



VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
STATYBOS FAKULTETAS
STATYBINĖS MECHANIKOS KATEDRA

Adomas GRINIS

LIAUNŲ PLIENINIŲ BOKŠTŲ DINAMINIO SKAIČIAVIMO YPATUMAI
PECULIARITIES OF DYNAMIC ANALYSIS OF SLENDER STEEL
TOWERS

Baigiamasis magistro darbas

Statinių konstrukcijų studijų programa, valstybinis kodas 621H21001
Statinių projektavimo ir optimizacijos kompiuterinių technologijų studijų kryptis
Statybos inžinerijos 02T mokslo kryptis

Vilnius, 2013

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
STATYBOS FAKULTETAS
STATYBINĖS MECHANIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas

(Parašas)

Juozas Atkočiūnas

(Vardas, pavardė)

(Data)

Adomas Grinis

LIAUNŲ PLIENINIŲ BOKŠTŲ DINAMINIO SKAIČIAVIMO YPATUMAI
PECULIARITIES OF DYNAMIC ANALYSIS OF SLENDER STEEL
TOWERS

Baigiamasis magistro darbas

Statinių konstrukcijų studijų programa, valstybinis kodas 621H21001

Statinių projektavimo ir optimizacijos kompiuterinių technologijų studijų kryptis

Statybos inžinerijos 02T mokslo kryptis

Vadovas

(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė)

(Parašas)

(Data)

Lietuvių kalbos konsultantas

(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė)

(Parašas)

(Data)

Vilnius, 2013

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
STATYBOS FAKULTETAS
STATYBINĖS MECHANIKOS KATEDRA

Statybos inžinerijos studijų kryptis

Statinių konstrukcijų studijų programa, valstybinis kodas **621H21001**

Statinių projektavimo ir optimizacijos kompiuterinių technologijų specializacija

TVIRTINU
Katedros vedėjas

(Parašas)
Juozas Atkočiūnas
(Vardas, pavardė)

(Data)

**BAIGIAMOJO MAGISTRO DARBO
UŽDUOTIS**

.....Nr.
Vilnius

Studentui

Adomui Griniui
(Vardas, pavardė)

Baigiamojo darbo tema: **Liaunų plieninių bokštų dinaminio skaičiavimo ypatumai**
patvirtinta 2012 m. spalio 23 d. dekanų potvarkiu Nr. 521 st.

Baigiamojo darbo užbaigimo terminas 2013 m. birželio 3 d.

BAIGIAMOJO DARBO UŽDUOTIS:

Sudaryti liaunų plieninių bokštų optimizacijos uždavinio bei dinaminės analizės uždavinio matematinius modelius. Sukurti modifikuotą optimizacinio skaičiavimo matematinį modelį nuo statinio (savasis svoris) ir nuo dinaminio (vėjas) apkrovimų. Skaičiavimuose įvertinti nors supaprastintas bokšto elementų stabilumo sąlygas. Atlikti realaus bokšto skaičiavimus, naudojant matematinį kompiuterinį paketą MATLAB. Pateikti literatūros ir skaičiavimo metodų apžvalgą, iširti liauno plieninio bokšto savuosius ir priverstinius svyravimus bei dinaminių efektų įtaką optimizavimo uždaviniuose. Perskaityti mokslinį pranešimą 16-oje Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijoje „Mokslas – Lietuvos ateitis“. Pranešimo pagrindu parengti mokslinį straipsnį.

Baigiamojo darbo rengimo konsultantai:

.....
Lektorė Lina Rutkienė (Lietuvių kalbos katedra).....
(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė)

Vadovas
(Parašas)

doc. dr. Juozas Nagevičius
(Moksl. laipsnis/pedag. vardas, vardas, pavardė)

Užduotį gavau

.....
(Parašas)
Adomas Grinis
(Vardas, pavardė)
2012 spalio 23 d.
(Data)

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Statybos fakultetas

Statybinės mechanikos katedra

ISBN ISSN

Egz. sk. 1

Data: 2013-06-05

Statinių konstrukcijų studijų programos baigiamasis magistro darbas

Pavadinimas: **Liaunų plieninių bokštų dinaminio skaičiavimo ypatumai**

Autorius: **Adomas Grinis**

Vadovas: **Juozas Nagevičius**

Kalba

☒ X

Lietuvių

☐

Užsienio (anglų)

Anotacija

Darbe tiriami liaunų plieninių bokštų dinaminės analizės ir optimalaus projektavimo ypatumai. Tyrimai atliekami taikant tradicinius analitinius konstrukcijų dinaminės analizės metodus ir algoritmus bei pasiūlytą modifikuotą iteracinį optimizavimo algoritmą. Visi naudojami matematiniai modeliai paremti baigtinių elementų metodu. Taikytų skaičiavimo algoritmų realizacija ir kiti tyrimui reikalingi skaičiavimai atlikti matematiniu kompiuteriniu paketu MATLAB.

Tyrimams pasirinktas liaunas 40 m aukščio plieninis santvarinis bokštas, kurio elementų skerspjūviai – SHS tipo. Bokšto viršuje – masyvi uždara konstrukcija, kuri į skaičiuojamąjį modelį neįtraukiama, skaičiavimuose įvertinamos tik nuo jos tenkančios apkrovos.

Darbe siūlomas modifikuotas matematinis modelis, kurį naudojant gaunamas optimalus konstrukcijos projektas, užtikrinantis pastato atsparumą kartu veikiančioms statinėms ir priverstinis svyravimus sukeliančioms žadinančioms apkrovoms. Darbe ištirtos modelio taikymo galimybės ir konstrukcijų diskretizavimo, tinkamo modelio realizacijai, ypatumai.

Darbą sudaro 7 dalys: įvadas, literatūros ir skaičiavimo metodų apžvalga, konstrukcijos savųjų svyravimų tyrimas, konstrukcijos priverstinių svyravimų tyrimas, konstrukcijos optimizavimas įvertinant dinaminis efektus, darbo išvados ir literatūros sąrašas.

Darbo apimtis – 107 p. teksto be priedų, 53 iliustr., 14 lent., 37 bibliografiniai šaltiniai.

Atskirai pridedami darbo priedai.

Prasminiai žodžiai: plieninis bokštas, dinaminis skaičiavimas, optimalus projektavimas, savieji svyravimai, priverstiniai svyravimai, optimizavimas

Vilnius Gediminas Technical University
Faculty of Civil Engineering
Dept. of Structural Mechanics

ISBN ISSN
Copies No. 1
Date: 05-06-2013

Building Construction study programme master thesis.

Title: **Peculiarities of dynamic analysis of slender steel towers**

Author: **Adomas Grinis**

Academic supervisor: **Juozas Nagevičius**

Thesis language

☒ Lithuanian

☐ Foreign (English)

Annotation

The thesis analyses peculiarities of dynamic analysis and optimal design of slender steel towers. Studies carried out using traditional analytical methods and algorithms of dynamic analysis of structures and modified iterative optimization algorithm, which is proposed in this thesis. All used mathematical models are based on finite element method. Realization of applied calculation algorithms and other necessary calculations are made using mathematical software package MATLAB.

For the research selected a slender 40 meters high steel tower. Top of the tower - a massive enclosed structure, which is not included in the computational model. Only its share of the loads are included in calculations.

In this thesis is proposed a modified mathematical model, which can be used determining optimal project of the structure which is effected by static and dynamic loads. Thesis explored several discretization methods suitable for the proper realization of proposed mathematical model.

Structure of the thesis: introduction, literature review and calculation methods, research of modal analysis of the structure, research of forced oscillations, optimization of structure considering the dynamic effects, conclusions and suggestions, references.

Thesis consist of: 107 p. text without appendixes, 53 pictures, 14 tables, 37 bibliographical entries.

Appendixes included.

Keywords: steel tower, dynamic analysis, optimal design, free oscillations, forced oscillations, optimization

Vilniaus Gedimino technikos universiteto egzaminų
sesijų ir baigiamųjų darbų rengimo bei gynimo
organizavimo tvarkos aprašo 2011–2012 m. m.
2 priedas

(Baigiamojo darbo sąžiningumo deklaracijos forma)

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

(Studento vardas ir pavardė, studento pažymėjimo Nr.)

(Fakultetas)

(Studijų programa, akademinė grupė)

**BAIGIAMOJO DARBO (PROJEKTO)
SĄŽININGUMO DEKLARACIJA**

20 ____ m. ____ d.
(Data)

Patvirtinu, kad mano baigiamasis darbas (projektas) tema _____

patvirtintas 20 ____ m. ____ d. dekanu potvarkiu Nr. _____, yra
savarankiškai parašytas. Šiame darbe (projekte) pateikta medžiaga nėra plagijuota. Tiesiogiai ar
netiesiogiai panaudotos kitų šaltinių citatos pažymėtos literatūros nuorodose.

Prenkant ir įvertinant medžiagą bei rengiant baigiamąjį darbą (projektą), mane konsultavo
mokslininkai ir specialistai: _____

Mano darbo (projekto) vadovas _____

Kitų asmenų indėlio į parengtą baigiamąjį darbą (projektą) nėra. Jokių įstatymų nenumatytų
piniginių sumų už šį darbą niekam nesu mokėjęs (-usi).

(Parašas)

(Vardas ir pavardė)

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS	10
LENTELIŲ SĄRAŠAS	12
ĮVADAS	13
1. LITERATŪROS IR SKAIČIAVIMO METODŲ APŽVALGA	16
1.1. Įvadinės pastabos	16
1.2. Konstrukcijos savųjų svyravimų analizė	16
1.2.1. Dinaminių sistemų matematinis modeliavimas	17
1.2.2. Materialiojo taško dinamika.....	18
1.2.3. Vienetinio laisvumo laipsnio sistemų svyravimai	20
1.2.4. Baigtinio laisvumo laipsnio sistemų svyravimai	23
1.2.5. Konstrukcijos diskretizavimo dinaminei analizei metodai	28
1.2.6. Sistemos su sutelktosiomis masėmis ir sutelktaisiais standumais	30
1.2.7. Sistemos su sutelktosiomis masėmis ir paskirstytais standumais	31
1.2.8. Sistemos su paskirstytais masėmis ir sutelktaisiais standumais	32
1.2.9. Sistemos su paskirstytais masėmis ir paskirstytais standumais	33
1.2.10. Kiti dinaminių modelių sudarymo metodai	33
1.2.11. Supaprastintas strypinės konstrukcijos diskretinis modelis	37
1.3. Konstrukcijos priverstinių svyravimų analizė	37
1.4. Žadinančios vėjo apkrovos	40
1.5. Konstrukcijų optimizavimo metodai	41
1.6. Inžineriniai kompiuteriniai paketai.....	42
1.7. Skyriaus išvados	42
2. KONSTRUKCIJOS SAVŲJŲ SVYRAVIMŲ TYRIMAS	44
2.1. Įvadinės pastabos	44
2.2. Savųjų svyravimų analizės matematinis modelis	45
2.3. Tiriama konstrukcija ir jos diskretizavimo principai	45
2.4. Tyrimų metodika.....	50
2.5. Pirmosios struktūros bokšto savųjų svyravimų tyrimas	51
2.5.1. Konstrukcijos horizontaliųjų svyravimų formų ir dažnių nustatymas	51
2.5.2. Konstrukcijos vertikaliųjų svyravimų dažnių nustatymas	60
2.5.3. Konstrukcijos dinaminės analizės rezultatų palyginamoji analizė.....	62
2.6. Antrosios struktūros bokšto savųjų svyravimų tyrimas.....	66
2.6.1. Konstrukcijos horizontaliųjų svyravimų formų ir dažnių nustatymas	66
2.6.2. Konstrukcijos dinaminės analizės rezultatų palyginamoji analizė.....	70
2.7. Pirmojo ir antrojo bokštų dinaminės analizės rezultatų palyginimas	71
2.8. Skyriaus išvados	73

3. KONSTRUKCIJOS PRIVERSTINIŲ SVYRAVIMŲ TYRIMAS	75
3.1. Įvadinės pastabos	75
3.2. Konstrukcijos priverstinių svyravimų analizės matematinis modelis.....	75
3.3. Diskretizavimo principai ir apkrovos	76
3.4. Tyrimo metodika.....	78
3.5. Tyrimo skaičiavimai ir rezultatų analizė	79
3.6. Skyriaus išvados	83
4. KONSTRUKCIJOS OPTIMIZAVIMAS, ĮVERTINANT DINAMINIUS EFEKTUS.....	84
4.1. Įvadinės pastabos	84
4.2. Optimizacijos uždavinio matematinis modelis	84
4.3. Konstrukcijos priverstinių svyravimų analizės matematinis modelis.....	87
4.4. Modifikuotas optimizacijos matematinis modelis	88
4.5. Modifikuoto modelio taikymas ir rezultatų analizė	91
4.5.1. Abiejų bokštų optimizavimas pagal matematinį modelį (4.1)–(4.5)	91
4.5.2. Abiejų bokštų optimizavimas pagal matematinį modelį (4.35)–(4.46) be strypų stabilumo sąlygų	94
4.5.3. Optimizavimo rezultatų palyginamoji analizė	97
4.5.4. Bokšto optimizavimas pagal matematinį modelį (4.35)–(4.46) su strypų stabilumo sąlygomis ir konstruktyviniais apribojimais	99
4.6. Skyriaus išvados	103
DARBO IŠVADOS.....	104
LITERATŪRA	106
PRIEDAI	108

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1 pav. Strype vykstantys ašiniai svyravimai (a) ir strypo masių modelis (b)	18
1.2 pav. Elementarios dinaminės sistemos.....	20
1.3 pav. Sistemos su vienetiniu dinaminiu laisvės laipsniu ir jas veikiančios jėgos.....	21
1.4 pav. Sistemos su trimis laisvės laipsniais svyravimų formos (Baublys 2001) ir jos masių matrica [M].....	24
1.5 pav. Santvaros statinės (a) ir dinaminės (b) analizės diskretiniai modeliai	29
1.6 pav. Daugiaaukščio rėmo diskretizavimo dinaminei analizei pavyzdys (Sircovich Saar 2006). 29	
1.7 pav. Sistema su sutelktosiomis masėmis ir sutelktaisiais standumais.....	30
1.8 pav. Dviatramės sijos sutelktųjų masių modelis (a) ir įlinkio influentiniai koeficientai (b ir c) 31	
1.9 pav. Standžios dviatramės sijos su sutelktaisiais standumais ir paskirstyta mase dinaminės analizės modelis.....	32
1.10 pav. Dviatramės sijos svyravimų dažnių ir formų palyginimas skaičiuojant koncentruotų ir paskirstytų masių metodais (PMS – paskirstytų masių sistema, KMS – konc. masių sistema).....	35
1.11 pav. Sijos su skirtingomis atrėmimo sąlygomis ir formulės, skirtos šių sijų savųjų svyravimų cikliniams dažniams rasti	36
2.1 pav. Pirmosios struktūros bokšto schema	46
2.2 pav. Antrosios struktūros bokšto schema.....	46
2.3 pav. Tempiamas arba gniuždomas baigtinis elementas	47
2.4 pav. Pradiniai pirmosios struktūros bokšto diskretiniai modeliai: a) svarbiausi poslinkiai; b) mazgų numeriai; c) strypinio modelio koncentruotos masės; d) redukuoto modelio masės ir poslinkiai	49
2.5 pav. Strypinio konstrukcijos modelio masių paskirstymo variantai	50
2.6 pav. Redukuoto konstrukcijos modelio masių paskirstymo variantai.....	51
2.7 pav. Konstrukcijos svyravimų formos ir dažniai, gauti programa <i>Autodesk Robot</i>	52
2.8 pav. Redukuoto konstrukcijos modelio pirmosios 6 svyravimų formos.....	59
2.9 pav. Pirmosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas.....	62
2.10 pav. Antrosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	62
2.11 pav. Trečiosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	62
2.12 pav. Ketvirtosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	63
2.13 pav. Penktosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas.....	63
2.14 pav. Šeštosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas.....	63
2.15 pav. Septintosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	63
2.16 pav. Aštuntosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas.....	64

2.17 pav. Devintosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas.....	64
2.18 pav. Dešimtosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	64
2.19 pav. Pirmosios vertikalųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas.....	66
2.20 pav. Konstrukcijos svyravimų formos ir dažniai, gauti programa <i>Autodesk Robot</i>	66
2.21 pav. Pirmosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas.....	70
2.22 pav. Antrosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	70
2.23 pav. Trečiosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	70
2.24 pav. Ketvirtosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	71
2.25 pav. Penktosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas.....	71
2.26 pav. Abiejų bokštų pirmosios svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas.....	72
2.27 pav. Abiejų bokštų antrosios svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	72
2.28 pav. Abiejų bokštų trečiosios svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	72
2.29 pav. Abiejų bokštų ketvirtosios svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas	72
2.30 pav. Abiejų bokštų penktosios svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas.....	73
3.1 pav. Konstrukciją veikiančių jėgų ir masių judėjimo kryptys.....	77
3.2 pav. Konstrukciją veikiančių vėjo apkrovų reikšmės	77
3.3 pav. Dinaminės analizės rezultatų palyginimas – maksimalus poslinkis.....	81
3.4 pav. Dinaminės analizės rezultatų palyginimas – maksimali teigiama įrąža.....	81
3.5 pav. Dinaminės analizės rezultatų palyginimas – maksimali neigiama įrąža	82
3.6 pav. Maksimalios įrąžos priklausomybės nuo koeficiento k grafikas.....	82
3.7 pav. Maksimalaus poslinkio priklausomybės nuo koeficiento k grafikas.....	82
4.1 pav. Optimizavimo rezultatų palyginimas – bendras konstrukcijos tūris	98
4.2 pav. Optimizavimo rezultatų palyginimas – maksimalus horizontalusis poslinkis	98
4.3 pav. Optimizavimo rezultatų palyginimas – maksimali neigiama įrąža	98
4.4 pav. Kai kurių optimalios konstrukcijos parametrų palyginimas, kai įvertinami skirtingi savųjų svyravimų dažniai.....	102

LENTELIŲ SĄRAŠAS

2.1 lentelė. Strypinio modelio pirmojo skaičiavimo rezultatai	56
2.2 lentelė. Redukuoto modelio pirmojo skaičiavimo rezultatai.....	58
2.3 lentelė. Strypinio modelio visi apskaičiuotieji svyravimų cikliniai dažniai	58
2.4 lentelė. Redukuoto modelio visi apskaičiuotieji svyravimų cikliniai dažniai.....	59
2.5 lentelė. Vertikaliųjų svyravimų dažniai, gauti naudojant strypinį konstrukcijos modelį.....	61
2.6 lentelė. Strypinio modelio visi apskaičiuotieji svyravimų cikliniai dažniai	69
2.7 lentelė. Redukuoto modelio visi apskaičiuotieji svyravimų cikliniai dažniai.....	69
3.1 lentelė. Pirmojo bokšto visi apskaičiuotieji maksimalūs poslinkiai ir įrąžos.....	81
3.2 lentelė. Antrojo bokšto visi apskaičiuotieji maksimalūs poslinkiai ir įrąžos.....	81
4.1 lentelė. Pirmojo bokšto statinio optimizavimo be elementų stabilumo sąlygų rezultatai	93
4.2 lentelė. Antrojo bokšto statinio optimizavimo be elementų stabilumo sąlygų rezultatai	94
4.3 lentelė. Pirmojo bokšto dinaminio optimizavimo be elementų stabilumo sąlygų rezultatai.....	97
4.4 lentelė. Antrojo bokšto dinaminio optimizavimo be elementų stabilumo sąlygų rezultatai	97
4.5 lentelė. Pirmojo bokšto dinaminio optimizavimo su stabilumo sąlygomis rezultatai.....	102

IVADAS

Didesni ar mažesni svyravimai arba virpesiai vyksta absoliučiai visose konstrukcijose, tačiau vienoms jų sukelti efektai nesukelia reikšmingų poveikių, o kitoms šie efektai gali būti lemiami, kai kalbama apie konstrukcijos saugumą ar tinkamumą. Čia, kaip ir visoje statybinėje mechanikoje, priimamos įvairios prielaidos, leidžiančios diskretizuoti konstrukcijas ir skaičiuoti jas matematiniais metodais, gauti skaitines konstrukcijų atsako poveikiams reikšmes.

Dinaminiai skaičiavimai projektuojant konstrukcijas yra gerokai sudėtingesni, nei statiniai skaičiavimai. Jų sprendimui kartais gali prireikti ypatingų matematinių žinių ir netradicinio mąstymo. Teisingą projektuojamos konstrukcijos atsaką dinaminiais poveikiams galima nustatyti tik taikant grynai matematinius metodus. Dėl to tokios problemos tampa labiau ekspertų, o ne paprastų inžinierių rūpesčiu (Sircovich Saar 2006).

Darbo aktualumas

Kai kalbama apie neaukštas ir pakankamai standžias plienines konstrukcijas, įprasta, kad jos dažniausiai projektuojamos atsižvelgiant į stiprumo, pastovumo bei standumo reikalavimus, priimant, kad jas veikia tik statinės apkrovos. Dinaminiais poveikiams jautrios konstrukcijos, tokios kaip liauni bokštai ar tiltų santvaros, papildomai turi būti tikrinamos ir dinaminės analizės metodais, įvertinant veikiančių jėgų dinamiškumą. Kai projektuojama plieninė konstrukcija turi mažą dinaminio laisvumo laipsnį (pvz., nesudėtingos gembinės sistemos), atsparumą dinaminiais efektams užtikrinti paprasčiau. Keblesnis atvejis būna tuomet, kai konstrukcijos struktūra yra sudėtinga ir jos savųjų svyravimų dažnių ir formų spektras labai platus. Tuomet atliekant sprendimus reikia pasitelkti visą inžinerinę patirtį, o galbūt net gali tekti priimti netradicinius sprendimus.

Kai svyravimus sukeliančių apkrovų veikimo pobūdis yra aiškiai apibrėžtas pastoviu dažniu, konstrukcijos dažniausiai projektuojamos taip, kad būtų išvengiama rezonanso galimybė, tačiau veikiama chaotiškų ir nenusipėjamų apkrovų (pvz., pulsacinės vėjo apkrovos) konstrukcija turėtų išlikti atspari, net ir pasireiškus galimam rezonansui ar bent jau būviui, kuris yra jam artimas. Inžineriniai kompiuteriniai paketai paprastai leidžia optimizuoti konstrukcijas veikiant statinėms apkrovoms, vėliau galima atlikti patikrinamąją dinaminę analizę. Dinaminė konstrukcijos analizė paprastai būna lyg atskiras projektavimo etapas, kurio metu tikrinama, ar pradinis modelis atsparus žadinančioms apkrovoms. Tam dažnai naudojamos specializuotos kompiuterinės programos.

Šiuolaikinės pažangios kompiuterinės technologijos ir tobulėjantys skaičiavimo algoritmai suteikia galimybę spręsti didelės apimties matematinio programavimo uždavinius. Tai leidžia kurti vis kompleksiškesnes ir platesnes optimizavimo uždavinių formuluotes, į jas įtraukiant vis daugiau

nežinomųjų ir apribojimų. Kitaip tariant, atsiranda galimybė spręsti didelės apimties daugia-parametrius matematinio programavimo uždavinius, kurių rezultatai – racionalesnės ir pigesnės konstrukcijos. Tačiau tobulinant ar kuriant naujus statybinių konstrukcijų skaičiavimo algoritmus neišvengiamai didėja ir išsamesnių bei gilesnių tyrimų poreikis.

Tyrimų objektas ir metodai

Darbe tiriami liaunų plieninių bokštų dinaminės analizės ir optimalaus projektavimo ypatumai. Tyrimai atliekami taikant tradicinius analitinius konstrukcijų dinaminės analizės metodus ir algoritmus bei pasiūlytą modifikuotą iteracinį optimizavimo algoritmą. Visi naudoti matematiniai modeliai paremti baigtinių elementų metodu. Taikytų skaičiavimo algoritmų realizacija ir kiti tyrimui reikalingi skaičiavimai atlikti matematiniu kompiuteriniu paketu MATLAB.

Tyrimams pasirinktas liaunas 40 m aukščio plieninis santvarinis bokštas, kurio elementų skerspjūviai – SHS tipo. Bokšto viršuje – masyvi uždara konstrukcija, kuri į skaičiuojamąjį modelį neįtraukiama, skaičiavimuose įvertinamos tik nuo jos tenkančios apkrovos.

Darbo tikslas

Pagrindinis šio darbo tikslas – kiek įmanoma nuodugniau ištirti dinaminiais poveikiams jautrių statybinių konstrukcijų analizės ir optimalaus projektavimo ypatumus, nustatyti pagrindines problemas ir surasti tinkamiausius bei racionaliausius jų sprendimo būdus. Taip pat siekta ištirti pasiūlytą modifikuotą optimalaus projektavimo algoritmą, kuris leistų optimizuoti konstrukciją, įvertinant dinaminių efektų sukeltą įrąžų ir poslinkių padidėjimą.

Darbo uždaviniai

1. Apžvelgti ir išanalizuoti šiuo metu egzistuojančius ir literatūroje aprašytus plieninių konstrukcijų dinaminės analizės ir optimalaus projektavimo metodus, įvertinti jų taikymo galimybes ir nustatyti, ko trūksta šių dienų projektavime.
2. Ištirti plieninės konstrukcijos savųjų svyravimų analizės ypatumus, nustatyti konstrukcijos diskretizavimo pasirinkimo įtaką skaičiavimų rezultatams, palyginti rezultatus su gautais naudojant komercines kompiuterines programas, skirtas konstrukcijų analizei ir projektavimui.
3. Ištirti konstrukcijos priverstinių svyravimų analizės ypatumus taikant baigtinių elementų metodus, nustatyti diskretizavimo įtaką galutiniams rezultatams, palyginti rezultatus su gautais naudojant komercines kompiuterines programas.
4. Suformuluoti matematinį modelį, kuris leistų optimizuoti plienines strypines konstrukcijas, įvertinant dinaminis efektus, susikuriančius veikiant žadinančioms apkrovoms.

5. Ištirti pasiūlyto matematinio modelio taikymo galimybes ir ypatumus bei pateikti rekomendacijas, skirtas praktiniam modelio taikymui.

Darbo naujumas ir originalumas

Konstrukcijų, kurias veikia statinės ir dinaminės apkrovos, projektavimas visuomet yra pasikartojantis procesas „pirmyn ir atgal“ (Sircovich Saar 2006). Tai reiškia, jog pirmiausia konstrukcija projektuojama statinėms apkrovoms, tada atliekama dinaminė analizė ir nustatoma, ar konstrukcija atspari dinaminiais poveikiams. Jeigu ne, atliekami tam tikri konstrukciniai pakeitimai ir vėl tikrinama ir projektuojama veikiant statinėms apkrovoms. Gali tekti atlikti kelis ar daugiau tokių ciklų, kol bus gautas galutinis optimalus projektas.

Darbe siūlomas modifikuotas matematinis modelis, kurį naudojant gaunamas optimalus konstrukcijos projektas, užtikrinantis pastato atsparumą kartu veikiančioms statinėms ir priverstiniams svyravimus sukeliančioms žadinančioms apkrovoms. Tinkamai įvertinus nagrinėjamos konstrukcijos elgseną ir pritaikius pasiūlytą modelį galima išvengti daug darbo sąnaudų reikalaujančių pakartotinio skaičiavimo ciklų, o labai sudėtingoms konstrukcijoms šių ciklų skaičių galima stipriai sumažinti. Taikant algoritmą gali būti nustatomi optimalūs skerspjūvių plotai, optimalūs matmenys arba optimali struktūra, esant stiprumo, pastovumo, standumo bei konstrukciniams apribojimams.

Matematinis modelis gali būti taikomas optimizuojant plienines strypines konstrukcijas, kai jas veikia žadinančios apkrovos. Darbe ištirtos modelio taikymo galimybės ir konstrukcijų diskretizavimo, tinkamo modelio realizacijai, ypatumai.

Darbo rezultatų aprobavimas

Dalis darbo rezultatų apibendrinta Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijoje: Grinis, Adomas. Plieninio bokšto elementų optimalių skerspjūvių nustatymas, įvertinant dinامينius efektus. 16-tosios jaunųjų mokslininkų konferencijos „Mokslas – Lietuvos ateitis“, įvykusios Vilniuje 2013 m. kovo 22 d., pranešimų medžiaga. Sekcija: Statyba. Pranešimo tema parengtas mokslinis straipsnis.

Darbo struktūra ir apimtis

Darbą sudaro įvadas, keturi skyriai, išvados, literatūros sąrašas ir priedai. Prieduose pateikti darbe neparodyti skaičiavimai bei jų rezultatai. Darbo apimtis be priedų yra 107 puslapiai, kuriuose pateikta 14 lentelių ir 53 iliustracijos.

1. LITERATŪROS IR SKAIČIAVIMO METODŲ APŽVALGA

1.1. Įvadinės pastabos

Šiame skyriuje aptariami konstrukcijų dinaminio skaičiavimo ir optimizavimo metodai, apžvelgiama literatūra, kurioje jie aprašomi. Čia analizuojami šiuo metu plačiai naudojami ir pasiūlyti nauji savųjų svyravimų analizės ir žadinančių apkrovų įvertinimo metodai. Taip pat aptariami literatūroje siūlomi konstrukcijų diskretizavimo principai ir metodai bei jų privalumai ir trūkumai. Labai svarbus momentas analizuojant ir projektuojant konstrukcijas yra žadinančių apkrovų nustatymas ir tinkamas įvertinimas. Skyriuje apžvelgiami literatūroje ir projektavimo normose pateikti šių apkrovų nustatymo būdai bei jų įvertinimo skaičiavimuose ypatumai.

Konstrukcijos dinaminė analizė prasideda nuo jos savųjų, arba kitaip vadinamų tikrinių, svyravimų spektro nustatymo. Realiose statybinėse konstrukcijose šis spektras gali būti begalinis, tačiau skaičiavimuose įvertinamos tik svarbios svyravimų formos, kurios gaunamos atitinkamai diskretizavus nagrinėjamą modelį. Šiame skyriuje išskirtas poskyris, kuriame būtent ir analizuojami plačiai naudojami savųjų svyravimų nustatymo metodai.

Reikšmingi dinaminiai efektai konstrukcijoje susikuria tik tuomet, kai ją veikia žadinančios apkrovos, bet jų savieji svyravimai egzistuoja tik teoriniame lygmenyje. Vadinasi, dinaminė analizė įgauna prasmę tik tada, kai nustatomas savųjų ir priverstinių svyravimų sąryšis. Šis sąryšis paprastai vadinamas rezonansu. Būtent dėl jo konstrukcijose pasireiškia ryškus vidinių jėgų (įrąžų) ir poslinkių padidėjimas.

Statinius veikiančių žadinančių apkrovų kilmė gali būti labai įvairi: svyravimus gali sukelti mechanizmai, transportas, smūginės apkrovos, seisminės apkrovos, vėjas ir kt. Kadangi šiame darbe nagrinėjamos konstrukcijos yra liauni bokštai, didesnis dėmesys bus skiriamas vėjo apkrovoms. Atliekant bokštų dinaminę analizę vėjo apkrova yra svarbiausias veiksnys, nes būtent dėl jo poveikio bokštinėse konstrukcijose pasireiškia reikšmingi dinaminiai efektai. Atskira ir gana svarbi tema būtų seisminiai poveikiai, tačiau šiame darbe ji nenagrinėjama.

Šiais laikais labai svarbu, kad suprojektuota konstrukcija būtų optimali. Tam tikslui yra sprendžiami įvairūs daugiaparametrai optimizavimo uždaviniai. Atskiroje skyriaus dalyje analizuojamos literatūroje aprašytos strypinių konstrukcijų optimizavimo uždavinių formuluotės, kurios galėtų būti taikomos ir svyruojančioms konstrukcijoms optimizuoti.

1.2. Konstrukcijos savųjų svyravimų analizė

Savųjų svyravimų analizė yra pirmas ir labai svarbus žingsnis projektuojant konstrukcijas, kurioms dinaminiai poveikiai yra reikšmingi. Čia nustatomos svyruojančios sistemos savųjų

svyravimų formos ir dažniai, kurių teisingas nustatymas yra itin svarbus momentas, nes nuo jų tiesiogiai priklauso konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvis, susikuriantis veikiant žadinančioms apkrovoms. Savųjų svyravimų dažnis lemia, kaip stipriai konstrukcijoje pasireikš žadinančių apkrovų poveikis, todėl projektuojant statybines konstrukcijas savieji dažniai dažniausiai ir būna kintamas parametras. Savieji dažniai tiesiogiai priklauso nuo konstrukcijos standumo ir savojo svorio, o standumas ir savasis svoris savo ruožtu priklauso nuo konstrukcijos matmenų, struktūros, elementų skerspjūvių ir medžiagos. Projektuojant būtent šie parametrai ir yra kintamieji, juos koreguojant nustatomi leistini savųjų svyravimų dažniai.

Kaip jau minėta, realios statybinės konstrukcijos dinaminis laisvės laipsnis yra begalinis, tačiau matematinius analizės metodus galima taikyti tik diskretizuotam modeliui, kurio laisvumo laipsnis yra baigtinis. Tuomet pasiskirstytos masės yra pakeičiamos materialiaisiais taškais arba taikomi kiti metodai. Šie metodai ir jų taikymo ypatumai aprašomi kitose darbo dalyse.

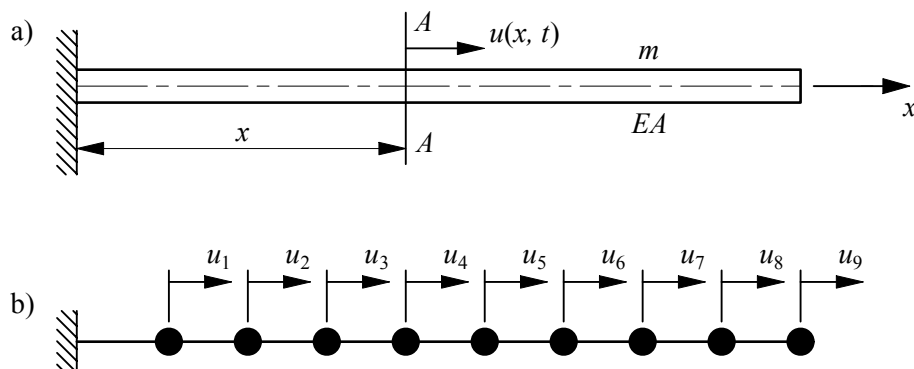
1.2.1. Dinaminių sistemų matematinis modeliavimas

Analizuojant sistemas, kurias veikiančios apkrovos laikomos statinėmis, dėmesys sutelkiamas tik į apkrovas ir jų sukeltą konstrukcijos atsaką – tampriąsias vidines jėgas. Dinaminis atsakas yra kur kas sudėtingesnis, nes čia, be vidinių jėgų, dar susiduriama su inercijos jėgomis ir judėjimui besipriešinančiomis slopinimo jėgomis. Statinis atsakas faktiškai gali būti laikomas tokiu dinaminio atsako atveju, kai judėjimo greičiai ir pagreičiai yra labai maži ir inercijos jėgos tampa nereikšmingomis (Humar 2002).

Statinės analizės atveju sistemos atsakas išreiškiamas funkcija nuo vienos ar daugiau erdvės koordinačių. Dinaminės analizės atveju šios funkcijos kintamieji yra koordinatės ir laikas, todėl šiuo atveju atsakas turi būti išreiškiamas dalinėmis diferencialinėmis lygtimis, į kurias įtrauktos erdvės ir laiko koordinatės. Vis dėlto daugeliu atvejų konstrukciją galima sumodeliuoti kaip standžių, masę turinčių, kūnų ir spyruoklės tipo besideformuojančių elementų sistemą. Tokio modelio elgseną pilnai apibūdina masių padėtis erdvėje nusakantys poslinkiai. Toks modelis vadinamas diskrečiąja sistema arba diskrečiųjų parametrų sistema, o koordinačių krypčių, kuriomis gali judėti masės, skaičius vadinamas diskrečiosios sistemos dinaminio laisvės laipsniu. Dinaminės sistemos elgsena išreiškiama diferencialinėmis lygtimis, kurių skaičius yra lygus dinaminiam laisvės laipsniui.

Tokį dinaminių sistemų modeliavimą Humaras (Humar 2002) iliustruoja nesudėtingu pavyzdžiu, kurio schema parodyta 1.1 pav. Laikoma, jog strypas suvaržytas taip, kad jis gali deformuotis tik savo ašies kryptimi. Pjūvis A–A (žr. 1.1 pav. a) judės x ašies teigiama ir neigiama kryptimis, o jo padėtis bet kuriuo laiko momentu bus funkcija nuo koordinatės x ir laiko t . Strypo savuosius ašinius svyravimus (vibracijas) galima apskaičiuoti sprendžiant diferencialines lygtis, į

kurias įeina nepriklausomi kintamieji x ir t . Šį modelį tikslinga būtų modeliuoti kaip sistemą standžių masių, kurias tarpusavyje jungia tamprūs besvoriai elementai (žr. 1.1 pav. b). Masių skaičius pasirenkamas atsižvelgiant į norimą gauti skaičiavimų tikslumą.



1.1 pav. Strype vykstantys ašiniai svyravimai (a) ir strypo masių modelis (b)

Toks modeliavimas yra tinkamas daugeliui fizikinių sistemų, kurioms būtina nustatyti dinaminio poveikio atsaką. Tačiau reikia turėti omenyje, kad toks modelis yra idealizuotas, nes realioje konstrukcijoje masės nėra materialieji taškai, o tariami spyruokliniai elementai turi mases. Tam tikrose situacijose konstrukcijos elgseną tiksliai matematiškai galima aprašyti tik naudojant tolygiai paskirstytų masių ir standumų modelį. Čia turima omenyje kontinualias sistemas ir paskirstytų parametrų sistemas. Vis dėlto diskrečių sistemų analizė yra gerokai paprastesnė, nei tolydinių sistemų. Be to, diskrečiojo modelio tikslumą galima padidinti pasirenkant didesnę laisvės laipsnį, todėl diskretusis modeliavimas naudojamas plačiausiai.

Atliekant statybinių konstrukcijų dinaminę analizę daroma prielaida, kad sistemos charakteristikos, t. y. masė, standumas ir slopinimas, nepriklauso nuo laiko. Taip pat laikoma, kad konstrukcijos deformacijos yra mažos, o įtempių ir deformacijų priklausomybė – tiesinė. Tuomet sistemai galioja jėgų superpozicijos principas, nes sistema laikoma ir geometriškai tiesine.

Čia aptartas vienas iš galimų dinaminės sistemos matematinio modeliavimo būdų. Daugumoje literatūros šaltinių šis būdas aprašomas kaip efektyviausias ir plačiausiai naudojamas. Egzistuoja ir kiti būdai, tačiau apie juos bus kalbama kitose darbo dalyse.

1.2.2. Materialiojo taško dinamika

Teorinė mechanika nuodugniai išnagrinėjo materialiojo taško dinamiką, nuo kurios ir prasideda tolimesni ir sudėtingesni dinaminiai mechanizmų ir konstrukcijų skaičiavimai. Nesudėtingai ir aiškiai materialiojo taško judėjimą aprašo Baublys (2001). Pagal D’Alamberto principą sudaromos pusiausvyros lygtys, kurios sieja jėgas, veikiančias judantį materialųjį tašką.

Kaip pagrindas buvo pasirinkta lygtis, išreiškianti antrąjį Niutono dėsnį, t. y. lygtis $F = ma$. Pertvarkytas Niutono dėsnis atrodo taip:

$$F = Mw \text{ arba } F + (-Mw) = 0. \quad (1.1)$$

Šioje lygtyje nario $(-Mw)$ dimensija tokia pati kaip ir jėgos, o narys lygus jėgos dydžiui. Turime jėgų vektorių sumą, lygią nuliui. Laikome, kad $(-Mw)$ yra inercijos jėga, kurią žymėsime raide Z . Pažymėję, kad $Z = -Mw$, materialiojo taško judėjimo lygtį turėsime tokią:

$$F + Z = 0. \quad (1.2)$$

(1.2) lygtis vadinama dinamine taško pusiausvyros lygtimi. Ši lygtis išreiškia D'Alamberto principą, kuris gali būti taikomas ir materialųjų taškų sistemai. Garsus fizikas ir matematikas D'Alamberas (Jean le Rond d'Alembert) šį principą aprašė dar XVIII amžiuje.

