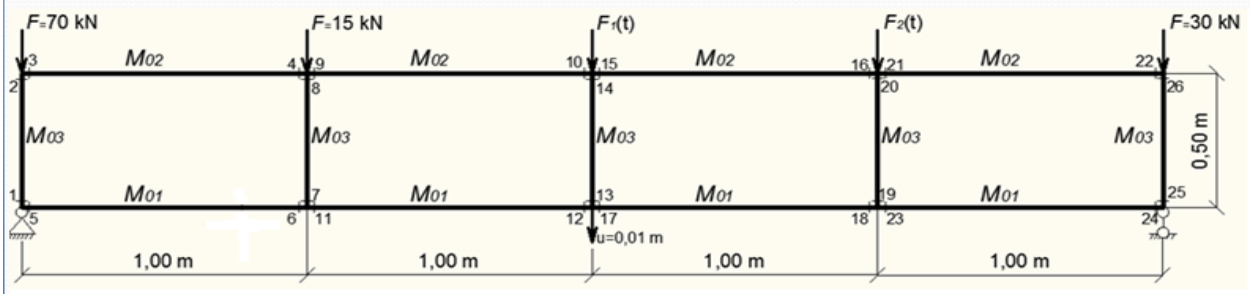


Figure 5: Experimental determination of strength of a Vierendeel bridge; (Lambin and Christophe 1898)

Jo pirmasis tiltas buvo pastatytas Belgijoje Avalgemo mieste (Avelgem) 1902 m., per Šeldto (Scheldt) upę.



Nagrinėjama Virandelio santvara

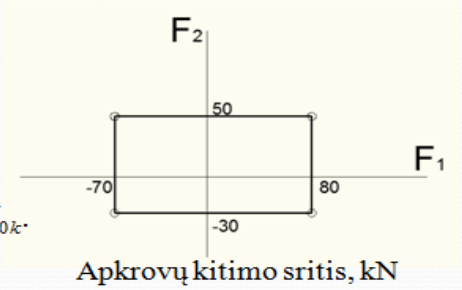


Jėgų kitimo ribos yra tokios: $-70\ \text{kN} \le F_1 \le 80\ \text{kN}$, $-30\ \text{kN} \le F_2 \le 50\ \text{kN}$.

Priimami dvitėjo skerspjūvio profiliuočiai IPE.

Apatinės juostos ribiniai momenta M_{01};
viršutinės juostos ribiniai momenta M_{02};
tinklelio ribiniai momenta M_{03}.

Ieškoma: $\min\ (L_1M_{01} + L_2M_{02} + L_3M_{03}) = \min \sum_k L_kM_{0k}$.



Apkrovų kitimo sritis, kN

Virandelio santvaros optimizavimo uždavinio matematinis modelis

$$\min \sum_k L_k M_{0k},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{S}_{ej}) \geq \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \left[\boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{S}_{ej}) \right] = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_j \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \sum_j \boldsymbol{\lambda}_j,$$

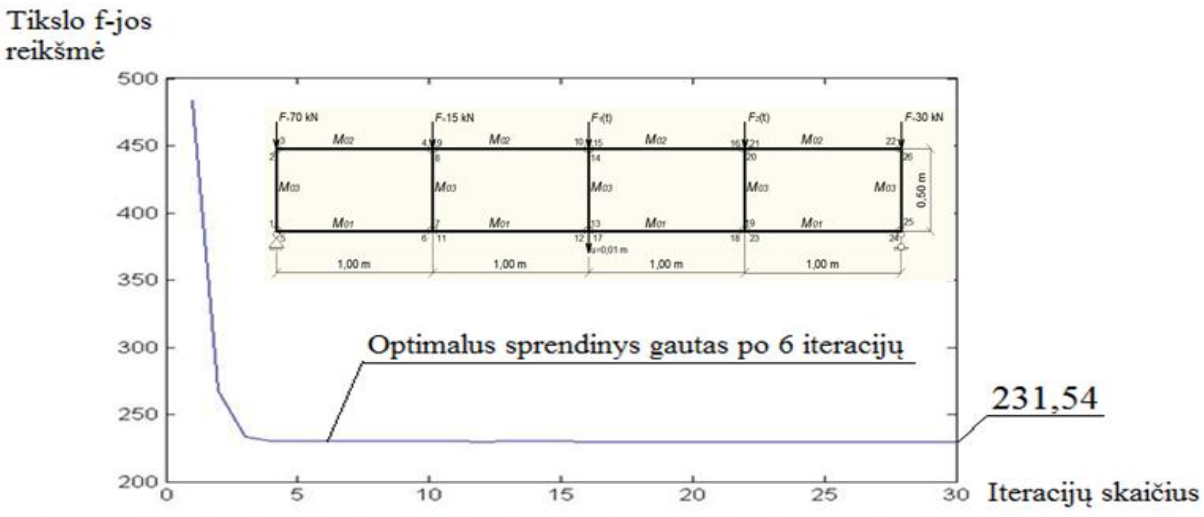
$$M_{0k,\min} \leq M_{0k} \leq M_{0k,\max}, \quad k \in K, \quad j \in J;$$