Kai turime sistemą, kuri sudaryta iš n materialųjų taškų, bet kuris taškas j , kurio masė yra M_j , veikiamas išorinių jėgų F_j ir vidinių jėgų S_j įgauna pagreitį w_j . Tuomet galima užrašyti tokią taško inercijos jėgos išraišką:

$$Z_j = -M_j w_j. \quad (1.3)$$

Dydis Z_j vadinamas D'Alamberto inercija arba tiesiog taško j inercijos jėga. Kiekvieno sistemos taško judėjimas turi tokią savybę: jeigu kiekvienu momentu prie taškus veikiančių išorinių jėgų F_j ir vidinių jėgų S_j pridėsime inercijos jėgą Z_j , gausime jėgų sistemą, kuri yra pusiausvyra:

$$F_j + S_j + Z_j = 0. \quad (1.4)$$

D'Alamberto principo esmė yra ta, kad dinamikos uždaviniuose sistemos dinamikos lygtys sudaromos pusiausvyros lygčių pavidalu. Pusiausvyros lygtys, nusakančios D'Alamberto principą visai materialųjų taškų sistemai, atrodys taip:

$$\sum_{j=1}^n F_j + \sum_{j=1}^n S_j + \sum_{j=1}^n Z_j = 0. \quad (1.5)$$

Esant dideliame materialųjų taškų skaičiui sistemoje efektyvus yra sistemos pusiausvyros tyrimo metodas, pagrįstas virtualiųjų poslinkių principu. Virtualiųjų poslinkių principą XVIII amžiuje bendruoju pavidalu suformulavo italų matematikas ir astronomas Lagranžas (Joseph Louis Lagrange). Taikant D'Alamberto ir Lagranžo virtualiųjų poslinkių principus kartu galima gauti bendrą dinaminių uždavinių sprendimo būdą.

Pusiausvyrai jėgų (1.5) sistemai pritaikę virtualiųjų poslinkių principą gausime išraišką

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_S + \delta W_Z = \sum_{j=1}^n F_j \delta r_j + \sum_{j=1}^n S_j \delta r_j + \sum_{j=1}^n Z_j \delta r_j = 0, \quad (1.6)$$

kurioje δW yra visos sistemos virtualusis darbas, δW_F – išorinių jėgų virtualusis darbas, δW_S – vidinių jėgų virtualusis darbas, δW_Z – inercijos jėgų virtualusis darbas, δr_j – bet kurio sistemos taško virtualiojo poslinkio elementarusis vektorius.

Iš bendrosios dinamikos (1.6) lygties galima gauti bet kurios mechaninės sistemos judėjimo diferencialines lygtis ir teoremas. Taikant energinius principus buvo išvesta Lagranžo funkcija:

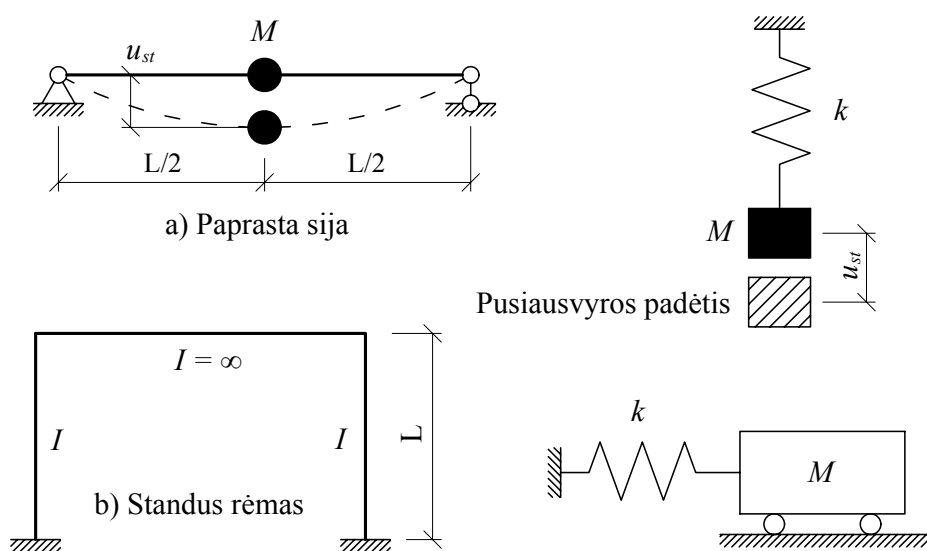
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0. \quad (1.7)$$

Ši funkcija nustato materialųjų taškų sistemos, kurią veikia potencialiosios jėgos, būseną. Lagranžo funkcijos išvedimą ir taikymą detalai aprašo Humaras (Humar 2002), Torbis (Thorby 2008) ir Cigleris (Циглер 2002). Žinant Lagranžo funkciją galima sudaryti sistemos judėjimo diferencialines lygtis. Šiomis lygtimis ir paremtas tolesnis dinamikos uždavinių formulavimas.

1.2.3. Vienetinio laisvumo laipsnio sistemų svyravimai

Kaip ir visoje mechanikoje, dinaminės konstrukcijų analizės nagrinėjimas gali būti pradėtas nuo elementarios sistemos (žr. 1.2 pav.). Sudėtingos konstrukcijos dažnai idealizuojamos paprastu spyruoklių arba besvorių strypų ir koncentruotų masių modeliu, kurio įvairių sprendimo metodų galima rasti bet kuriame literatūros apie svyravimus ir vibracijas šaltinyje. Elementarių sistemų dinaminės analizės supratimas yra būtinas, norint perprasti sudėtingų sistemų skaičiavimus matriciniais metodais (Cheng 2001).

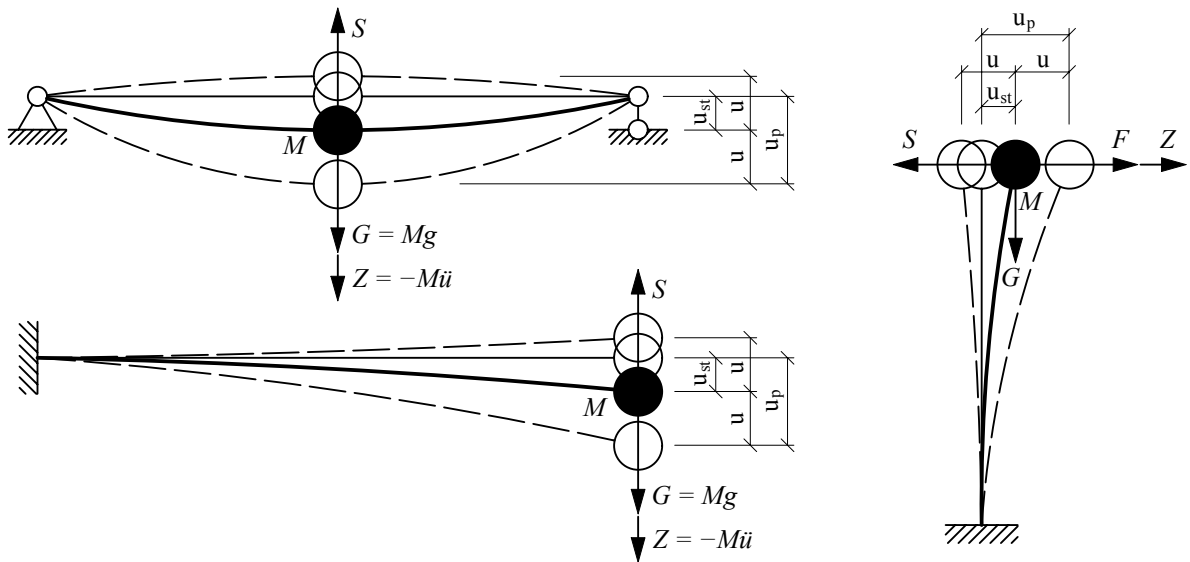
Kai kuriais atvejais statybines konstrukcijas arba mechanines sistemas galima idealizuoti priimant, kad jų laisvumo laipsnis lygus 1. Kaip tiksliai tokiu būdu idealizuotas modelis apibūdina



1.2 pav. Elementarios dinaminės sistemos

tikrosios konstrukcijos elgseną, priklauso nuo kelių faktorių: nuo pačios sistemos charakteristikų, pradinių sąlygų, žadinančių apkrovų ir nuo rezultatų tikslumo poreikio. Inžinerinėje praktikoje kartais pakanka apytikslių rezultatų, todėl kai kurių konstrukcijų idealizavimas vieno laisvės laipsnio modeliu paprastai būna tinkamas (Humar 2002).

Dinaminių sistemų su vienetiniu laisvės laipsniu nagrinėjimas prasideda nuo judėjimo lygčių sudarymo. Jų sudarymas remiasi jau anksčiau aptarta materialiojo taško pusiausvyra. 1.3 paveiksle pateiktos dažniausiai pasitaikančios vienetinio dinaminio laisvės laipsnio sistemos su visomis jas veikiančiomis jėgomis.



1.3 pav. Sistemos su vienetiniu dinaminio laisvės laipsniu ir jas veikiančios jėgos

1.3 paveiksle pateiktos trys skirtingos dinaminės sistemos, tačiau jų visų sprendimas yra visiškai vienodas. Čia masė M laikoma materialiuoju tašku, pritvirtintu prie besvorio strypo, kuris laikomas tampriu elementu. 1.3 paveiksle M yra kūno masė, G – savojo svorio jėga, S – strypo tamprumo jėga, Z – kūno inercijos jėga, F – statinė jėga, g – laisvojo kritimo pagreitis. Kaip jau minėta anksčiau, masės judėjimo lygtis gaunama sudarant veikiančių jėgų pusiausvyros lygtį:

$$G - S + Z = 0. \quad (1.8)$$

Žinant, kad $G = Mg$ ir $Z = -M\ddot{u}$, lygtį galima perrašyti taip:

$$G - k(u + u_{st}) = M\ddot{u} \quad \text{arba} \quad Mg - ku - ku_{st} - M\ddot{u} = 0. \quad (1.9)$$

(1.9) lygtyje $\ddot{u}$ yra antroji poslinkio išvestinė (masės pagreitis), k – standumo koeficientas, kuris nusako strypo sukuriamą reakciją nagrinėjamame taške, kai šio taško poslinkis lygus vienetui (Baublys 2001). Žinant, kad $u_{st} = G/k = Mg/k$, (1.9) lygtis pertvarkoma taip:

$$M\ddot{u} + ku = 0. \quad (1.10)$$

Abi lygties puses padalinus iš M ir pažymėjus, kad $r/M = \omega^2$, gaunama tokia lygtis:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0. \quad (1.11)$$

Dydis ω^2 yra vadinamas tikrine lygties reikšme, kurios kvadratinė šaknis atspindi sistemos savųjų svyravimų ciklinį dažnį. Būtent tikrinių reikšmių nustatymas ir yra svarbiausias uždavinys, kai kalbama apie dinaminių sistemų savuosius svyravimus. Tikrinių reikšmių nustatymo problemas įvairiose situacijose plačiai aprašo Čengas (Cheng 2001), Tobijas (Tobias 2011), Bhatas (Bhatt 2002), Adikaris ir Frisvelas (Adhikari, Friswell 2006).

Iš (1.10) ir (1.11) lygčių buvo pašalintos statinių apkrovų sukeliamos jėgos, vadinasi, statinei apkrovai neegzistuojant masės svyravimus išreiškia ta pati diferencialinė lygtis (1.10), o tai reiškia, kad pastovioji jėga, veikianti materialųjį tašką, svyravimo pobūdžio nepakeičia (Baublys 2001).

Kadangi anksčiau buvo pažymėta, kad $\omega = k/M$, galima gauti sistemos su vienetiniu laisvės laipsniu savųjų svyravimų dažnio nustatymo išraišką:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}. \quad (1.12)$$

Kai kuriuose literatūros šaltiniuose (pvz., Смирнов *et al.* 1984, Саргсян *et al.* 2000) vietoje standumo k naudojamas jam atvirkštinis dydis δ , kuris išreiškia materialiojo taško poslinkį nuo jį veikiančios vienetinės jėgos. Tuomet (1.12) išraiška tampa tokia:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta M}}. \quad (1.13)$$

Šią išraišką patogiu naudoti nesudėtingoms vienetinio dinaminio laisvumo laipsnio konstrukcijoms, kurių poslinkius nuo vienetinių jėgų galima apskaičiuoti naudojant klasikinius (jėgų ar poslinkių) skaičiavimo metodus. Jų taikymą plačiai aprašo Smirnovas (Смирнов 1984) ir Sargsianas (Саргсян 2000).

Ciklinis dažnis yra viena svarbiausių svyruojančios sistemos charakteristikų. Kartais paranku žinoti svyravimų dažnį f hercais ar svyravimų periodą T . Žinant, kad pilnas harmoninių svyravimų ciklas atitinka 2π , galima išsireikšti dažnį f arba periodą T :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.14)$$

Nagrinėtuose literatūros šaltiniuose (Baublys 2001, Humar 2002, Cheng 2001 ir kituose) yra pateikiama materialiojo taško judėjimo greičių, pagreičių bei amplitudžių nustatymo metodika, tačiau šios svyravimų charakteristikos, išskyrus amplitudes, darbe plačiau nebus nagrinėjamos.

Kaip jau minėta, statybinės konstrukcijos modeliavimas vienetinio dinaminio laisvės laipsnio sistema kartais yra pakankamas, tačiau vis dėlto daugeliu atveju toks supaprastinimas nesuteikia norimo tikslumo, todėl turi būti taikomi kitokie diskretizavimo būdai.

1.2.4. Baigtinio laisvumo laipsnio sistemų svyravimai

Anksčiau minėta, kad realios konstrukcijos dinaminis laisvės laipsnis yra begalinis, vadinasi, kuo didesniu skaičiumi elementų bus diskretizuojama sistema, tuo tikslesni bus rezultatai. Žinoma, tai galioja tik tuomet, kai kalbama apie konstrukcijos diskretizavimą koncentruotomis masėmis (šiek tiek vėliau bus kalbama ir apie kitus dinaminės analizės modelio sudarymo būdus). Kai buvo kalbama apie vienetinio laisvės laipsnio sistemas, minėta, kad masės svyravimus apibūdina vienintelis dažnis, o apie svyravimų formą kalbėti iš viso nebuvo prasmės. Kitaip yra su dinaminėmis sistemomis, kurių dinaminis laisvės laipsnis didesnis už vienetą – čia svyravimų dažnių yra daugiau nei vienas, be to, svarbiu rodikliu tampa ir tuos dažnius atitinkančios svyravimų formos. 1.5 pav. pateiktos sijos su trimis masėmis svyravimų formos.

Anksčiau minėta, kad vienetinio laisvės laipsnio sistemas galima skaičiuoti taikant klasikinius statybinės mechanikos metodus, tačiau sudėtingoms sistemoms šie metodai tampa nebetinkami dėl labai didelės apimties. Tokiais atvejais dinamikos uždaviniai formuluojami matriciniais baigtinių elementų metodais. Nors atstojamasis sistemos judėjimas gali būti ir labai sudėtingas, dinamikos požiūriu naujų dėsningumų čia nerasime. Remiantis tais pačiais dėsningumais baigtinio laisvės laipsnio sistemų judėjimo lygtys formuluojamos matricinėmis išraiškomis. Šiuolaikinės kompiuterinės technologijos leidžia spręsti didelės apimties matricinius uždavinius, todėl matricių teorijos metodais konstrukcijų dinamikos uždavinius formuluoti yra patogiau.

Baigtinių elementų metodas šiomis dienomis yra taikomosios mechanikos pagrindas. Galima rasti labai daug literatūros, kurioje aprašomos bendrosios metodo formuluotės tiek statikos, tiek dinamikos uždaviniams spręsti. Metodas vienodai sėkmingai gali būti taikomas vieno matmens, plokštuminėms arba erdvinėms sistemoms.

Yra sukurti bendrieji metodai saviesiems dažniams ir formoms rasti. Šiuos metodus plačiai aprašo Baublys (2001), Humaras (Humar 2002), Bhatas (Bhatt 2002) ir Torbis (Thorby 2006). Baigtinių elementų metodo taikymą dinamikos ir kituose uždaviniuose itin smulkiai ir išsamiai aprašo Barauskas, Belevičius ir Kačianauskas (2004), Zienkievičius ir Teiloras (Zienkiewicz, Taylor 2005).

Baublys (2001) pabrėžia, kad jeigu nagrinėjamos sistemos diskretinio modelio laisvumo laipsnis yra baigtinis, tai tokios sistemos judėjimas paprastai nusakomas antrosios eilės

diferencialinėmis lygtimis. Judėjimo lygčių nagrinėjimas supaprastėja, kai jos išreiškiamos apibendrinta matricine forma:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (1.15)$$

(1.15) lygtyse $[\mathbf{M}]$ yra diskretinio modelio masių matrica, $[\mathbf{K}]$ – standumų matrica, $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$ – pagreičių vektorius, $\{\mathbf{u}\}$ – poslinkių vektorius (paryškintomis raidėmis žymimos matricos ir vektoriai). (1.15) diferencialinės lygties sprendinys yra

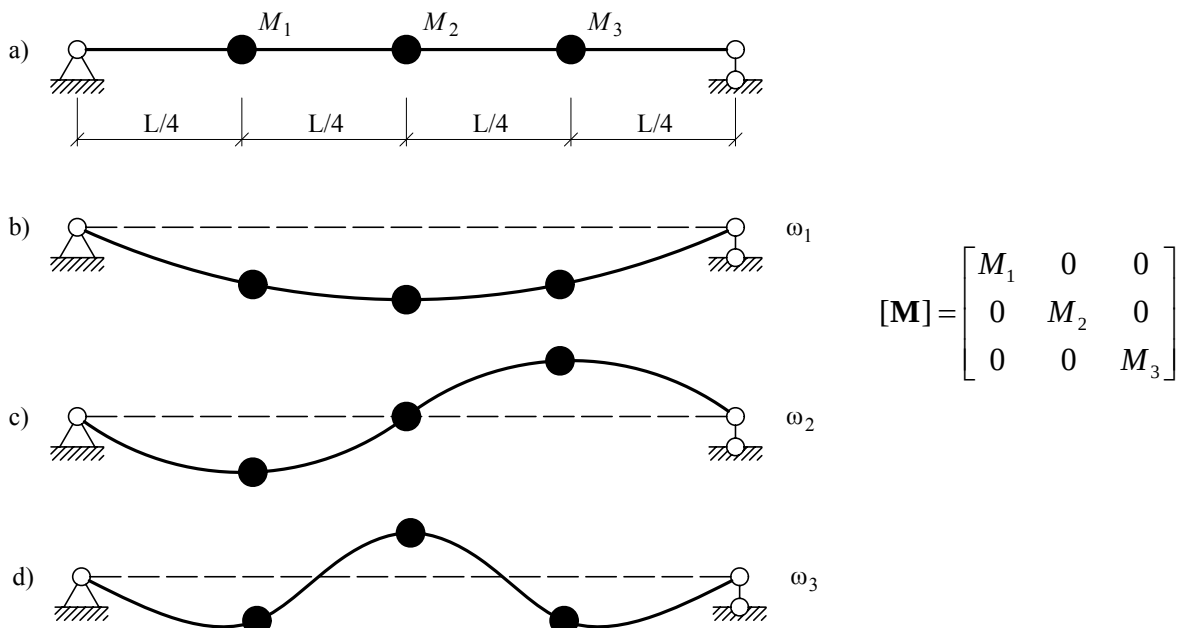
$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{a}\}\sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.16)$$

kuriame $\{\mathbf{a}\}$ yra amplitudinių poslinkių vektorius, ω – savųjų svyravimų ciklinis dažnis, φ_0 – pradinė svyravimų fazė. Kai sistemą veikia harmoninės žadinančios apkrovos ir įvertinamas svyravimų slopinimas, matricinė judėjimo lygtis įgauna tokią formą:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}_0\}. \quad (1.17)$$

$[\mathbf{C}]$ yra klampaus slopinimo matrica, $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ – masių judėjimo greičiai, $\{\mathbf{F}_0\}$ – žadinančių apkrovų vektorius (apie svyravimų slopinimą ir žadinimą bus kalba kituose poskyriuose).

Masių matrica $[\mathbf{M}]$ yra diagonalinė matrica, kurios diagonalėje esančių komponentų skaičius lygus sistemos dinaminiam laisvės laipsniui. Pavyzdžiui, jeigu 1.4 paveiksle parodytoje sijoje bus atsižvelgiama tik į vertikaliuosius mazgų poslinkius, jos masių matricos matmenys bus 3×3 , jeigu bus vertinami ir vertikalieji, ir horizontalieji poslinkiai, matricos $[\mathbf{M}]$ matmenys bus 6×6 . Taigi galima teigti, kad ši matrica pilnai apibūdina pasirinktą diskretinį modelį.



1.4 pav. Sistemos su trimis laisvės laipsniais svyravimų formos (Baublys 2001) ir jos masių matrica $[\mathbf{M}]$

Konstrukcijos standumų matrica $[K]$ susideda iš kiekvieno koncentruotas mases jungiančio elemento standumo. Elemento standumas gali būti išreiškiamas vienu komponentu arba atitinkama matrica – tai priklauso nuo to, kokio tipo elementais diskretizuojama konstrukcija. Pavyzdžiui, tik tempiamo arba gniuždomo elemento standumą išreiškia vienas komponentas, tik lenkiamo elemento su dviem mazgais – kvadratine matrica, kurios matmenys 2×2 , lenkiamo ir tempiamo arba gniuždomo elemento – kvadratine matrica, kurios matmenys 3×3 . Konstrukcijų standumo matricų sudarymo ypatumus plačiai aprašo Čyras (1989) ir Kalanta (2007).

Reikėtų paminėti, jog šiame darbe nagrinėjami konstrukcijos dinaminų parametrų nustatymo būdai taikant netiesioginius dinamikos uždavinių sprendimo metodus. Taikant tiesioginius metodus sistemos judesys apskaičiuojamas tiesiogiai iš dinamikos lygties. Galima teigti, jog dinamikoje egzistuoja tik vienas tiesioginis tyrimo metodas – tai judesio nustatymas laiko atžvilgiu, skaitiniais metodais sprendžiant dinamikos lygtį. Taikant netiesioginius metodus informacija apie konstrukcijos dinamines savybes gaunama tikrinių formų ir jų dažnių bei svyravimų amplitudžių pavidalu (Barauskas *et al.* 2004).

Neslopstančiuosius konstrukcijos savuosius svyravimus nusako (1.15) lygtis. $\{u\} = \{0\}$ yra šios lygties sprendinys, kai konstrukcija yra rimties būsenoje. Tačiau šis sprendinys nėra vienintelis. Egzistuoja ir kiti, nenuliniai, sprendiniai $\{u(t)\} = \{0\}$, kurie tenkina šią lygtį. Nenuliniai sprendiniai nusako konstrukcijos tikrinius virpesius, galinčius vykti neveikiant išorinėms apkrovoms. Šių sprendinių pavidalas bus toks:

$$\{u\} = \{a\} \cos \omega t. \quad (1.18)$$

Algebrinė matricinė lygtis gaunama du kartus diferencijuojant (1.18) išraišką ir įrašant ją į (1.15) lygtis:

$$([K] - \omega^2 [M])\{a\} = \{0\}. \quad (1.19)$$

Nenuliniai sprendiniai $\{a\} \neq \{0\}$ gaunami tik tuomet, kai (1.19) lygties koeficientų matrica yra išsigimusioji (Barauskas *et al.* 2004), t. y. kai

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0. \quad (1.20)$$

Turi būti surastos tokios svyravimų (virpesių) kampinių dažnių ω reikšmės, kad būtų tenkinama (1.20) algebrinė lygtis, kuri yra n -tojo laipsnio netiesinė lygtis. n yra konstrukcijos laisvės laipsnis. Taigi lygtis (1.20) turės n šaknų ($\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_n$), kurios vadinamos (1.20) lygties tikrinėmis reikšmėmis arba kitaip – konstrukcijos tikriniais dažniais. Realių konstrukcijų matricos $[K]$ ir $[M]$ visuomet būna simetrinės ir teigiamai apibrėžtos, todėl jų tikrinės reikšmės visada yra realiosios ir teigiamos (Barauskas *et al.* 2004).

(1.20) lygtis vadinama būdingąja dinaminės sistemos lygtimi. Kai konstrukcijos dinaminis laisvės laipsnis ne didesnis už 3, šią lygtį galima nesunkiai išspręsti be jokių papildomų priemonių, tačiau kai $n > 3$, lygties sprendimas tampa gana sudėtingas ir be kompiuterio to padaryti beveik neįmanoma. Tam naudojami specialiai tikrinių reikšmių nustatymui sukurti kompiuteriniai skaičiavimo algoritmai.

Atliekant konstrukcijos savųjų svyravimų analizę ne mažiau svarbūs parametrai yra ir svyravimų formos, kurias apibūdina poslinkių amplitudinių reikšmių vektoriai. Jie gaunami sprendžiant (1.19) lygtį, prieš tai į ją įrašius bet kurią reikšmę ω_i . Išsprendus lygtį gaunamas nenulinis vektorius $\{\mathbf{a}^{(i)}\}$, nusakantis konstrukcijos virpesiu amplitudes. Priėmus, kad $\omega = \omega_i$, sistemos koeficientų matrica tampa išsigimusiąja, todėl vektorius $\{\mathbf{a}^{(i)}\}$ nėra vienintelis. Jis nustatomas tik pastovaus daugiklio tikslumu ir nusako santykinės konstrukcijos mazgų amplitudes. Taigi, kiekvieną svyravimų dažnį ω_i ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$) atitinka santykinų amplitudinių reikšmių rinkinys $\{\mathbf{a}^{(i)}\}$ ($\{\mathbf{a}^{(1)}\}, \{\mathbf{a}^{(2)}\}, \dots, \{\mathbf{a}^{(n)}\}$), išreiškiantis konstrukcijos svyravimų formą.

Baublys (2001) konstrukcijos savųjų svyravimų dažnių ir formų nustatymo uždavinį siūlo formuluoti šiek tiek kitaip. Jis sistemos dinaminį modelį pradeda nagrinėti nuo jos įtempių ir deformacijų būvį bet kuriuo laiko momentu nusakančios lygčių sistemos:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (1.21)$$

$$[\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{\Theta}\}, \quad (1.22)$$

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{\Theta}\} \quad \text{arba} \quad [\mathbf{D}]\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{\Theta}\}. \quad (1.23)$$

Sistemoje (1.21) yra konstrukcijos pusiausvyros lygtys, (1.22) – geometrinės lygtys, (1.23) – fizikinės lygtys. $[\mathbf{A}]$ yra pusiausvyros lygčių koeficientų matrica, $\{\mathbf{S}\}$ – įrašų vektorius, $\{\mathbf{F}\}$ – išorinių apkrovų vektorius, $\{\mathbf{u}\}$ – poslinkių vektorius, $\{\mathbf{\Theta}\}$ – deformacijų vektorius, $[\mathbf{K}]$ – standumo matrica, $[\mathbf{D}]$ – pasiduodamumo matrica, kuri yra lygi atvirkštinei standumo matricai $[\mathbf{K}]^{-1}$. Šių lygčių ir matricų sudarymo ypatumus bei jų prasmę smulkiai ir išsamiai aprašo Čyras (1989).

Iš (1.21)–(1.23) lygčių sistemos galima išreikšti apkrovų vektorius $\{\mathbf{F}\}$:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{r}]\{\mathbf{u}\}. \quad (1.24)$$

Baublys simboliu $[\mathbf{r}]$ žymi standumo koeficientų matricą. Šios matricos atvirkštinė matrica laikoma poslinkių influentine matrica $[\mathbf{\beta}]$, kuri iš karto gali būti apskaičiuojama taip:

$$[\mathbf{\beta}] = ([\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T)^{-1}. \quad (1.25)$$

Kadangi dabar standumo koeficientų matricą pažymėjome $[\mathbf{r}]$ (anksčiau žymėjome $[\mathbf{K}]$), sistemos masių judėjimo matricinė lygtis atrodys taip:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{r}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (1.26)$$

Žinant, kad $[\beta] = [r]^{-1}$, abi (1.26) lygties puses padauginus iš $[\beta]$ gaunama tokia lygtis:

$$[\beta][M]\{\ddot{u}\} + \{u\} = \{0\} \quad \text{arba} \quad [\beta][M]\{\ddot{u}\} + [E]\{u\} = \{0\}. \quad (1.27)$$

$[E]$ yra vienetinė matrica, kuri lygi bet kokių atvirkštinių matricų sandaugai (Baublys vienetinę matricą žymi simboliu $[E]$).

Reikėtų paminėti, kad dinaminių sistemų skaičiavimams turi būti naudojama dinaminių poslinkių influentinė matrica $[\beta_{dyn}]$, tačiau jeigu priimama, kad dinaminio modelio taškinių masių svyravimo kryptys sutampa su visomis statinės analizės modelio galimų poslinkių kryptimis, $[\beta_{dyn}] = [\beta]$. Kitais atvejais $[\beta_{dyn}]$ turėtų būti apskaičiuojama naudojant loginę matricą, kuri sieja dinامينius poslinkius su galimais statiniais poslinkiais.

Jau anksčiau buvo užrašyta, jog diferencialinės (1.27) lygties sprendinys yra toks:

$$\{u\} = \{a\} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1.28)$$

Šį sprendinį įrašius į (1.27) lygtį gaunama matricinė lygtis, kuri turi tenkinti vektorių $\{a\}$:

$$\left([\beta][M] - \left(\frac{1}{\omega^2} \right) [E] \right) \{a\} = \{0\}. \quad (1.29)$$

Pažymėjus, kad $[\beta][M] = [C]$, o $1/\omega^2 = \lambda$, lygtis pertvarkoma taip:

$$([C] - \lambda[E])\{a\} = \{0\}. \quad (1.30)$$

Baublys teigia, kad norint apskaičiuoti sistemos laisvųjų svyravimų dažnius bei nustatyti jų formas, reikia išspręsti (1.30) lygtį, kurioje yra vektorius $\{a\}$ ir laisvasis parametras λ . Šio parametro reikšmės, atitinkančios nenulinį (1.30) lygties sprendinį yra vadinamos matricos $[C]$ tikrinėmis reikšmėmis, o nenulinis sprendinys $\{a^{(i)}\}$ vadinamas matricos savuoju vektoriumi, atitinkančiu tikrinę reikšmę λ .

(1.30) lygtis nenulinį sprendinį turi tik tada, kai jos determinantas lygus nuliui:

$$D(\lambda) = \det([C] - \lambda[E]) = 0. \quad (1.31)$$

Būdingosios (1.31) lygties šaknys atitinka matricos $[C]$, vadinamos būdingąja matrica, tikrines reikšmes. Turint tikrines reikšmes λ_i , savieji vektoriai $\{a^{(i)}\}$ gaunami sprendžiant sistemos laisvės laipsnį q atitinkantį skaičių tokių vektoriinių lygčių:

$$([C] - \lambda_i[E])\{a^{(i)}\} = \{0\}, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (1.32)$$

Laisvųjų svyravimų cikliniai dažniai apskaičiuojami taip:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (1.33)$$

Anksčiau minėta, kad (1.31) lygties sprendimas tampa labai sudėtingas, kai $q > 3$. Tokiais atvejais naudojami specialūs kompiuteriniai algoritmai. Pavyzdžiui, programoje MATLAB matricos tikrinėms reikšmėms ir tikriniams vektoriams nustatyti yra skirta funkcija $eig(\dots)$. Užklausa programai atrodytų taip:

$$[\{\lambda\}, [\mathbf{a}]] = eig([\mathbf{C}]). \quad (1.34)$$

Po užklauso programa pateikia tikrinių reikšmių vektorių $\{\lambda\}$, kuris per (1.33) išraišką generuoja konstrukcijos savųjų svyravimų ciklinių dažnių prasmę, ir matricą $[\mathbf{a}]$, kurios stulpeliai yra svyravimų dažnius atitinkantys santykinų amplitudžių vektoriai.

Taigi pagal Baublį (2001) galima užrašyti tokį matematinį modelį konstrukcijos savųjų svyravimų cikliniams dažniams ir formoms nustatyti:

$$[\boldsymbol{\beta}] = ([\mathbf{A}][\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T)^{-1}, \quad [\boldsymbol{\beta}_{dyn}] = [\mathbf{P}][\boldsymbol{\beta}][\mathbf{P}]^T, \quad (1.35)$$

$$[\mathbf{C}] = [\boldsymbol{\beta}_{dyn}][\mathbf{M}], \quad (1.36)$$

$$[\{\lambda\}, [\mathbf{a}]] = eig([\mathbf{C}]), \quad \omega_i = \sqrt{1/\lambda_i}. \quad (1.37)$$

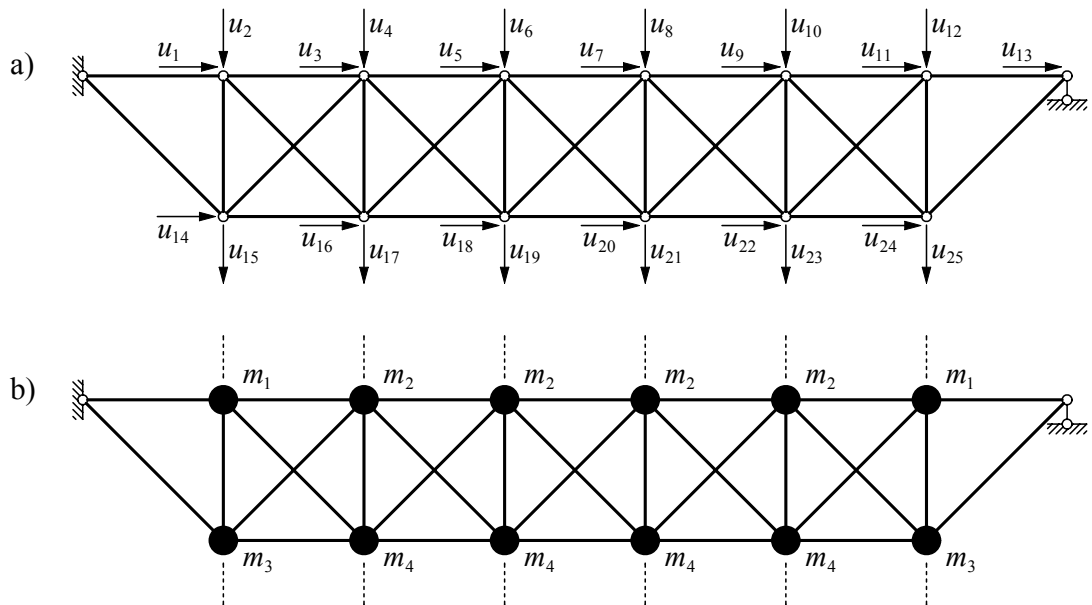
Loginė matrica $[\mathbf{P}]$ sudaroma atsižvelgiant į tai, kurios masių judėjimo kryptys sutampa su statinės analizės modelio globaliuoju poslinkiu. Atitinkančius poslinkius matricoje žymi vienetai, kiti komponentai yra lygūs nuliui. (1.35)–(1.37) modeliu šiame darbe ir bus remiamasi atliekant konstrukcijų dinaminės analizės tyrimus.

Norint tiksliai išreikšti konstrukciją diskretiniu modeliu kartais tenka įvertinti judančių masių kampinius poslinkius. Tokiu atveju taškinių masių judėjimo matricinių lygčių sudarymas tampa ypač sudėtingas. Tačiau analizuojant masyvias statybines konstrukcijas kampinių poslinkių dažniausiai nepaisoma tariant, kad masių inercijos momentai yra labai maži ir skaičiavimų rezultatams reikšmingos įtakos nedaro. Atmetus kampinius poslinkius sistemos laisvės laipsnis tampa gerokai mažesnis ir judėjimo lygtis supaprastėja. Būtent tokiu požiūriu šiame darbe ir bus nagrinėjami konstrukcijų dinaminiai skaičiavimai.

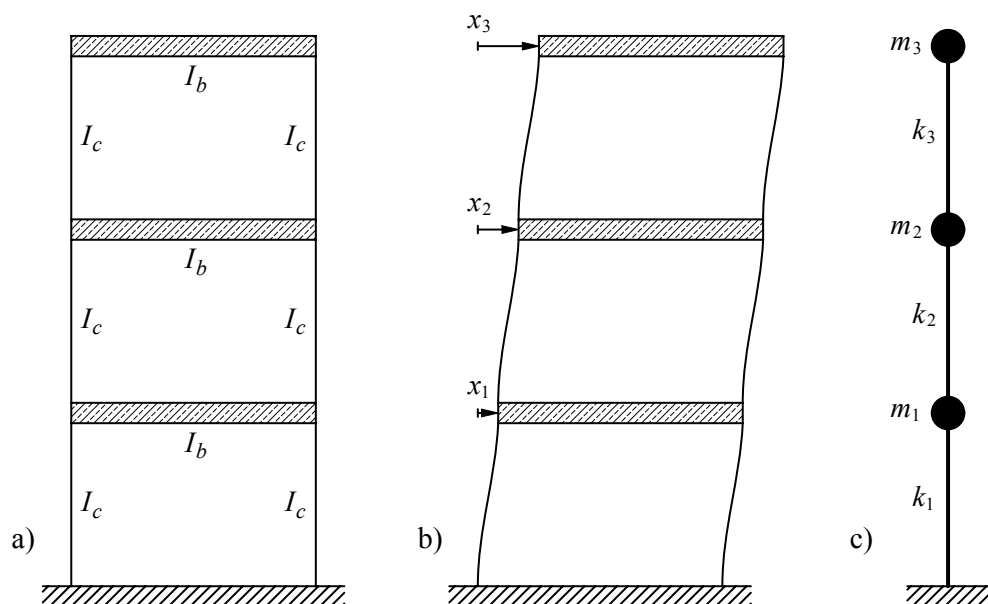
1.2.5. Konstrukcijos diskretizavimo dinaminei analizei metodai

Iki šiol buvo kalbama tik apie koncentruotų masių metodą. Dinaminei ir statinei konstrukcijos analizei dažniausiai naudojamas tas pats baigtinių elementų modelis, t. y. naudojamos tos pačios pusiausvyros lygčių ir pasiduodamumo ar standumo matricos. Vadinas, tokiu atveju diskretinio modelio masės gali būti sukoncentruotos tik skaičiuojamuosiuose pjūviuose (mazguose). 1.5 ir 1.6 paveiksluose parodyti santvaros ir daugiaaukščio rėmo diskretizavimo koncentruotomis masėmis būdai. Tačiau, žinoma, egzistuoja ir kiti konstrukcijų dinaminės analizės metodai. Pavyzdžiui,

vietoje koncentruotų masių gali būti naudojamos paskirstytos masės. Tokiu atveju skaičiavimų rezultatai gaunami labai tikslūs, tačiau toks skaičiavimo būdas gali būti taikomas tik nedidelėms konstrukcijoms ar tik jų dalims. Sudėtingoms konstrukcijoms toks skaičiavimo metodas tampa sudėtingu didelės apimties uždaviniu. Kita vertus, toks būdas puikiai tinka kontinualių konstrukcijų, t. y. kevalų ar plokščių, dinaminei analizei. Tinkamai diskretizuoti kontinualias konstrukcijas koncentruotomis masėmis praktiškai netgi neįmanoma.



1.5 pav. Santvaros statinės (a) ir dinaminės (b) analizės diskretiniai modeliai



1.6 pav. Daugiaaukščio rėmo diskretizavimo dinaminei analizei pavyzdys (Sircovich Saar 2006)

Galima teigti, kad koncentruotų masių diskretizavimo metodas yra tinkamiausias statybinėms strypinėms konstrukcijoms, nes tokiu būdu suformuluoto uždavinio realizacija yra paprastesnė, be to, kaip teigiama daugelyje literatūros šaltinių, skaičiavimo rezultatų tikslumas dažniausiai yra pakankamas. Būtent šiam metodui šiame darbe bus skiriamas didžiausias dėmesys. Visi tyrimai bus atliekami taikant koncentruotų masių metodą. Toliau šiame poskyryje bus aptarti ir kiti konstrukcijų dinaminės analizės metodai, tačiau jų taikymo ypatumams labai daug dėmesio nebus skiriama.

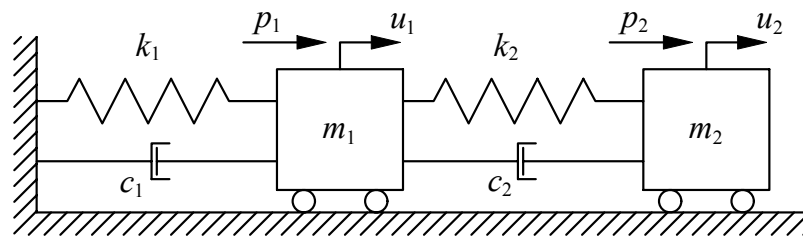
Humaras (Humar 2002) išskiria tokias keturias konstrukcijos dinaminių sistemų kategorijas:

1. Sistemos su sutelktosiomis masėmis ir sutelktaisiais standumais.
2. Sistemos su sutelktosiomis masėmis ir paskirstytais standumais.
3. Sistemos su paskirstytomis masėmis ir sutelktaisiais standumais.
4. Sistemos su paskirstytomis masėmis ir paskirstytais standumais.

Toliau kiekviena iš šių kategorijų bus aptarta atskirai.

1.2.6. Sistemos su sutelktosiomis masėmis ir sutelktaisiais standumais

Šiuo būdu aprašomos dinaminės sistemos, kuriose mases galima laikyti taškinėmis, o elementų standumus galima apibūdinti nepriklausomais koeficientais. Tokiu būdu galima diskretizuoti paprastą masių ir spyruoklių sistemą, kuri parodyta 1.7 paveiksle.



1.7 pav. Sistema su sutelktosiomis masėmis ir sutelktaisiais standumais

Sistemoje jėgos yra pridedamos ties sutelktosiomis masėmis, kuriomis šiuo atveju laikomi absoliučiai standūs kūnai, tamprumo jėgos sutelktos besvorėse spyruoklėse. Ši sistema turi du laisvės laipsnius, kuriuos apibūdina dvi apibendrintosios koordinatės. Sistemos masių, slopinimo ir standumo matricos būtų tokios:

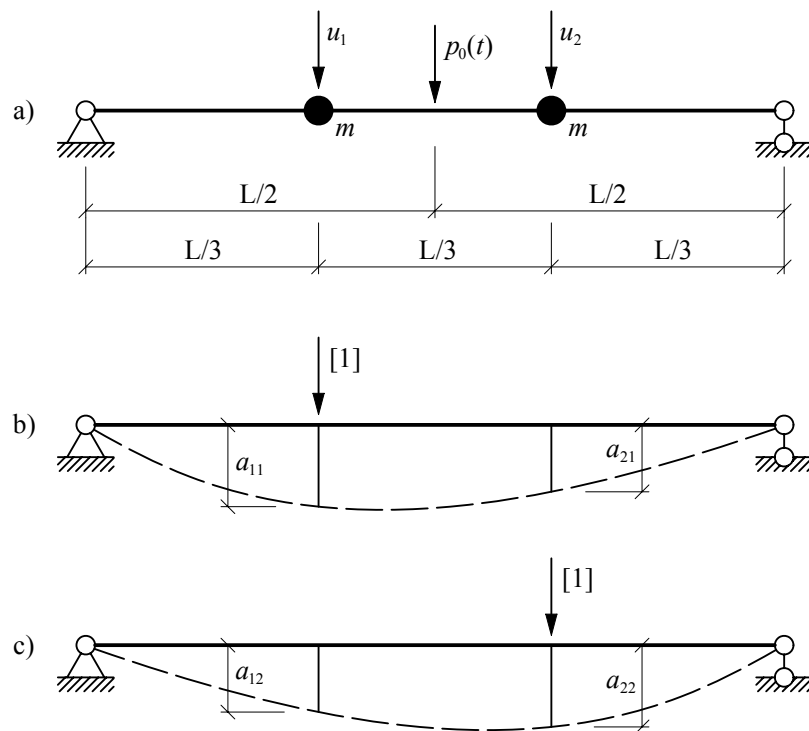
$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Matricinė judėjimo lygtis sistemai gali būti užrašyta taip:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

1.2.7. Sistemos su sutelktosiomis masėmis ir paskirstytais standumais

Šis diskretizavimo metodas labiausiai tinka strypinėms statybinėms konstrukcijoms, kurias sudaro lenkiami, tempiami ar gniuždomi ir sukami elementai. Čia standumo matricą sudaro influentiniai komponentai, kuriais išreiškiamas elemento standumo kitimas per visą jo ilgį. 1.8 paveiksle parodyta paprasta dvitramė sija, kurios masės sutelktos dviejuose taškuose. Laikoma, kad sijoje galimos tik lenkimo deformacijos. Sija svyruoja veikiamą žadinančios apkrovos $p_0(t)$.



1.8 pav. Dvitramės sijos sutelktųjų masių modelis (a) ir įlinkio influentiniai koeficientai (b ir c)

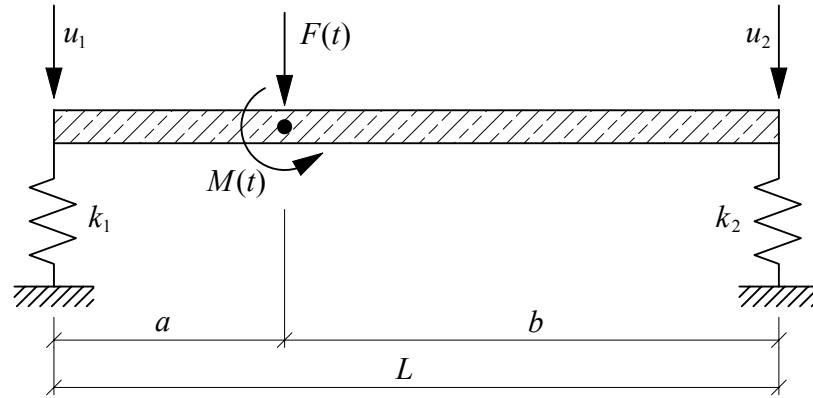
1.8 paveiksle pavaizduota sija yra dinaminė sistema, kurios masės yra koncentruotos, o standumas paskirstytas. Tokiu modeliu paremtas ir jau anksčiau aptartas konstrukcijos savųjų svyravimų nustatymo matematinis modelis (1.35)–(1.37). Sijos masių inercijos jėgos veikia jos laisvės laipsnių kryptimis. Žadinanti jėga veikia ne sutelktųjų masių vietoje, tačiau ji gali būti pakeista ekvivalentinėmis jėgomis, veikiančiomis reikiamuose taškuose. Sijos vidinės jėgos yra pasiskirsčiusios per visą jos ilgį, tačiau jos taip pat gali būti pakeistos atstojamosiomis jėgomis, kurias galima apskaičiuoti taikant standartinius metodus. Žinant sijos atsaką ties masėmis, tampriųjų konstrukcijų analizės metodais galima nustatyti jos deformacijas.

1.8 paveiksle pavaizduotos dviatramės sijos masių matrica bus tokia pati kaip ir sistemos, parodytos 1.7 paveiksle. Vietoje tiesioginio standumo matricos sudarymo šiuo atveju patogiau suformuoti pasiduodamumo matricą, o vėliau sudaryti jos atvirkštinę matricą. Nagrinėjamos sijos atveju pasiduodamumo matricą sudarys influentiniai koeficientai a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} . Sijos svyravimų matricinė lygtis, kai jos neveikia žadinančios ir slopinimo jėgos, atrodys taip:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

1.2.8. Sistemos su paskirstytomis masėmis ir sutelktaisiais standumais

Tokia sistema gali būti laikoma standi dviatramė sija, parodyta 1.9 paveiksle. Sija atremta ant sutelktojo standumo spyruoklinių elementų, o jos masė tolygiai pasiskirsčiusi visame ilgyje.



1.9 pav. Standžios dviatramės sijos su sutelktaisiais standumais ir paskirstyta mase dinaminės analizės modelis

Svyruojančios sijos inercijos jėgos yra pasiskirsčiusios visame jos ilgyje, tačiau, nepaisant to, sistema turi tik du dinامينius laisvės laipsnius, nes jais pilnai galima apibūdinti visos sistemos poslinkius. Egzistuoja begalė laisvės laipsnių pasirinkimo galimybių, tačiau šiuo atveju patogiausia pasirinkti vertikaliuosius sijos galų poslinkius. Čia sijos masė m bet kuriame taške gali būti išreiškiama per funkciją, kurios kintamieji yra ilgis L bei atstumai a ir b . Kadangi sija yra laikoma absoliučiai standžia, į jos masių matricą taip pat turi įeiti ir inercijos momentas apie atitinkamą tašką I_0 . Taigi tokios sistemos matricinė lygtis, kai jos neveikia žadinančios jėgos, bus tokia:

$$\begin{bmatrix} \frac{mb^2}{L^2} + \frac{I_0}{L^2} & \frac{mab}{L^2} - \frac{I_0}{L^2} \\ \frac{mab}{L^2} - \frac{I_0}{L^2} & \frac{ma^2}{L^2} + \frac{I_0}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Šiuo atveju sistemos standumo matrica yra diagonalinė. Jeigu sistemos laisvės laipsniai bus pasirinkti ne kraštinių vertikalųjų poslinkių kryptimis, o bet kurio sijos taško vertikaliojo poslinkio ir pasisukimo kryptimis, diagonaline taps masių matrica, tuo tarpu standumo matricos komponentai bus išreiškiami priklausomybėmis nuo L , a ir b . Tuomet judėjimo lygtis bus tokia:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 b - k_1 a \\ k_2 b - k_1 a & k_1 a^2 + k_2 b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Humaras (Humar 2002) teigia, kad egzistuoja toks apibendrintųjų koordinačių rinkinys, su kuriuo ir masių, ir standumo matrica yra diagonalinė. Tokia kombinacija vadinama sistemos normalinėmis koordinatėmis. Šios koordinatės kai kuriais atvejais vaidina labai svarbų vaidmenį tam tikrų sistemų dinaminėje analizėje. Šiame darbe apie šias koordinates nebus kalbama. Darbe visas tyrimų dėmesys skiriamas statybinėms konstrukcijoms, kurių dinaminei analizei paskirstytų masių ir sutelktųjų standumų metodas praktiškai nėra taikomas arba taikomas labai retai.

1.2.9. Sistemos su paskirstytomis masėmis ir paskirstytais standumais

Tokios sistemos dar vadinamos kontinualiomis sistemomis arba paskirstytų parametru sistemomis. Teoriškai jos turi begalinį skaičių laisvės laipsnių ir jų svyravimus išreiškia dalinės diferencialinės lygtys. Tokios sistemos taip pat gali būti idealizuojamos koncentruotomis masėmis – taip dažniausiai ir daroma su statybinių konstrukcijų modeliais. Apie kontinualias dinamines sistemas šiame darbe plačiau nebus kalbama.

1.2.10. Kiti dinaminų modelių sudarymo metodai

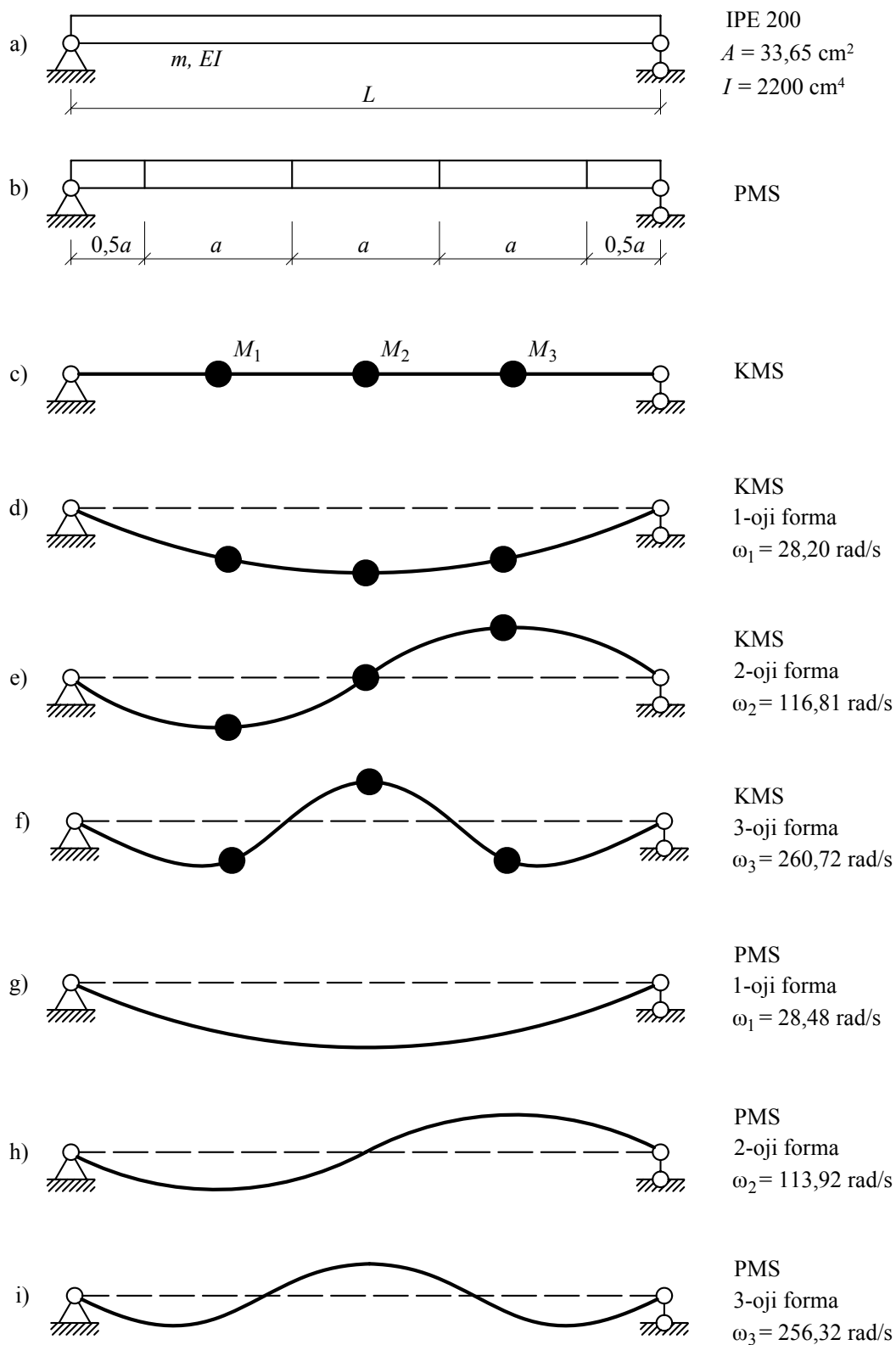
Čengas (Cheng 2001) mini tris metodus, kurie gali būti taikomi formuluojant konstrukcijų dinaminės analizės matematinius modelius: koncentruotų masių, dinaminio standumo (kai standumas priklauso nuo svyravimų dažnio) ir nuosekliųjų (paskirstytų) masių. Skaičiavimams kompiuteriu visi šie metodai formuluojami naudojant standumo arba pasiduodamumo matricas. Koncentruotų masių ir dinaminio standumo metodai skiriasi tuo, kad į pirmojo judėjimo lygtis įeina nepriklausomos masių ir standumo matricos, tuo tarpu antrojo judėjimo lygtys sudaromos naudojant matricą, kurioje masės ir standumai yra netiesiogiai suderinti. Koncentruotų masių ir nuosekliųjų masių formuluotės yra panašios judėjimo lygčių požiūriu: abiejose yra nepriklausomos masių ir standumo matricos, tačiau masių matricos yra skirtingos. Nuosekliosios masės laikomos giminingomis baigtiniams elementams, naudojamiems kontinualių konstrukcijų analizėje. Toks diskretizavimo metodas vienodai sėkmingai gali būti taikomas ir plokštėms, ir rėmams.

Koncentruotų masių metodas jau buvo gana išsamiai aptartas anksčiau. Dinaminio standumo modelis gali būti taikomas tuomet, kai konstrukcijos masės yra paskirstytos. Žinoma, toks modeliavimas labai tikslus, t. y. artimas realiai konstrukcijai, tačiau erdvinų konstrukcijų su paskirstytais masėmis ir paskirstytais apkrovomis dinaminio atsako nustatymo formuluotėse neišvengiamai atsiranda nuo laiko priklausančios linijiniai poslinkiai ir pasisukimai, todėl tokių uždavinių sprendimas tampa labai sudėtingas. Kartais šie uždaviniai gali turėti sprendinius, kurių neįmanoma tiksliai nustatyti analitiniais metodais. Yra sukurtos specialios metodikos tokių uždavinių sprendimui, tačiau jas taikant gaunami tik apytiksliai rezultatai. Dėl to iškyla klausimas, ar nebūtų paprasčiau apytikslius rezultatus gauti taikant lengvesnius metodus (Sircovich Saar 2006). Būtent dėl to statybinių konstrukcijų dinaminei analizei dažniausiai taikomas koncentruotų masių metodas. Toks modeliavimas yra gerokai paprastesnis ir reikalauja mažiau laiko bei darbo sąnaudų, o statybinėms konstrukcijoms apytikslių rezultatų dažniausiai pakanka.

Dėl sudėtingumo paskirstytų masių metodas paprastai taikomas tik vieno ar dviejų matmenų nesudėtingoms sistemoms, t. y. sijoms arba plokštėms. Bendrai tariant, svyruojančių konstrukcinių elementų, laikomų paskirstytų masių sistema, dinaminis atsakas gali būti apibūdinamas kaip modalinių poslinkių, turinčių savąsias charakteristikas, junginys. Būtent tokiu požiūriu buvo sudaromos ir koncentruotų masių sistemos. Jeigu bus didinamas sistemos segmentų, o tuo pačiu ir masių, skaičius, atitinkamai didės ir svyravimų formų skaičius. Skaičiavimų tikslumas tokiu atveju taip pat didės. Akivaizdu, kad pasirinkus be galo daug segmentų, skaičiavimų rezultatai sutaps su paskirstytų masių sistemos rezultatais.

Sirkovičius Saras (Sircovich Saar 2006) pateikia pavyzdį (žr. 1.10 pav.), kuriame lyginami dviatramės sijos dinaminės analizės rezultatai, taikant skirtingus skaičiuojamuosius modelius: paskirstytų masių (1.10 b pav.) ir koncentruotų masių (1.10 c pav.). d, e ir f paveiksluose pateiktos koncentruotų masių sistemos (KMS) svyravimų dažniai ir formos, o g, h ir i paveiksluose – paskirstytų masių sistemos (PMS) pirmosios trys formos ir dažniai (paskirstytų masių sistema jų turi be galo daug). Matyti, jog abiejų sistemų svyravimų formos yra beveik identiškos, o dažnių reikšmės skiriasi labai nedaug: pirmojo dažnio reikšmės skiriasi tik 0,99 %, antrojo dažnio – 2,54 %, trečiojo – 1,72 %. Kaip jau minėta, didinant masių skaičių rezultatų skirtumas artėtų prie nulio. Šis pavyzdys įrodo, kad konstrukcijos modeliavimas koncentruotomis masėmis duoda pakankamai tikslius rezultatus, be to, prireikus jų tikslumą galima didinti.

Verta panagrinėti dviatramės sijos su paskirstytais masėmis dinaminės analizės uždavinio realizacijos matematinį modelį. Laikant, kad sijos standumas yra tolygiai pasiskirstęs visame jos ilgyje, o ją veikia bet kaip paskirstyta apkrova, ryšį tarp sijos įlinkio y bet kuriame taške x ir taške veikiančio lenkimo momento, skersinės jėgos ir išorinės apkrovos galima užrašyti (1.43) išraiškomis.



1.10 pav. Dviatramės sijos svyravimų dažnių ir formų palyginimas skaičiuojant koncentruotų ir paskirstytų masių metodais (PMS – paskirstytų masių sistema, KMS – konc. masių sistema)

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad V = -EI \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad q(x) = -EI \frac{d^4 y}{dx^4}. \quad (1.43)$$

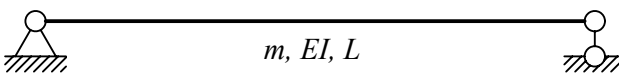
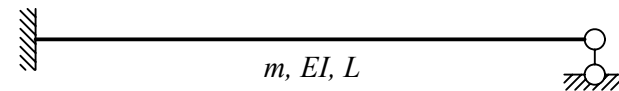
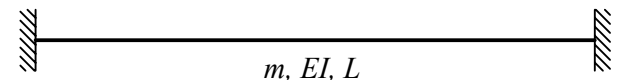
(1.43) išraiškos tinka liaunoms sijoms, kurioms galioja mažų poslinkių prielaida. Į šlyties jėgas išraiškose neatsižvelgiama. Sijos, veikiamos bet kaip paskirstytos ir per laiką kintančios jėgos, judėjimo pusiausvyros lygtys gali būti detalizuotos, užrašant dinaminį jėgų pusiausvyrą bet kurioje sijos elementariojoje atkarpoje. Vertikalaus poslinkio išvestinė užrašoma kaip dalinė išvestinė, nes y yra funkcija, kurios kintamieji – x ir t . (1.43) lygtyse apkrova $q(x)$ turi būti pakeista svyruojančios sijos efektyviąja apkrova:

$$q(x, t) = p(x, t) - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (1.44)$$

Galiausiai gaunama tokia lygtis:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t). \quad (1.45)$$

(1.45) lygtis yra elementarioji liaunos sijos judėjimo pusiausvyros diferencialinė lygtis. Kadangi laikoma, kad sijai galioja mažų poslinkių prielaida, masės inercijos momentai nėra įvertinami. Iš šios lygties yra išvestos formulės įvairiai atrėmtų sijų savųjų svyravimų dažniams nustatyti (žr. 1.11 pav.).

a)		$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$
b)		$\omega_n = \frac{(n + 0,25)^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$
c)		$\omega_n = \frac{(n + 0,5)^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$

1.11 pav. Sijos su skirtingomis atrėmimo sąlygomis ir formulės, skirtos šių sijų savųjų svyravimų cikliniams dažniams rasti

Paskirstytų masių metodo taikymas didesnėms elementų sistemoms tampa gana sudėtingas. Čengas (Cheng 2001) paskirstytų masių sistemoms siūlo taikyti dinaminio standumo ir energinius metodus. Šių metodų realizacija nėra paprasta. Čia taikomos įvairios prielaidos ir principai, pavyzdžiui, Railio (Rayleigh) dinaminis atvirkštinis principas, Miulerio-Breslo (Müller-Breslau) principas ir kiti. Čia naudojamos kitokios dinaminio standumo, apkrovų bei masių matricos. Šio metodo taikymas darbe plačiau nebus analizuojamas.

1.2.11. Supaprastintas strypinės konstrukcijos diskretinis modelis

Chajesas ir kiti (Chajes *et al.* 1996) savo straipsnyje nagrinėja kontinualaus (redukuoto) konstrukcijos dinaminės analizės modelio taikymą daugiaaukščiams pastatams. Jis siūlo erdvinę konstrukciją pakeisti vieno matmens gembiniu modeliu su koncentruotomis masėmis. Šiuo atveju kiekviena koncentruota masė atspindi viso aukšto masę, o mases jungiančių elementų standumo matricos sudaromos atsižvelgiant aukštus jungiančių elementų standumus.

1989 metais San Franciske vyko žemės drebėjimas, kurio metu naudojant akselerometrus buvo stebimas 47 aukštų plieninio pastato dinaminis atsakas. Chajesas ir kiti (Chajes *et al.* 1996) naudodami šių stebėjimų rezultatus atliko tyrimą: stebėjimų rezultatus palygino su to paties pastato dinaminės analizės rezultatais, gautais naudojant redukuotą (kontinualių) modelį. Tyrimas parodė, kad remiantis naudotos skaitinės analizės rezultatais konstrukcijos dinaminį atsaką, atsirandantį veikiant seisminiams poveikiams, galima nuspėti gana tiksliai.

1.3. Konstrukcijos priverstinių svyravimų analizė

Jau buvo minėta, kad savieji konstrukcijų svyravimai egzistuoja tik teoriniame lygmenyje. Tai reiškia, kad jie savaime nevyksta. Reikšmingi jie tampa tik tuomet, kai konstrukciją pradeda veikti žadinančios jėgos. Tik tokiu atveju atsiranda svyravimai, kurie sukelia konstrukcijos vidinių jėgų, t. y. įrąžų, padidėjimą arba žymų poslinkių augimą.

Žadinančios apkrovos gali būti įvairios: periodinės, harmoninės, smūginės, chaotiškos (neperiodinės), transporto (slankiosios) apkrovos. Paprasčiausias atvejis yra tuomet, kai konstrukciją veikia per laiką kintančios harmoninės žadinančios apkrovos $F(t)$, kurių kitimas gali būti išreikštas sinuso dėsnio:

$$F(t) = F_0 \sin \theta t. \quad (1.46)$$

Čia bus kalbama tik apie tokias sistemas, kurių laisvės laipsnis yra didesnis už 1. Tokių sistemų savieji svyravimai plačiai išanalizuoti ankstesniame poskyryje. Priverstiniai svyravimai yra paremti tais pačiais dėsniais ir išreiškiami tomis pačiomis judėjimo lygtimis, tik į jas dar yra įtraukiamos per laiką kintančios jėgos (šiuo atveju šios jėgos laikomos harmoninėmis). Taigi, bet kokios taškinių masių sistemos priverstiniai svyravimai gali būti išreikšti tokia matricine judėjimo lygtimi (Baublys 2001):

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}_0\} \sin \theta t. \quad (1.47)$$

(1.47) lygtyje $\{\mathbf{F}_0\}$ yra žadinančių apkrovų amplitudinių reikšmių vektorius, o θ – žadinančių jėgų kitimo ciklinis dažnis. Kiti dydžiai jau buvo aptarti anksčiau.

Įvedus dinaminių poslinkių influentinę matricą $[\beta_{dyn}]$ ir inercijos jėgų vektorių $\{Z\}$ bei atlikus tam tikrus pertvarkymus, sistemos judėjimo lygtį galima perrašyti taip:

$$[\beta_{dyn}]\{Z\} - \theta^{-2}[\mathbf{M}]^{-1}\{Z\} + [\beta_{dyn}]\{F_0\}\sin\theta t = \{0\}. \quad (1.48)$$

Pažymėjus, kad $\theta^{-2}[\mathbf{M}]^{-1} = [\beta_M]$, lygtį galima išreikšti tokiu pavidalu:

$$([\beta_{dyn}] - [\beta_M])\{Z\} + [\beta_{dyn}]\{F_0\}\sin\theta t = \{0\}. \quad (1.49)$$

Toliau sudaroma dinaminių įrašų influentinė matrica $[\alpha_{dyn}]$ ir randamos inercijos jėgos:

$$[\alpha_{dyn}] = [\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T[\beta_{dyn}], \quad (1.50)$$

$$\{Z\} = -([\beta_{dyn}] - [\beta_M])^{-1}[\beta_{dyn}]\{F_0\}. \quad (1.51)$$

Dinaminių įrašų ir dinaminių poslinkių vektoriai randami naudojant tokias išraiškas:

$$\{S_{dyn}\} = [\alpha_{dyn}](\{Z\} + \{F_0\}), \quad \{u_{dyn}\} = [\beta_{dyn}](\{Z\} + \{F_0\}). \quad (1.52)$$

Taigi pagal Baublį (2001) galima užrašyti tokį matematinį modelį, skirtą strypinės konstrukcijos dinaminėms įraižoms ir dinaminiams poslinkiams apskaičiuoti, kai ją veikia harmoninės žadinančios jėgos:

$$[\beta] = ([\mathbf{A}][\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T)^{-1}, \quad [\alpha] = [\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T[\beta], \quad (1.53)$$

$$[\beta_{dyn}] = [\mathbf{P}][\beta][\mathbf{P}]^T, \quad [\alpha_{dyn}] = [\alpha][\mathbf{P}]^T, \quad (1.54)$$

$$[\beta_M] = \theta^{-2}[\mathbf{M}]^{-1}, \quad \{Z\} = -([\beta_{dyn}] - [\beta_M])^{-1}[\beta_{dyn}]\{F_0\}, \quad (1.55)$$

$$\{S_{dyn}\} = [\alpha_{dyn}](\{Z\} + \{F_0\}), \quad \{u_{dyn}\} = [\beta_{dyn}](\{Z\} + \{F_0\}). \quad (1.56)$$

(1.53)–(1.56) matematiname modelyje $[\mathbf{A}]$ yra pusiausvyros lygčių koeficientų matrica, $[\mathbf{D}]$ – pasiduodamumo matrica, $[\alpha]$ – įrašų influentinė matrica, $[\beta]$ – poslinkių influentinė matrica, $[\mathbf{P}]$ – loginė matrica, $[\mathbf{M}]$ – konstrukcijos masių matrica, $[\alpha_{dyn}]$ – dinaminių įrašų influentinė matrica, $[\beta_{dyn}]$ – dinaminių poslinkių influentinė matrica, $\{Z\}$ – inercijos jėgų vektorius, $\{F_0\}$ – žadinančių jėgų amplitudžių vektorius, $\{S_{dyn}\}$ – dinaminių įrašų vektorius, $\{u_{dyn}\}$ – dinaminių poslinkių vektorius, θ – žadinančių jėgų kitimo ciklinis dažnis.

Kai kalbama apie priverstinius konstrukcijų svyravimus, svarbiausiu reiškiniu čia tampa rezonansas. Pilnas rezonansas konstrukcijoje pasireiškia tuomet, kai žadinančių jėgų kitimo dažnis sutampa su vienu iš konstrukcijos savųjų svyravimų dažniu. Rezonanso atveju konstrukcijos

svyravimų amplitudės ima smarkiai didėti, nes žadinančios jėgos, jeigu kitimo fazės sutampa, vis papildo savuosius svyravimus. Tokiu atveju stipriai ima didėti ir konstrukcijos įrašos bei poslinkiai. Teoriškai, idealaus rezonanso atveju, įrašų ir poslinkių skaitinės reikšmės išaugtų iki begalybės, todėl galima teigti, kad rezonansas daugeliu atvejų privestų prie konstrukcijos griūties. Žinoma, realiose konstrukcijose pasireiškia svyravimų slopinimas, dėl kurio svyravimų amplitudės ir dinaminių efektų sukeltos įrašos bei poslinkiai neišauga iki begalybės. Slopinimas konstrukcijose pasireiškia dėl aplinkos pasipriešinimo, vidinių trinties jėgų ir kitų poveikių, kurių veikimo kryptis yra priešinga masių judėjimo kryptčiai. Kartais skaičiavimuose šios slopinimo jėgos yra įvertinamos, tačiau sudėtingoms konstrukcijoms jų įvertinimas yra gana komplikotas. Yra sukurti apytiksliai slopinimo įvertinimo metodai, tačiau šiame darbe jie neanalizuojami.

Taigi galima teigti, kad pagrindinis uždavinys projektuojant svyravimams jautrias konstrukcijas yra išvengti rezonanso. Tai padaryti gana nesudėtinga, kai žadinančių apkrovų veikimo dažnis yra pastovus ir žinomas, tačiau kartais rezonanso išvengti gali būti neįmanoma. Tokiais atvejais turi būti taikomi specialūs metodai ar priemonės dinaminių efektų slopinimui.

Vieno laisvės laipsnio sistemoms priverstinių svyravimų sukeltos įrašos ir poslinkiai gali būti apskaičiuojami naudojant dinamiškumo koeficientą μ , kurio dydis tiesiogiai priklauso nuo žadinančių jėgų dažnio θ ir savųjų svyravimų dažnio ω santykio. Šio koeficiento išraiška yra tokia:

$$\mu = \frac{1}{1 - (\theta / \omega)^2}. \quad (1.57)$$

Iš 1.57 formulės matyti, kad santykiui θ/ω artėjant prie 1, dinamiškumo koeficiento μ reikšmė artėja link begalybės. Apytiksliai įvertinant svyravimų slopinimą, koeficiento išraiška gali būti perrašyta taip:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\theta}{\omega}\right)^2}}. \quad (1.58)$$

1.58 išraiškoje γ yra netampraus pasipriešinimo koeficientas, kurio reikšmės priklauso nuo konstrukcijos tipo, medžiagos ir kitų parametrų. Šios reikšmės yra apytiksliai nustatytos dažniausiai naudojamoms konstrukcijoms. Jas galima rasti norminiuose dokumentuose.

Žinoma, egzistuoja ir kiti priverstinių svyravimų analizės metodai, leidžiantys įvertinti kitokio pobūdžio, ne harmoninių, žadinančių jėgų sukeliamus efektus, tačiau šiame darbe didžiausias dėmesys skiriamas būtent tokiai analizei, kai konstrukcija diskretizuojama centruotomis masėmis, o žadinančios apkrovos laikomos harmoninėmis.

1.4. Žadinančios vėjo apkrovos

Vėjo poveikis konstrukcijoms priklauso nuo vėjo tėkmės charakteristikų, kurios laikui bėgant kinta erdvėje, ir nuo konstrukcijos charakteristikų bei jos supančios aplinkos. Konstrukcijos dinaminio atsako nustatymas nėra paremtas vien tik vėjo poveikio įvertinimu. Čia labai svarbūs yra ir pačios konstrukcijos aerodinaminiai ypatumai.

Ypač jautrios vėjo poveikiui yra liaunos konstrukcijos. Svyrudamos jos veikia šalia pučiančio vėjo tėkmę, tokiu būdu tarp savęs ir vėjo sukurdamos aktyvią sąveiką. Tam tikromis sąlygomis dėl šios sąveikos konstrukcijos įtempiai ir deformacijos gali pasiekti kritines reikšmes, o tai savo ruožtu gali privesti prie konstrukcijos griūties. Kitais atvejais statinio sauga gali būti nepažeista, tačiau konstrukcija gali būti netinkama naudoti dėl per didelių poslinkių ar svyravimų pagreičių, kurie neigiamai veikia žmonių savijautą.

Vėjo tėkmė ne visuomet konstrukcijas veikia tik pūtimo kryptimi. Kartais vėjas gali sukelti ir svyravimus, vykstančius statmena kryptimi. Taip atsitinka dėl tam tikrų vėjo tėkmės ir konstrukcijos charakteristikų.

Projektavimo tikslais vėjo apkrovos nustatymo būdai yra sukurti remiantis skysčių tėkmės fizikiniais principais ir įvairove faktorių, išreiškiančių konstrukcijos geometriją, standumą ir supančią aplinką. Įvairių parametrų neapibrėžtumas dažnai reikalauja tikslesnių tyrimų, pavyzdžiui, konstrukcijos modelio bandymų vėjo tunelyje. Tokie bandymai yra būtini sudėtingoms ir svarbioms konstrukcijoms.

Vėjo veikiamų konstrukcijų dinaminė analizė apima pačios konstrukcijos dinamiką, aerodinamiką, aerotamprumą bei tikimybinis principus. Aerodinamika nagrinėja jėgas, kurios atsiranda, kai bet koks kūnas yra veikiamas oro tėkmės. Judantis oras taip pat vienaip ar kitaip yra veikiamas jo kelyje pasitaikiusio kūno. Dar prieš pasiekdamas kūną, judantis oras gali būti paveiktas vietinės turbulencijos, kuri vėjo poveikį į kūną gali smarkai pakeisti. Aerotamprumas nagrinėja kūną veikiančias jėgas, atsirandančias dėl tarp paties judančio kūno sąveikos su oro srovėmis. Jeigu konstrukcija yra pakankamai lanksti, jos judėjimas, sukeltas vėjo, tiesiogiai veikia oro tėkmę ir tokiu būdu keičia nuo vėjo atsirandančių jėgų pobūdį. Kai konstrukcija yra pakankamai standi, laikoma, kad kūną veikia tik tolygiai judančio oro sukeltos jėgos.

Konstrukcijos svyravimų ir vėjo sąveika yra gana sudėtingas reiškinys. Be judėjimo ir atsirandančių jėgų charakteristikų čia daug dėmesio turi būti skiriama ir aerotamprajam stabilumui, kuris pasireiškia tuomet, kai vėjo greitis peržengia vadinamąją kritinio greičio ribą.

Kartais konstrukcijai galima taikyti supaprastintą dinaminės vėjo apkrovos nustatymo metodiką. Tokiu atveju laikoma, kad judančios konstrukcijos ir vėjo sąveika nesukelia papildomų dinaminių efektų, t. y. konstrukcijos paviršiams perduodami tik statinės ir pulsacinės vėjo dedamųjų

sukuriami slėgiai. Šių slėgių nustatymo metodika yra pateikta Lietuvoje galiojančiose projektavimo normose. Žinoma, toks supaprastinimas gali būti taikomas tik tuomet, kai konstrukcija laikoma pakankamai standžia ir didžioji dalis jos masės yra sutelkta viršūnėje (čia kalbama apie bokštines konstrukcijas). Neapibrėžtu dydžiu čia tampa ir žadinimo dažnis, nes vėjo pulsacinė apkrova nėra harmoninė. Jos negalima apibrėžti tam tikru dažniu, ji kinta chaotiškai. Atliekant konstrukcijos dinaminę analizę būtų galima laikyti, kad pulsacinės vėjo apkrovos dažnis yra artimas konstrukcijos savųjų svyravimų dažniui, taip sukuriant pavojingiausią apkrovimo atvejį. Tokiu principu šiame darbe ir bus remiamasi atliekant bokšto dinaminės analizės tyrimus.

1.5. Konstrukcijų optimizavimo metodai

Šiais laikais ypač svarbu, kad statybinių konstrukcijų projektavimas būtų optimalus, taip siekiant sutaupyti brangių medžiagų. Plieninės konstrukcijos ekonomiškiausiai suprojektuojamos tuomet, kai yra atsižvelgiama į jų plastines deformacijas. Šiuo atveju konstrukcijos elementuose ar mazguose leidžiama pasireikšti takumui, dėl kurio elementų laikomoji galia kai kuriais atvejais išnaudojama racionaliau. Čia taip pat reiktų paminėti ir prisitaikančias konstrukcijas. Tampriųjų plastinių ir prisitaikančių plieninių konstrukcijų optimizavimą plačiai aprašo Atkočiūnas ir Karkauskas (2010). Tačiau ne visoms konstrukcijoms plastinės deformacijos gali būti leidžiamos. Jeigu konstrukciją nuolat veikia kintamo ženklo ciklinės apkrovos, atsirandančios plastinės deformacijos gali privesti prie gana greitos konstrukcijos griūties. Tai, žinoma, liečia ir svyruojančias liaunas konstrukcijas. Jose yra leidžiamos tik tampriosios deformacijos, nes kitu atveju konstrukciją gali ištikti ciklinė plastiškoji suirtis. Taigi galima teigti, kad bokštams gali būti taikomi tik tampriųjų konstrukcijų optimizavimo metodai. Šiuos metodus gana plačiai aprašo Kalanta (2007).

Tamprių strypinių konstrukcijų optimizavimo uždavinių formuluotės gali būti įvairios: konstrukcijos tūrio minimizavimo, optimalaus apkrovos paskirstymo, struktūros bei matmenų optimizavimo ir kitos. Pagrindinis parametras, apibūdinantis optimizavimo uždavinio tikslą, yra optimalumo kriterijus. Optimalumo kriterijus paprastai išreiškiamas konstrukcijos tūriu ar svoriu, apkrovos parametro dydžiu arba energine išraiška. Uždavinio apribojimus paprastai sudaro pusiausvyros lygtys, geometrinės lygtys ir kiti apribojimai, susiję su konstrukcijos sauga ir tinkamumu: stiprumo, pastovumo, standumo bei konstruktyviniai apribojimai. Tamprių konstrukcijų optimizavimo uždaviniai paprastai formuluojami kaip netiesinio matematinio programavimo uždaviniai.

Šiame darbe nagrinėjami liauni plieniniai bokštai, todėl šiuo atveju aktualūs yra tamprių konstrukcijų tūrio minimizavimo uždaviniai, į kuriuos būtų galima įtraukti ir dinامينius efektus.

Paprastai literatūroje galima rasti tik tradicines optimizavimo uždavinių formuluotes su standartiniais apribojimais, skirtas tik statinių apkrovų veikiamoms konstrukcijoms. Dinaminių apkrovų veikiamų konstrukcijų optimizavimui reikalingi kompleksiškesni matematiniai modeliai. Apie tokius modelius bus kalbama kitame darbo skyriuje.

Jeigu yra žinomas žadinančių jėgų dažnis ir jis yra pastovus, konstrukcija gali būti optimizuojama atsižvelgiant į savųjų svyravimų dažnio apribojimus. Tokių strypinių konstrukcijų optimizavimą išanalizavo Wangas ir kiti (Wang *et al.* 2004), Oliveira ir Gomesas (Oliveira, Gomes 2010).

1.6. Inžineriniai kompiuteriniai paketai

Šių laikų projektavimas nėra įsivaizduojamas be įvairių inžinerinių kompiuterinių programų. Statybinių konstrukcijų analizei ir projektavimui skirtose programose yra puikiai išvystytas baigtinių elementų metodas, kurio įvairiapusiškumas ir universalumas suteikia galimybę analizuoti ir projektuoti bet kokio pobūdžio konstrukcijas. Šiuo metu egzistuoja aibė įvairių baigtinių elementų metodo modifikacijų, skirtų būtent statybinėms konstrukcijoms. Dinaminei konstrukcijų analizei komercinėse programose dažniausiai siūlomas koncentruotų masių metodas, tačiau visgi kai kurios programos siūlo kelis metodus, iš kurių vartojas gali rinktis. Pavyzdžiui, programa *Autodesk Robot Structural Analysis 2012* siūlo tris būdus: koncentruotų masių be pasisukimų, koncentruotų masių su pasisukimais ir nuosekliųjų masių. Taikant visus šiuos metodus erdvinėms santvaroms rezultatai paprastai gaunami beveik vienodi.

Statybinių konstrukcijų analizei ir projektavimui skirtos programos konstrukcijas projektuoti dažniausiai leidžia tik veikiant statinėms apkrovoms. Dinaminiai efektai į projektavimo procesą nebūna įtraukti. Dinaminė konstrukcijos analizė paprastai būna lyg atskiras etapas, kurio metu tikrinamas statinėms apkrovoms suprojektuotos konstrukcijos atsparumas dinaminiams poveikiams.

1.7. Skyriaus išvados

Konstrukcijos savųjų svyravimų analizės metodų bei jų atmainų yra gana nemažai ir juos visus vienaip ar kitaip būtų galima pritaikyti erdvinėms santvarinėms konstrukcijoms, tačiau ne visų jų taikymas būtų racionalus. Čia daug ką lemia pasirinktas konstrukcijos diskretinis modelis. Paprastai erdvinės ar plokščiosios santvaros yra diskretizuojamos pirmosios eilės baigtiniais elementais, todėl tokiais atvejais patogiausia naudoti koncentruotų masių dinaminės analizės modelį. Šiuo atveju mases nesudėtinga išdėstyti konstrukcijos mazguose. Tyrimais įrodyta, kad rezultatų tikslumas, naudojant koncentruotų masių metodą, labai mažai skiriasi nuo kitų, tikslesnių, metodų, be to, tokiu būdu suformuluoto uždavinio realizacija yra paprastesnė.