$$\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda},$$

$$\boldsymbol{u}_{\min} \leq \boldsymbol{u}_{e,inf} + \boldsymbol{u}_r, \quad \boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{u}_{e,sup} \leq \boldsymbol{u}_{\max}.$$

Čia nežinomieji yra ribiniai lenkimo momentai M_{0k} ir plastinių daugiklių vektoriai $\boldsymbol{\lambda}_j$.

Skaičiavimai atliekami matematiniu paketu MATLAB.



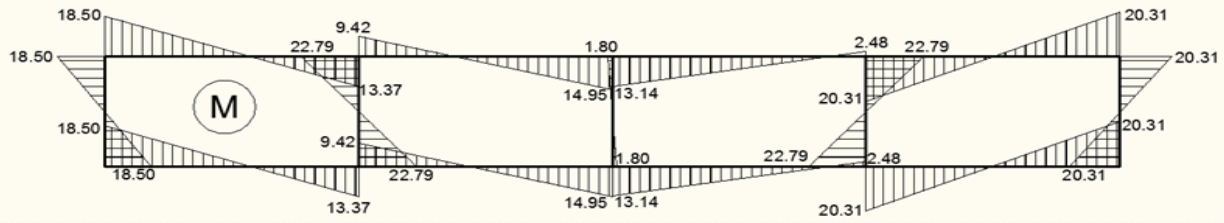
1 pav. Ribinių lenkimo momentų skaičiavimas iteracijų metu

Atlikus visus skaičiavimus buvo gauto ribiniai momentai: $M_{01} = 21,61$ kN,
$M_{02} = 21,61$ kN,
$M_{03} = 22,79$ kN.

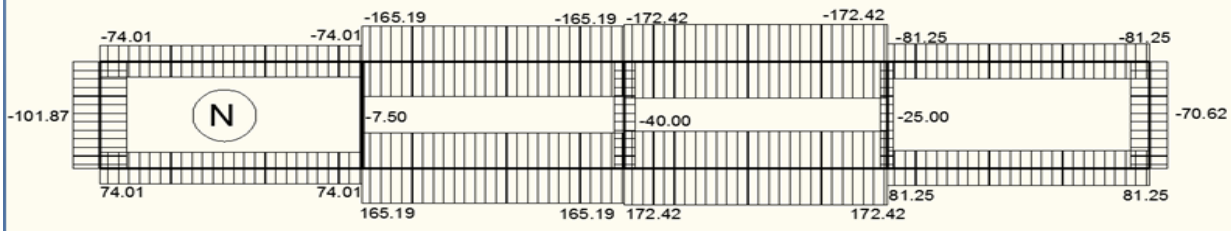
Plastiniai atsparumo momentai: $W_{pl1} = 91,96$ kN,
$W_{pl2} = 91,96$ kN,
$W_{pl3} = 96,99$ kN.

Pagal šiuos ribinius momentus buvo gauti skerspjūvių plotai: $A_1 = 16,99$ cm^2,
$A_2 = 16,99$ cm^2,
$A_3 = 17,54$ cm^2.

Šiems skerspjūviams parinkti profiliuočiai: IPE160 – $A_1 = 20,1$ cm^2, $W_{pl} = 124$ cm^3;
IPE160 – $A_2 = 20,1$ cm^2, $W_{pl} = 124$ cm^3;
IPE160 – $A_3 = 20,1$ cm^2, $W_{pl} = 124$ cm^3.