Paprasčiausia konstrukcijos priverstinių svyravimų analizė yra tuomet, kai veikiančios žadinančios apkrovos yra harmoninės. Tačiau, kaip žinoma, realūs poveikiai retai kada būna harmoniniai. Jų dažniausiai neįmanoma išreikšti pastovia priklausomybe, o dėl to labai sunku kurti tikslius skaičiavimo metodus. Čia dažnai naudojamos įvairios formulės, sudarytos remiantis tyrimais ir stebėjimais. Vis dėlto, kartais supaprastinimo dėlei galima priimti, kad apkrova yra harmoninė, o jos kitimo dažnis yra artimas konstrukcijos savųjų svyravimų dažniui. Tokiu būdu sukuriama pavojausias apkrovimo atvejis, o skaičiavimai gerokai supaprastėja.

Vėjo sukeltas dinaminis poveikis konstrukcijoms yra gana sudėtingas reiškinys ir iki šiol vis dar nėra sukurtų tikslų jo nustatymo būdų. Sudėtingoms ir svarbioms konstrukcijoms vėjo dinaminis poveikis dažniausiai nustatomas atliekant realius bandymus vėjo tuneliuose. Kitais atvejais naudojami apytiksliai skaičiavimo metodai. Pagal Lietuvoje galiojančias projektavimo normas galima apskaičiuoti vėjo statinio ir pulsacinio slėgių į konstrukcijos paviršius reikšmes. Kai kurioms konstrukcijoms galima priimti, kad pulsacinė apkrova yra harmoninė ir kinta dažniu, artimu konstrukcijos savųjų svyravimų dažniui.

Dažniausiai yra sprendžiami tokie konstrukcijų optimizavimo uždaviniai, kuriuose įvertinamos tik statinės apkrovos. Kai nagrinėjamos dinaminiais poveikiais jautrios konstrukcijos, atsiranda platesnių optimizavimo uždavinių formuluočių, kuriose būtų įvertinti ir dinaminiai efektai, poreikis. Žinoma, tokie uždaviniai gali būti formuluojami tik įvertinant tampriąsias deformacijas. Svyruojančioje konstrukcijoje pasireiškus takumui, ją gana greitai gali ištikti ciklinė plastiškoji suirtis.

Kompiuterinėse komercinėse programose dinaminei konstrukcijų analizei dažniausiai naudojamas koncentruotų masių metodas. Konstrukcijos ir jos elementų projektavimas šiomis programomis gali būti atliekamas tik įvertinant statines apkrovas, dėl to taip pat kyla optimizacijos formuluočių, kuriose būtų įvertinti ir dinaminiai efektai, poreikis.

2. KONSTRUKCIJOS SAVŲJŲ SVYRAVIMŲ TYRIMAS

2.1. Įvadinės pastabos

Statybinių konstrukcijų skaičiavimų tikslumas dažnai priklauso nuo to, koku būdu sudaromas skaičiuojamasis modelis. Kitaip tariant, tikslumas priklauso nuo pasirinkto konstrukcijos diskretinio modelio, be kurio bet kokios konstrukcijos matematiniai skaičiavimai nebūtų galimi. Teisinga konstrukcijos diskretizacija yra vienas svarbiausių etapų atliekant tiek statinę, tiek dinaminę analizę. Diskretinis modelio detalumas nusako, kaip tiksliai pasirinkto modelio elgsena atitiks realios sistemos elgseną, o nuo to tiesiogiai priklauso suprojektuoto statinio saugumas ir tinkamumas.

Pasirinkus detalesnį ir tikslesnį diskretinį modelį išauga skaičiavimų sudėtingumas ir apimtis, tačiau rezultatų tikslumas būna didesnis, o naudojant abstraktesnį diskretinį modelį skaičiavimai tampa paprastesni, tačiau jų tikslumas mažėja. Žinoma, taip yra ne visuomet – tai labai priklauso nuo konstrukcijos tipo, struktūros ir kitų parametrų. Parenkant diskretinį modelį projektuotojams dažnai tenka priimti sprendimus, kurie lemia konstrukcijų analizės ir projektavimo rezultatų teisingumą. Tokiais atvejais projektuotojas gali remtis savo patirtimi arba atliktais tyrimais, kurie įrodo, kad priimami vienokie ar kitokie sprendimai sudarant modelį tam tikru atveju bus teisingi ir neiškreips skaičiavimo rezultatų. Taigi galima teigti, kad tyrimai yra konstrukcijos analizės ir projektavimo metodų kūrimo ir taikymo pagrindas. Be jų teisingai matematiškai aprašyti konstrukcijose vykstančių procesų turbūt neįmanoma. Čia vienodai svarbūs realūs, t. y. natūriniai, ir įvairūs analitiniai tyrimai.

Šiame darbe nagrinėjamas liaunų plieninių bokštų dinaminis skaičiavimas, todėl šiuo atveju aktualūs yra konstrukcijos diskretizavimo dinaminei analizei tyrimai. Bokštinių strypinių konstrukcijų skaičiavimo uždaviniai dažnai būna didelės apimties, nes jas sudaro daug elementų. Tokių uždavinių apimtį galima sumažinti pasirenkant optimalų konstrukcijos diskretinį modelį. Šiame poskyryje aprašomi liauno plieninio bokšto savųjų svyravimų tyrimai, kurių pagalba toks modelis ir gali būti parinktas. Čia daugiausiai dėmesio skiriama diskretizacijos ypatumams, t. y. tiriama, kokią įtaką diskretinio modelio detalumas daro skaičiavimų rezultatams. Taip pat tiriama, kokią įtaką rezultatams daro skirtingos bokšto struktūros (šiuo atveju analizuojamos dvi skirtingos struktūros).

Tiriamos konstrukcijos skaičiavimai atliekami taikant baigtinių elementų ir koncentruotų masių metodą, kurio realizacijai naudojamas matematinis kompiuterinis paketas MATLAB. Skaičiavimų rezultatai lyginami su statybinių konstrukcijų projektavimui ir analizei skirtos programos *Autodesk Robot Structural Analysis* rezultatais.

2.2. Savųjų svyravimų analizės matematinis modelis

Pirmajame skyriuje buvo užrašytas toks konstrukcijos savųjų svyravimų analizės matematinis modelis (modelio sudarymo ypatumai aptarti pirmajame skyriuje):

$$[\mathbf{\beta}] = ([\mathbf{A}][\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T)^{-1}, \quad [\mathbf{\beta}_{dyn}] = [\mathbf{P}][\mathbf{\beta}][\mathbf{P}]^T, \quad (2.1)$$

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{\beta}_{dyn}][\mathbf{M}], \quad (2.2)$$

$$[\{\lambda\}, [\mathbf{a}]] = eig([\mathbf{C}]), \quad \omega_i = \sqrt{1/\lambda_i}. \quad (2.3)$$

Visi į modelį įeinantys dydžiai gana išsamiai buvo aptarti pirmajame skyriuje. Šio modelio realizacija yra galima tik taikant kompiuterines programas ir tam tikrus algoritmus, nes tradiciniais skaičiavimo metodais (2.3) lygties didelio laisvės laipsnio konstrukcijos atveju išspręsti beveik neįmanoma. Čia turima omenyje tikrinių reikšmių radimą, apie kurį pirmajame skyriuje taip pat jau buvo kalbama.

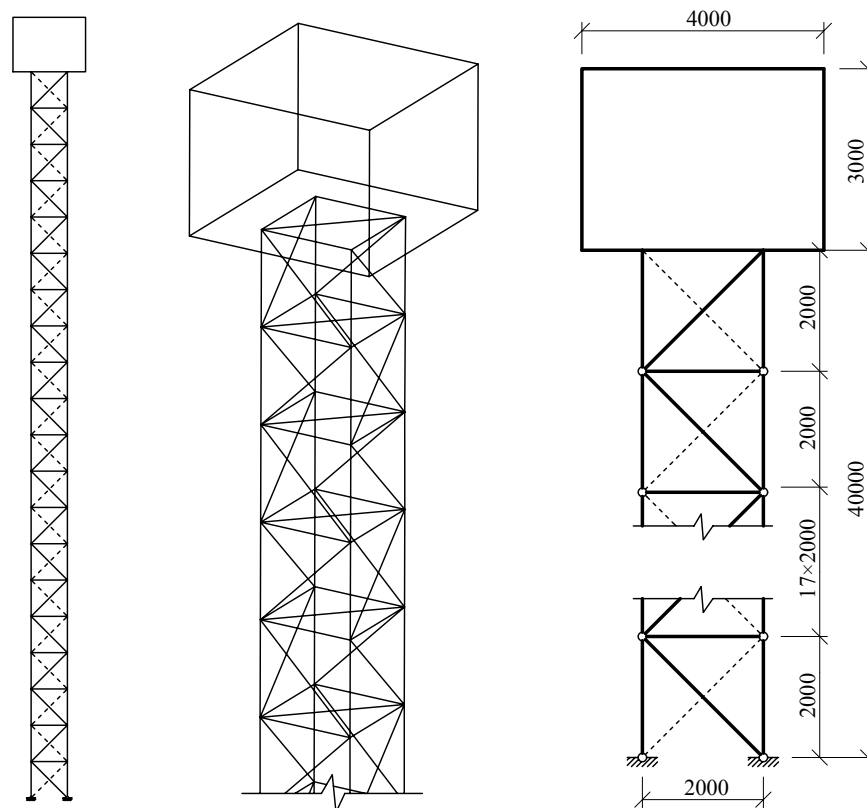
Norint taikyti matematinį modelį, pirmiausia turi būti sudarytas konstrukcijos baigtinių elementų diskretinis modelis statinei analizei. Čia pasirenkama, kokio tipo elementai sudaro konstrukciją, o tai savo ruožtu apsprendžia diskretinio modelio laisvės laipsnių (lygčių) ir uždavinio nežinomųjų skaičių. Toliau formuojamos pagrindinės matricos: pusiausvyros lygčių matrica $[\mathbf{A}]$, pasiduodamumo matrica $[\mathbf{D}]$ ir loginė matrica $[\mathbf{P}]$. Reikėtų paminėti, kad loginė matrica reikalinga tik tuomet, kai koncentruotų masių ir jų judėjimo krypčių pasirenkama mažiau už statinės analizės modelio galimų poslinkių skaičių. Jeigu statinis ir dinaminis laisvės laipsniai yra lygūs, $[\mathbf{\beta}_{dyn}] = [\mathbf{\beta}]$.

Pagrindinis dydis, apibūdinantis konstrukcijos dinaminės analizės modelį, yra masių matrica $[\mathbf{M}]$. Kai taikomas koncentruotų masių metodas, ši matrica yra diagonalinė. Jos diagonalėje išdėstomos galimus dinaminis poslinkius atitinkančių masių reikšmės. Vadinasi, jeigu masė gali svyruoti ne viena kryptimi, t. y. jos judėjimas aprašomas ne viena apibendrintąja koordinate, į masių matricą ji įrašoma kelis kartus.

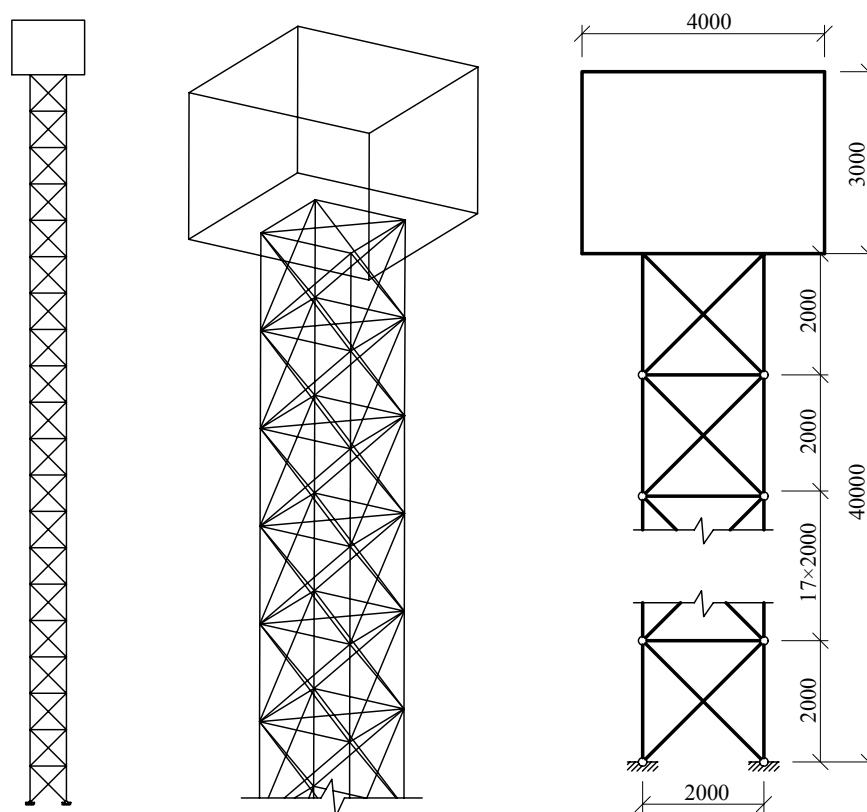
Išsprendus uždavinį (2.1)–(2.3) gaunami konstrukcijos cikliniai dažniai ω_i ir šiuos dažnius atitinkantys santykiniai amplitudinių poslinkių vektoriai, kurie išreiškia svyravimų formas.

2.3. Tiriama konstrukcija ir jos diskretizavimo principai

Tiriami dviejų skirtingų struktūrų liauni plieniniai bokštai, kurių schemos parodytos 2.1 ir 2.2 paveiksluose. Bokštų matmenys yra tokie patys, abiejų viršūnėse – identiškios masyvios konstrukcijos. Skiriasi tik bokštų strypinė sandara. Dvi skirtingos struktūros pasirinktos siekiant nustatyti, kokią įtaką struktūra daro tokio tipo konstrukcijų skaičiavimų rezultatams.

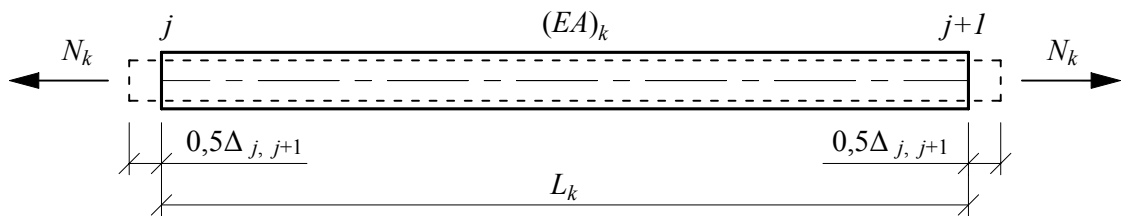


2.1 pav. Pirmosios struktūros bokšto schema



2.2 pav. Antrosios struktūros bokšto schema

Laikoma, kad konstrukcija deformuojasi tik tampriai, jos plieno tamprumo modulis – 210 MPa, tankis – 7800 kg/m³. Bokštas diskretizuojamas pirmosios eilės strypiniais baigtiniais elementais, kuriuose veikia tik ašinės jėgos (žr. 2.3 pav.). Baigtinio elemento skerspjūvis bei kiti rodikliai per visą jo ilgį yra pastovūs. Žinoma, realių plieninių santvarinių konstrukcijų mazgai dažniausia būna virintiniai, dėl to teisingiau juos būtų laikyti standžiais, tačiau eksperimentiniai tyrimai rodo, kad santvarose standžius mazgus pakeitus lankstiniais, strypų įrąžų pasiskirstymo bei mazgų poslinkių paklaidos gaunamos labai nedidelės (Čyras 1989).



2.3 pav. Tempiamas arba gniuždomas baigtinis elementas

Pirmosios struktūros bokštą sudaro 260 strypų. Kadangi kiekvienas elementas yra tikrai tempiamas arba gniuždomas, konstrukcijoje bus 260 galimų įrąžų, t. y. ašinių jėgų. Antrasis bokštas iš viso turi 340 elementų, atitinkamai tiek pat ir įrąžų. Šios įrąžos išreiškiamos apibendrintuoju įrąžų vektoriumi $\{\mathbf{N}\} = [N_1, N_2, N_3, \dots, N_n]^T$.

Konstrukcijos pusiausvyros lygtis sudaro visų jos mazgų pusiausvyra globalioje koordinačių sistemoje. Erdvinėje Dekarto koordinačių sistemoje kiekvienas mazgas turi tris galimus linijinius poslinkius, vadinasi, vieno mazgo pusiausvyra bus išreiškiama trimis pusiausvyros lygtimis:

$$\sum N_{k,x} = F_x, \quad \sum N_{k,y} = F_y, \quad \sum N_{k,z} = F_z. \quad (2.4)$$

Abu bokštai iš viso turi po 80 mazgų. Kadangi kiekvienas mazgas gali pasislinkti trimis kryptimis, konstrukcijos iš viso turės po 240 galimų poslinkių, kitaip tariant, abiejų bokštų laisvės laipsniai yra lygūs 240. Šie poslinkiai išreiškiami apibendrintuoju poslinkių vektoriumi $\{\mathbf{u}\} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$. Žinant strypinės sistemos laisvės laipsnį ir bendrą įrąžų skaičių, galima nustatyti jos statinio neišsprendžiamumo laipsnį: pirmosios struktūros bokštas yra 20 kartų statiškai neišsprendžiamas, antrosios struktūros – 100 kartų statiškai neišsprendžiamas.

Pirmosios eilės baigtinio elemento deformacija išreiškiama santykinu pailgėjimu Δ_k , todėl kiekvieno bokšto elemento deformaciją nusako vienas komponentas. Vadinasi, abu bokštai turės po 260 deformacijų, kurias nusako apibendrintas deformacijų vektorius $\{\mathbf{\Theta}\} = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n]^T$.

Tamprios konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvį apibūdina lygčių sistema (2.5)–(2.7), kurią turi tenkinti vektoriai $\{\mathbf{N}\}$, $\{\mathbf{u}\}$ ir $\{\mathbf{\Theta}\}$.

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{N}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (2.5)$$

$$[\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{\Theta}\}, \quad (2.6)$$

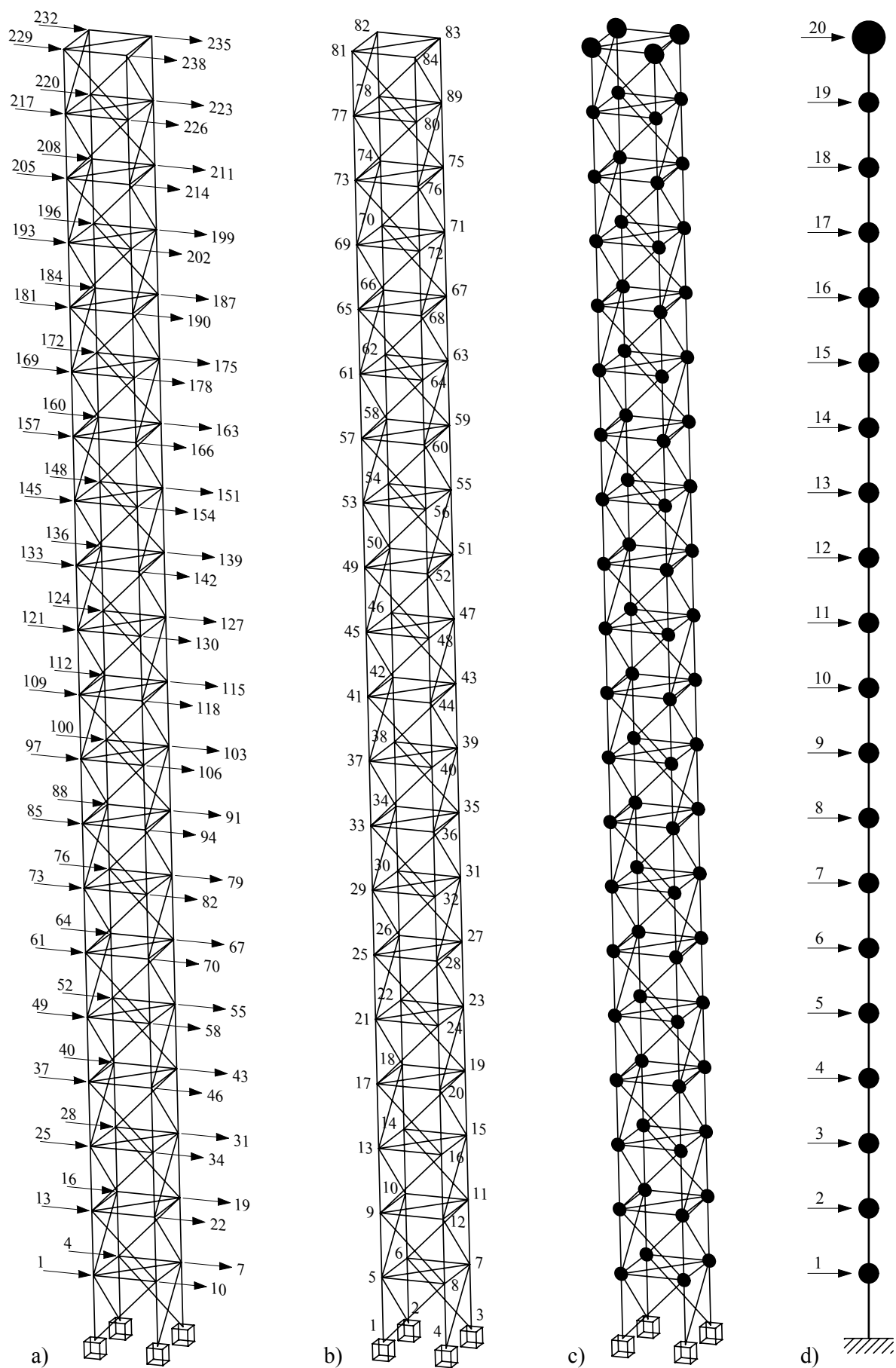
$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{N}\} = \{\mathbf{\Theta}\}. \quad (2.7)$$

Pusiausvyros lygčių (2.5) skaičius priklauso nuo to, koks yra konstrukcijos laisvės laipsnis. Šiuo atveju iš viso bus 240 pusiausvyros lygčių. Taigi pirmosios struktūros bokšto pusiausvyros lygčių koeficientų matricos $[\mathbf{A}]$ matmenys bus 240×260 , antrojo bokšto – 240×340 . Pasiduodamumo matrica $[\mathbf{D}]$ bus kvadratinė diagonalinė matrica, kurios diagonalėje – kiekvieną elementą atitinkantys pasiduodamumo koeficientai. Konstrukcijai, kuri diskretizuojama pirmosios eilės baigtiniais elementais, pasiduodamumo matricos forma bus tokia:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{EA_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{EA_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_n}{EA_n} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Priimta, kad viršutinės bokšto konstrukcijos masė yra 2 tonos. Į skaičiuojamąjį modelį ji neįtraukiama, jos masė lygiomis dalimis sukoncentruojama viršutiniuose mazguose. Vėjo slėgio į konstrukcijos paviršius atstojamosios (apie vėjo apkrovas bus kalbama kitose darbo dalyse) taip pat perduodamos į tuos pačius mazgus. Bokšto elementų skerspjūviai pasirinkti SHS tipo. Žinoma, konstrukcijos analizės uždaviniuose, kai elementuose vertinamos tik ašinės jėgos, skerspjūvio tipas nėra svarbus, nes skaičiavimuose reikalingas tik jo plotas. Skerspjūvis tampa svarbus, kai skaičiavimuose atsiranda inercijos momentas, t. y. atliekant lenkiamų sistemų analizę arba sprendžiant projektavimo ar optimizacijos uždavinius, kurie bus nagrinėjami kitose darbo dalyse. Taigi, konstrukcijos dinaminei analizei pasirinkti tokie elementų skerspjūviai: vertikaliesiems elementams – SHS 150×150 (5 mm), pasviriesiems – SHS 60×60 (5 mm), horizontaliesiems – SHS 50×50 (5 mm).

Konstrukcijos dinaminės analizės diskretinis modelis sudaromas taikant koncentruotų masių metodą. Tiriama du modeliai – pradinis, t. y. strypinis, ir redukuotas – kontinualusis. Strypiniame modelyje masės atitinkamomis dalimis pridedamos mazguose. Pirminiai pirmosios struktūros bokšto diskretiniai modeliai su mazgų bei svarbių poslinkių numeriais parodyti 2.4 paveiksle.

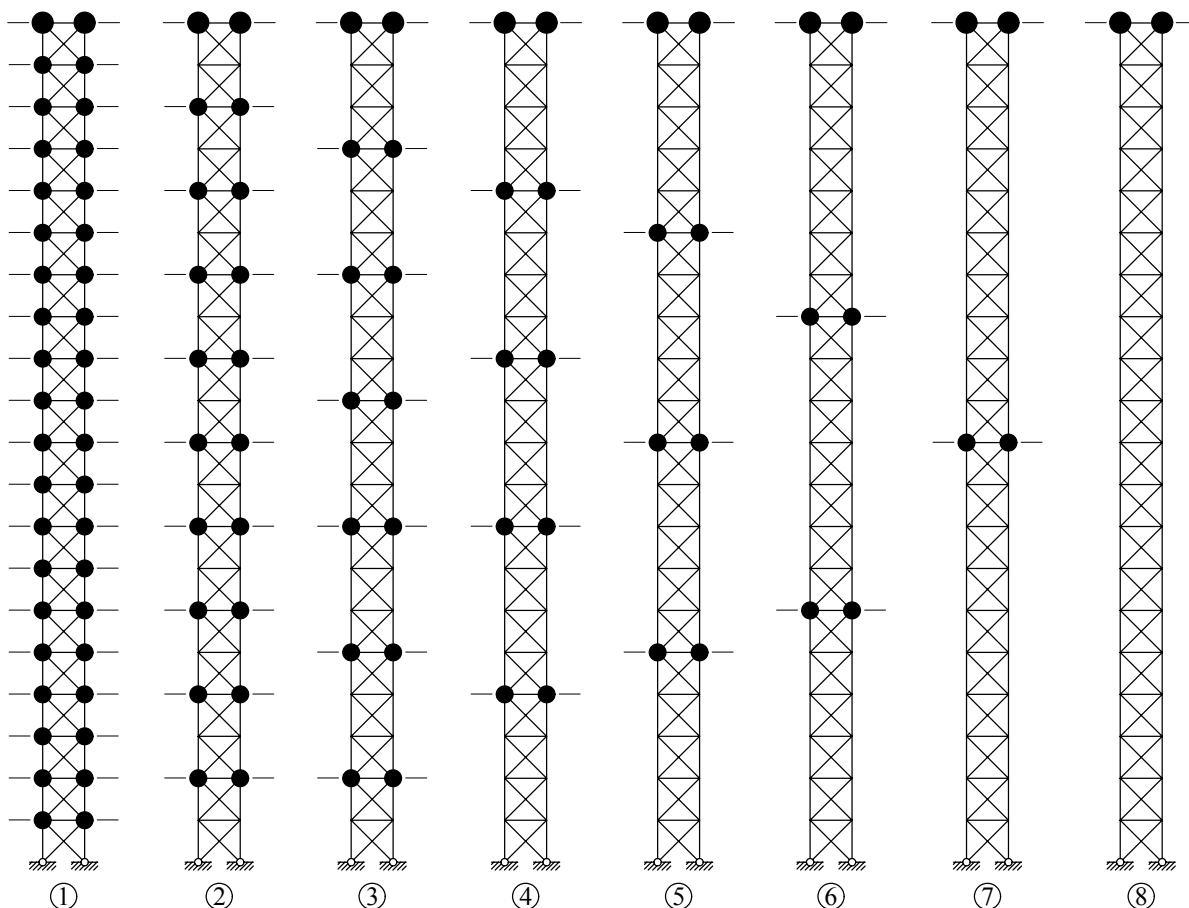


2.4 pav. Pradiniai pirmosios struktūros bokšto diskretiniai modeliai: a) svarbiausi poslinkiai; b) mazgų numeriai; c) strypinio modelio koncentruotos masės; d) redukuoto modelio masės ir poslinkiai

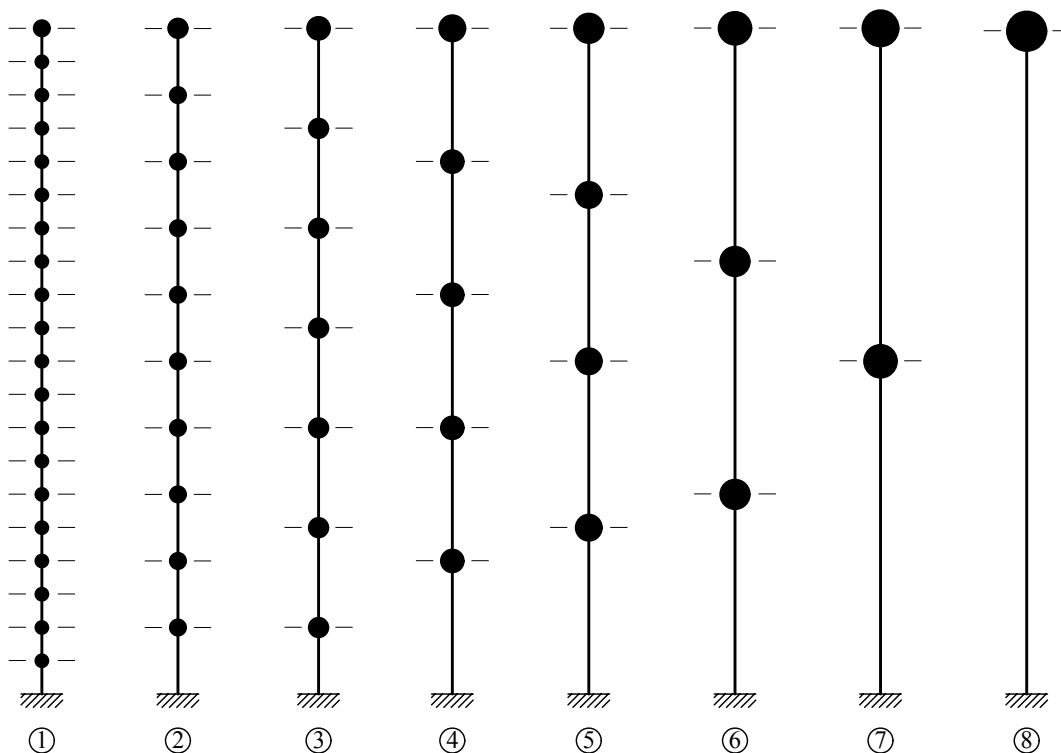
Redukuotam modeliui sudaroma redukuota poslinkių infliuentinė matrica. Ji sudaroma konstrukciją suskaidant į segmentus (šiuo atveju pasirinkta 20 segmentų), o vėliau ties kiekvienu segmentu pridedant horizontalią vienetinę jėgą. Kadangi šiuo atveju į kiekvieną segmentą įeina 4 mazgai, vienetinė jėga išskaidoma į 4 lygias dalis ir pridedama šiuose mazguose. Toliau, naudojant pradinę poslinkių infliuentinę matricą, apskaičiuojami visų mazgų poslinkiai nuo pridėtosios vienetinės jėgos. Iš gautojo poslinkių vektoriaus randami vidutiniai kiekvieno segmento horizontalieji poslinkiai, kurie surašomi į atitinkamą matricos eilutę. Procesas kartojamas kiekviename segmente, kol pilnai užpildoma redukuotoji poslinkių infliuentinė matrica.

2.4. Tyrimų metodika

Šio tyrimo tikslas yra atlikti palyginamąją analizę, kuri parodytų, kokią įtaką konstrukcijos dinaminės analizės rezultatams daro skirtingi koncentruotų masių modeliai. Tai bus atliekama naudojant pirminį, t. y. strypinį, skaičiuojamąjį modelį ir redukuotą, supaprastintą, modelį. Tyrimui pasirinkti 8 skirtingi masių paskirstymo variantai. Šie variantai parodyti 2.5 ir 2.6 paveiksluose.



2.5 pav. Strypinio konstrukcijos modelio masių paskirstymo variantai



2.6 pav. Redukuoto konstrukcijos modelio masių paskirstymo variantai

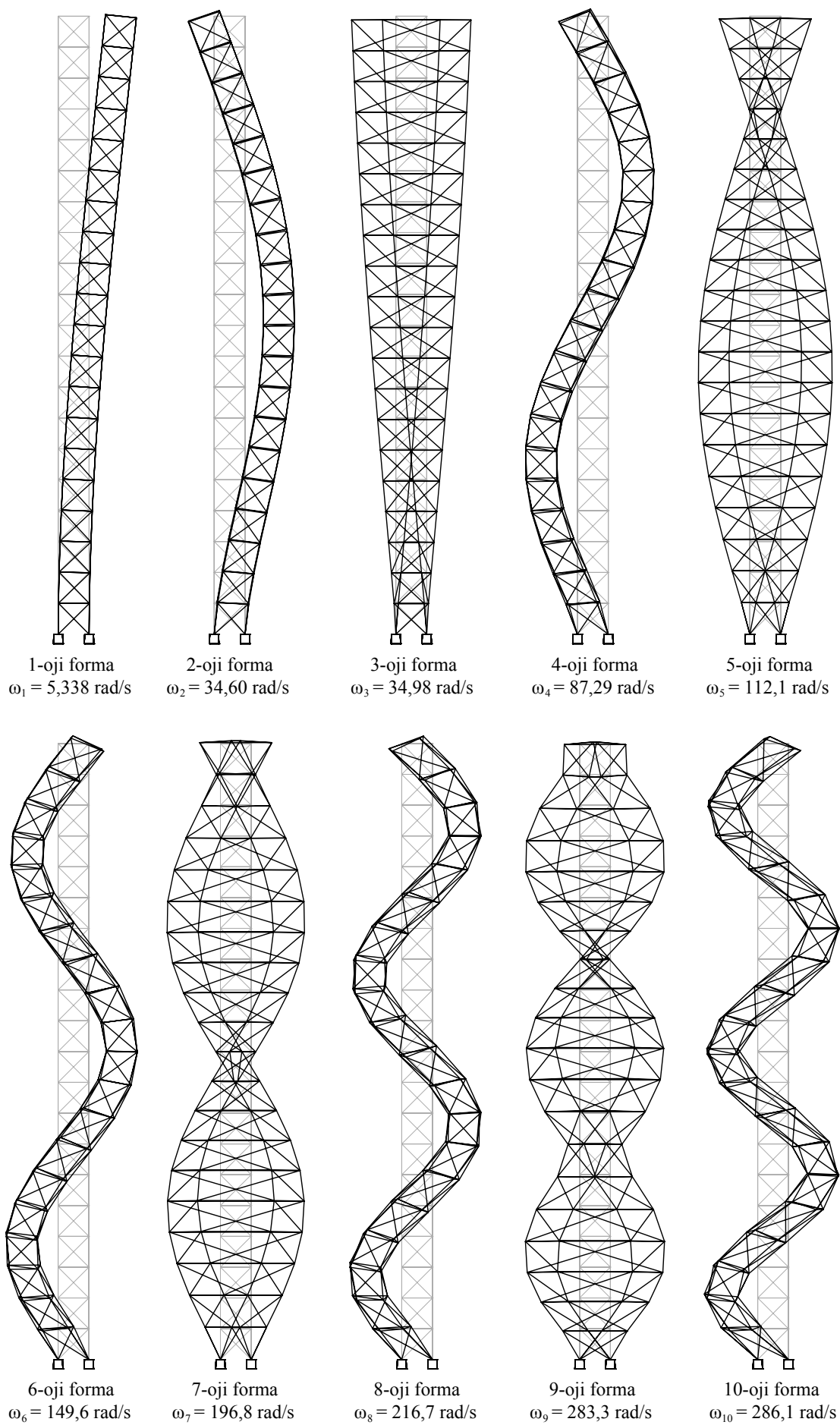
Tyrimai atliekami taikant prielaidą, kad sistemos masės gali svyruoti tik viena kryptimi, t. y. tik horizontalia arba tik vertikalia. Tokiu būdu siekiama išvengti nereikšmingų svyravimo formų, kurių įvertinimas tik padidina skaičiavimų apimtį. Liauniems bokštams pavojingiausi yra horizontalieji svyravimai, todėl jiems ir skiriamas didžiausias dėmesys. Atskirai tirti ir horizontalieji svyravimai. Tiriama ne daugiau kaip 10 svyravimo formų. Tais atvejais, kai konstrukcija diskretizuojama mažesniu skaičiumi masių, svyravimų formų taip pat yra mažiau kaip 10. Tuomet lyginami tik atitinkamų formų dažniai.

Iš pradžių lyginami atitinkamų svyravimų formų dažniai skirtingai diskretizuojant pirmosios struktūros bokštą. Vėliau lygiai taip pat lyginami antrosios struktūros bokšto svyravimų dažniai. Galiausiai atliekama pirmojo ir antrojo bokštų svyravimų dažnių palyginamoji analizė. Skaičiavimų rezultatai ir jų palyginimai pateikiami lentelėse ir grafikuose.

2.5. Pirmosios struktūros bokšto savųjų svyravimų tyrimas

2.5.1. Konstrukcijos horizontaliųjų svyravimų formų ir dažnių nustatymas

Pirmiausia atliekama konstrukcijos savųjų svyravimų analizė, naudojant inžinerinę kompiuterinę programą *Autodesk Robot Structural Analysis*. Taip nustatomos 10 pirmųjų svyravimo formų ir dažnių. Šios formos ir cikliniai dažniai pateikti 2.7 ir 2.8 paveiksluose.



2.7 pav. Konstrukcijos svyravimų formos ir dažniai, gauti programa Autodesk Robot

3, 5, 7 ir 9 formos (žr. 2.7 pav.) išreiškia sukamuosius svyravimus. Sukimo formos gaunamos tik tada, kai diskretinio modelio masės nėra išsidėsčiusios vienoje tiesėje arba kai yra įvertinami masių inercijos momentai. Redukuoto diskretinio modelio (žr. 2.6 pav.) masės yra vienoje tiesėje, todėl, sprendžiant redukuoto modelio dinaminės analizės uždavinį, sukimo formos nebus gaunamos.

Toliau atliekami skaičiavimai MATLAB programa, taikant matematinį modelį (2.1)–(2.3). Žemiau pateiktas uždavinio sprendimui skirtas komandinis MATLAB programos tekstas, kuris aprašo pirmojo diskretizacijos būdo strypinės sistemos savųjų svyravimų analizės uždavinį.

```
clear all
clc
% PIRMOJO BOKŠTO SAVŲJŲ SVYRAVYMŲ DAŽNIU IR FORMŲ NUSTATYMAS
% 1.1 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementų tipų ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Koncentruotos masės:
m01 = (L1*A1 + 1.5*L2*A2 + L3*A3) * ro;
m02 = (L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro;
m1 = m01; m2 = m02; m3 = m01; m4 = m02;
m5 = m01; m6 = m02; m7 = m01; m8 = m02;
m9 = m01; m10 = m02; m11 = m01; m12 = m02;
m13 = m01; m14 = m02; m15 = m01; m16 = m02;
m17 = m01; m18 = m02; m19 = m01; m20 = m02;
m21 = m01; m22 = m02; m23 = m01; m24 = m02;
m25 = m01; m26 = m02; m27 = m01; m28 = m02;
m29 = m01; m30 = m02; m31 = m01; m32 = m02;
m33 = m01; m34 = m02; m35 = m01; m36 = m02;
m37 = m01; m38 = m02; m39 = m01; m40 = m02;
m41 = m01; m42 = m02; m43 = m01; m44 = m02;
m45 = m01; m46 = m02; m47 = m01; m48 = m02;
m49 = m01; m50 = m02; m51 = m01; m52 = m02;
m53 = m01; m54 = m02; m55 = m01; m56 = m02;
m57 = m01; m58 = m02; m59 = m01; m60 = m02;
m61 = m01; m62 = m02; m63 = m01; m64 = m02;
m65 = m01; m66 = m02; m67 = m01; m68 = m02;
m69 = m01; m70 = m02; m71 = m01; m72 = m02;
m73 = m01; m74 = m02; m75 = m01; m76 = m02;
m77 = 0.25*mk + (0.5*L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro;
m78 = 0.25*mk + (0.5*L1*A1 + 0.5*L2*A2 + L3*A3) * ro;
m79 = m77; m80 = m78;
%
% Sudaroma masių matrica:
masiu_matrica = blkdiag(m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10, ...
m11,m12,m13,m14,m15,m16,m17,m18,m19,m20,m21,m22,m23,m24, ...
m25,m26,m27,m28,m29,m30,m31,m32,m33,m34,m35,m36,m37,m38, ...
m39,m40,m41,m42,m43,m44,m45,m46,m47,m48,m49,m50,m51,m52, ...
m53,m54,m55,m56,m57,m58,m59,m60,m61,m62,m63,m64,m65,m66, ...
m67,m68,m69,m70,m71,m72,m73,m74,m75,m76,m77,m78,m79,m80);
%
% Įkeliamą pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
```

```

% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
%
% Sudaroma poslinkių infliuentinė matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma loginė matrica:
P = zeros(80,240);
for i = 1:80;
P(i,(3*i-2)) = 1; end;
%
% Dinaminių poslinkių infliuentinė matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes,lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaičiuojami savųjų svyravimų dažniai rad/s:
for i = 1:10;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaičiuojami svyravimų dažniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaičiavimų rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:10);
dazniai, amplitudes

```

Kontinualios arba redukuotos sistemos dinaminės analizės komandinis tekstas atrodo taip:

```

clear all
clc
% PIRMOJO BOKŠTO SAVŲJŲ SVYRAVYMŲ DAŽNIŲ IR FORMŲ NUSTATYMAS
% 2.1 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 2100000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementų tipų ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Koncentruotos masės:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*100 + L3*A3*80) * ro;
m01 = m_sum/20; m02 = m01 + mk;
%
% Sudaroma masių matrica:
masiu_matrica = eye(20)*m01;
masiu_matrica(20,20) = m02;

```

```

% Įkeliama pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
%
% Sudaroma poslinkių infliuentinė matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma redukuota poslinkių infliuentinė matrica:
beta_red = zeros(20,20);
for i = 1:20;
F = zeros(240,1);
for j = (12*i-11):3:(12*i-11+9);
F(j) = 0.25; end;
beta_red0 = beta*F;
for n = 1:20;
k = [beta_red0(12*n-11); beta_red0(12*n-8); beta_red0(12*n-5);
beta_red0(12*n-2)];
beta_red(n,i) = mean(k); end;
end;
%
% Dinaminių poslinkių infliuentinė matrica:
beta_dyn = beta_red;
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes, lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaičiuojami savųjų svyravimų dažniai rad/s:
for i = 1:10;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaičiuojami svyravimų dažniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaičiavimų rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:10);
dazniai, amplitudes

```

Kiti skaičiavimų komandiniai tekstai pateikti prieduose. Prieduose taip pat pateikti konstrukcijų pusiausvyros lygčių koeficientų matricų sudarymo komandiniai tekstai.

Baigusi skaičiavimus, programa pateikia savųjų svyravimų ciklinių dažnių reikšmes ir jas atitinkančius masių santykinų poslinkių amplitudinių reikšmių vektorius. Pirmojo skaičiavimo dažniai ir amplitudės pateiktos 2.1 ir 2.2 lentelėse. Čia pateikiami tik pirmosios struktūros modelio detaliosio diskretinio modelio dinaminės analizės rezultatai. Kitų tyrime naudotų skaičiavimų amplitudinės reikšmės pateiktos prieduose. 2.3 ir 2.4 lentelėse pateikti visų skaičiavimų dažniai.

2.1 lentelė. Strypinio modelio pirmojo skaičiavimo rezultatai

Poslinkio numeris	Svyravimų formos ir jų cikliniai dažniai ω (rad/s)									
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
	5,4103	36,066	38,371	93,070	118,68	160,81	202,39	231,41	284,43	300,19
	Masių poslinkių santykinės amplitudinės reikšmės									
	$[a_1]$	$[a_2]$	$[a_3]$	$[a_4]$	$[a_5]$	$[a_6]$	$[a_7]$	$[a_8]$	$[a_9]$	$[a_{10}]$
1	0,0012	-0,0108	-0,0109	-0,0334	-0,0312	-0,0621	0,0509	0,0904	0,0696	-0,1159
4	0,0012	-0,0108	0,0109	-0,0331	0,0312	-0,0605	-0,0509	0,0854	-0,0697	-0,1050
7	0,0012	-0,0108	0,0109	-0,0334	0,0312	-0,0621	-0,0509	0,0904	-0,0696	-0,1159
10	0,0012	-0,0108	-0,0109	-0,0331	-0,0312	-0,0605	0,0509	0,0854	0,0697	-0,1050
13	0,0040	-0,0276	-0,0218	-0,0738	-0,0616	-0,1196	0,0974	0,1490	0,1269	-0,1578
16	0,0040	-0,0276	0,0218	-0,0744	0,0624	-0,1225	-0,1012	0,1567	-0,1371	-0,1719
19	0,0040	-0,0276	0,0218	-0,0738	0,0616	-0,1196	-0,0974	0,1490	-0,1269	-0,1578
22	0,0040	-0,0276	-0,0218	-0,0744	-0,0624	-0,1225	0,1012	0,1567	0,1371	-0,1719
25	0,0083	-0,0486	-0,0325	-0,1153	-0,0892	-0,1636	0,1313	0,1709	0,1507	-0,1360
28	0,0083	-0,0486	0,0325	-0,1143	0,0893	-0,1592	-0,1318	0,1614	-0,1516	-0,1232
31	0,0083	-0,0486	0,0325	-0,1153	0,0892	-0,1636	-0,1313	0,1709	-0,1507	-0,1360
34	0,0083	-0,0486	-0,0325	-0,1143	-0,0893	-0,1592	0,1318	0,1614	0,1516	-0,1232
37	0,0140	-0,0719	-0,0432	-0,1474	-0,1144	-0,1668	0,1542	0,1143	0,1481	-0,0189
40	0,0140	-0,0720	0,0432	-0,1485	0,1159	-0,1709	-0,1602	0,1201	-0,1599	-0,0206
43	0,0140	-0,0719	0,0432	-0,1474	0,1144	-0,1668	-0,1542	0,1143	-0,1481	-0,0189
46	0,0140	-0,0720	-0,0432	-0,1485	-0,1159	-0,1709	0,1602	0,1201	0,1599	-0,0206
49	0,0209	-0,0959	-0,0537	-0,1691	-0,1345	-0,1427	0,1568	0,0266	0,1058	0,1033
52	0,0209	-0,0958	0,0537	-0,1675	0,1347	-0,1388	-0,1575	0,0251	-0,1066	0,0936
55	0,0209	-0,0959	0,0537	-0,1691	0,1345	-0,1427	-0,1568	0,0266	-0,1058	0,1033
58	0,0209	-0,0958	-0,0537	-0,1675	-0,1347	-0,1388	0,1575	0,0251	0,1066	0,0936
61	0,0290	-0,1185	-0,0640	-0,1711	-0,1509	-0,0804	0,1464	-0,0715	0,0452	0,1473
64	0,0290	-0,1187	0,0641	-0,1725	0,1528	-0,0823	-0,1521	-0,0752	-0,0488	0,1605
67	0,0290	-0,1185	0,0640	-0,1711	0,1509	-0,0804	-0,1464	-0,0715	-0,0452	0,1473
70	0,0290	-0,1187	-0,0641	-0,1725	-0,1528	-0,0823	0,1521	-0,0752	0,0488	0,1605
73	0,0382	-0,1388	-0,0740	-0,1581	-0,1606	-0,0049	0,1167	-0,1457	-0,0275	0,1229
76	0,0382	-0,1386	0,0740	-0,1567	0,1608	-0,0048	-0,1172	-0,1376	0,0277	0,1113
79	0,0382	-0,1388	0,0740	-0,1581	0,1606	-0,0049	-0,1167	-0,1457	0,0275	0,1229
82	0,0382	-0,1386	-0,0740	-0,1567	-0,1608	-0,0048	0,1172	-0,1376	-0,0277	0,1113
85	0,0484	-0,1548	-0,0838	-0,1255	-0,1658	0,0704	0,0773	-0,1468	-0,0956	0,0070
88	0,0484	-0,1550	0,0839	-0,1265	0,1680	0,0721	-0,0803	-0,1544	0,1032	0,0077
91	0,0484	-0,1548	0,0838	-0,1255	0,1658	0,0704	-0,0773	-0,1468	0,0956	0,0070
94	0,0484	-0,1550	-0,0839	-0,1265	-0,1680	0,0721	0,0803	-0,1544	-0,1032	0,0077
97	0,0595	-0,1661	-0,0932	-0,0815	-0,1638	0,1310	0,0277	-0,1019	-0,1378	-0,1126
100	0,0595	-0,1658	0,0932	-0,0808	0,1640	0,1275	-0,0278	-0,0962	0,1388	-0,1020
103	0,0595	-0,1661	0,0932	-0,0815	0,1638	0,1310	-0,0277	-0,1019	0,1378	-0,1126
106	0,0595	-0,1658	-0,0932	-0,0808	-0,1640	0,1275	0,0278	-0,0962	-0,1388	-0,1020
109	0,0714	-0,1710	-0,1024	-0,0276	-0,1571	0,1530	-0,0242	-0,0061	-0,1564	-0,1497
112	0,0714	-0,1712	0,1025	-0,0278	0,1592	0,1567	0,0252	-0,0064	0,1689	-0,1631

2.1 lentelės tęsinys

115	0,0714	-0,1710	0,1024	-0,0276	0,1571	0,1530	0,0242	-0,0061	0,1564	-0,1497
118	0,0714	-0,1712	-0,1025	-0,0278	-0,1592	0,1567	-0,0252	-0,0064	-0,1689	-0,1631
121	0,0839	-0,1700	-0,1111	0,0281	-0,1436	0,1451	-0,0729	0,0921	-0,1328	-0,1189
124	0,0839	-0,1698	0,1111	0,0278	0,1438	0,1412	0,0732	0,0870	0,1338	-0,1077
127	0,0839	-0,1700	0,1111	0,0281	0,1436	0,1451	0,0729	0,0921	0,1328	-0,1189
130	0,0839	-0,1698	-0,1111	0,0278	-0,1438	0,1412	-0,0732	0,0870	-0,1338	-0,1077
133	0,0971	-0,1618	-0,1195	0,0788	-0,1260	0,0950	-0,1156	0,1452	-0,0864	-0,0007
136	0,0971	-0,1620	0,1196	0,0794	0,1276	0,0973	0,1201	0,1527	0,0933	-0,0007
139	0,0971	-0,1618	0,1195	0,0788	0,1260	0,0950	0,1156	0,1452	0,0864	-0,0007
142	0,0971	-0,1620	-0,1196	0,0794	-0,1276	0,0973	-0,1201	0,1527	-0,0933	-0,0007
145	0,1108	-0,1473	-0,1273	0,1203	-0,1029	0,0266	-0,1430	0,1540	-0,0167	0,1179
148	0,1108	-0,1471	0,1273	0,1192	0,1030	0,0259	0,1436	0,1454	0,0168	0,1068
151	0,1108	-0,1473	0,1273	0,1203	0,1029	0,0266	0,1430	0,1540	0,0167	0,1179
154	0,1108	-0,1471	-0,1273	0,1192	-0,1030	0,0259	-0,1436	0,1454	-0,0168	0,1068
157	0,1249	-0,1261	-0,1348	0,1442	-0,0769	-0,0493	-0,1586	0,0873	0,0560	0,1497
160	0,1249	-0,1262	0,1349	0,1453	0,0779	-0,0505	0,1647	0,0917	-0,0604	0,1631
163	0,1249	-0,1261	0,1348	0,1442	0,0769	-0,0493	0,1586	0,0873	-0,0560	0,1497
166	0,1249	-0,1262	-0,1349	0,1453	-0,0779	-0,0505	-0,1647	0,0917	0,0604	0,1631
169	0,1394	-0,0994	-0,1416	0,1519	-0,0475	-0,1152	-0,1532	-0,0058	0,1134	0,1137
172	0,1394	-0,0993	0,1416	0,1505	0,0476	-0,1121	0,1540	-0,0055	-0,1144	0,1030
175	0,1394	-0,0994	0,1416	0,1519	0,0475	-0,1152	0,1532	-0,0058	-0,1134	0,1137
178	0,1394	-0,0993	-0,1416	0,1505	-0,0476	-0,1121	-0,1540	-0,0055	0,1144	0,1030
181	0,1542	-0,0675	-0,1480	0,1372	-0,0169	-0,1469	-0,1354	-0,0954	0,1518	-0,0057
184	0,1542	-0,0676	0,1482	0,1383	0,0172	-0,1505	0,1406	-0,1003	-0,1639	-0,0062
187	0,1542	-0,0675	0,1480	0,1372	0,0169	-0,1469	0,1354	-0,0954	-0,1518	-0,0057
190	0,1542	-0,0676	-0,1482	0,1383	-0,0172	-0,1505	-0,1406	-0,1003	0,1639	-0,0062
193	0,1692	-0,0317	-0,1538	0,1065	0,0147	-0,1491	-0,0992	-0,1546	0,1485	-0,1219
196	0,1692	-0,0317	0,1538	0,1056	-0,0145	-0,1451	0,0999	-0,1459	-0,1500	-0,1104
199	0,1692	-0,0317	0,1538	0,1065	-0,0147	-0,1491	0,0992	-0,1546	-0,1485	-0,1219
202	0,1692	-0,0317	-0,1538	0,1056	0,0145	-0,1451	-0,0999	-0,1459	0,1500	-0,1104
205	0,1843	0,0070	-0,1592	0,0590	0,0458	-0,1065	-0,0548	-0,1361	0,1196	-0,1474
208	0,1843	0,0070	0,1594	0,0595	-0,0464	-0,1090	0,0569	-0,1431	-0,1291	-0,1606
211	0,1843	0,0070	0,1592	0,0590	-0,0458	-0,1065	0,0548	-0,1361	-0,1196	-0,1474
214	0,1843	0,0070	-0,1594	0,0595	0,0464	-0,1090	-0,0569	-0,1431	0,1291	-0,1606
217	0,1994	0,0476	-0,1638	0,0025	0,0749	-0,0407	-0,0034	-0,0737	0,0589	-0,1044
220	0,1994	0,0475	0,1640	0,0025	-0,0766	-0,0396	0,0002	-0,0696	-0,0547	-0,0946
223	0,1994	0,0476	0,1638	0,0025	-0,0749	-0,0407	0,0034	-0,0737	-0,0589	-0,1044
226	0,1994	0,0475	-0,1640	0,0025	0,0766	-0,0396	-0,0002	-0,0696	0,0547	-0,0946
229	0,2146	0,0885	-0,1691	-0,0579	0,1098	0,0404	0,0640	0,0281	-0,0338	0,0176
232	0,2147	0,0893	0,1707	-0,0612	-0,1204	0,0481	-0,0859	0,0422	0,0682	0,0401
235	0,2146	0,0885	0,1691	-0,0579	-0,1098	0,0404	-0,0640	0,0281	0,0338	0,0176
238	0,2147	0,0893	-0,1707	-0,0612	0,1204	0,0481	0,0859	0,0422	-0,0682	0,0401

Aktyviosios masių judėjimo kryptys, susietos su statinės konstrukcijos analizės diskretinio modelio globaliaisiais poslinkiais, ir jų numeriai parodyti 2.4 paveiksle.

2.2 lentelė. Redukuoto modelio pirmojo skaičiavimo rezultatai

Poslinkio numeris	Svyravimų formos ir jų cikliniai dažniai ω (rad/s)									
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
	5,3155	35,884	92,844	160,63	231,41	300,67	366,15	426,79	482,14	532,08
	Masių poslinkių santykinės amplitudinės reikšmės									
	$[a_1]$	$[a_2]$	$[a_3]$	$[a_4]$	$[a_5]$	$[a_6]$	$[a_7]$	$[a_8]$	$[a_9]$	$[a_{10}]$
1	-0,0024	0,0214	-0,0663	0,1223	0,1755	-0,2205	0,2569	0,2849	-0,3049	-0,3169
2	-0,0080	0,0549	-0,1478	0,2420	0,3065	-0,3317	0,3192	0,2739	-0,2020	-0,1114
3	-0,0166	0,0967	-0,2288	0,3222	0,3317	-0,2583	0,1274	-0,0276	0,1717	0,2741
4	-0,0279	0,1431	-0,2953	0,3380	0,2353	-0,0393	-0,1626	-0,2914	0,3007	0,1907
5	-0,0417	0,1907	-0,3360	0,2816	0,0521	0,1968	-0,3108	-0,2295	0,0083	-0,2185
6	-0,0580	0,2362	-0,3434	0,1637	-0,1467	0,3098	-0,1950	0,0883	-0,2981	-0,2603
7	-0,0763	0,2765	-0,3150	0,0109	-0,2826	0,2331	0,0865	0,3106	-0,1921	0,1368
8	-0,0967	0,3090	-0,2529	-0,1414	-0,3022	0,0140	0,2971	0,1918	0,1797	0,3017
9	-0,1188	0,3314	-0,1635	-0,2574	-0,1982	-0,2148	0,2596	-0,1376	0,3013	-0,0441
10	-0,1426	0,3422	-0,0570	-0,3098	-0,0132	-0,3147	0,0053	-0,3149	0,0040	-0,3156
11	-0,1677	0,3401	0,0540	-0,2865	0,1781	-0,2253	-0,2530	-0,1449	-0,2991	-0,0536
12	-0,1941	0,3248	0,1565	-0,1937	0,2984	-0,0002	-0,2989	0,1849	-0,1871	0,2990
13	-0,2215	0,2961	0,2382	-0,0541	0,2992	0,2251	-0,0940	0,3110	0,1846	0,1459
14	-0,2498	0,2548	0,2890	0,0981	0,1802	0,3148	0,1901	0,0943	0,2998	-0,2540
15	-0,2788	0,2020	0,3027	0,2257	-0,0103	0,2151	0,3153	-0,2265	-0,0015	-0,2243
16	-0,3084	0,1392	0,2771	0,2974	-0,1954	-0,0135	0,1769	-0,2980	-0,3009	0,1847
17	-0,3383	0,0684	0,2148	0,2949	-0,2999	-0,2327	-0,1088	-0,0417	-0,1827	0,2814
18	-0,3686	-0,0083	0,1224	0,2180	-0,2808	-0,3096	-0,3019	0,2597	0,1888	-0,0977
19	-0,3990	-0,0886	0,0099	0,0837	-0,1445	-0,1967	-0,2399	0,2735	0,2974	-0,3114
20	-0,4295	-0,1706	-0,1135	-0,0838	0,0663	0,0541	0,0449	-0,0377	-0,0319	0,0271

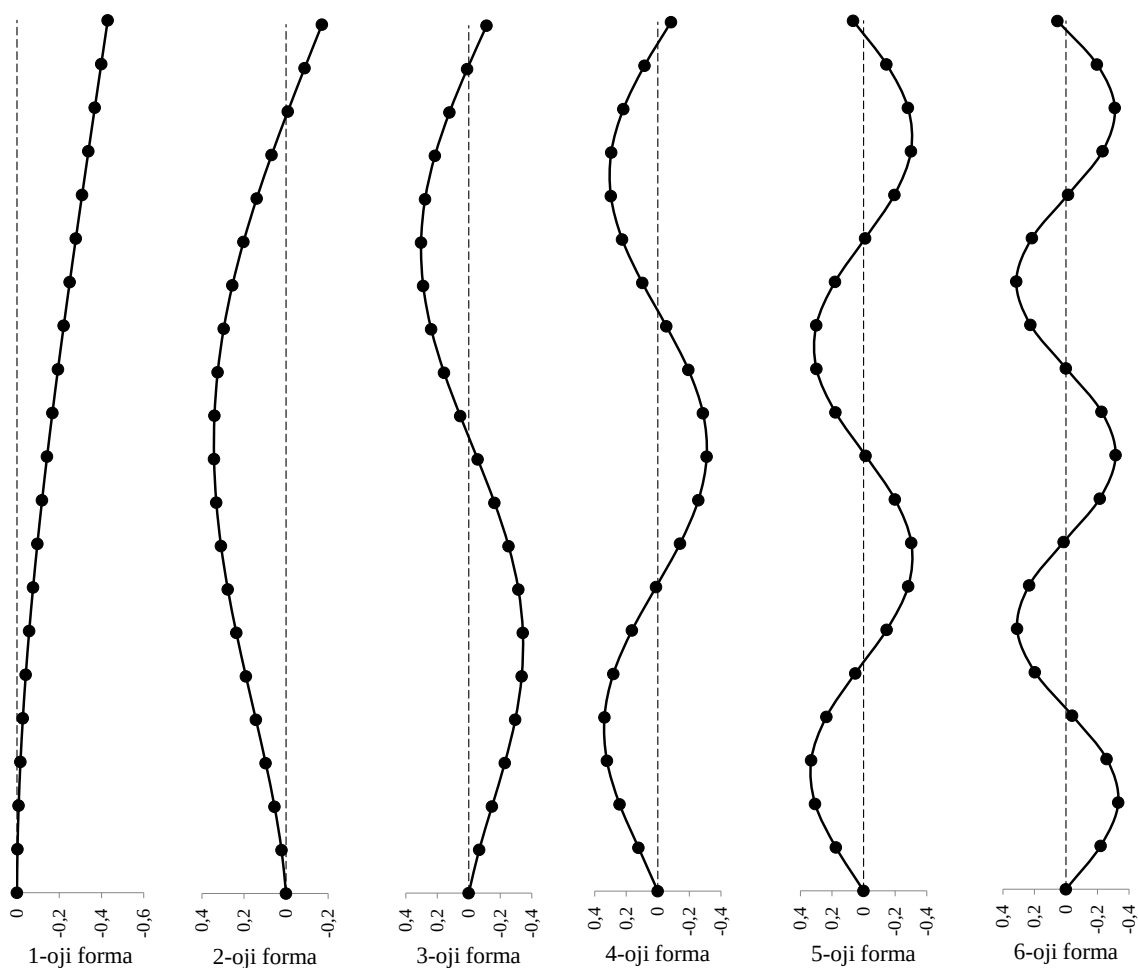
2.3 lentelė. Strypinio modelio visi apskaičiuotieji svyravimų cikliniai dažniai

Dažniai	Konstrukcijos masių paskirstymo variantai							
	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_1	5,410	5,375	5,414	5,393	5,367	5,298	5,157	4,961
ω_2	36,066	35,872	35,739	35,412	35,002	33,976	31,413	–
ω_3	38,371	38,166	38,401	38,296	38,216	37,942	37,438	38,799
ω_4	93,070	92,108	90,729	88,578	85,684	76,326	–	–
ω_5	118,681	116,795	115,886	113,148	111,386	104,944	–	–
ω_6	160,813	157,042	150,789	141,955	129,444	–	–	–
ω_7	202,390	194,549	189,347	177,755	176,647	–	–	–
ω_8	231,413	220,944	203,156	179,560	–	–	–	–
ω_9	284,434	264,162	251,894	223,886	–	–	–	–
ω_{10}	300,193	277,844	240,511	–	–	–	–	–

2.4 lentelė. Redukuoto modelio visi apskaičiuotieji svyravimų cikliniai dažniai

Dažniai	Konstrukcijos masių paskirstymo variantai							
	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_1	5,315	5,429	5,414	5,393	5,367	5,298	5,157	4,961
ω_2	35,884	35,972	35,739	35,412	35,002	33,976	31,413	–
ω_3	92,844	92,187	90,738	88,591	85,699	76,342	–	–
ω_4	160,627	156,973	150,892	142,078	129,560	–	–	–
ω_5	231,407	220,666	203,588	179,948	–	–	–	–
ω_6	300,669	277,470	262,334	–	–	–	–	–

Pagal 2.1 lentelės duomenis galima nustatyti, ar svyravimų formos, gautos sprendžiant (2.1)–(2.3) uždavinį, sutampa su formomis, gautomis taikant kompiuterinę programą *Autodesk Robot*. Tai galima nustatyti netgi neanalizuojant amplitudžių skaitinių reikšmių, pakanka atkreipti dėmesį į mazgų santykinų poslinkių ženklus. Ženkilai rodo, kad svyravimų formų ir jų dažnių eiliškumas sutampa. Šiuo atveju tai yra svarbu, nes vėliau bus atliekamas gautų dažnių palyginimas.



2.8 pav. Redukuoto konstrukcijos modelio pirmosios 6 svyravimų formos

Pagal 2.2 lentelės duomenis sudarytos redukuoto modelio svyravimų formų schemos (žr. 2.8 pav.). Kadangi atliekant redukuoto modelio svyravimų analizę sukimo formos nėra gaunamos, čia įvertinamos tik 6 svyravimų formos, kurių dažnius bus galima palyginti su strypinio modelio atitinkamais dažniais.

2.5.2. Konstrukcijos vertikaliųjų svyravimų dažnių nustatymas

Nors liauniems bokštams pavojingiausi yra horizontalieji svyravimai, kartais gali tekti atsižvelgti ir į vertikaliuosius. Žinoma, vertikaliųjų svyravimų įvertinimo svarba labai priklauso nuo konstrukcijos struktūros ir žadinančių jėgų veikimo pobūdžio. Šiems svyravimams daug dėmesio nebus skiriama, tiriamas bus tik pagrindinio tono dažnis.

Toliau pateiktas strypinio konstrukcijos modelio vertikaliųjų svyravimų ciklinių dažnių nustatymo pagal matematinį modelį (2.1)–(2.3) MATLAB komandinis tekstas. 2.5 lentelėje pateikti visų skaičiavimų rezultatai (dažnių reikšmės pateiktos rad/s).

```
clear all
clc
% PIRMOJO BOKŠTO VERTIKALIŲJŲ SVYRAVYMŲ DAŽNIŲ NUSTATYMAS
% 1.1 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementų tipų ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Koncentruotos masės:
m01 = (L1*A1 + 1.5*L2*A2 + L3*A3) * ro;
m02 = (L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro;
m1 = m01; m2 = m02; m3 = m01; m4 = m02;
m5 = m01; m6 = m02; m7 = m01; m8 = m02;
m9 = m01; m10 = m02; m11 = m01; m12 = m02;
m13 = m01; m14 = m02; m15 = m01; m16 = m02;
m17 = m01; m18 = m02; m19 = m01; m20 = m02;
m21 = m01; m22 = m02; m23 = m01; m24 = m02;
m25 = m01; m26 = m02; m27 = m01; m28 = m02;
m29 = m01; m30 = m02; m31 = m01; m32 = m02;
m33 = m01; m34 = m02; m35 = m01; m36 = m02;
m37 = m01; m38 = m02; m39 = m01; m40 = m02;
m41 = m01; m42 = m02; m43 = m01; m44 = m02;
m45 = m01; m46 = m02; m47 = m01; m48 = m02;
m49 = m01; m50 = m02; m51 = m01; m52 = m02;
m53 = m01; m54 = m02; m55 = m01; m56 = m02;
m57 = m01; m58 = m02; m59 = m01; m60 = m02;
m61 = m01; m62 = m02; m63 = m01; m64 = m02;
m65 = m01; m66 = m02; m67 = m01; m68 = m02;
m69 = m01; m70 = m02; m71 = m01; m72 = m02;
m73 = m01; m74 = m02; m75 = m01; m76 = m02;
m77 = 0.25*mk + (0.5*L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro;
m78 = 0.25*mk + (0.5*L1*A1 + 0.5*L2*A2 + L3*A3) * ro;
m79 = m77; m80 = m78;
```

```

% Sudaroma masių matrica:
masiu_matrica = blkdiag(m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10, ...
m11,m12,m13,m14,m15,m16,m17,m18,m19,m20,m21,m22,m23,m24, ...
m25,m26,m27,m28,m29,m30,m31,m32,m33,m34,m35,m36,m37,m38, ...
m39,m40,m41,m42,m43,m44,m45,m46,m47,m48,m49,m50,m51,m52, ...
m53,m54,m55,m56,m57,m58,m59,m60,m61,m62,m63,m64,m65,m66, ...
m67,m68,m69,m70,m71,m72,m73,m74,m75,m76,m77,m78,m79,m80);
%
% Įkeliama pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
%
% Sudaroma poslinkių infliuentinė matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma loginė matrica:
P = zeros(80,240);
for i = 1:80;
P(i,(3*i-1)) = 1; end;
%
% Dinaminių poslinkių infliuentinė matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
lambda = eig(C);
%
% Apskaičiuojamas pagrindinio tono dažnis rad/s:
omega = (1/lambda(1))^(0.5);
%
% Apskaičiuojamas svyravimų dažnis Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaičiavimų rezultatai:
dazniai = [omega Hz];
dazniai

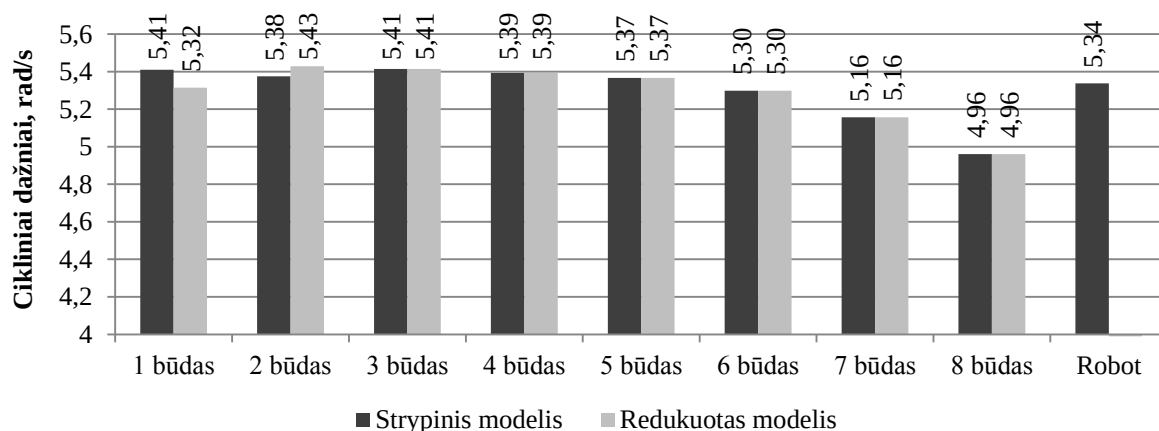
```

2.5 lentelė. Vertikaliųjų svyravimų dažniai, gauti naudojant strypinį konstrukcijos modelį

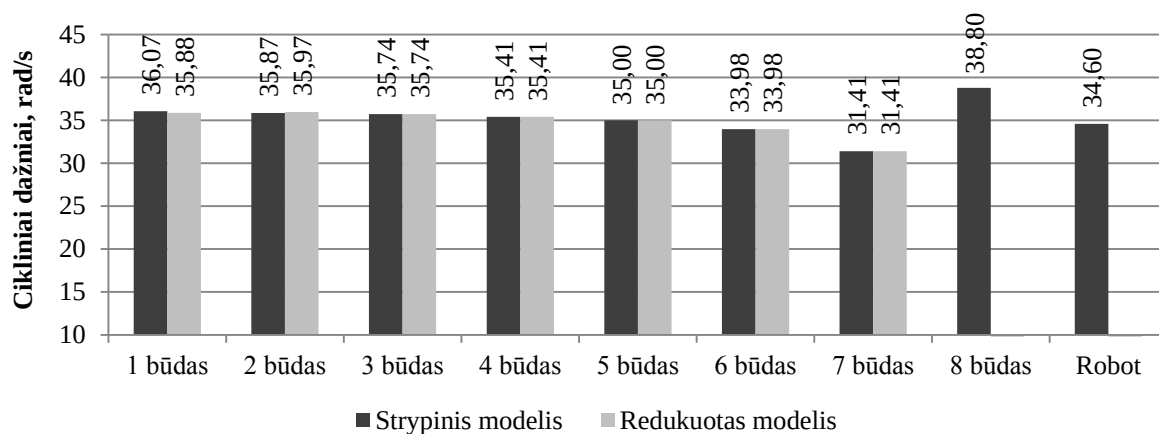
Skaičiavimų rezultatai, gauti naudojant strypinį konstrukcijos modelį								
Masių variantai	1 var.	2 var.	3 var.	4 var.	5 var.	6 var.	7 var.	8 var.
Pagr. tono dažniai	111,56	110,96	114,07	113,90	113,67	112,99	111,81	116,29
Skaičiavimų rezultatai, gauti naudojant redukuotą konstrukcijos modelį								
Masių variantai	1 var.	2 var.	3 var.	4 var.	5 var.	6 var.	7 var.	8 var.
Pagr. tono dažniai	112,31	114,20	114,07	113,90	113,67	112,99	111,80	116,28

2.5.3. Konstrukcijos dinaminės analizės rezultatų palyginamoji analizė

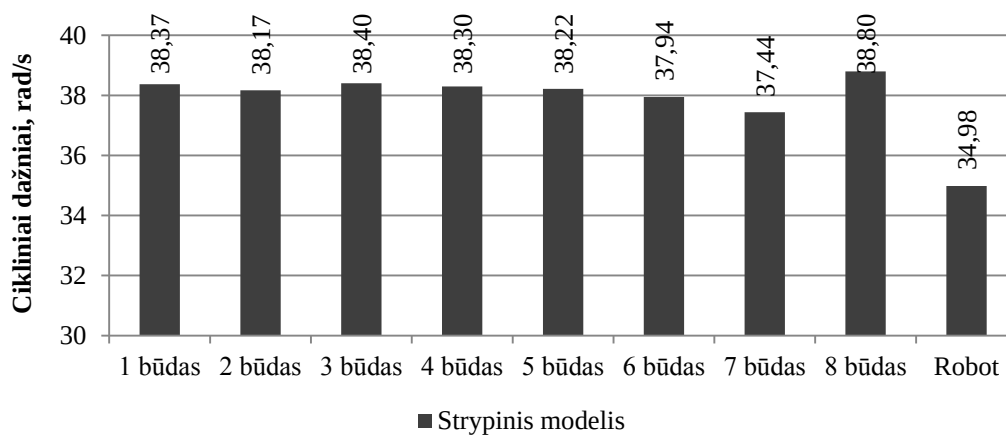
Toliau pateikti grafikai, kuriuose lyginamos pirmosios struktūros bokšto atitinkamų svyravimo formų ciklinių dažnių reikšmės, gautos naudojant skirtingus konstrukcijos diskretizacijos dinaminei analizei būdus.



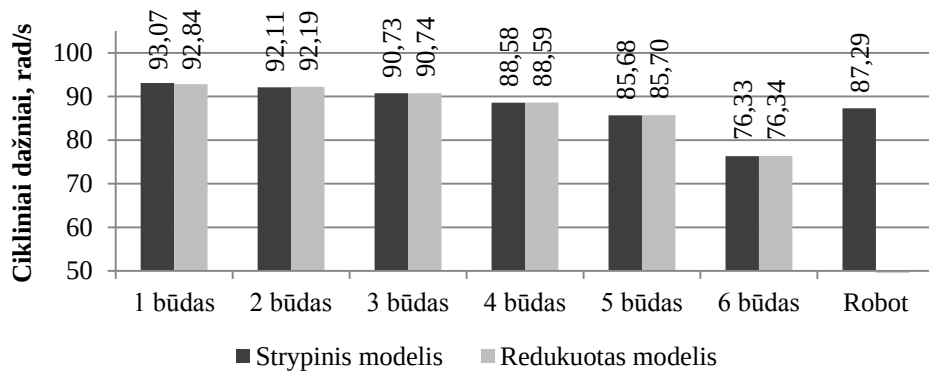
2.9 pav. Pirmosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



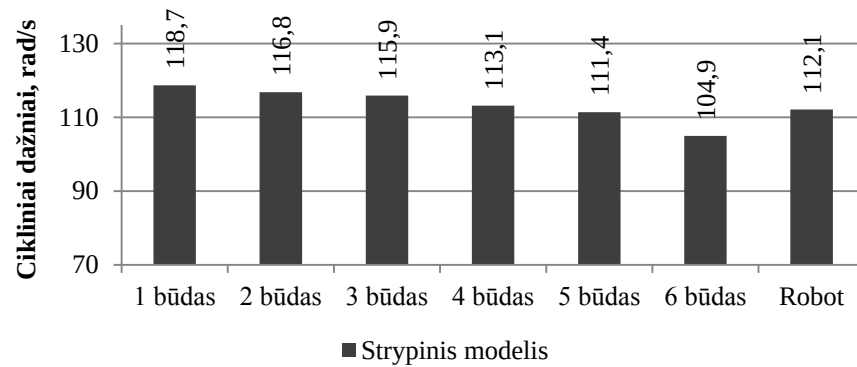
2.10 pav. Antrosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



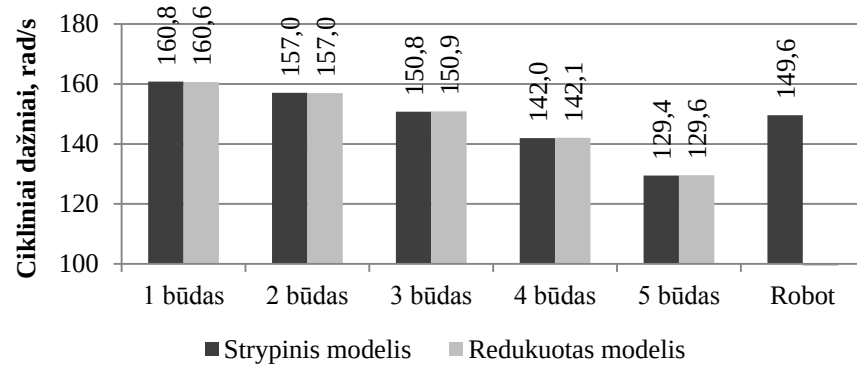
2.11 pav. Trečiosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



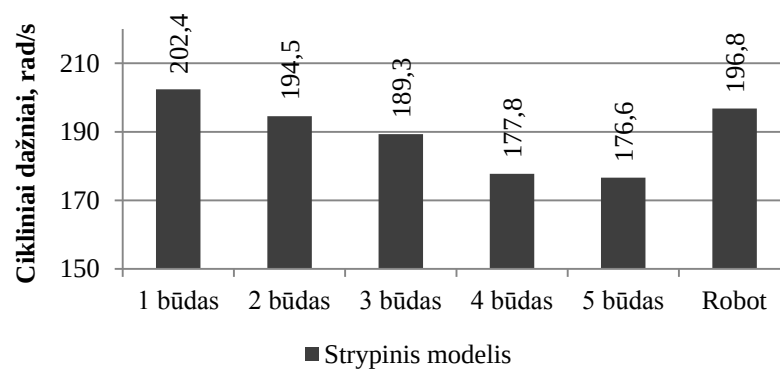
2.12 pav. Ketvirtosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



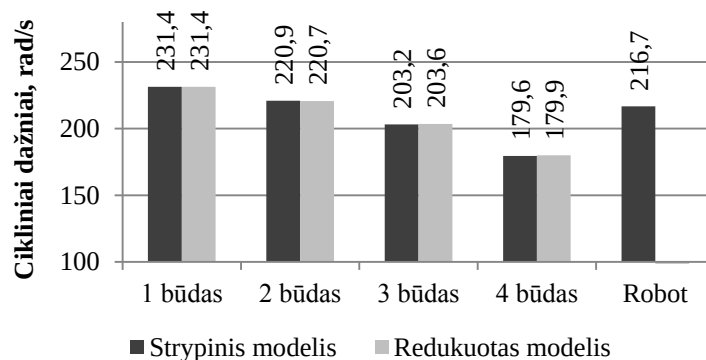
2.13 pav. Penktosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



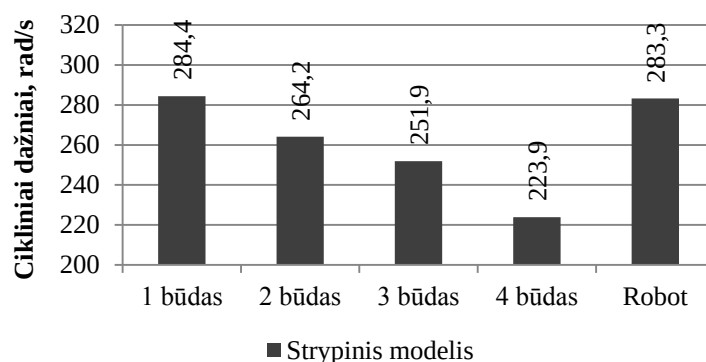
2.14 pav. Šeštosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



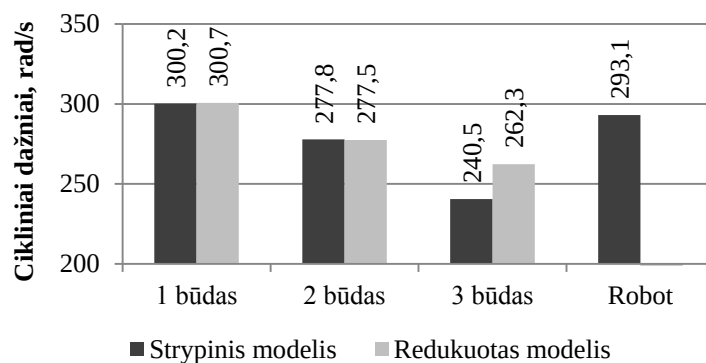
2.15 pav. Septintosios horizontaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



2.16 pav. Aštuntosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



2.17 pav. Devintosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



2.18 pav. Dešimtosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas

2.9 paveiksle pateikta diagrama, kurioje lyginami pirmosios svyravimų formos (visos formos parodytos 2.7 ir 2.8 paveiksluose) cikliniai dažniai. Iš grafiko matyti, kad pirmaisiais šešiais būdais diskretizuotos konstrukcijos svyravimų dažniai beveik nesiskiria ir labai nedaug skiriasi nuo dažnio, gauto programa *Autodesk Robot*. Taigi, jeigu svarbus yra tik pagrindinio tono dažnis, tokio tipo konstrukciją pakanka diskretizuoti trimis taškinėmis masėmis (žr. 2.6 pav. 6 variantą). Mažesniu masių skaičiumi diskretizuotos konstrukcijos svyravimų dažniai skiriasi daugiau – vienos koncentruotos masės modelio dažnis nuo detaliausio modelio dažnis skiriasi 8,3 %. Kai kuriais

atvejais tokio tikslumo gali pakakti. 6-uoju būdu diskretizuotos konstrukcijos ciklinis dažnis tik 0,7 % skiriasi nuo programa *Autodesk Robot* gauto dažnio.