2 pav. Suminių lenkimo momentų diagrama nuo pirmos apkrovimo kombinacijos ($F_1 = [0\ 0\ 70\ 0\ 0\ 15\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 80\ 0\ 0\ 50\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 30\ 0\ 0\ 0]^T$), kNm



3 pav. Suminių ašinių jėgų diagrama nuo pirmos apkrovimo kombinacijos, kN

30 iteracijos skaičiavimo rezultatai: tamprios, liekamosios ir suminės įrąžos

1 lentelė. Tamprių, liekamųjų ir suminių įrąžų reikšmės nuo apkrovų kombinacijų

	$S_{e,1}$	$S_{e,2}$	$S_{e,3}$	$S_{e,4}$	S_r	$S_{e,1}+S_r$	$S_{e,2}+S_r$	$S_{e,3}+S_r$	$S_{e,4}+S_r$
M_1	16.64	-8.52	11.31	-3.19	1.86	18.50	-6.65	13.17	-1.32
M_2	-16.64	8.52	-11.30	3.19	-1.86	-18.50	6.65	-13.17	1.32
N_{1-2}	-101.87	-54.37	-91.87	-64.37	-0.00	-101.87	-54.37	-91.87	-64.37
M_3	-16.64	8.52	-11.30	3.19	-1.86	-18.50	6.65	-13.17	1.32
M_4	15.23	-7.10	10.56	-2.43	-1.86	13.37	-8.96	8.70	-4.29
N_{3-4}	-66.56	34.08	-45.23	12.76	-7.45	-74.01	26.62	-52.69	5.30
M_5	-16.64	8.52	-11.31	3.19	-1.86	-18.50	6.65	-13.17	1.32
M_6	15.23	-7.104	10.56	-2.43	-1.86	13.37	-8.96	8.70	-4.29
N_{5-6}	66.56	-34.08	45.23	-12.76	7.45	74.01	-26.62	52.69	-5.30
M_7	25.72	-17.67	16.12	-8.07	-2.93	**22.79**	-20.61	13.19	-11.01
M_8	-25.72	17.67	-16.12	8.07	2.93	**-22.79**	20.61	-13.19	11.01
N_{7-8}	-7.50	-7.50	-7.50	-7.50	0.00	-7.50	-7.50	-7.50	-7.50
M_9	-10.49	10.57	-5.56	5.64	1.06	-9.42	11.64	-4.49	6.71
M_{10}	13.88	-12.55	8.81	-7.48	1.06	14.95	-11.48	9.88	-6.41
N_{9-10}	-169.46	104.79	-109.74	45.07	4.27	-165.19	109.06	-105.47	49.34
M_{11}	-10.49	10.57	-5.56	5.64	1.06	-9.42	11.64	-4.49	6.71
M_{12}	13.88	-12.55	8.81	-7.48	1.06	14.95	-11.48	9.88	-6.41
N_{11-12}	169.46	-104.79	109.74	-45.07	-4.27	165.19	-109.06	105.47	-49.34
M_{13}	3.80	-4.89	-4.89	3.80	-1.99	1.80	-6.88	-6.88	1.80
M_{14}	-3.80	4.89	4.89	-3.80	1.99	-1.80	6.88	6.88	-1.80
N_{13-14}	-40.00	35.00	-40.00	35.00	0.00	-40.00	35.00	-40.00	35.00
M_{15}	10.07	-7.65	13.70	-11.28	3.06	13.14	-4.59	16.77	-8.22
M_{16}	-5.54	4.21	-11.91	10.58	3.06	-2.48	7.28	-8.85	13.65
N_{15-16}	-184.68	124.36	-90.17	29.85	12.26	-172.42	136.62	-77.91	42.11

1 lentelės tęsinys. Tamprių, liekamųjų ir suminių įrąžų reikšmės nuo apkrovų kombinacijų