Antrosios formos cikliniai dažniai (žr. 2.10 pav.) gauti beveik vienodi, taikant pirmuosius penkis masių paskirstymo būdus. Taigi galima teigti, kad 5-asis būdas yra pakankamai tikslus. Jo reikšmė tik 1,1 % skiriasi nuo programa *Robot* gautos reikšmės.

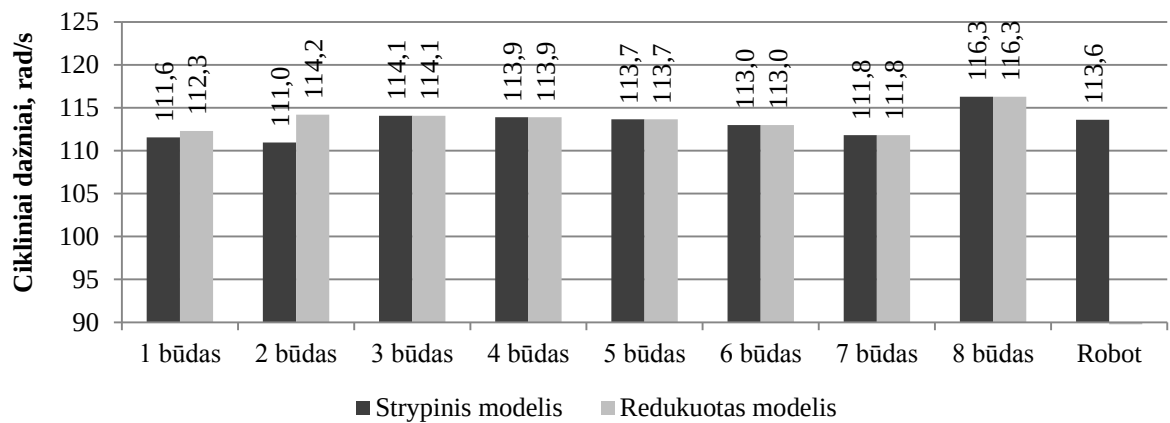
Trečioji svyravimų forma (žr. 2.11 pav.) yra sukimo forma. Jos dažnis, gautas diskretizavus konstrukciją pirmuoju būdu, nuo programa *Robot* gauto dažnio skiriasi 4,1 %. Šį skirtumą galima paaiškinti tuo, kad matematiniam modelyje (2.1)–(2.3) yra taikomas koncentruotų masių metodas, tuo tarpu skaičiuojant programa *Robot* buvo pasirinktas nuosekliųjų masių metodas. Naudojant pirmuosius 6 diskretinius modelius sukimo dažnių skirtumai gaunami labai maži, tačiau žinant, kad nuosekliųjų masių metodas yra tikslesnis, šiuo atveju labiau reikėtų pasikliauti programos *Robot* rezultatais. Kaip jau minėta anksčiau, sukimo forma nėra gaunama taikant redukuotą modelį.

Ketvirtasis svyravimų dažnis (žr. 2.12 pav.), gautas detaliesio masių modelio atveju, nuo programa *Robot* gauto dažnio skiriasi 6,2 %. Dažnių skirtumas naudojant pirmuosius 4 diskretizavimo būdus yra gana nedidelis, todėl, kai ši svyravimų forma yra svarbi, konstrukcijos mases pakanka paskirstyti 3-uoju būdu. Naudojant kitus būdus, dažnių reikšmės gaunamos ne tokios tikslios.

Likusių šešių dažnių (iš viso tiriama 10 dažnių) palyginimai pateikti 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 ir 2.18 paveiksluose. Išanalizavus visas diagramas galima teigti, kad jeigu visos 10 svyravimo formų konstrukcijai yra svarbios, sistemos mases reikėtų paskirstyti kiek įmanoma detaliau. 2.18 paveiksle aiškiai matyti, kad detaliesio ir antrojo pagal detalumą masių modelio dažniai skiriasi gana nemažai – net 8 %. Tačiau statybinėms konstrukcijoms svarbios dažniausiai būna tik kelios pirmosios svyravimų formos. Tokiu atveju ir mažiau detalus masių modelis gali būti tinkamas. Pavyzdžiui, jeigu svarbiomis laikysime tik pirmąsias 4 formas, nagrinėjamą konstrukciją galbūt pakaktų diskretizuoti 4-uoju arba 5-uoju būdu. Žinoma, galutines išvadas galima daryti tik atlikus konstrukcijos priverstinių svyravimų tyrimą. Priverstiniai svyravimų tyrimai bus analizuojami kitame darbo skyriuje.

2.19 paveiksle pateiktas tiriamos konstrukcijos vertikalųjų svyravimų pagrindinio tono dažnio palyginimas. Iš grafiko matyti, kad skirtingas bokšto masių paskirstymas šių svyravimų dažniui didelės įtakos nedaro. Naudojant pirmuosius 7 diskretinius modelius dažnių skirtumai gaunami labai nedideli. Šiek tiek daugiau skiriasi tik 8-ojo diskretinio modelio dažnis. Vertikalieji svyravimai bokštams dažniausiai nebūna lemiami, todėl kitos svyravimų formos čia neanalizuojamos.

Toliau atliekamas antrosios struktūros bokšto (žr. 2.2 pav.) savųjų svyravimų tyrimas. Tolesniuose tyrimuose vertikalieji svyravimai nebus įvertinami.

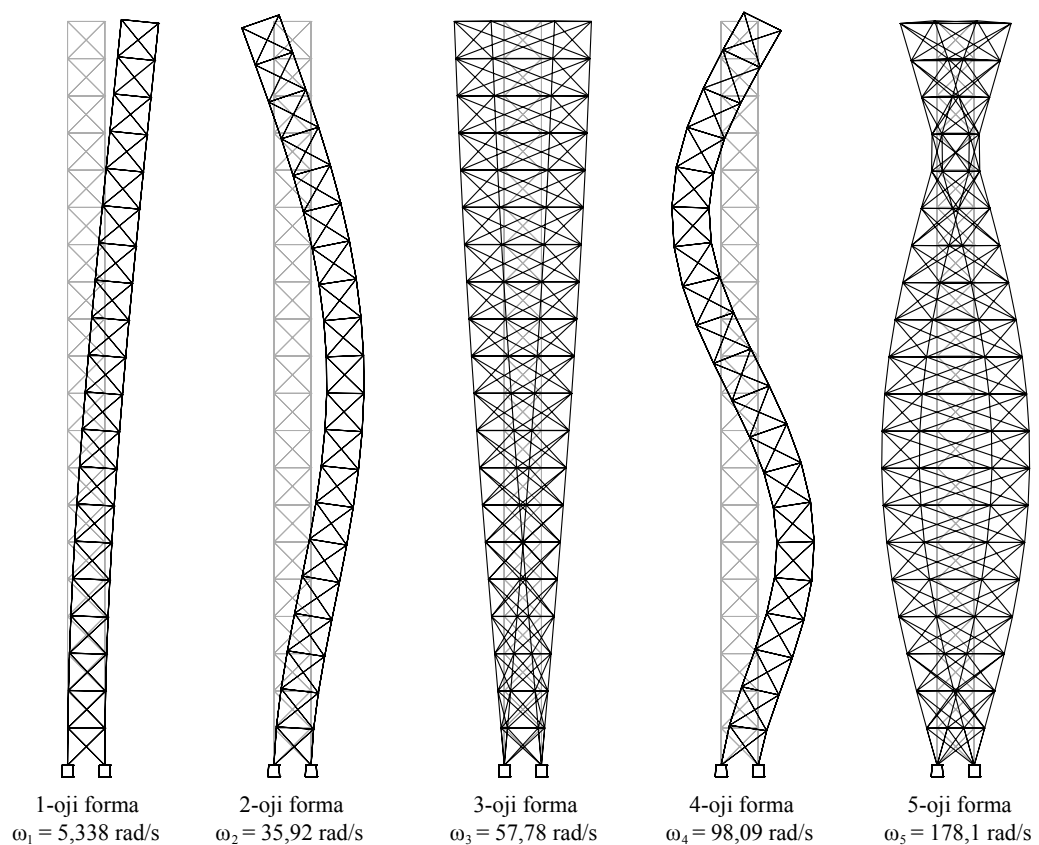


2.19 pav. Pirmosios vertikaliųjų svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas

2.6. Antrosios struktūros bokšto savųjų svyravimų tyrimas

2.6.1. Konstrukcijos horizontaliųjų svyravimų formų ir dažnių nustatymas

Kaip ir 2.4 poskyryje, pirmiausia atliekama konstrukcijos dinaminė analizė, naudojant kompiuterinę programą *Autodesk Robot*. Skirtingai nei ankstesniame poskyryje, čia bus analizuojamos tik 5 pirmosios bokšto svyravimų formos. Šios formos ir jų dažniai pateikti 2.20 paveiksle.



2.20 pav. Konstrukcijos svyravimų formos ir dažniai, gauti programa *Autodesk Robot*

Toliau atliekama konstrukcijos savųjų svyravimų analizė pagal matematinį modelį (2.1)–(2.3). Antrasis bokštas dinaminei analizei diskretizuojamas lygiai taip pat, kaip ir pirmasis. Šio bokšto kitokios yra tik pusiausvyros lygčių ir pasiduodamumo matricos bei koncentruotos masės. Tyrimė naudojami tokie patys masių išdėstymo variantai, kaip ir pirmajam bokštui. Komandiniai MATLAB programos tekstai ir išsamesni skaičiavimų rezultatai pateikti prieduose. Visos savųjų svyravimų ciklinių dažnių reikšmės, gautos naudojant strypinį ir redukuotą bokšto modelius, pateiktos 2.6 ir 2.7 lentelėse (dažnių reikšmės pateiktos rad/s).

Toliau pateiktas komandinis MATLAB programos tekstas, aprašantis antrojo bokšto savųjų svyravimų analizės uždavinį, kai konstrukcija diskretizuojama maksimaliu kiekiu koncentruotų masių:

```
clear all
clc
% ANTROJO BOKŠTO SAVŲJŲ SVYRAVYMŲ DAŽNIŲ IR FORMŲ NUSTATYMAS
% 1.1 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementų tipų ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos masės:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (m_sum/20)/4; m02 = (0.5*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masių matrica:
masiu_matrica = eye(80)*m01;
masiu_matrica(77:80,77:80) = eye(4)*m02;
%
% Įkeliamą pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkių infliuentinė matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma loginė matrica:
P = zeros(80,240);
for i = 1:80;
P(i,(3*i-2)) = 1; end;
%
% Dinaminių poslinkių infliuentinė matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
```

```

% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes, lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaičiuojami savųjų svyravimų dažniai rad/s:
for i = 1:5;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaičiuojami svyravimų dažniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaičiavimų rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:5);
dazniai, amplitudes

```

Kai naudojamas redukuotas modelis, komandinis tekstas atrodo taip:

```

clear all
clc
% ANTROJO BOKŠTO SAVŲJŲ SVYRAVYMŲ DAŽNIŲ IR FORMŲ NUSTATYMAS
% 2.1 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementų tipų ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos masės:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = m_sum/20; m02 = 0.5*(m_sum/20) + mk;
%
% Sudaroma masių matrica:
masiu_matrica = eye(20)*m01;
masiu_matrica(20,20) = m02;
%
% Įkeliami pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkių infliuentinė matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma redukuota poslinkių infliuentinė matrica:
beta_red = zeros(20,20);
for i = 1:20;

```

```

F = zeros(240,1);
for j = (12*i-11):3:(12*i-11+9);
F(j) = 0.25; end;
beta_red0 = beta*F;
for n = 1:20;
k = [beta_red0(12*n-11); beta_red0(12*n-8); beta_red0(12*n-5);
beta_red0(12*n-2)];
beta_red(n,i) = mean(k); end;
end;
%
% Dinaminių poslinkių infliucentinė matrica:
beta_dyn = beta_red;
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes, lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaičiuojami savųjų svyravimų dažniai rad/s:
for i = 1:3;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaičiuojami svyravimų dažniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaičiavimų rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:3);
dazniai, amplitudes

```

2.6 lentelė. Strypinio modelio visi apskaičiuotieji svyravimų cikliniai dažniai

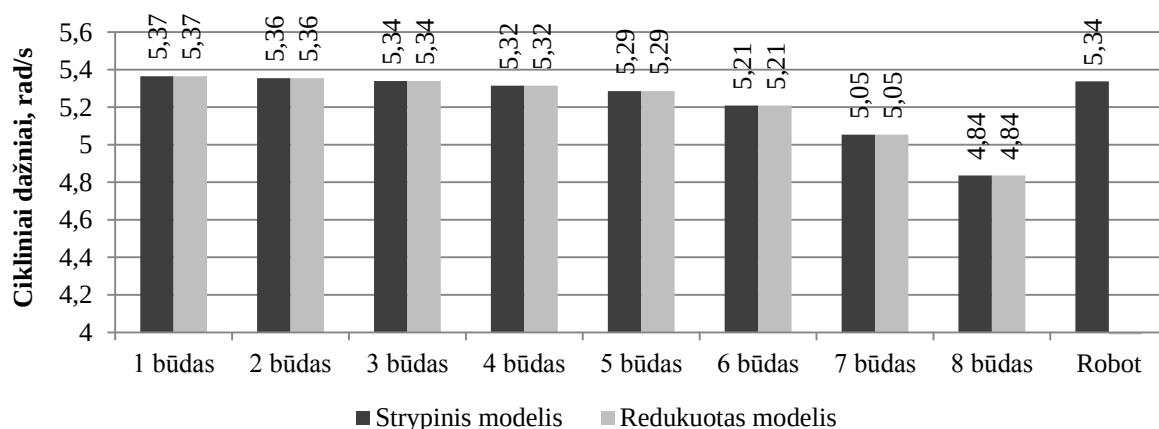
Dažniai	Konstrukcijos masių paskirstymo variantai							
	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_1	5,365	5,355	5,339	5,315	5,286	5,209	5,054	4,836
ω_2	36,016	35,862	35,614	35,264	34,826	33,766	31,059	–
ω_3	53,804	53,741	53,638	53,509	53,352	52,929	52,243	54,449
ω_4	97,721	96,991	95,806	93,826	91,031	81,456	–	–
ω_5	162,733	161,139	158,592	155,570	146,640	143,046	–	–

2.7 lentelė. Redukuoto modelio visi apskaičiuotieji svyravimų cikliniai dažniai

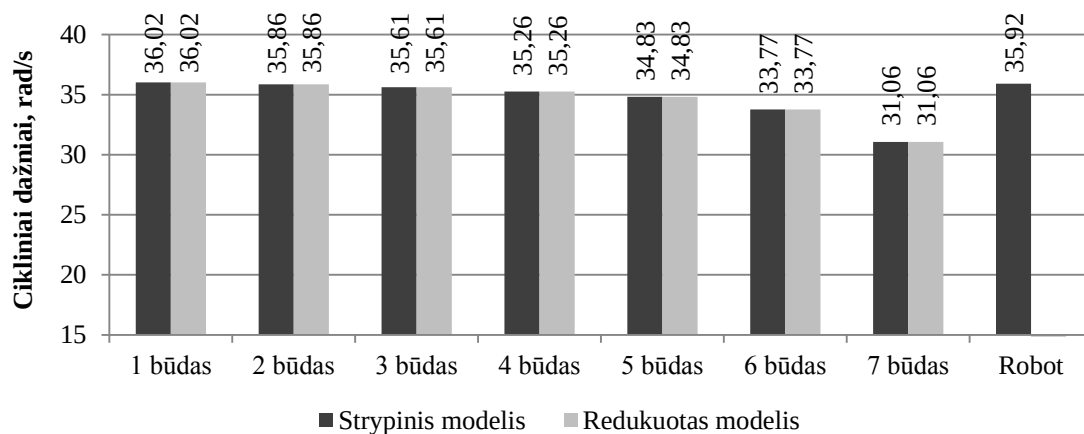
Dažniai	Konstrukcijos masių paskirstymo variantai							
	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_1	5,365	5,355	5,339	5,315	5,286	5,209	5,054	4,836
ω_2	36,016	35,862	35,614	35,264	34,826	33,766	31,059	–
ω_3	97,721	96,991	95,806	93,826	91,031	81,456	–	–

2.6.2. Konstrukcijos dinaminės analizės rezultatų palyginamoji analizė

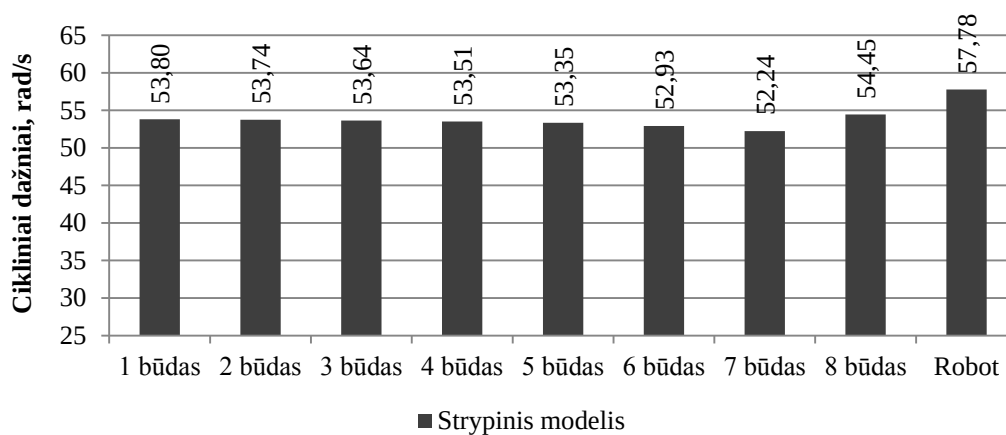
Toliau pateikti grafikai, kuriuose lyginamos antrosios struktūros bokšto atitinkamų svyravimo formų ciklinių dažnių reikšmės, gautos naudojant skirtingus konstrukcijos diskretizacijos dinaminei analizei būdus.



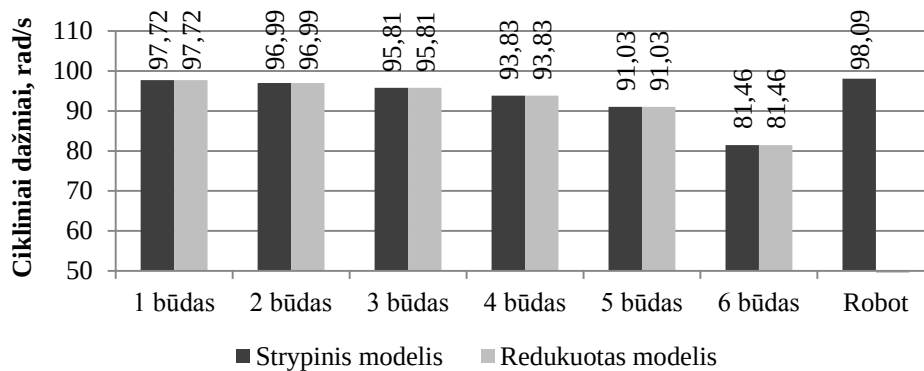
2.21 pav. Pirmosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



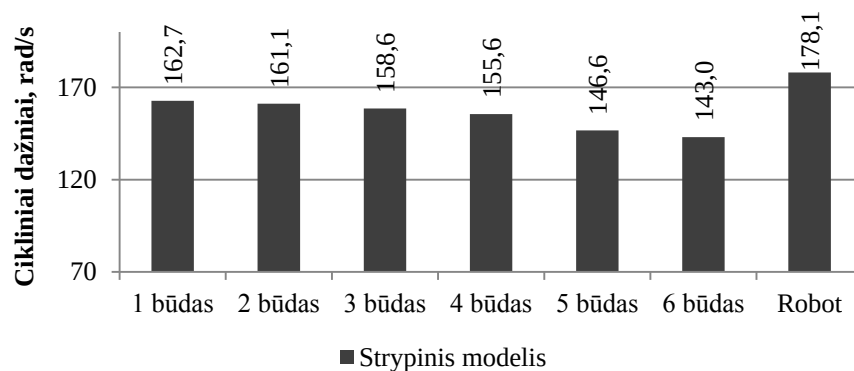
2.22 pav. Antrosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



2.23 pav. Trečiosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



2.24 pav. Ketvirtosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



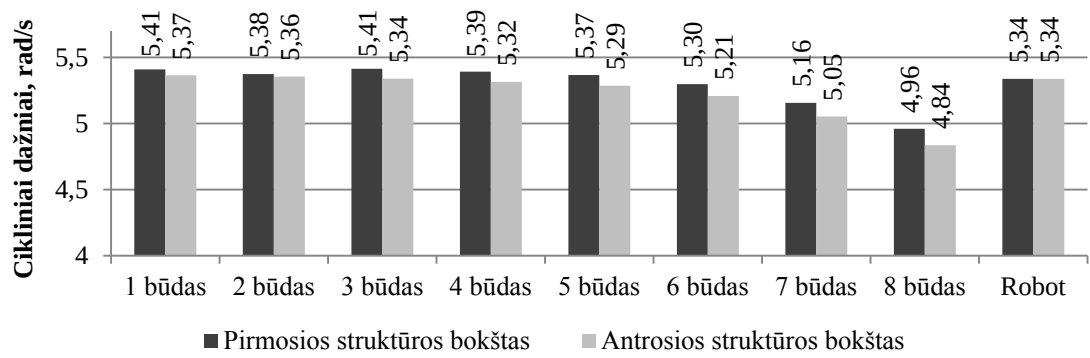
2.25 pav. Penktosios horizontalių svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas

2.21 pav. pateiktas grafikas, kuriame lyginami pirmosios svyravimų formos cikliniai dažniai, 2.22 pav. – antrosios formos, 2.23 pav. – trečiosios formos, 2.24 pav. – ketvirtosios formos, 2.25 pav. – penktosios formos. Išanalizavus visas diagramas galima teigti, kad tais atvejais, kai svarbios yra tik dvi pirmosios formos (žr. 2.21 ir 2.22 pav.), konstrukcijos mases pakanka paskirstyti 5-uoju būdu. Kai svarbios yra trečioji ir penktoji, t. y. sukimo formos, šiuo atveju labiau reikėtų pasikliauti programos *Robot* rezultatais. Pakankamai tiksliai ketvirtosios formos įvertinimui, mases reikėtų paskirstyti 3-uoju būdu.

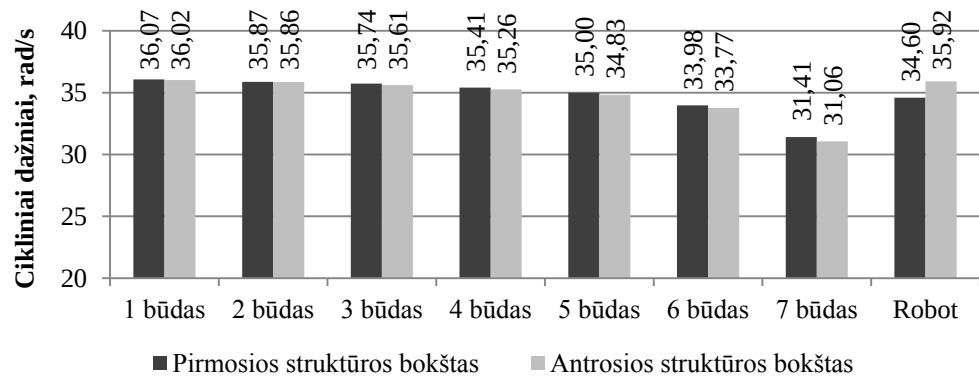
Abiejų bokštų atveju skaičiavimų rezultatai, naudojant strypinį konstrukcijos modelį, beveik idealiai sutapo su rezultatais, gautais naudojant redukuotą modelį. Atsižvelgiant į tai, kad redukuoto modelio sudarymas yra paprastesnis, galima teigti, kad jo naudojimas yra racionalesnis. Žinoma, tai galioja tik tuomet, kai konstrukcijai nėra svarbios sukimo formos.

2.7. Pirmojo ir antrojo bokštų dinaminės analizės rezultatų palyginimas

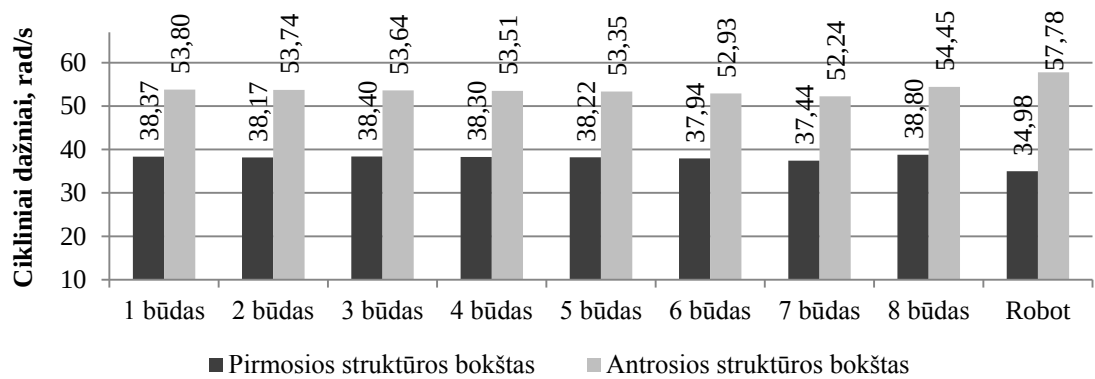
Toliau bus atliekama pirmojo ir antrojo bokštų savųjų svyravimų analizės rezultatų palyginamoji analizė. Kadangi siekiama palyginti ir sukimo formų dažnius, čia bus naudojami tik tie rezultatai, kurie buvo gauti taikant strypinį konstrukcijos modelį.



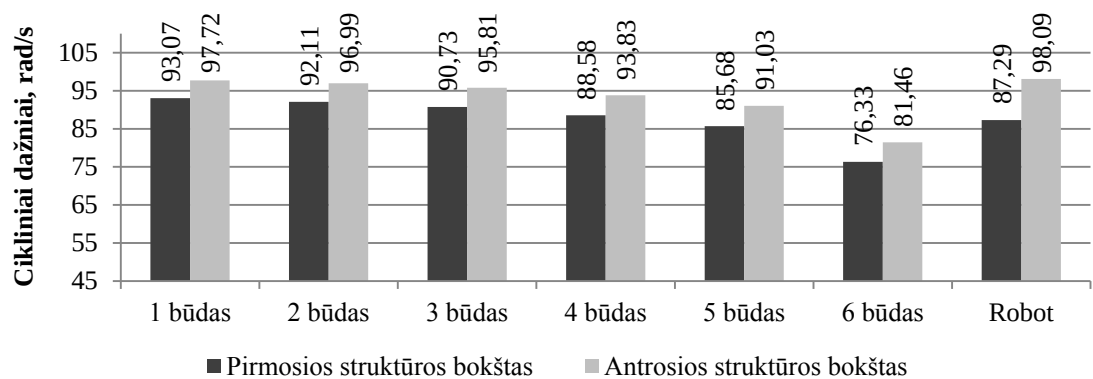
2.26 pav. Abiejų blokštų pirmosios svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



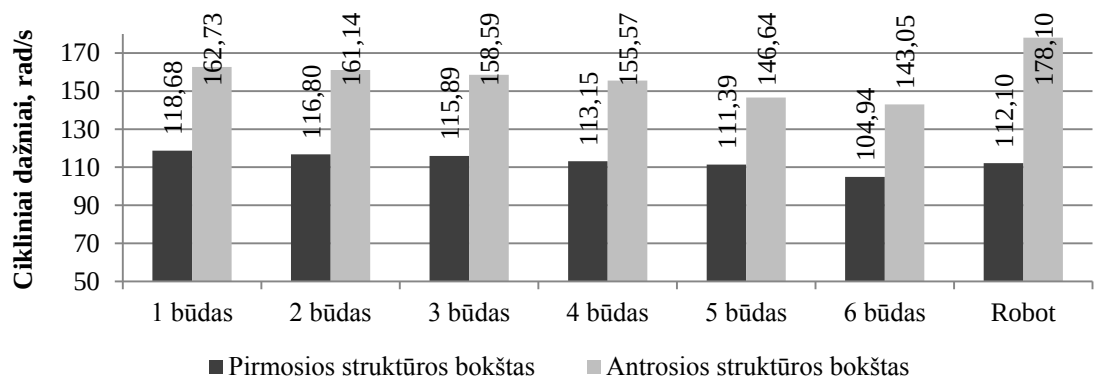
2.27 pav. Abiejų blokštų antrosios svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



2.28 pav. Abiejų blokštų trečiosios svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



2.29 pav. Abiejų blokštų ketvirtosios svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas



2.30 pav. Abiejų bokštų penktosios svyravimų formos ciklinių dažnių palyginimas

Abiejų bokštų pagrindinio tono dažniai (žr. 2.26 pav.) skiriasi labai nedaug. Detaliausio masių modelio atveju šis skirtumas siekia tik 0,7 %. Mažinant masių skaičių skirtumas po truputį didėja. Programa *Autodesk Robot* gauti dažniai visiškai sutampa. Galima teigti, kad pagrindinio tono savųjų svyravimų dažniui bokšto struktūra šiuo atveju jokios įtakos nedaro. Tą patį galima pasakyti ir apie antrąją svyravimų formą (žr. 2.27 pav.). Čia dažnių skirtumai taip pat yra labai nedideli.

Trečioji ir penktoji svyravimų formos (žr. 2.28 ir 2.30 pav.) yra sukimo formos. Čia ciklinių dažnių skirtumai yra kur kas didesni, t. y. antrojo bokšto sukamieji svyravimai vyksta gerokai aukštesniu dažniu. Pirmojo diskretizacijos būdo atveju dažnių skirtumas siekia net 29 %, kai kalbama apie trečiąją svyravimų formą. Programa *Robot* gauti rezultatai skiriasi net 39 %. Akivaizdu, jog bokšto struktūra sukamiesiems svyravimams daro labai didelę įtaką.

Ketvirtosios svyravimų formos (žr. 2.29 pav.) dažniai skiriasi gana nedaug, tačiau šis skirtumas yra didesnis, nei pirmosios ar antrosios formų. Detaliausio masių modelio atveju šis skirtumas siekia 4,8 %. Galima pastebėti, kad aukštesnės eilės dažniams diskretinio modelio detalumas daro didesnę įtaką. Kitaip tariant, išryškėja didesni skirtumai tarp pirmojo ir antrojo bokštų dinaminės analizės rezultatų.

Aukštesnio dažnio svyravimai statybinėms konstrukcijoms paprastai yra mažiau pavojingi, nei žemo dažnio, todėl galima teigti, kad antrojo bokšto struktūra yra tinkamesnė. Žinoma, galutinai nuspręsti, kuri struktūra yra optimali, galima tik išsprendus tam tikrus optimizacijos uždavinius. Apie bokštų optimizavimą bus kalbama kitame skyriuje.

2.8. Skyriaus išvados

Remiantis literatūros šaltiniais sudarytas strypinių konstrukcijų savųjų svyravimų analizės matematinis modelis. Modelis paremtas baigtinių elementų bei koncentruotų masių metodais ir aprašo harmoninių neslopstančiųjų svyravimų nustatymo uždavinį. Naudojant modelį galima apskaičiuoti konstrukcijos savųjų svyravimų dažnius bei amplitudes, kurios išreiškia konstrukcijos

svyravimų formas. Taikant sudarytą modelį atliktas santvarinio bokšto savųjų svyravimų tyrimas, kuris parodė, kokią įtaką savųjų svyravimų analizės rezultatams daro masių paskirstymo detalumas ir pobūdis. Rezultatai, gauti taikant sudarytą matematinį modelį, taip pat palyginti su programa *Autodesk Robot* gautais rezultatais. Skaitinės rezultatų reikšmės bei jų palyginimai pateikti lentelėse ir grafikuose.

Analitiniai tyrimai buvo atliekami naudojant strypinį konstrukcijos dinaminės analizės modelį su koncentruotomis masėmis ir redukuotą, t. y. kontinualų dinaminės analizės modelį. Nustatyta, kad redukuoto bokšto modelio dinaminės analizės rezultatai gaunami beveik identiškai strypinio modelio rezultatams. Taikant redukuotą modelį, konstrukcijos dinaminės analizės uždavinio apimtis tampa mažesnė, o realizacija paprastesnė. Taigi galima teigti, kad redukuoto modelio taikymas yra racionalesnis sprendimas.

Konstrukcijos savųjų svyravimų analizės metodų bei jų atmainų yra gana nemažai ir juos visus vienaip ar kitaip būtų galima pritaikyti erdvinėms santvarinėms konstrukcijoms, tačiau ne visų jų taikymas būtų racionalus. Čia daug ką lemia pasirinktas konstrukcijos diskretinis modelis. Paprastai erdvinės ar plokščiosios santvaros yra diskretizuojamos pirmosios eilės baigtiniais elementais, todėl tokiais atvejais patogiausia naudoti koncentruotų masių dinaminės analizės modelį. Šiuo atveju masės nesudėtinga išdėstyti konstrukcijos mazguose. Tyrimais įrodyta, kad rezultatų tikslumas, naudojant koncentruotų masių metodą, labai mažai skiriasi nuo kitų, tikslesnių, metodų, be to, tokiu būdu suformuluoto uždavinio realizacija yra paprastesnė.

3. KONSTRUKCIJOS PRIVERSTINIŲ SVYRAVIMŲ TYRIMAS

3.1. Įvadinės pastabos

Atliekant visapusę konstrukcijos dinaminę analizę, svarbūs yra du skaičiavimų etapai: konstrukcijos savųjų svyravimų analizė ir priverstinių svyravimų analizė. Savųjų svyravimų analizės rezultatai apibūdina konstrukcijos dinaminės elgsenos pobūdį. Čia nustatomos svyravimų formos ir dažniai, kurie leidžia įvertinti, ar konstrukciją veikiančios apkrovos sukels reikšmingus dinامينius efektus. Taip pat nustatoma, kurios apkrovos ar jų kombinacijos gali būti lemiamos.

Nustačius, kad tam tikros savųjų svyravimų formos bei jų dažniai yra reikšmingi, pereinama prie kito etapo, t. y. prie priverstinių svyravimų analizės. Čia nustatomi konstrukcijos sąveikos su dinamiškai veikiančiomis apkrovomis efektai, t. y. konstrukcijos elementų dinaminės įrąžos ir dinaminiai mazgų poslinkiai. Svarbiausias veiksnys čia yra konstrukciją veikiančios dinaminės apkrovos, kurioms nesant apie svyravimus ir jų sukeliamus efektus kalbėti iš viso nebūtų prasmės. Teisingas jų poveikio įvertinimas yra esminis konstrukcijos dinaminės analizės etapas.

Jau anksčiau minėta, kad liauniems bokštams svarbiausios yra vėjo ir savojo svorio apkrovos, todėl atliekant priverstinių svyravimų tyrimą bus atsižvelgiama tik į jų poveikį. Čia bus naudojamos jau nustatytos statinių ir dinaminų vėjo apkrovų reikšmės. Jų nustatymo ypatumai plačiau nebus nagrinėjami.

Taigi, pagrindiniai dydžiai, kuriuos reikia nustatyti, yra dinaminės įrąžos ir dinaminiai poslinkiai. Kartais svarbūs gali būti svyravimų metu atsirandantys judėjimo pagreičiai, kurie gali neigiamai veikti žmonių savijautą ir sveikatą. Šiame darbe daugiausia dėmesio skiriama konstrukcijos saugumui, todėl svyravimų pagreičiai čia nenagrinėjami.

3.2. Konstrukcijos priverstinių svyravimų analizės matematinis modelis

Pirmajame darbo skyriuje plačiai išnagrinėti literatūros šaltiniai, kuriuose aprašomi įvairių konstrukcijų dinaminės analizės metodai. Pagal nagrinėtuose šaltiniuose siūlomą metodiką sudarytas toks strypinės konstrukcijos priverstinių svyravimų analizės matematinis modelis:

$$[\beta] = ([A][D]^{-1}[A]^T)^{-1}, \quad [\alpha] = [D]^{-1}[A]^T[\beta], \quad (3.1)$$

$$[\beta_{dyn}] = [P][\beta][P]^T, \quad [\alpha_{dyn}] = [\alpha][P]^T, \quad (3.2)$$

$$[\beta_M] = \theta^{-2}[M]^{-1}, \quad \{Z\} = -([\beta_{dyn}] - [\beta_M])^{-1}[\beta_{dyn}]\{F_0\}, \quad (3.3)$$

$$\{S_{dyn}\} = [\alpha_{dyn}](\{Z\} + \{F_0\}), \quad \{u_{dyn}\} = [\beta_{dyn}](\{Z\} + \{F_0\}). \quad (3.4)$$

Visos į modelį (3.1)–(3.4) įeinančios matricos ir vektoriai jau buvo aptarti anksčiau. Šis matematinis modelis aprašo konstrukcijos priverstinių svyravimų analizę, kai žadinančios apkrovos yra harmoninės ir jų ciklinis dažnis žinomas. Išsprendus uždavinį gaunamos konstrukcijos elementų dinaminės įrašos ir dinaminiai poslinkiai. Tamprioms konstrukcijoms galioja jėgų superpozicijos principas, todėl šias dinamines įrašas galima pridėti prie statinių apkrovų sukeltų įrašų.

Modelyje (3.1)–(3.4) $\{\mathbf{F}_0\}$ yra žadinančių apkrovų amplitudinių reikšmių vektorius, kurio komponentų skaičius lygus konstrukcijos dinaminiam laisvės laipsniui. Nenuliniai komponentai yra vektoriaus eilutėse, atitinkančiose tuos dinaminius poslinkius, kuriuose pridėtos žadinančios jėgos.

Reikia atsižvelgti į tai, jog šiame matematiniame modelyje nėra įvertinamas konstrukcijos svyravimų slopinimas, dėl to, priverstinių svyravimų dažniui sutapus su konstrukcijos savųjų svyravimų cikliniu dažniu, apskaičiuotųjų dinaminį įrašų reikšmės įgytų be galo dideles reikšmes. Vadinasi, taikant šį modelį teisingas dinaminį įrašų skaitines reikšmes galima gauti tik tuomet, kai yra išvengiama absoliutus rezonansas.

Kadangi pulsacinės vėjo apkrovos dažnis nėra žinomas, jis nustatomas pagal svarbiausią konstrukcijos savųjų svyravimų dažnį. Kitaip tariant priimama, kad nagrinėjamu momentu vėjas pulsuoja konstrukcijos svyravimų dažniu. Slopinimas preliminarai įvertinamas sumažinant dažnį koeficientu k . Patogu būtų į matematinį modelį (3.1)–(3.4) įtraukti ir savųjų svyravimų analizės uždavinį pagal modelį (2.1)–(2.3). Tuomet galutinis matematinis modelis atrodytų taip:

$$[\boldsymbol{\beta}] = ([\mathbf{A}][\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T)^{-1}, \quad [\boldsymbol{\alpha}] = [\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T[\boldsymbol{\beta}], \quad (3.5)$$

$$[\boldsymbol{\beta}_{dyn}] = [\mathbf{P}][\boldsymbol{\beta}][\mathbf{P}]^T, \quad [\boldsymbol{\alpha}_{dyn}] = [\boldsymbol{\alpha}][\mathbf{P}]^T, \quad (3.6)$$

$$[\mathbf{C}] = [\boldsymbol{\beta}_{dyn}][\mathbf{M}], \quad \{\boldsymbol{\lambda}\} = eig([\mathbf{C}]), \quad (3.7)$$

$$\omega_i = \sqrt{1/\lambda_i}, \quad \theta = k\omega, \quad [\boldsymbol{\beta}_M] = \theta^{-2}[\mathbf{M}]^{-1}, \quad (3.8)$$

$$\{\mathbf{Z}\} = -([\boldsymbol{\beta}_{dyn}] - [\boldsymbol{\beta}_M])^{-1}[\boldsymbol{\beta}_{dyn}]\{\mathbf{F}_0\}, \quad (3.9)$$

$$\{\mathbf{S}_{dyn}\} = [\boldsymbol{\alpha}_{dyn}](\{\mathbf{Z}\} + \{\mathbf{F}_0\}), \quad \{\mathbf{u}_{dyn}\} = [\boldsymbol{\beta}_{dyn}](\{\mathbf{Z}\} + \{\mathbf{F}_0\}). \quad (3.10)$$

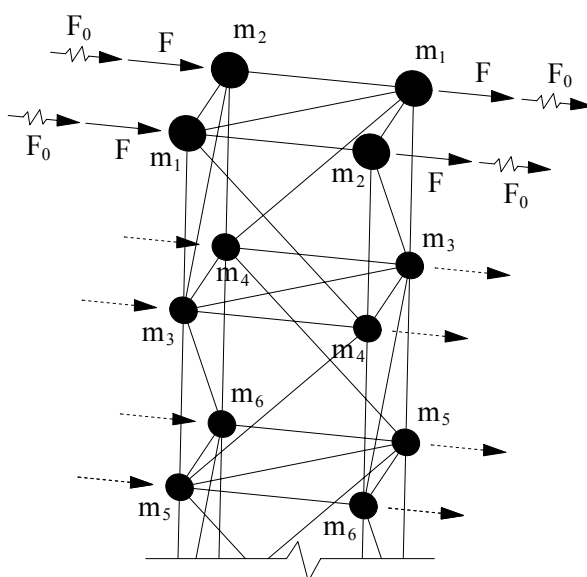
(3.8) dalyje indeksas i rodo, kuri konstrukcijos savųjų svyravimų forma yra įvertinama. Paprastai svarbiausia būna pirmoji forma, tačiau kai kuriais atvejais svarbios gali būti ir kitos formos. Tai dažniausiai priklauso nuo žadinančių apkrovų veikimo pobūdžio.

3.3. Diskretizavimo principai ir apkrovos

Priverstinių svyravimų tyrimams naudojamas tas pats dviejų skirtingų struktūrų liaunas plieninis bokštas, kuriam pirmajame darbo skyriuje buvo atliekami savųjų svyravimų tyrimai.

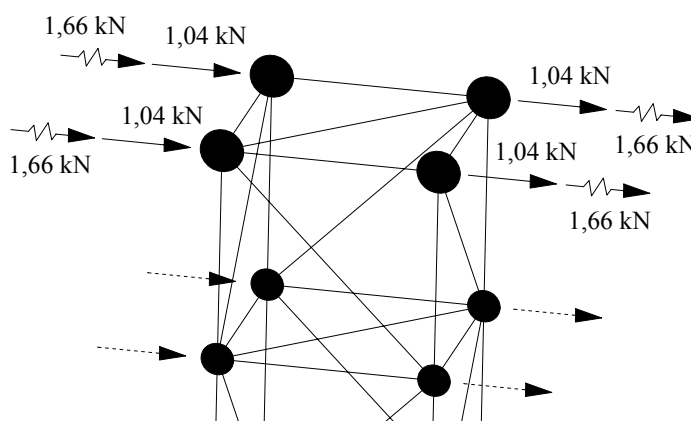
Konstrukcija diskretizuojama tais pačiais, pirmosios eilės, baigtiniais elementais. Elementų skerspjūviai taip pat naudojami tokie patys. Tiriamo bokšto diskretizavimo principai pakankamai smulkiai buvo aprašyti antrajame darbo skyriuje.

Vienas pagrindinių veiksnių atliekant konstrukcijos priverstinių svyravimų analizę yra apkrovos, kurių nėra savųjų svyravimų analizės uždavinyje. Šiuo atveju laikoma, kad vėjo apkrovas perima tik viršutinės bokšto konstrukcijos paviršiai. Kadangi ši konstrukcija į skaičiuojamąjį modelį nėra įtraukta, vėjo slėgio atstojamosios jėgos perskaičiuojamos į viršutinius mazgus. Šios jėgos parodytos 3.1 paveiksle.



3.1 pav. Konstrukciją veikiančių jėgų ir masių judėjimo kryptys

Konstrukciją veikiančios statinės ir pulsacinės vėjo apkrovos apskaičiuotos remiantis Lietuvoje galiojančiose projektavimo normose pateikta metodika. Apskaičiuotosios mazginių jėgų reikšmės parodytos 3.2 paveiksle. Jų skaičiavimai darbe nepateikiami. Vėjo apkrovos apskaičiuotos taikant supaprastintą metodą (apie jį buvo kalbama pirmajame darbo skyriuje).



3.2 pav. Konstrukciją veikiančių vėjo apkrovų reikšmės

3.1 ir 3.2 paveiksluose parodytas pirmosios struktūros bokštas, antrosios struktūros bokštui apkrovų kryptys ir reikšmės naudojamos tokios pačios. Priverstinių svyravimų dažnio sumažinimo koeficiento k reikšmė šiuo atveju priimama 0,95. Jis pasirenkamas atsižvelgiant į konstrukcijos energijos absorbavimo ir netampraus pasipriešinimo savybes. Teisingam jo nustatymui reikėtų papildomų tyrimų. Šiuo atveju jis pasirenkamas preliminariai.

Sprendžiant konstrukcijos savųjų svyravimų analizės uždavinį pagal matematinį modelį (3.5)–(3.10) gaunamos tik dinaminės įrašos ir dinaminiai poslinkiai. Be dinaminių poveikių svarbu įvertinti ir statinius, todėl matematinį modelį tikslinga būtų papildyti įrašų ir poslinkių apskaičiavimu nuo statinių apkrovų, t. y. nuo statinės vėjo dedamosios ir nuo konstrukcijos savojo svorio. Suminės įrašos ir suminiai poslinkiai būtų randami taip:

$$\{\mathbf{S}_{st}\} = [\boldsymbol{\alpha}](\{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{G}\}), \quad \{\mathbf{u}_{st}\} = [\boldsymbol{\beta}](\{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{G}\}), \quad (3.11)$$

$$\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{S}_{st}\} + \{\mathbf{S}_{dyn}\}, \quad \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_{st}\} + \{\mathbf{u}_{dyn}\}. \quad (3.12)$$

(3.11)–(3.12) formulėse $\{\mathbf{S}_{st}\}$ yra įrašos nuo statinių apkrovų, $\{\mathbf{u}_{st}\}$ – poslinkiai nuo statinių apkrovų, $\{\mathbf{F}\}$ – statinių vėjo apkrovų vektorius, $\{\mathbf{G}\}$ – konstrukcijos savojo svorio vektorius. Sudarant savojo svorio vektorių $\{\mathbf{G}\}$ konstrukcijos elementų svoriai perskaičiuojami į vertikaliai nukreiptas mazgines jėgas. Mazginė jėga išreiškia atitinkamos į mazgą sueinančių strypų dalies svorį. Šio vektoriaus sudarymo komandiniai tekstai pateikti prieduose.

3.4. Tyrimo metodika

Šio tyrimo tikslas yra ištirti, kokią įtaką konstrukcijos priverstinių svyravimų analizės rezultatams daro skirtingas konstrukcijos dinaminio modelio pasirinkimas. Čia bus naudojami tie patys aštuoni konstrukcijos masių paskirstymo variantai (žr. 2.5 pav.). Stebimi parametrai bus maksimali teigiama ir maksimali neigiama suminės įrašos (ašinės jėgos) ir maksimalus horizontalusis poslinkis. Kaip ir ankstesniame skyriuje, tiriamas bus dviejų skirtingų struktūrų bokštas, o jų rezultatai vėliau bus lyginami.

Atliekant šį tyrimą įvertinama tik pirmoji konstrukcijos savųjų svyravimų forma, nes šiuo atveju ji yra svarbiausia, t. y. ją įvertinant susikuria pavojingiausias įtempių ir deformacijų būvis. Kitaip nei savųjų svyravimų tyrime, čia negalima naudoti redukuoto dinaminės analizės modelio.

Taigi iš pradžių bus nustatomi pirmosios struktūros bokšto maksimali įraša ir maksimalus poslinkis, naudojant skirtingus masių paskirstymo variantus, vėliau tas pats bus daroma su antrosios struktūros bokštu. Galiausiai bus atliekama skaičiavimo rezultatų palyginamoji analizė, t. y. bus pateikti grafikai ir suformuluotos išvados.

3.5. Tyrimo skaičiavimai ir rezultatų analizė

Toliau pateiktas konstrukcijos priverstinių svyravimų analizei skirtas MATLAB programos komandinis tekstas, kai konstrukcija diskretizuojama detaliausiu koncentruotų masių modeliu (šis tekstas yra beveik vienodas abiemis bokštams):

```
clear all
clc
% PIRMOJO BOKŠTO PRIVERSTINIŲ SVYRAVIMŲ ANALIZĖ
% 1 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementų tipų ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Koncentruotos masės:
m01 = (L1*A1 + 1.5*L2*A2 + L3*A3) * ro;
m02 = (L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro;
m1 = m01; m2 = m02; m3 = m01; m4 = m02;
m5 = m01; m6 = m02; m7 = m01; m8 = m02;
m9 = m01; m10 = m02; m11 = m01; m12 = m02;
m13 = m01; m14 = m02; m15 = m01; m16 = m02;
m17 = m01; m18 = m02; m19 = m01; m20 = m02;
m21 = m01; m22 = m02; m23 = m01; m24 = m02;
m25 = m01; m26 = m02; m27 = m01; m28 = m02;
m29 = m01; m30 = m02; m31 = m01; m32 = m02;
m33 = m01; m34 = m02; m35 = m01; m36 = m02;
m37 = m01; m38 = m02; m39 = m01; m40 = m02;
m41 = m01; m42 = m02; m43 = m01; m44 = m02;
m45 = m01; m46 = m02; m47 = m01; m48 = m02;
m49 = m01; m50 = m02; m51 = m01; m52 = m02;
m53 = m01; m54 = m02; m55 = m01; m56 = m02;
m57 = m01; m58 = m02; m59 = m01; m60 = m02;
m61 = m01; m62 = m02; m63 = m01; m64 = m02;
m65 = m01; m66 = m02; m67 = m01; m68 = m02;
m69 = m01; m70 = m02; m71 = m01; m72 = m02;
m73 = m01; m74 = m02; m75 = m01; m76 = m02;
m77 = 0.25*mk + (0.5*L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro;
m78 = 0.25*mk + (0.5*L1*A1 + 0.5*L2*A2 + L3*A3) * ro;
m79 = m77; m80 = m78;
%
% Sudaroma masių matrica:
masiu_matrica = blkdiag(m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10, ...
m11,m12,m13,m14,m15,m16,m17,m18,m19,m20,m21,m22,m23,m24, ...
m25,m26,m27,m28,m29,m30,m31,m32,m33,m34,m35,m36,m37,m38, ...
m39,m40,m41,m42,m43,m44,m45,m46,m47,m48,m49,m50,m51,m52, ...
m53,m54,m55,m56,m57,m58,m59,m60,m61,m62,m63,m64,m65,m66, ...
m67,m68,m69,m70,m71,m72,m73,m74,m75,m76,m77,m78,m79,m80);
%
% Įkeliama pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:180;
```

```

D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
%
% Sudaromos poslinkių ir įrašų influentinės matricos:
beta = inv(A*inv(D)*A'); alfa = inv(D)*A'*beta;
%
% Sudaroma loginė matrica:
P = zeros(80,240);
for i = 1:80;
P(i,(3*i-2)) = 1; end;
%
% Dinaminių poslinkių ir įrašų influentinės matricos:
beta_dyn = P*beta*P'; alfa_dyn = alfa*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
lambda = eig(C);
%
% Apskaičiuojamas savųjų svyravimų pagrindinio tono dažnis:
omega = (1/max(lambda))^(0.5);
%
% Apskaičiuojamas žadinančios apkrovos ciklinis dažnis:
teta = 0.95*omega; beta_m = (1/teta^2)*inv(masiu_matrica);
%
% Sudaromas žadinančių apkrovų vektorius:
F0 = zeros(80,1);
F0(77:80,1) = ones(4,1)*1.66;
% Sudaromas statinių apkrovų vektorius:
F = zeros(240,1);
F(229) = 1.04; F(232) = 1.04; F(235) = 1.04; F(238) = 1.04;
%
% Apskaičiuojamos inercijos jėgos:
Z = (beta_dyn - beta_m)^-1*beta_dyn*F0;
%
% Apskaičiuojamos dinaminės įrašos ir dinaminiai poslinkiai:
S_dyn = -(alfa_dyn*(Z + F0));
u_dyn = beta_dyn*(Z + F0);
%
% Įkeliamas savojo svorio vektorius:
savojo_svorio_vektorius;
% Apskaičiuojamos įrašos ir poslinkiai nuo statinių apkrovų:
S_st = alfa*(F + G); u_st = beta*(F + G);
%
% Galutiniai skaičiavimų rezultatai:
S_max = max(abs(S_st + S_dyn));
u_max = max(abs(u_st)) + max(abs(u_dyn));
S_max, u_max

```

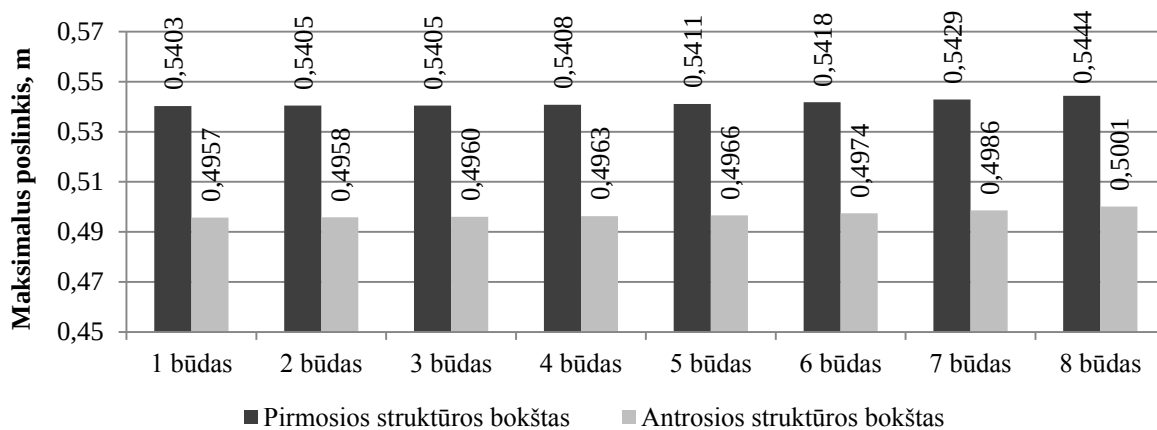
Kitų skaičiavimų komandiniai tekstai pateikti prieduose. Visų skaičiavimų rezultatai pateikti 3.1 ir 3.2 lentelėse, o šių rezultatų palyginimai pateikti 3.3, 3.4 ir 3.5 paveiksluose. Papildomai dar buvo atlikti skaičiavimai, naudojant skirtingus koeficientus k . Pasirinkta 200 skirtingų jo reikšmių intervale nuo 0 iki 2 ir sudaryti antrojo bokšto maksimalaus poslinkio ir maksimalios įrašos priklausomybės nuo k grafikai. Šie grafikai pateikti 3.6 ir 3.7 paveiksluose. Čia naudotas detalusias koncentruotų masių paskirstymo variantas.

3.1 lentelė. Pirmojo bokšto visi apskaičiuotieji maksimalūs poslinkiai ir įrašos

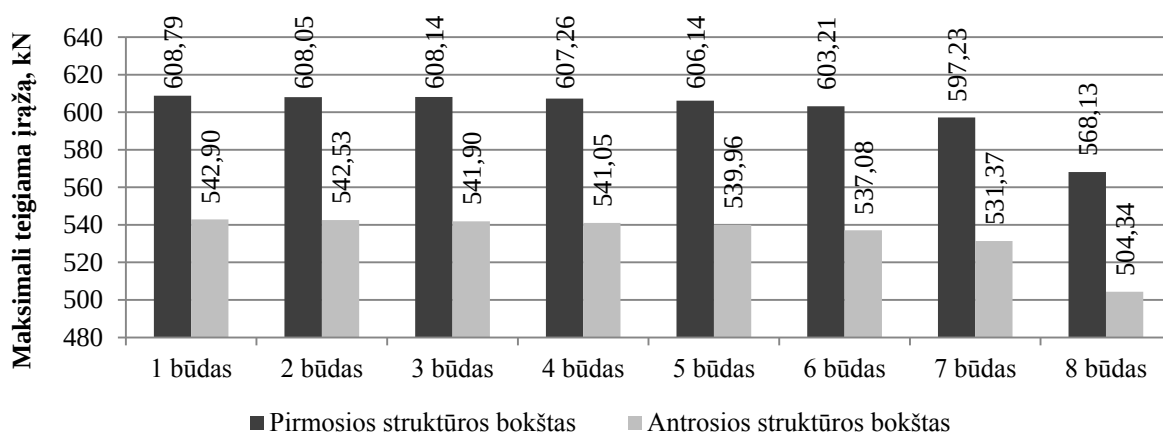
Tiriami parametrai	Konstrukcijos masių paskirstymo variantai							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_{\max}$, m	0,5403	0,5405	0,5405	0,5408	0,5411	0,5418	0,5429	0,5444
$N_{\max}$, kN	608,79	608,05	608,14	607,26	606,14	603,21	597,23	568,13
$N_{\min}$, kN	-652,18	-651,43	-651,52	-650,65	-649,52	-646,6	-640,61	-611,62

3.2 lentelė. Antrojo bokšto visi apskaičiuotieji maksimalūs poslinkiai ir įrašos

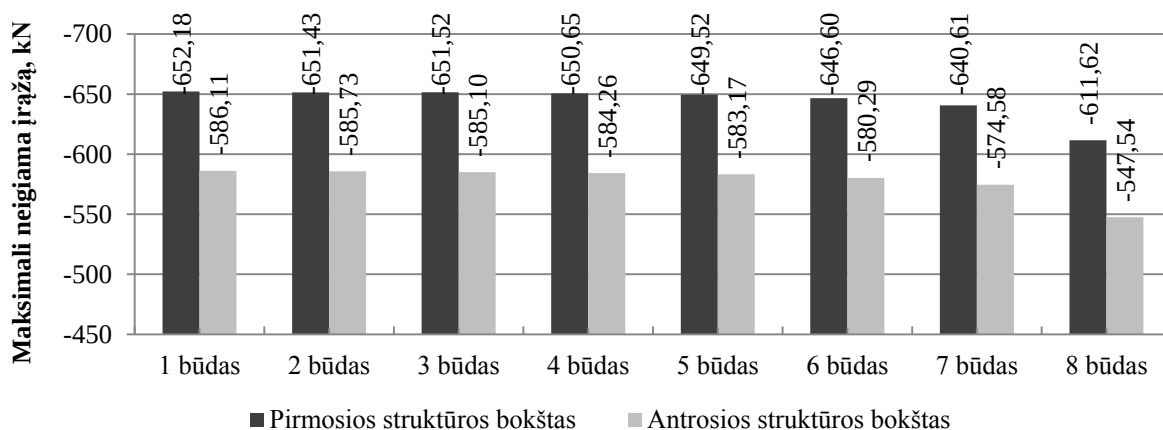
Tiriami parametrai	Konstrukcijos masių paskirstymo variantai							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_{\max}$, m	0,4957	0,4958	0,4960	0,4963	0,4966	0,4974	0,4986	0,5001
$N_{\max}$, kN	542,9	542,53	541,9	541,05	539,96	537,08	531,37	504,34
$N_{\min}$, kN	-586,11	-585,73	-585,1	-584,26	-583,17	-580,29	-574,58	-547,54



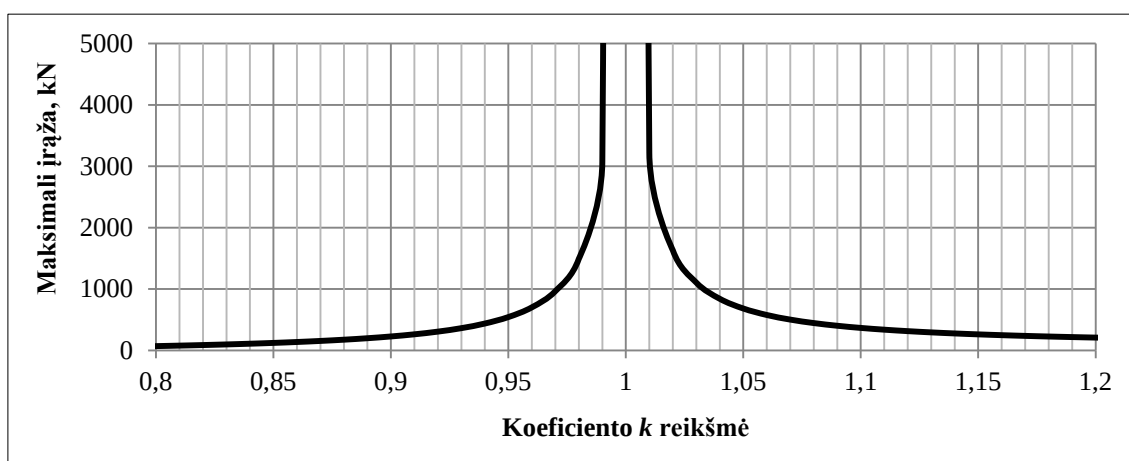
3.3 pav. Dinaminės analizės rezultatų palyginimas – maksimalus poslinkis



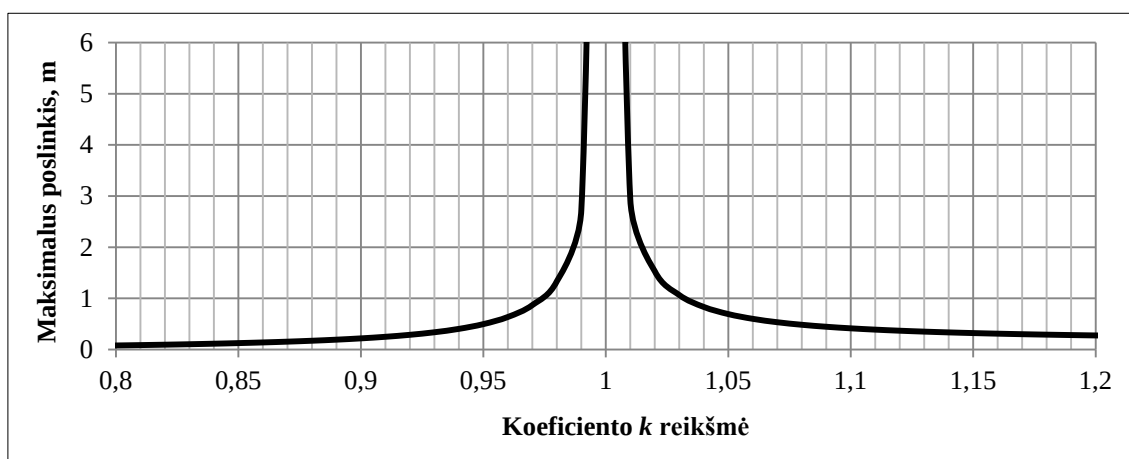
3.4 pav. Dinaminės analizės rezultatų palyginimas – maksimali teigiama įraša



3.5 pav. Dinaminės analizės rezultatų palyginimas – maksimali neigiama įraža



3.6 pav. Maksimalios įrašos priklausomybės nuo koeficiento k grafikas



3.7 pav. Maksimalaus poslinkio priklausomybės nuo koeficiento k grafikas

Analizuojant 3.3, 3.4 ir 3.5 paveiksluose pateiktus grafikus galima pastebėti, kad konstrukcijos mazgų poslinkiams skirtingi sistemos masių paskirstymo variantai didelės įtakos nedaro. Jų reikšmės visais atvejais gautos beveik vienodos. Šiek tiek labiau išsiskiria paskutiniojo varianto maksimalus poslinkis, tačiau tokį skirtumą galima laikyti nereikšmingu. Pirmosios

struktūros bokšto paskutiniojo varianto poslinkis nuo pirmojo varianto skiriasi tik 0,75 %, antrosios struktūros bokšto – tik 0,88 %. Pirmosios ir antrosios struktūros bokštų maksimalūs poslinkiai visais variantais vidutiniškai skiriasi apie 8 %. Tai rodo, kad antrosios struktūros bokštas yra standesnis.

Maksimalios teigiamos ir maksimalios neigiamos įrašos (žr. 3.4 ir 3.5 pav.), analizuojant skirtingus masių paskirstymo variantus, taip pat skiriasi nedaug. Skirtumus tarp pirmųjų šešių variantų galima laikyti nereikšmingais. Šiek tiek daugiau išsiskiria septintojo varianto rezultatai, dar daugiau – aštuntojo varianto. Iš grafikų matyti, skirtingos struktūros įtaka konstrukcijos įrašoms yra gana ryški. Antrosios struktūros bokšto maksimalios įrašos visais variantais vidutiniškai yra mažesnės apie 10 %. Taigi, galima daryti išvadą, kad nagrinėjamam bokštui antroji struktūra yra tinkamesnė. Žinoma, tikslesnes išvadas galima daryti tik atlikus konstrukcijos optimizavimą.

3.6. Skyriaus išvados

Kitaip nei atliekant konstrukcijos savųjų svyravimų analizę, priverstinių svyravimų analizės uždaviniuose lemiamą vaidmenį vaidina apkrovos. Statinį konstrukcijos atsaką veikiančioms apkrovoms gana nesunkiai galima nustatyti taikant klasikinius metodus. Dinaminio konstrukcijos atsako svyravimus sukeliantiems poveikiams nustatymas yra kur kas sudėtingesnis uždavinys. Čia svarbu tinkamai įvertinti konstrukcijos savųjų svyravimų ir žadinančių apkrovų sąveiką. Paprastai žadinančios apkrovos nėra harmoninės, dėl to šios sąveikos nustatymas tampa itin sudėtingas. Kai žadinanti apkrova yra vėjas, tarp judančios konstrukcijos ir judančio oro gali susikurti dar ir papildoma sąveika, dėl kurios pasikeičia žadinančių apkrovų veikimo pobūdis. Šiame darbe atliekant tyrimus buvo daroma prielaida, kad žadinančios vėjo apkrovos yra harmoninės ir į konstrukcijos paviršius sukuria tik statinius ir pulsacinius slėgius. Darbe daugiau dėmesio skiriama pačios konstrukcijos dinaminei elgsenai, o ne apkrovoms.

Atliktas konstrukcijos priverstinių svyravimų tyrimas parodė, kokią įtaką skaičiavimų rezultatams daro skirtingi sistemos koncentruotų masių modeliai ir skirtinga strypinė struktūra. Skaičiavimų rezultatai bei jų palyginimai pateikti lentelėse ir grafikuose. Išanalizavus rezultatus nustatyta, kad skirtingi masių paskirstymo variantai konstrukcijos poslinkiams ir įrašoms reikšmingos įtakos nedaro. Taigi galima daryti išvadą, kad skaičiavimų paprastumo dėlei konstrukciją diskretizuoti galima vos keliomis koncentruotomis masėmis. Svarbesnis veiksnys čia yra pasirinkta konstrukcijos strypinė struktūra. Antrosios struktūros bokšto įrašos ir poslinkiai yra gerokai mažesni, todėl galima teigti, kad tokia struktūra yra tinkamesnė. Žinoma, kuri struktūra yra optimali galima nustatyti tik sprendžiant optimizavimo uždavinius, kurie bus analizuojami kitame darbo skyriuje.

4. KONSTRUKCIJOS OPTIMIZAVIMAS, ĮVERTINANT DINAMINIUS EFEKTUS

4.1. Įvadinės pastabos

Konstrukcijų optimizacijos tema šiek tiek buvo paliesta pirmajame darbo skyriuje. Buvo minėta, kad dažniausiai konstrukcijos optimizuojamos įvertinat stiprumo, stabilumo bei standumo reikalavimus. Dinaminių poveikių sukelti efektai į optimizacijos uždavinių formuluotes paprastai nėra įtraukiami. Vadinasi, konstrukcijos optimizavimas ir dinaminė analizė yra tarytum atskiri projektavimo etapai, tarp kurių yra „blaškomasi“, kol surandamas optimalus variantas. Žinoma, taip yra todėl, kad konstrukcijų, veikiamų žadinančių vėjo apkrovų, dinaminė analizė yra matematiškai sudėtingas uždavinys. Dažnai net ir vien statinių apkrovų veikiamų konstrukcijų optimizavimo uždaviniai būna didelės apimties, be to, tamprių konstrukcijų optimizavimo uždaviniai dažniausiai formuluojami kaip netiesinio matematinio programavimo uždaviniai. Jų sprendimas net ir šiomis dienomis kartais būna itin komplikotas, čia dažnai susiduriama su konvergavimo problemomis. Į tokius uždavinius bandant įtraukti dar daugiau sudėtingų sąlygų ir apribojimų, išreiškiančių vėjo sukeltus dinامينius efektus, greičiausiai būtų prieita prie labai didelės apimties uždavinio, kurio sprendimas būtų per daug sudėtingas ir neracionalus. Šią problemą galima bandyti spręsti atliekant tam tikrus supaprastinimus ir priimant prielaidas. Tam tikslui anksčiau ir buvo kalbama apie supaprastintus dinaminių vėjo efektų įvertinimo būdus.

Šiame poskyryje, taikant supaprastintus žadinančių vėjo apkrovų įvertinimo metodus, bus sudarytas modifikuotas konstrukcijos optimizavimo matematinis modelis, skirtas optimalaus elementų skerspjuvių pasiskirstymo nustatymui, kai yra įvertinami statiniai bei dinaminiai efektai. Siekiant išanalizuoti sudaryto modelio taikymo ypatumus, bus optimizuojamas tas pats, ankstesniuose skyriuose tirtas, dviejų skirtingų struktūrų plieninis bokštas.

4.2. Optimizacijos uždavinio matematinis modelis

Čia bus naudojamas minimalaus strypinės konstrukcijos tūrio nustatymo matematinis modelis. Šiuo atveju laikoma, kad savasis svoris bei statinės ir dinaminės apkrovos sudaro vienintelį apkrovimo derinį, kuris ir naudojamas projektuojant konstrukciją. Tamprios konstrukcijos, kurią veikia vienas apkrovimo derinys, projektavimo uždavinys aprašomas tokiu matematiniu modeliu (Kalanta 2007):

$$\text{rasti:} \quad \min \{L\}^T \{A_0\}, \quad (4.1)$$

$$\text{kai:} \quad [A]\{S\} = \{F\}, \quad (4.2)$$

$$[\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} - [\mathbf{D}]\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (4.3)$$

$$[\Phi]\{\mathbf{S}\} - [\Gamma]\{\mathbf{A}_0\} \leq \{\mathbf{0}\}, \quad (4.4)$$

$$[\mathbf{A}_0] \geq [\mathbf{A}_{\min}]. \quad (4.5)$$

Modelyje $\{\mathbf{L}\}$ yra elementų ilgių vektorius, $\{\mathbf{A}_0\}$ – elementų skerspjūvių plotų vektorius, $[\mathbf{A}]$ – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica, $\{\mathbf{S}\}$ – įrašų vektorius, $\{\mathbf{F}\}$ – išorinių apkrovų vektorius, $\{\mathbf{u}\}$ – poslinkių vektorius, $[\mathbf{D}]$ – konstrukcijos pasiduodamumo matrica, $[\Phi]$ – stiprumo sąlygų matrica, $[\Gamma]$ – konfigūracijos matrica, $\{\mathbf{A}_{\min}\}$ – minimalių leistinų skerspjūvių plotų vektorius. Tikslo funkcija (4.1) yra optimalumo kriterijus, kuriuo išreiškiamas bendras konstrukcijos tūris (arba svoris). (4.2) yra pusiausvyros lygtys, (4.3) – geometrinės lygtys, (4.4) – stiprumo sąlygos, (4.5) – konstruktyviniai apribojimai. Uždavinio nežinomieji yra įrašos $\{\mathbf{S}\}$, poslinkiai $\{\mathbf{u}\}$ ir elementų skerspjūvių plotai $\{\mathbf{A}_0\}$.

Modelis (4.1)–(4.5) yra netiesinio matematinio programavimo uždavinys, nes apribojimai (4.3) – netiesiniai. Geometrinių lygčių (4.3) netiesiškumą lemia tai, jog pasiduodamumo matricos $[\mathbf{D}]$ komponentai priklauso nuo elementų skerspjūvių plotų, kurie šiuo atveju yra nežinomieji. Netiesinių uždavinių sprendimas kompiuteriais net ir šiais laikais yra gana sudėtingas, dėl to ši uždavinį kartais patogiau spręsti iteraciniu būdu. Tokiu atveju būtų priimanos pradinės skerspjūvių plotų reikšmės. Jas naudojant būtų sudaroma pasiduodamumo matrica ir tokiu būdu geometrinės lygtys taptų tiesinėmis. Po kiekvienos iteracijos pasiduodamumo matricos komponentai būtų perskaičiuojami su naujai apskaičiuotomis reikšmėmis. Iteracinis procesas būtų tęsiamas tol, kol paskutinių dviejų iteracijų rezultatai sutaptų pasirinktu tikslumu.

Kai konstrukcija diskretizuojama pirmosios eilės baigtiniais elementais, stiprumo sąlygos (4.4) yra tiesinės, tačiau jeigu elementuose be ašinių jėgų būtų įvertinamos ir kitokios įrašos (pavyzdžiui, lenkimo momentai), šios sąlygos taip pat taptų netiesinėmis, nes konfigūracijos matricos $[\Gamma]$ tokiu atveju priklausytų nuo nežinomųjų. Šiame darbe nagrinėjamos santvarinės konstrukcijos, todėl tokie atvejai čia plačiau nenagrinėjami.

Matematinis modelis (4.1)–(4.5) gali būti papildytas ir elementų stabilumo sąlygomis, kurių matricinė išraiška būtų tokia:

$$-[\mathbf{E}]\{\mathbf{S}\} - [\mathbf{II}]\{\mathbf{A}_0\} \leq \{\mathbf{0}\}. \quad (4.6)$$

(4.6) sąlygose $[\mathbf{E}]$ yra stabilumo sąlygų matrica, kuri šiuo atveju yra vienetinė. Šios matricos visi komponentai yra neigiami. Taip užtikrinama, kad stabilumo sąlygos būtų tikrinamos tik gniuždomiems elementams. $[\mathbf{II}]$ yra stabilumo sąlygų konfigūracijos matrica. Kai konstrukcijos elementai yra tik tempiami arba gniuždomi, konfigūracijos matricos $[\mathbf{II}]$ komponentai yra kritinių

įtempių reikšmės. Centriškai gniuždomiems elementams kritiniai įtempiai gali būti nustatomi pagal Eulerio klupumo sąlygą arba taikant projektavimo normose pateiktą metodiką. Jeigu naudojama Eulerio sąlyga, elemento kritiniai įtempiai išreiškiami taip:

$$F_{cr,k} = \frac{\pi^2 EI_k}{(\mu L_k)^2} \rightarrow \sigma_{cr,k} = \frac{F_{cr,k}}{A_{0,k}}. \quad (4.7)$$

Stabilumo sąlygos (4.6) taip pat yra netiesinės, nes kritiniai įtempiai priklauso nuo elementų skerspjūvių plotų, kurie yra uždavinio nežinomieji. Nuo jų taip pat priklauso ir inercijos momentai, įeinantys į kritinės jėgos F_{cr} išraišką (žr. 4.7 formules). Galima nuspėti, kad šio uždavinio netiesinės formuluotės sprendimas, kai konstrukciją sudaro daug elementų, būtų itin sudėtingas. Taikant iteracinį skaičiavimo metodą to būtų galima išvengti, nes žinant pradinis skerspjūvių plotus stabilumo sąlygos taip pat tampa tiesinėmis.

Kai optimizavimo uždavinyje įvertinamos stabilumo sąlygos, svarbūs tampa ir elementų skerspjūvių tipai bei jų tikslūs matmenys, nes į šias sąlygas įeina skerspjūvių inercijos momentai. Šiuo atveju patogiausia būtų priimti skerspjūvius su vienu kintamuoju parametru: pavyzdžiui, kvadratinius vamzdinius skerspjūvius su pastoviu sienutės storiu (tokiu atveju vienintelis kintamasis būtų išorinis skerspjūvio matmuo), kvadratinius skerspjūvius su pastoviu išoriniu matmeniu ir su kintamu sienutės storiu, apvalius vamzdžius su pastoviu sienutės storiu ar kitokius skerspjūvius. Kai yra tik vienas kintamas skerspjūvio parametras, iš skerspjūvio ploto nesunkiai galima išsireikšti kritinius įtempius, o tai yra būtina norint taikyti iteracinį skaičiavimą. Plačiau apie tai bus kalba šiek tiek vėliau.

Iteracinis skaičiavimo metodas suteikia galimybę įvertinti ir konstrukcijos savąjį svorį, kuris projektuojant konstrukcijas yra labai svarbus. Savasis svoris gali būti įvertintas konstrukcijos pusiausvyros lygtis (4.2) papildžius savojo svorio vektoriumi $\{\mathbf{G}\}$, kurį sudaro mazginių jėgų reikšmės, išreiškiančios į mazgus sujungtų elementų svorius atitinkamomis dalimis. Kiekvienoje iteracijoje vektoriaus $[\mathbf{G}]$ komponentai yra perskaičiuojami, naudojant ankstesnėje iteracijoje gautas skerspjūvių plotų reikšmes. Taigi, papildytas optimizacijos matematinis modelis atrodytų taip:

$$\text{rasti:} \quad \min \{\mathbf{L}\}^T \{\mathbf{A}_0\}, \quad (4.8)$$

$$\text{kai:} \quad [\mathbf{A}]\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{G}\}, \quad (4.9)$$

$$[\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} - [\mathbf{D}]\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (4.10)$$

$$[\mathbf{\Phi}]\{\mathbf{S}\} - [\mathbf{\Gamma}]\{\mathbf{A}_0\} \leq \{\mathbf{0}\}, \quad (4.11)$$

$$-[\mathbf{E}]\{\mathbf{S}\} - [\mathbf{\Pi}]\{\mathbf{A}_0\} \leq \{\mathbf{0}\}, \quad (4.12)$$

$$[\mathbf{A}_0] \geq [\mathbf{A}_{\min}]. \quad (4.13)$$

Tikslo funkcija (4.1) konstrukcijos optimalaus skerspjūvių paskirstymo uždaviniuose dažniausiai išreiškia konstrukcijos turį arba svorį, kurių minimalios reikšmės turi būti surastos. Pagrindiniai nežinomieji čia yra skerspjūvių plotų vektoriaus $\{\mathbf{A}_0\}$ komponentai. Šių komponentų yra tiek, kiek skirtingų skerspjūvių norima priskirti konstrukcijai. Vektoriaus $\{\mathbf{L}\}$ komponentai išreiškia suminius atitinkamos skerspjūvio grupės elementų ilgį, o jų sandauga su skerspjūvio plotu atspindi bendrą elementų turį.

Pusiausvyros lygčių koeficientų matricos $[\mathbf{A}]$ ir pasiduodamumo matricos $[\mathbf{D}]$ sudarymo ypatumai buvo aptarti pirmajame darbo skyriuje. Stiprumo sąlygų matricos $[\Phi]$ komponentai yra vienetai, kurie nurodo, kuri įraša turi įeiti į stiprumo sąlygą. Konfigūracijos matricos $[\Gamma]$ komponentai yra ribiniai įtempiai, kurių sandauga su atitinkamu skerspjūvio plotu atspindi ribinės įrašos prasmę. Kiekvieno elemento stiprumo sąlygos išreiškiamos nelygybėmis

$$N_k \leq \sigma_y A_k, \quad -N_k \leq \sigma_y A_k, \quad (4.14)$$

kuriose N_k yra ašinė jėga, σ_y – plieno takumo įtempiai (arba ribiniai įtempiai), A_k – elemento skerspjūvio plotas. Gniuždomo elemento stabilumo sąlyga, kai naudojama Eulerio formulė, gali būti išreikšta tokia nelygybe:

$$-N_k \leq \sigma_{cr} A_k. \quad (4.15)$$

Lietuvoje galiojančiose projektavimo normose STR 2005.08:2005 strypų stabilumas įvertinamas per klupumo koeficientą ϕ . Tokiu atveju stabilumo sąlyga elementui būtų tokia:

$$-N_k \leq \phi \sigma_y A_k. \quad (4.16)$$

4.3. Konstrukcijos priverstinių svyravimų analizės matematinis modelis

Strypinės konstrukcijos priverstinių svyravimų analizės matematinis modelis jau buvo gana plačiai aptartas ankstesniuose skyriuose. Šiuo atveju aktualios yra tik dinaminės įrašos. Dinaminių įrašų nustatymo matematinį modelį galima užrašyti taip:

$$[\beta] = ([\mathbf{A}][\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T)^{-1}, \quad [\alpha] = [\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T[\beta], \quad (4.17)$$

$$[\beta_{dyn}] = [\mathbf{P}][\beta][\mathbf{P}]^T, \quad [\alpha_{dyn}] = [\alpha][\mathbf{P}]^T, \quad (4.18)$$

$$[\beta_M] = \theta^{-2}[\mathbf{M}]^{-1}, \quad \{Z\} = -([\beta_{dyn}] - [\beta_M])^{-1}[\beta_{dyn}]\{F_0\}, \quad (4.19)$$

$$\{S_{dyn}\} = [\alpha_{dyn}](\{Z\} + \{F_0\}). \quad (4.20)$$

4.4. Modifikuotas optimizacijos matematinis modelis

Optimizacijos matematinį modelį (4.8)–(4.13) ir priverstinių svyravimų analizės matematinį modelį (4.17)–(4.20) galima nesunkiai sujungti koreguojant optimizacijos modelio pusiausvyros lygtis (4.9). Tam tikslui nežinomųjų įrašų vektorių galima išskaidyti į statinę ir dinaminę dedamąsias:

$$\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{S}_{st}\} + \{\mathbf{S}_{dyn}\}. \quad (4.21)$$

Kadangi yra žinoma, kad konstrukcijos pusiausvyros lygtys galioja veikiant statinėms apkrovoms, jas galima perrašyti taip:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{S}_{st}\} = \{\mathbf{F}\}. \quad (4.22)$$

Iš (4.21) formulės galima išsireikšti vektorių $\{\mathbf{S}_{st}\}$ ir įstatyti jį į (4.22) lygtį:

$$\{\mathbf{S}_{st}\} = \{\mathbf{S}\} - \{\mathbf{S}_{dyn}\} \rightarrow [\mathbf{A}](\{\mathbf{S}\} - \{\mathbf{S}_{dyn}\}) = \{\mathbf{F}\}. \quad (4.23)$$

Toliau galutinai sutvarkomos pusiausvyros lygtys priimant, jog dinaminių įrašų amplitudinių reikšmių vektorius $\{\mathbf{S}_{dyn}\}$ yra žinomas:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{F}\} + [\mathbf{A}]\{\mathbf{S}_{dyn}\}. \quad (4.24)$$

Modifikuotos konstrukcijos pusiausvyros lygtys (4.24) būtent ir yra optimizacijos ir dinaminės analizės uždavinius jungianti dalis.