	$S_{e,1}$	$S_{e,2}$	$S_{e,3}$	$S_{e,4}$	S_r	$S_{e,1}+S_r$	$S_{e,2}+S_r$	$S_{e,3}+S_r$	$S_{e,4}+S_r$
M_{17}	10.07	-7.65	13.70	-11.28	3.06	13.14	-4.59	16.77	-8.22
M_{18}	-5.54	4.21	-11.91	10.58	3.06	-2.48	7.28	-8.85	13.65
N_{17-18}	184.68	-124.36	90.17	-29.85	-12.26	172.42	-136.62	77.91	-42.11
M_{19}	-25.48	17.37	-16.43	8.31	2.69	**-22.79**	20.06	-13.74	11.01
M_{20}	25.48	-17.37	16.43	-8.31	-2.69	**22.79**	-20.06	13.74	-11.01
N_{19-20}	-25.00	15.00	15.00	-25.00	0.00	-25.00	15.00	15.00	-25.00
M_{21}	19.94	-13.15	4.51	2.27	0.37	20.31	-12.78	4.88	2.64
M_{22}	-20.68	13.71	-6.11	-0.85	0.37	-20.31	14.09	-5.73	-0.48
N_{21-22}	-82.73	54.87	-24.44	-3.41	1.48	-81.25	56.36	-22.95	-1.92
M_{23}	19.94	-13.15	4.51	2.27	0.37	20.31	-12.78	4.88	2.64
M_{24}	-20.68	13.71	-6.11	-0.85	0.37	-20.31	14.09	-5.73	-0.48
N_{23-24}	82.73	-54.87	24.44	3.41	-1.48	81.25	-56.36	22.95	1.92
M_{25}	-20.68	13.71	-6.11	-0.85	0.37	-20.31	14.09	-5.73	-0.48
M_{26}	20.68	-13.71	6.11	0.85	-0.37	20.31	-14.09	5.73	0.48
N_{25-26}	-70.62	-3.12	-40.62	-33.12	-0.00	-70.62	-3.12	-40.62	-33.12

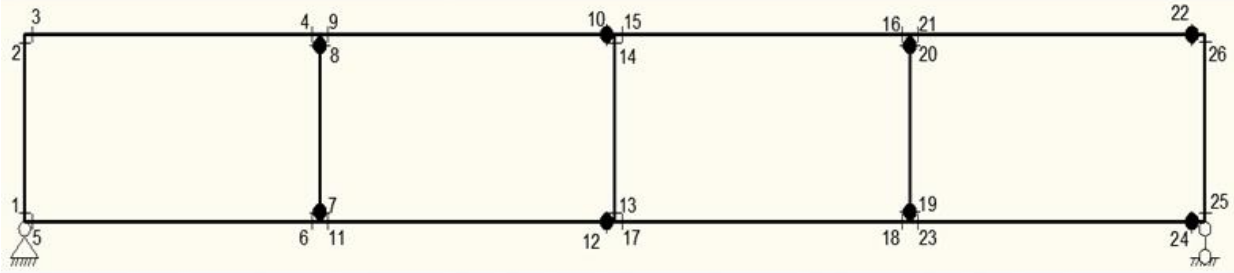
30 iteracijos skaičiavimo rezultatai: tamprios, liekamosios ir suminės įrąžos

2 lentelė. Tamprių, liekamiejų ir suminių poslinkių reikšmės nuo apkrovų kombinacijų, m

	u_{e1}	u_{e2}	u_{e3}	u_{e4}	u_r	$u_{e1}+u_r$	$u_{e2}+u_r$	$u_{e3}+u_r$	$u_{e4}+u_r$
u_1	0.0011	-0.0005	0.0008	-0.0002	0.0008	0.0019	0.0003	0.0016	0.0006
u_2	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004	0.0003
u_3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
u_4	0.0011	-0.0005	0.0008	-0.0002	0.0008	0.0019	0.0003	0.0016	0.0006
u_5	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004	0.0003
u_6	0.0037	-0.0020	0.0025	-0.0008	0.0016	0.0053	-0.0003	0.0042	0.0008
u_7	0.0017	-0.0011	0.0011	-0.0006	0.0024	0.0041	0.0013	0.0036	0.0019
u_8	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
u_9	0.0037	-0.0020	0.0025	-0.0008	0.0016	0.0053	-0.0003	0.0042	0.0008
u_{10}	0.0017	-0.0011	0.0011	-0.0006	0.0024	0.0041	0.0013	0.0036	0.0019
u_{11}	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
u_{12}	0.0064	-0.0043	0.0040	-0.0019	0.0036	**0.0100**	-0.0007	0.0076	0.0017
u_{13}	0.0002	-0.0003	-0.0003	0.0002	0.0003	0.0005	-0.0000	-0.0000	0.0005
u_{14}	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
u_{15}	0.0064	-0.0043	0.0040	-0.0019	0.0036	**0.0100**	-0.0007	0.0076	0.0017
u_{16}	0.0002	-0.0003	-0.0003	0.0002	0.0003	0.0005	-0.0000	-0.0000	0.0005
u_{17}	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
u_{18}	0.0045	-0.0030	0.0015	0.0000	0.0026	0.0070	-0.0005	0.0040	0.0026
u_{19}	-0.0017	0.0012	-0.0011	0.0005	-0.0024	-0.0041	-0.0012	-0.0034	-0.0019
u_{20}	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
u_{21}	0.0045	-0.0030	0.0015	0.0000	0.0026	0.0070	-0.0005	0.0040	0.0026
u_{22}	-0.0017	0.0012	-0.0011	0.0005	-0.0024	-0.0041	-0.0012	-0.0034	-0.0019
u_{23}	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
u_{24}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
u_{25}	-0.0014	0.0010	-0.0004	-0.0001	-0.0002	-0.0016	0.0007	-0.0006	-0.0003
u_{26}	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
u_{27}	-0.0014	0.0010	-0.0004	-0.0001	-0.0002	-0.0016	0.0007	-0.0006	-0.0003

Gautas plastinių deformacijų vektorius:

$\Theta_p = \Phi^T \lambda =$ [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0,0019 -0,0019 0 0 0,0013 -0,000081 0 0,0013 0,000081 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -0,003 0,003 0 0 -0,0025 -0,00015 0 -0,0025 0,00015 0 0 0].



4 pav. Plastinių deformacijų atsiradimo vietos



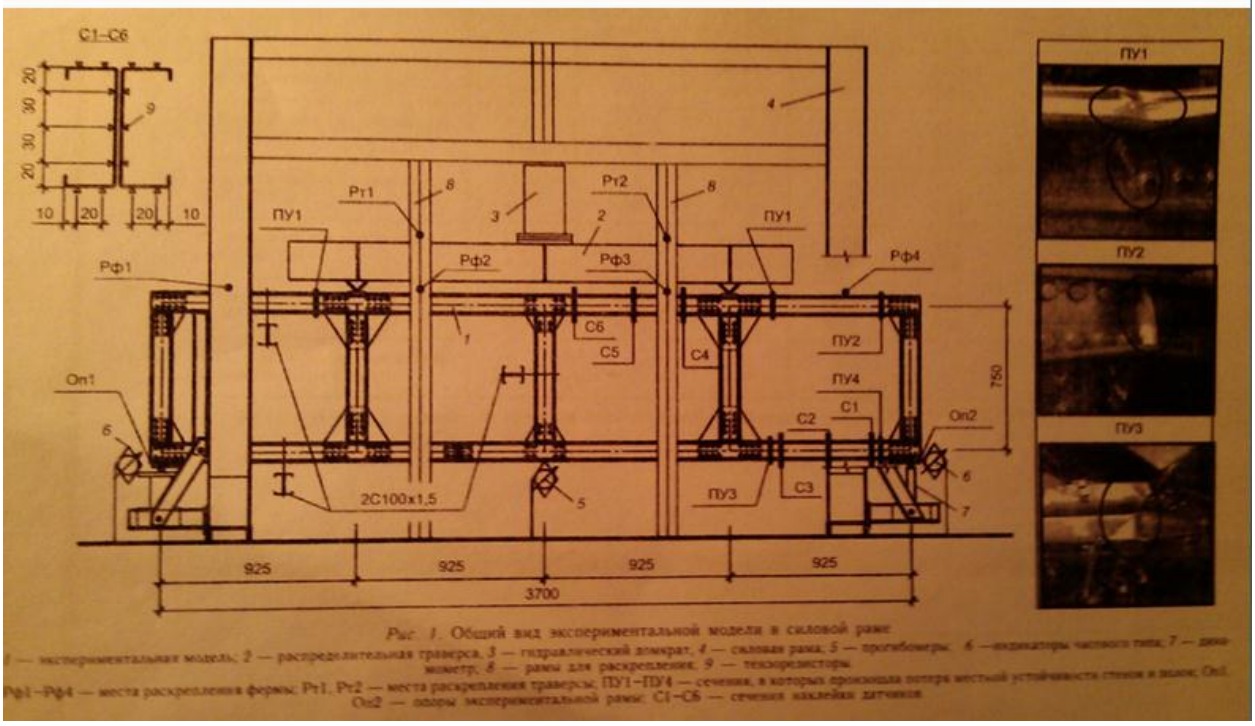


Рис. 1. Общий вид экспериментальной модели в силовой раме

1 — экспериментальная модель; *2* — распределительная траверса; *3* — гидравлический домкрат; *4* — силовая рама; *5* — прогибомеры; *6* — индикаторы часового типа; *7* — динамометр; *8* — рамы для раскрепления; *9* — тензорезисторы

Рф1–Рф4 — места раскрепления фермы; Рт1, Рт2 — места раскрепления траверсы; ПУ1–ПУ4 — сечения, в которых произошла потеря местной устойчивости стенки и полки; Оп1, Оп2 — опоры экспериментальной рамы; С1–С6 — сечения наклейки датчиков

Ačiū už dėmesį!

B PRIEDAS

(4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo MATLAB paketu programos tekstas

Sprendžiamas 4.2 paveikslse parodytos Virandelio santvaros ribinių momentų optimalaus pasiskirtsymo (4.2)–(4.7) uždavinys, kuris buvo sprendžiamas 4.7 poskiryje.

Duomenų įvedimas ir rezultatų skaičiavimas atliekamas matematiniu paketu MATLAB. (4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo MATLAB paketu programos tekstas:

```
% Remo optimizacija
% Pagal mat. modeli
%
% 10.22-10.27 knygos
%
%===============================
global Fi G Gama Se
%pradiniai duomenys
sigmay=235e3; %kPa
E=205e6;      %tamprumo modulis

%Elementu tipu ilgiai
L1=1;   %santvaros tinklelio tarpatramis
L2=1;   %santvaros tinklelio tarpatramis
L3=0.5; %tinklelio elemento ilgis

%Bendras elementu ilgis
global ilg
ilg=[4 4 2.5];
%Pradines ribiniu momentu reiksmes
M01=29.14; %kNm
M02=29.14;  %kNm
M03=19.14; %kNm
% Apatine ribiniu momentu riba
M01ar=10; % kNm
M02ar=10;
M03ar=10;

% Koeficientai inercijos momentam skaiciuoti
a11=0.7885; b11=2.3210; %IPE profiliai (A1)
a12=0.7885; b12=2.3210; %IPE profiliai (A2)
a13=0.7885; b13=2.3210; %IPE profiliai (A3)

% Koeficientai plastiniam atsparumo momentui skaiciuoti
a31=0.8411; b31=1.6572; %IPE profiliai (A1)
a32=0.8411; b32=1.6572; %IPE profiliai (A2)
a33=0.8411; b33=1.6572; %IPE profiliai (A3)

% pusiausvyros lygciu matrica
A=[1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
```

(4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo MATLAB paketu programos teksto tęsinys:

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1 1/L1 -1/L1 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 1 0 0 0 1/L1 -1/L1 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1/L3 1/L3 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1/L1 1/L1 0 0 0 0 0 0 -1;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/L3 -1/L3 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0];
```

```
% Apkrovos vektorius
F1=[0;0;70;0;0;15;0;0;0;0;0;0;0;0;80;0;0;50;0;0;0;0;0;30;0;0;0];
F2=[0;0;70;0;0;15;0;0;0;0;0;0;0;0;-70;0;0;-30;0;0;0;0;0;30;0;0;0];
F3=[0;0;70;0;0;15;0;0;0;0;0;0;0;0;80;0;0;-30;0;0;0;0;0;30;0;0;0];
F4=[0;0;70;0;0;15;0;0;0;0;0;0;0;0;-70;0;0;50;0;0;0;0;0;30;0;0;0];

%konfiguracijos matrica Gama
%dydis:eiluciu=elementai*2(pjuvius)*6(salygos)=13*2*6=156
%stulpeliu-tiek kiek M0=3
G1=ones(12,1); G0=zeros(12,1); %Pagalbines matricos
Gama=[G0 G0 G1
      G0 G1 G0
      G1 G0 G0
      G0 G0 G1
      G0 G1 G0
      G1 G0 G0
      G0 G0 G1
      G0 G1 G0
      G1 G0 G0
      G0 G0 G1
      G0 G1 G0
      G1 G0 G0
      G0 G0 G1];
  %optimizacijos ciklo pradzia
  %pradinis taskas
  x0=zeros(627,1); %159 nezinomuju, 4*156+3=627 lamda ir 3 M0;

  iter=1;
  for i = 1:iter
      %Skerspjuvio plotai cm^2
      A1=((M01*1e6)/(sigmay*a31))^(1/b31);
      A2=((M02*1e6)/(sigmay*a32))^(1/b32);
      A3=((M03*1e6)/(sigmay*a33))^(1/b33);

      %Ekscentricitetai m:
      c1=M01/(sigmay*A1*10^-4);
      c2=M02/(sigmay*A2*10^-4);
      c3=M03/(sigmay*A3*10^-4);

      %Inercijos momentai
      I1=a11*A1^b11*10^-8;
      I2=a12*A2^b12*10^-8;
      I3=a13*A3^b13*10^-8;
```

(4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo MATLAB paketu programos teksto tęsinys:

```
     % visos konstrukcijos pasiduodamumo matrica:
     D=zeros(39,39);
D(1,1)=L3/(3*E*I3); D(1,2)=L3/(6*E*I3);
D(2,1)=L3/(6*E*I3); D(2,2)=L3/(3*E*I3); D(3,3)=L3/(E*A3);
D(4,4)=L2/(3*E*I2); D(4,5)=L2/(6*E*I2);
D(5,4)=L2/(6*E*I2); D(5,5)=L2/(3*E*I2); D(6,6)=L2/(E*A2);
D(7,7)=L1/(3*E*I1); D(7,8)=L1/(6*E*I1);
D(8,7)=L1/(6*E*I1); D(8,8)=L1/(3*E*I1); D(9,9)=L1/(E*A1);
D(10,10)=L3/(3*E*I3); D(10,11)=L3/(6*E*I3);
D(11,10)=L3/(6*E*I3); D(11,11)=L3/(3*E*I3); D(12,12)=L3/(E*A3);
D(13,13)=L2/(3*E*I2); D(13,14)=L2/(6*E*I2);
D(14,13)=L2/(6*E*I2); D(14,14)=L2/(3*E*I2); D(15,15)=L2/(E*A2);
D(16,16)=L1/(3*E*I1); D(16,17)=L1/(6*E*I1);
D(17,16)=L1/(6*E*I1); D(17,17)=L1/(3*E*I1); D(18,18)=L1/(E*A1);
D(19,19)=L3/(3*E*I3); D(19,20)=L3/(6*E*I3);
D(20,19)=L3/(6*E*I3); D(20,20)=L3/(3*E*I3); D(21,21)=L3/(E*A3);
D(22,22)=L2/(3*E*I2); D(22,23)=L2/(6*E*I2);
D(23,22)=L2/(6*E*I2); D(23,23)=L2/(3*E*I2); D(24,24)=L2/(E*A2);
D(25,25)=L1/(3*E*I1); D(25,26)=L1/(6*E*I1);
D(26,25)=L1/(6*E*I1); D(26,26)=L1/(3*E*I1); D(27,27)=L1/(E*A1);
D(28,28)=L3/(3*E*I3); D(28,29)=L3/(6*E*I3);
D(29,28)=L3/(6*E*I3); D(29,29)=L3/(3*E*I3); D(30,30)=L3/(E*A3);
D(31,31)=L2/(3*E*I2); D(31,32)=L2/(6*E*I2);
D(32,31)=L2/(6*E*I2); D(32,32)=L2/(3*E*I2); D(33,33)=L2/(E*A2);
D(34,34)=L1/(3*E*I1); D(34,35)=L1/(6*E*I1);
D(35,34)=L1/(6*E*I1); D(35,35)=L1/(3*E*I1); D(36,36)=L1/(E*A1);
D(37,37)=L3/(3*E*I3); D(37,38)=L3/(6*E*I3);
D(38,37)=L3/(6*E*I3); D(38,38)=L3/(3*E*I3); D(39,39)=L3/(E*A3);
     %Tamprus skaiciavimas
     alfa=D^-1*A'*(A/D*A')^-1 %irazu influentine matrica
     beta=inv(A/D*A');        %poslinkiu influentine matrica

     global Se1 Se2 Se3 Se4
     Se1=alfa*F1; Se2=alfa*F2; Se3=alfa*F3; Se4=alfa*F4;
     ue1=beta*F1;  ue2=beta*F2;  ue3=beta*F3;  ue4=beta*F4;

     %Takumo salygu matrica
     s=1/1.18; %vieno elemento takumo matrica:
     fi=@(c) [1 0 0
             -1 0 0
              s 0 c
             -s 0 c
              s 0 -c
             -s 0 -c
              0 1 0
              0 -1 0
              0 s c
              0 -s c
              0 s -c
              0 -s -c];

     %Visos konstrukcijos takumo matrica:

Fi=blkdiag(fi(c3),fi(c2),fi(c1),fi(c3),fi(c2),fi(c1),fi(c3),fi(c2),fi(c1),fi(
c3),fi(c2),fi(c1),fi(c3));

     %Influentines liekamuju dydziu matricos
     Hsubr=inv(A*inv(D)*A')*A*inv(D);
```

(4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo MATLAB paketu programos teksto tęsinys:

```
     Gsubr=inv(D)*A'*Hsubr-inv(D);
     H=Hsubr*Fi';   %liekmuju poslinkiu influentine matrica
     G=Gsubr*Fi';   %liekmuju irazu influentine matrica

     %tiesiniu apribojimu lygybemis nera
     Aeq=[]; beq=[];

     %tiesiniai apribojimai nelygybemis
     %eiluciu skaicius: takumo salygos 156*4
     %lambda ribojimai:156*4
     %M0 ribojimai: 3
     %poslinkiu ribojimai: 1*4
     %stulpeliu tiek kiek kintamuju: t.y. lambdos 156*4+3=627, M0-3

     Anq=zeros(1255,627);

     Anq(1:624,1:624)=[Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G   %takumo salygos
                      Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G
                      Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G
                      Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G];

     Anq(1:624,625:627)=[-Gama                 %takumo salygos
                         -Gama
                         -Gama
                         -Gama];

     Anq(625:1248,1:624)=-eye(624);  %lambda ribojimas

     Anq(1249:1251,625:627)=-eye(3);  % M0 ribojimas
     Anq(1252:1255,1:624)=  [H(12,:) H(12,:) H(12,:) H(12,:)       %12
poslinkio ribojimas
                         H(12,:) H(12,:) H(12,:) H(12,:)
                         H(12,:) H(12,:) H(12,:) H(12,:)
                         H(12,:) H(12,:) H(12,:) H(12,:)];

      global z
     z=[Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G   %pagalbine matrica
        Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G
        Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G
        Fi*G Fi*G Fi*G Fi*G];

     global w
    w=[Fi*Se1
       Fi*Se2
       Fi*Se3
       Fi*Se4];

     %laisvieji tiesiniu nelygybiu nariai
     bnq=zeros(1255,1);
     bnq(1:624,1)=[-Fi*Se1
                   -Fi*Se2
                   -Fi*Se3
                   -Fi*Se4]; %takumo salygos
     bnq(1249:1251,1)=-[M01ar; M02ar; M03ar];
     bnq(1252:1255,1)=0.01-[ue1(12); ue2(12); ue3(12); ue4(12)];   %12
poslinkio ribojimas
```

(4.2) – (4.7) uždavinio sprendimo MATLAB paketu programos teksto tęsinys:

```
     %virsutines ir apatines kintamuju ribos
     ub=[]; lb=[];

[x,fval,exitflag]=fmincon(@tfunkcijakintama,x0,Anq,bnq,Aeq,beq,lb,ub,@apribki
ntama);

     %Pradinis taskas naujai iteracijai:
     x0=x;

     M01=x(625);  %nauji ribiniai momentai
     M02=x(626);
     M03=x(627);


     %Skerspjuvio plotai cm^2
      A1=((M01*1e6)/(sigmay*a31))^(1/b31);
      A2=((M02*1e6)/(sigmay*a32))^(1/b32);
      A3=((M03*1e6)/(sigmay*a33))^(1/b33);


    lambda=repmat(eye(156),1,4)*x(1:624)
    %liekamieji poslinkiai
    ur=H*lambda;

    for j=1:3
        rez(i,j)=x(624+j);
        rez(i,5)=A1;
        rez(i,6)=A2;
        rez(i,7)=A3;
        rez(i,8)=fval;
        rez(i,9)=exitflag;
    end
  end

  plot(rez(:,8))
   rez
   plast_def=Fi'*lambda;           %plastines deformacijos
   Wpl=1e6*[M01 M02 M03]/sigmay    %plastiniai atsparumo momentai
```