Taigi, galutinai galima užrašyti konstrukcijos optimizavimo, įvertinant žadinančių apkrovų sukeliamus dinامينius efektus, uždavinio pilną matematinį modelį:

$$\text{rasti:} \quad \min \{\mathbf{L}\}^T \{\mathbf{A}_0\}, \quad (4.25)$$

$$\text{kai:} \quad [\mathbf{A}]\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{G}\} + [\mathbf{A}]\{\mathbf{S}_{dyn}\}, \quad (4.26)$$

$$[\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} - [\mathbf{D}]\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (4.27)$$

$$[\mathbf{\Phi}]\{\mathbf{S}\} - [\mathbf{\Gamma}]\{\mathbf{A}_0\} \leq \{\mathbf{0}\}, \quad (4.28)$$

$$-[\mathbf{E}]\{\mathbf{S}\} - [\mathbf{\Pi}]\{\mathbf{A}_0\} \leq \{\mathbf{0}\}, \quad (4.29)$$

$$[\mathbf{A}_0] \geq [\mathbf{A}_{min}], \quad (4.30)$$

$$[\boldsymbol{\beta}] = ([\mathbf{A}][\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T)^{-1}, \quad [\boldsymbol{\alpha}] = [\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T[\boldsymbol{\beta}], \quad (4.31)$$

$$[\boldsymbol{\beta}_{dyn}] = [\mathbf{P}][\boldsymbol{\beta}][\mathbf{P}]^T, \quad [\boldsymbol{\alpha}_{dyn}] = [\boldsymbol{\alpha}][\mathbf{P}]^T, \quad (4.32)$$

$$[\boldsymbol{\beta}_M] = \theta^{-2}[\mathbf{M}]^{-1}, \quad \{\mathbf{Z}\} = -([\boldsymbol{\beta}_{dyn}] - [\boldsymbol{\beta}_M])^{-1}[\boldsymbol{\beta}_{dyn}]\{\mathbf{F}_0\}, \quad (4.33)$$

$$\{\mathbf{S}_{dyn}\} = [\mathbf{a}_{dyn}] (\{\mathbf{Z}\} + \{\mathbf{F}_0\}). \quad (4.34)$$

Sudarytas (4.25)–(4.34) modelis gali būti taikomas tik tuomet, kai žadinančių apkrovų ciklinis dažnis θ yra žinomas ir pastovus. Be to, jeigu šis dažnis bus gana artimas vienam iš konstrukcijos savųjų svyravimų dažniui, susidarys rezonanso būvis ir uždavinio sprendimas neteks prasmės, nes dinaminės įrašos įgis be galo dideles skaitines reikšmes, o dėl to optimizavimo rezultatai bus iškreipti arba jų gauti iš viso nebus įmanoma. Taip yra todėl, kad šiame modelyje nėra įvertinamas svyravimų slopinimas. Realiose konstrukcijose svyravimų slopinimas pasireiškia, todėl net ir idealaus rezonanso atveju įrašos ir poslinkiai pasiekia nepageidautinai dideles, tačiau ne begalines reikšmes.

Kai konstrukcijos svyravimus sukelia vėjo apkrovos, matematinis modelis (4.25)–(4.34) tampa nebetinkamas, nes, kaip jau buvo minėta, vėjo pulsacinės apkrovos negalima apibūdinti pastoviu dažniu. Vadinasi, modelis turi būti pritaikytas tokiam apkrovimo būviui, kai vėjo pulsacinės apkrovos dažnis visada yra artimas kažkuriam konstrukcijos savųjų svyravimų dažniui, taip užtikrinant pavojingiausią atvejį. Tam tikslui matematinis modelis (4.25)–(4.34) turi būti papildytas savųjų svyravimų analizės uždaviniu (2.1)–(2.3). Galutinis modelis būtų toks:

$$\text{rasti:} \quad \min \{\mathbf{L}\}^T \{\mathbf{A}_0\}, \quad (4.35)$$

$$\text{kai:} \quad [\mathbf{A}]\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{G}\} + [\mathbf{A}]\{\mathbf{S}_{dyn}\}, \quad (4.36)$$

$$[\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} - [\mathbf{D}]\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (4.37)$$

$$[\mathbf{\Phi}]\{\mathbf{S}\} - [\mathbf{\Gamma}]\{\mathbf{A}_0\} \leq \{\mathbf{0}\}, \quad (4.38)$$

$$-[\mathbf{E}]\{\mathbf{S}\} - [\mathbf{\Pi}]\{\mathbf{A}_0\} \leq \{\mathbf{0}\}, \quad (4.39)$$

$$[\mathbf{A}_0] \geq [\mathbf{A}_{min}], \quad (4.40)$$

$$[\mathbf{\beta}] = ([\mathbf{A}][\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T)^{-1}, \quad [\mathbf{a}] = [\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T[\mathbf{\beta}], \quad (4.41)$$

$$[\mathbf{\beta}_{dyn}] = [\mathbf{P}][\mathbf{\beta}][\mathbf{P}]^T, \quad [\mathbf{a}_{dyn}] = [\mathbf{a}][\mathbf{P}]^T, \quad (4.42)$$

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{\beta}_{dyn}][\mathbf{M}], \quad \{\lambda\} = eig([\mathbf{C}]), \quad (4.43)$$

$$\omega_i = \sqrt{1/\lambda_i}, \quad \theta = k\omega, \quad [\mathbf{\beta}_M] = \theta^{-2}[\mathbf{M}]^{-1}, \quad (4.44)$$

$$\{\mathbf{Z}\} = -([\mathbf{\beta}_{dyn}] - [\mathbf{\beta}_M])^{-1}[\mathbf{\beta}_{dyn}]\{\mathbf{F}_0\}, \quad (4.45)$$

$$\{\mathbf{S}_{dyn}\} = [\mathbf{a}_{dyn}](\{\mathbf{Z}\} + \{\mathbf{F}_0\}). \quad (4.46)$$

Uždavinių sprendimui pagal matematinį modelį (4.25)–(4.34) gali būti taikomas tik iteracinis skaičiavimo metodas, nes į optimizacijos uždavinį įeina dinaminių įrašų vektorius, kurio

komponentai turi būti žinomi. Vadinasi, pradiniai elementų skerspjūvių plotai taip pat turi būti žinomi. Iteracinio skaičiavimo algoritmas būtų toks:

- 1 žingsnis – pradinių skerspjūvių plotų pasirinkimas. Pradinės jų reikšmės gali būti bet kokios, pavyzdžiui, lygios mažiausių leistinų plotų vektoriaus $\{\mathbf{A}_{min}\}$ komponentų reikšmėms. Žinoma, pasirinkus kuo tikslesnes reikšmes optimalus sprendinys gali būti gautas atlikus mažiau iteracijų, tačiau tai nėra labai svarbus teisingos uždavinio realizacijos momentas.
- 2 žingsnis – pagrindinių matricų ir vektorių formavimas. Čia formuojamos tos matricos ir vektoriai, kurių komponentai iteracinio proceso metu nekinta, t. y. matricos $[\mathbf{A}]$, $[\Phi]$, $[\Gamma]$, $[\mathbf{E}]$, $[\mathbf{P}]$ ir vektoriai $\{\mathbf{L}\}$, $\{\mathbf{F}\}$, $\{\mathbf{A}_{min}\}$, $\{\mathbf{F}_0\}$.
- 3 žingsnis – pradinių matricų ir vektorių, kurie iteracinio proceso metu kinta, formavimas. Šių matricų ir vektorių komponentai priklauso nuo pradinių skerspjūvių plotų. Formuojamos matricos $[\mathbf{D}]$, $[\mathbf{II}]$, $[\mathbf{M}]$ ir vektorius $\{\mathbf{G}\}$.
- 4 žingsnis – skaičiuojamos įrašų ir poslinkių influentinės matricos $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\alpha_{dyn}]$, $[\beta_{dyn}]$.
- 5 žingsnis – sprendžiamas konstrukcijos savųjų svyravimų analizės uždavinys pagal matematinį modelį (2.1)–(2.3). Čia gaunami savųjų svyravimų cikliniai dažniai, iš kurių pasirenkamas svarbiausias.
- 6 žingsnis – sprendžiamas priverstinių svyravimų analizės uždavinys pagal matematinį modelį (4.17)–(4.20). Čia gaunamas dinaminių įrašų amplitudinių reikšmių vektorius $\{\mathbf{S}_{dyn}\}$.
- 7 žingsnis – sprendžiamas tiesinio matematinio programavimo uždavinys (4.8)–(4.13).
- 8 žingsnis – tikrinama, ar apskaičiuoti elementų skerspjūvių plotai nesiskiria nuo pradinių pasirinktu tikslumu. Jeigu skiriasi, apskaičiuotieji plotai imami pradiniais ir ciklas kartojamas nuo 3 punkto. Jeigu nesiskiria, ciklas nutraukiamas ir laikoma, kad gautas sprendinys optimalus.

Svarbu aptarti sudaryto modelio (4.44) dalį. Čia kiekvienoje iteracijoje koreguojamas žadinančių apkrovų ciklinis dažnis. Tai daroma todėl, kad pulsacinės vėjo apkrovos dažnis nėra apibrėžtas ir koreguojamas jis turi būti atsižvelgiant į konstrukcijos savųjų svyravimų dažnius. Kiekvienoje iteracijoje kinta koncentruotos masės ir elementų standžiai, todėl kinta ir savųjų svyravimų dažniai. Čia svarbus tampa koeficientas k . Svyruojančiai konstrukcijai pavojingiausias yra idealaus rezonanso atvejis, t. y. kai savųjų svyravimų dažnis sutampa su žadinimo dažniu. Kadangi matematiniame modelyje (4.35)–(4.46) nėra įvertintas slopinimas, rezonanso atveju dinaminių įrašų skaitinės reikšmės teoriškai išaugtų iki begalybės ir uždavinys netektų prasmės. Žinoma, realiose konstrukcijose pasireiškia svyravimų slopinimas, dėl kurio net ir idealaus rezonanso atvejų įrašos be galo didelių reikšmių nepasiekia. Koeficientu k šiek tiek sumažinamas

žadinimo dažnis, taip užtikrinant, kad savųjų svyravimų ir žadinančių apkrovų dažniai idealiai nesutaptų. Tokiu būdu preliminariai įvertinamas svyravimų slopinimas.

4.5. Modifikuoto modelio taikymas ir rezultatų analizė

Nagrinėjamas tas pats dviejų skirtingų struktūrų liaunas plieninis bokštas. Jo diskretinio modelio sudarymo ypatumai jau buvo gana plačiai aptarti ankstesniuose darbo skyriuose. Konstrukcija veikiama statinės ir dinaminės vėjo apkrovų, kurių reikšmės naudojamos tos pačios, kaip ir trečiajame skyriuje. Visi konstrukcijos elementai projektuojami iš SHS tipo skerspjūvių su pastoviu 5 mm sienutės storiu (skerspjūvio tipas bus svarbus vėliau, kai optimizuojant bus įvertinamos ir elementų stabilumo sąlygos). Naudojamo plieno klasė – S235, tamprumo modulis – 210 GPa. Priimta, kad pirmosios struktūros strypinę sistemą sudaro trys skirtingų skerspjūvių grupės, o antrosios struktūros sistemą – keturios grupės. Koeficiento k reikšmė šiuo atveju priimama lygi 0,95.

Pirmiausia bus atliekamas abiejų bokštų statinis optimizavimas pagal matematinį modelį (4.1)–(4.5), neįvertinant elementų stabilumo sąlygų ir konstruktyvinių apribojimų. Šis optimizavimas bus atliekamas laikant, kad apskaičiuotosios statinė ir pulsacinė vėjo apkrovos dedamosios kartu veikia tik statiškai. Vėliau bus atliekamas tų pačių bokštų dinaminis optimizavimas pagal modifikuotą matematinį modelį. Iš pradžių čia taip pat nebus įtraukiamos stabilumo sąlygos ir konstruktyviniai apribojimai. Tokiu būdu siekiama nustatyti, kaip stipriai skiriasi statinio ir dinaminio optimizavimo rezultatai. Galiausiai bus pateiktas konstrukcijų optimizavimo pagal pilną modifikuotą matematinį modelį (4.35)–(4.46) (čia jau bus įtraukiamos ir stabilumo sąlygos bei konstruktyviniai apribojimai).

Svarbu paminėti, jog šiame darbe taikomose optimizavimo uždavinių formuluotėse yra įtrauktos tik atskirų elementų stabilumo sąlygos. Visuminis konstrukcijos stabilumas čia nėra įvertinamas. Visuminis stabilumas būtų atskira ir gana plati tema.

4.5.1. Abiejų bokštų optimizavimas pagal matematinį modelį (4.1)–(4.5)

Toliau pateiktas pirmosios struktūros bokšto optimizavimo uždavinio pagal matematinį modelį (4.1)–(4.5) programos MATLAB komandinis tekstas:

```
clear all
clc
% PIRMOJO BOKŠTO STATINIS OPTIMIZAVIMAS
% Pagal matematinį modelį (4.1)-(4.5)
%
% Pradiniai duomenys:
```

```

E = 210000000; sigma_y = 235000; ro = 7.8;
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Įkeliamas pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaromas statinių apkrovų vektorius:
F = zeros(240,1);
F(229) = 2.7; F(232) = 2.7; F(235) = 2.7; F(238) = 2.7;
%
% Pradiniai strypų skerspjūvio plotai:
A01 = 1; A02 = 1; A03 = 1;
%
% Pradinė tikslo funkcijos reikšmė:
fval0 = 160*A01 + 282.85*A02 + 160*A03;
%
% Rezultatų matricos parengimas:
rez = zeros(8,1);
%
% Ciklo pradžia:
for iteracija = 1:100;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A01); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A02); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A03); end;
%
% Įkeliamas savojo svorio vektorius:
savojo_svorio_vektorius;
%
% Sudaroma apribojimų lygybių koeficientų matrica:
Aeq = zeros(500,503);
Aeq(1:240,1:260) = A;
Aeq(241:500,1:260) = D; Aeq(241:500,261:500) = -1*A';
%
% Sudaromas apribojimų lygybių laisvųjų narių vektorius:
beq = [F+G; zeros(260,1)];
%
% Stiprumo sąlygų matrica Fi:
Fi = zeros(520,260);
Fi(1:260,:) = eye(260);
Fi(261:520,:) = -eye(260);
%
% Sudaroma konfigūracijos matrica Gama:
Gama = zeros(520,3);
Gama(1:80,1) = ones(80,1)*sigma_y;
Gama(81:180,2) = ones(100,1)*sigma_y;
Gama(181:260,3) = ones(80,1)*sigma_y;
Gama(261:340,1) = ones(80,1)*sigma_y;
Gama(341:440,2) = ones(100,1)*sigma_y;
Gama(441:520,3) = ones(80,1)*sigma_y;
%
% Sudaroma apribojimų nelygybių koeficientų matrica:
Anq = zeros(523,503);
Anq(1:520,1:260) = Fi; Anq(1:520,501:503) = -Gama;
%
% Įtraukiami ženklų ribojimai:
Anq(521,501) = -1;
Anq(522,502) = -1;
Anq(523,503) = -1;

```

```

% Sudaromas apribojimų nelygybių laisvųjų narių vektorius:
bnq = zeros(523,1);
%
% Tikslų funkcijos koeficientų vektorius:
c = [zeros(500,1); 160; 282.85; 160];
%
% Sprendžiamas tiesinio programavimo uždavinys:
options = optimset('LargeScale','off','Simplex','off');
[x,fval,exitflag] = linprog(c,Anq,bnq,Aeq,beq,[],[],[],options);
%
% Iteracijos rezultatų spausdinimas:
disp(['Iteracijos numeris: ' num2str(iteracija)]);
N = x(1:260);
u = x(261:500);
A0 = [x(501); x(502); x(503)]
fval, exitflag
%
% Rezultatų matricos pildymas:
rez(1,iteracija) = iteracija; rez(2,iteracija) = fval;
rez(3:5,iteracija) = A0; rez(6,iteracija) = max(abs(u));
rez(7,iteracija) = max(N); rez(8,iteracija) = min(N);
%
% Konvergencijos tikrinimas:
tikslumas = ((fval-fval0)*100)/fval;
if abs(tikslumas)<=0.0001, break;
end;
%
% Duomenų parengimas naujai iteracijai:
A01 = x(501); A02 = x(502); A03 = x(503);
fval0 = fval;
end;
%
% Galutinių rezultatų spausdinimas:
disp('Galutiniai optimizavimo rezultatai:');
A0 = [A01; A02; A03]
fval, exitflag, rez

```

Kito bokšto optimizavimo komandinis tekstas pateiktas prieduose. Abiejų bokštų optimizavimo rezultatai pateikti 4.1 ir 4.2 lentelėse. Prieduose taip pat pateikti pusiausvyros lygčių koeficientų matricos bei savojo svorio vektoriaus sudarymo komandiniai tekstai.

4.1 lentelė. Pirmojo bokšto statinio optimizavimo be elementų stabilumo sąlygų rezultatai

	1 iteracija	2 iteracija	3 iteracija	4 iteracija	5 iteracija	6 iteracija	7 iteracija
V, m ³	8,03043	0,19240	0,09040	0,08908	0,08906	0,08906	0,08906
A ₀₁ , cm ²	496,5	11,33549	4,96075	4,87785	4,87677	4,87675	4,87675
A ₀₂ , cm ²	2,28127	0,32521	0,32502	0,32503	0,32503	0,32503	0,32503
A ₀₃ , cm ²	1,36919	0,11489	0,11489	0,11489	0,11489	0,11489	0,11489
u _{max} , cm	0,1131	1,8487	33,3986	64,5366	65,4775	65,4899	65,4901
S _{max} , kN	53,6098	7,6423	99,4224	101,3706	101,3959	101,3963	101,3963
S _{min} , kN	-11667,75	-266,3841	-116,5776	-114,6294	-114,6041	-114,6037	-114,6037

4.2 lentelė. Antrojo bokšto statinio optimizavimo be elementų stabilumo sąlygų rezultatai

	1 iteracija	2 iteracija	3 iteracija	4 iteracija	5 iteracija	6 iteracija	7 iteracija
V, m^3	19,49815	0,46049	0,09792	0,08494	0,08409	0,08386	0,08377
A_{01}, cm^2	462,045	17,14034	4,80929	4,67412	4,70898	4,71697	4,72057
A_{02}, cm^2	192,8356	2,9379	0,3247	0,1700	0,1662	0,1655	0,1652
A_{03}, cm^2	192,3432	3,2043	0,3908	0,1539	0,0764	0,0562	0,0478
A_{04}, cm^2	53,239	0,3561	0,0032	0,0001	0	0	0
u_{max}, cm	0,1083	0,5520	15,9009	60,6052	66,7648	66,6608	66,6509
S_{max}, kN	4520,065	75,301	88,326	96,866	97,926	98,101	98,175
S_{min}, kN	-10858,1	-402,798	-113,018	-109,842	-110,661	-110,849	-110,933
	8 iteracija	9 iteracija	10 iter.	–	–	–	–
V, m^3	0,08373	0,08370	0,08369	–	–	–	–
A_{01}, cm^2	4,72246	4,72354	4,72417	–	–	–	–
A_{02}, cm^2	0,16505	0,16496	0,16491	–	–	–	–
A_{03}, cm^2	0,04360	0,04127	0,03991	–	–	–	–
A_{04}, cm^2	0	0	0	–	–	–	–
u_{max}, cm	66,6476	66,6462	66,6455	–	–	–	–
S_{max}, kN	98,213	98,234	98,246	–	–	–	–
S_{min}, kN	-110,978	-111,003	-111,018	–	–	–	–

Pirmajam bokštui prireikė 6 skaičiavimo iteracijų, kol buvo surastas optimalus sprendinys. Antrajam bokštui prireikė 10 iteracijų. Analizuojant antrojo bokšto iteracinio skaičiavimo eigą (žr. 4.2 lentelę), galima pastebėti, kad reikalinga skerspjūvio A_{04} ploto reikšmė po 4 iteracijų tapo lygi nuliui, vadinasi, optimali konstrukcija bus tuomet, kai joje visai nebus šios grupės elementų.

4.5.2. Abiejų bokštų optimizavimas pagal matematinį modelį (4.35)–(4.46) be strypų stabilumo sąlygų

Čia pateiktas pirmojo bokšto optimizacijos uždavinio pagal matematinį modelį (4.35)–(4.46) programos MATLAB komandinis tekstas:

```
clear all
clc
% PIRMOJO BOKŠTO OPTIMIZAVIMAS, ĮVERTINANT DINAMINIUS EFEKTUS
% Pagal matematinį modelį (4.35)–(4.46)
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; sigma_y = 235000; ro = 7.8; mk = 2;
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Įkeliami pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
```

```

% Sudaromas statinių apkrovų vektorius:
F = zeros(240,1);
F(229) = 1.04; F(232) = 1.04; F(235) = 1.04; F(238) = 1.04;
%
% Pradiniai elementų skerspjūvių plotai:
A01 = 1; A02 = 1; A03 = 1;
% Pradinė tikslo funkcijos reikšmė:
fval0 = 160*A01 + 282.85*A02 + 160*A03;
%
% Rezultatų matricos parengimas:
rez = zeros(9,1);
%
% Ciklo pradžia:
for iteracija = 1:100;
%
% Įkeliamas savojo svorio vektorius:
savojo_svorio_vektorius;
%
% Formuojama pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A01); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A02); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A03); end;
%
% Sudaromos poslinkių ir įrašų infliuentinės matricos:
beta = inv(A*inv(D)*A'); alfa = inv(D)*A'*beta;
%
% Sudaroma loginė matrica:
P = zeros(80,240);
for i = 1:80;
P(i,(3*i-2)) = 1; end;
%
% Sudaromos dinaminių poslinkių ir įrašų infl. matricos:
beta_dyn = P*beta*P'; alfa_dyn = alfa*P';
%
% Įkeliamas masių matrica:
masiu_matrica;
%
% Apskaičiuojamas savųjų svyravimų pagrindinio tono dažnis:
C = beta_dyn*M;
lambda = eig(C); omega = sqrt(1/lambda(1));
teta = 0.95*omega;
%
% Sudaroma matrica beta_m:
beta_m = teta^(-2)*inv(M);
%
% Sudaromas žadinančių apkrovų vektorius:
F0 = zeros(80,1);
F0(77) = 1.66; F0(78) = 1.66; F0(79) = 1.66; F0(80) = 1.66;
%
% Apskaičiuojamas inercijos jėgų vektorius:
Z = -inv(beta_dyn - beta_m)*beta_dyn*F0;
%
% Randamas dinaminių įrašų vektorius:
S_dyn = alfa_dyn*(Z + F0);
%
% Toliau sudaromos matricos paprogramei linprog.
% Tikslo funkcijos koeficientų matrica:
c = [zeros(500,1); 160; 282.85; 160];
% Sudaroma konfigūracijos matrica Gama:
Gama = zeros(520,3);

```

```

Gama(1:80,1) = -ones(80,1)*sigma_y;
Gama(81:180,2) = -ones(100,1)*sigma_y;
Gama(181:260,3) = -ones(80,1)*sigma_y;
Gama(261:340,1) = -ones(80,1)*sigma_y;
Gama(341:440,2) = -ones(100,1)*sigma_y;
Gama(441:520,3) = -ones(80,1)*sigma_y;
%
% Sudaroma stiprumo salygu matrica Fi:
Fi = zeros(520,260);
Fi(1:260,:) = eye(260);
Fi(261:520,:) = -eye(260);
%
% Sudaroma apribojimų lygybių koeficientų matrica:
Aeq = zeros(500,503);
Aeq(1:240,1:260) = A;
Aeq(241:500,1:260) = D; Aeq(241:500,261:500) = -1*A';
%
% Sudaromas apribojimų lygybių laisvųjų narių vektorius:
beq = zeros(500,1);
beq(1:240) = F + G + A*S_dyn;
%
% Sudaroma apribojimų nelygybių koeficientų matrica:
Anq = zeros(523,503);
Anq(1:520,1:260) = Fi; Anq(1:520,501:503) = Gama;
Anq(521:523,501:503) = -eye(3);
%
% Sudaromas apribojimų nelygybių laisvųjų narių vektorius:
bnq = zeros(523,1);
%
% Sprendžiamas tiesinio programavimo uždavinys:
options = optimset('LargeScale','off','Simplex','off');
[x,fval,exitflag] = linprog(c,Anq,bnq,Aeq,beq,[],[],[],options);
%
% Iteracijos rezultatų spausdinimas:
disp(['Iteracijos numeris: ' num2str(iteracija)]);
N = x(1:260); u = x(261:500);
A0 = [x(501); x(502); x(503)]
fval, exitflag
%
% Rezultatų matricos pildymas:
rez(1,iteracija) = iteracija; rez(2,iteracija) = fval;
rez(3:5,iteracija) = A0; rez(6,iteracija) = max(abs(u));
rez(7,iteracija) = max(N); rez(8,iteracija) = min(N);
rez(9,iteracija) = omega;
%
% Konvergencijos tikrinimas:
tikslumas = ((fval-fval0)*100)/fval;
if abs(tikslumas)<=0.001, break;
end;
%
% Duomenų parengimas naujai iteracijai:
A01 = x(501); A02 = x(502); A03 = x(503);
fval0 = fval;
end;
%
% Galutinių rezultatų spausdinimas:
disp('Galutiniai optimizavimo rezultatai:');
A0 = [A01; A02; A03]
N = x(1:260); u = x(261:500);
fval, exitflag, rez

```

Kito bokšto optimizavimo komandinis tekstas pateiktas prieduose. Abiejų bokštų iteracinio skaičiavimo rezultatai pateikti 4.3 ir 4.4 lentelėse.

4.3 lentelė. Pirmojo bokšto dinaminio optimizavimo be elementų stabilumo sąlygų rezultatai

	1 iteracija	2 iteracija	3 iteracija	4 iteracija	5 iteracija	6 iteracija	7 iteracija
V, m^3	8,541	0,67425	0,60806	0,60513	0,60499	0,60499	0,60499
A_{01}, cm^2	524,012	36,8154	32,8764	32,7287	32,7214	32,7211	32,7211
A_{02}, cm^2	4,7680	2,8949	2,5985	2,5713	2,5701	2,5701	2,5701
A_{03}, cm^2	1,3692	0,2072	0,5336	0,5465	0,5471	0,5472	0,5472
u_{max}, cm	0,187	6,900	56,872	63,235	63,560	63,575	63,576
S_{max}, kN	111,859	529,015	737,068	736,121	736,063	736,060	736,060
S_{min}, kN	-12314,277	-865,163	-772,596	-769,123	-768,953	-768,946	-768,945
$\omega, rad/s$	5,7090	6,3754	6,1842	5,9704	5,9601	5,9596	5,9595

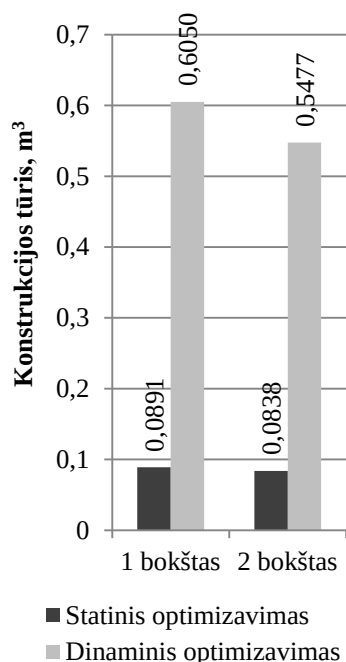
4.4 lentelė. Antrojo bokšto dinaminio optimizavimo be elementų stabilumo sąlygų rezultatai

	1 iter.	2 iter.	3 iter.	4 iter.	5 iter.	6 iter.	7 iter.	8 iter.
V, m^3	20,4133	1,15035	0,63474	0,57660	0,56965	0,54743	0,54629	0,54769
A_{01}, cm^2	484,23	43,3399	31,3899	31,3421	31,4102	30,3111	30,3085	30,4138
A_{02}, cm^2	201,4788	7,1345	2,0483	1,3076	1,2887	1,2375	1,2326	1,2360
A_{03}, cm^2	202,9	8,2509	2,4870	0,9967	0,5481	0,4030	0,3483	0,3211
A_{04}, cm^2	53,2391	0,3590	0,0028	0,0001	0	0	0	0
u_{max}, cm	0,148	3,438	41,809	61,970	65,112	62,831	65,247	65,516
S_{max}, kN	4768,157	387,556	689,271	704,203	707,459	681,787	682,498	684,991
S_{min}, kN	-11379,6	-1018,49	-737,663	-736,539	-738,139	-712,310	-712,250	-714,725
$\omega, rad/s$	5,492	7,080	6,402	6,001	5,942	5,937	5,869	5,870

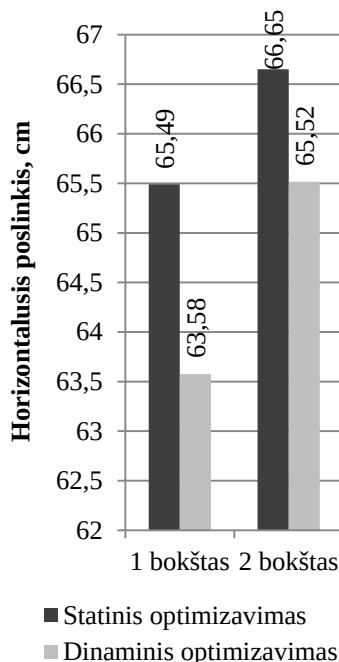
Čia, kaip ir optimizavimo veikiant statinėms apkrovoms atveju, antrojo bokšto iteracinio skaičiavimo metu nuo 5 iteracijos skerspjūvio ploto A_{04} reikšmė tampa labai artima nuliui. Po 8 iteracijos skaičiavimas nutrūksta, nes reikalingas skerspjūvio plotas tampa lygus nuliui, o su nuline jo reikšme iteracinis procesas negali būti tęsiamas (charakteringosios matricos $[C]$ tikrinių reikšmių nustatymas tampa neįmanomas). Taigi, galima teigti, kad optimalus konstrukcijos projektas gaunamas nutrūkus skaičiavimams.

4.5.3. Optimizavimo rezultatų palyginamoji analizė

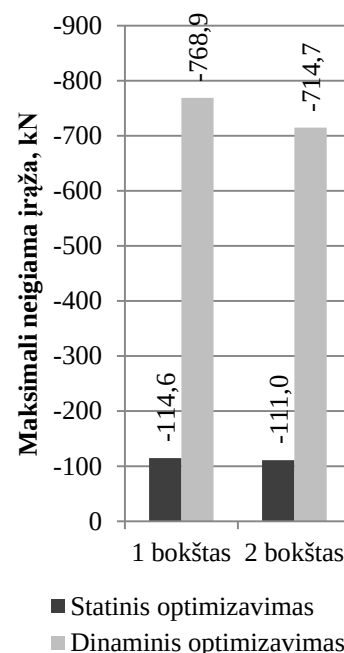
Toliau bus pateikti grafikai, kuriuose lyginamos optimalių konstrukcijų tūrio, maksimalaus poslinkio ir maksimalios įrašos reikšmės, gautos taikant statinį ir dinaminį optimizavimą.



4.1 pav. Optimizavimo rezultatų palyginimas – bendras konstrukcijos tūris



4.2 pav. Optimizavimo rezultatų palyginimas – maksimalus horizontalusis poslinkis



4.3 pav. Optimizavimo rezultatų palyginimas – maksimali neigiama įrąža

Iš 4.1, 4.2 ir 4.3 paveiksluose pateiktų grafikų matyti, kad dinaminių efektų įvertinimas daro labai didelę įtaką konstrukcijos optimizavimo rezultatams. Svarbiausias optimalios konstrukcijos parametras turbūt yra bendras jos tūris. Matyti, jog abiejų bokštų atvejais optimalios konstrukcijos tūris, gautas įvertinant dinامينius efektus, net kelis kartus viršija tūrį, gautą įvertinus tik statines apkrovas: pirmojo bokšto tūris skiriasi net 6,8 karto, antrojo – 6,5 karto. Antrosios struktūros bokšto bendras tūris tiek statinio, tiek dinaminio optimizavimo atvejais gautas šiek tiek mažesnis, todėl galima patvirtinti jau anksčiau padarytą išvadą: antroji bokšto struktūra yra optimali pirmosios atžvilgiu.

Konstrukcijos maksimalus horizontalusis poslinkis (žr. 4.2 pav.) šiuo atveju mažai ką pasako. Jų reikšmės visais optimizavimo atvejais skiriasi nedaug. Į spęstus optimizavimo uždavinius nebuvo įtraukti standumo apribojimai, todėl plačiau analizuoti šių poslinkių nėra prasmės. Žinoma, standumo apribojimas dažnai yra svarbus konstrukcijų projektavimo momentas, tačiau šiame darbe apsiribojama tik stiprumo ir elementų pastovumo sąlygomis bei konstruktyviniais apribojimais.

Konstrukcijos įrąžos, gautos taikant statinį ir dinaminį optimizavimą, taip pat skiriasi labai daug (maksimalios neigiamos įrąžos palyginimas pateiktas 4.3 paveiksle). Jų reikšmės abiejų bokštų atveju skiriasi net apie 6,5 karto. Antrosios struktūros bokšto maksimali neigiama įrąža yra didesnė už pirmosios struktūros bokšto įrąžą. Tai dar kartą įrodo, kad antrojo bokšto įrąžos pasiskirsto racionaliau, o nuo to tiesiogiai priklauso ir optimalus konstrukcijos tūris.

4.5.4. Bokšto optimizavimas pagal matematinį modelį (4.35)–(4.46) su strypų stabilumo sąlygomis ir konstruktyviniais apribojimais

Siekiant parodyti modifikuoto matematinio modelio taikymo galimybes, toliau bus atliekamas pirmojo bokšto optimizavimas pagal pilną matematinį modelį (4.35)–(4.46). Uždavinio komandinis MATLAB programos tekstas atrodo taip:

```
clear all
clc
% PIRMOJO BOKŠTO OPTIMIZAVIMAS, ĮVERTINANT DINAMINIUS EFEKTUS
% Pagal matematinį modelį (4.35)–(4.46)
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; sigma_y = 235000; ro = 7.8; mk = 2;
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Įkeliami pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaromas statinės apkrovos vektorius:
F = zeros(240,1);
F(229) = 1.04; F(232) = 1.04; F(235) = 1.04; F(238) = 1.04;
%
% Pradiniai elementų skerspjūvių plotai:
A01 = 0.000836; A02 = 0.000836; A03 = 0.000836;
% Pradinė tikslo funkcijos reikšmė:
fval0 = 160*A01 + 282.85*A02 + 160*A03;
%
% Ciklo pradžia:
for iteracija = 1:100;
%
% Įkeliamas savojo svorio vektorius:
savojo_svorio_vektorius;
%
% Formuojama pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A01); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A02); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A03); end;
%
% Sudaromos poslinkių ir įrašų influentinės matricos:
beta = inv(A*inv(D)*A'); alfa = inv(D)*A'*beta;
%
% Sudaroma loginė matrica:
P = zeros(80,240);
for i = 1:80;
P(i,(3*i-2)) = 1; end;
%
% Sudaromos dinaminės poslinkių ir įrašų influentinės matricos:
beta_dyn = P*beta*P'; alfa_dyn = alfa*P';
%
% Įkeliami masių matrica:
masiu_matrica;
%
% Apskaičiuojamas savųjų svyravimų pagrindinio tono dažnis:
C = beta_dyn*M;
lambda = eig(C); omega = sqrt(1/lambda(1));
teta = 0.95*omega;
%
% Sudaroma matrica beta_m:
beta_m = teta^(-2)*inv(M);
```

```

% Sudaromas žadinančių apkrovų vektorius:
F0 = zeros(80,1);
F0(77) = 1.66; F0(78) = 1.66; F0(79) = 1.66; F0(80) = 1.66;
%
% Apskaičiuojamas inercijos jėgų vektorius:
Z = -inv(beta_dyn - beta_m)*beta_dyn*F0;
%
% Randamas dinaminis įrašų vektorius:
S_dyn = alfa_dyn*(Z + F0);
%
% Toliau sudaromos matricos paprogramei linprog.
% Tikslų funkcijos koeficientų matrica:
c = [zeros(500,1); 160; 282.85; 160];
%
% Sudaroma konfigūracijos matrica Gama:
Gama = zeros(520,3);
Gama(1:80,1) = ones(80,1)*sigma_y;
Gama(81:180,2) = ones(100,1)*sigma_y;
Gama(181:260,3) = ones(80,1)*sigma_y;
Gama(261:340,1) = ones(80,1)*sigma_y;
Gama(341:440,2) = ones(100,1)*sigma_y;
Gama(441:520,3) = ones(80,1)*sigma_y;
%
% Sudaroma stiprumo sąlygų matrica Fi:
Fi = zeros(520,260);
Fi(1:260,:) = eye(260);
Fi(261:520,:) = -eye(260);
%
% Apskaičiuojami inercijos momentai:
t = 0.005; r1 = 2*t; r2 = r1 - t;
%
a11 = (A01 + 8*r1*t - pi*r1^2 + pi*r2^2)/(4*t); a12 = a11 - 2*t;
I_didysis1 = (a11^4 - 2*r1*a11^3 + 2*r1*(a11 - 2*r1)^3)/12 + ...
((9*pi^2 - 64)*r1^4)/(36*pi) + (pi*r1^2)*((3*pi*a11 - 6*pi*r1 + 8*r1)/(6*pi))^2;
I_mazasis1 = (a12^4 - 2*r2*a12^3 + 2*r2*(a12 - 2*r2)^3)/12 + ...
((9*pi^2 - 64)*r2^4)/(36*pi) + (pi*r2^2)*((3*pi*a12 - 6*pi*r2 + 8*r2)/(6*pi))^2;
I1 = I_didysis1 - I_mazasis1;
%
a21 = (A02 + 8*r1*t - pi*r1^2 + pi*r2^2)/(4*t); a22 = a21 - 2*t;
I_didysis2 = (a21^4 - 2*r1*a21^3 + 2*r1*(a21 - 2*r1)^3)/12 + ...
((9*pi^2 - 64)*r1^4)/(36*pi) + (pi*r1^2)*((3*pi*a21 - 6*pi*r1 + 8*r1)/(6*pi))^2;
I_mazasis2 = (a22^4 - 2*r2*a22^3 + 2*r2*(a22 - 2*r2)^3)/12 + ...
((9*pi^2 - 64)*r2^4)/(36*pi) + (pi*r2^2)*((3*pi*a22 - 6*pi*r2 + 8*r2)/(6*pi))^2;
I2 = I_didysis2 - I_mazasis2;
%
a31 = (A03 + 8*r1*t - pi*r1^2 + pi*r2^2)/(4*t); a32 = a31 - 2*t;
I_didysis3 = (a31^4 - 2*r1*a31^3 + 2*r1*(a31 - 2*r1)^3)/12 + ...
((9*pi^2 - 64)*r1^4)/(36*pi) + (pi*r1^2)*((3*pi*a31 - 6*pi*r1 + 8*r1)/(6*pi))^2;
I_mazasis3 = (a32^4 - 2*r2*a32^3 + 2*r2*(a32 - 2*r2)^3)/12 + ...
((9*pi^2 - 64)*r2^4)/(36*pi) + (pi*r2^2)*((3*pi*a32 - 6*pi*r2 + 8*r2)/(6*pi))^2;
I3 = I_didysis3 - I_mazasis3;
%
% Apskaičiuojamos kritinės jėgos:
Fcr1 = (pi^2*E*I1)/(L1^2); Fcr2 = (pi^2*E*I2)/(L2^2);
Fcr3 = (pi^2*E*I3)/(L3^2);
% Apskaičiuojami kritiniai įtempiai:
sigma_cr1 = Fcr1/A01; sigma_cr2 = Fcr2/A02;
sigma_cr3 = Fcr3/A03;
%
% Sudaromos klupumo sąlygų matricos Pi ir E:
Pi = zeros(260,3);
Pi(1:80,1) = ones(80,1)*sigma_cr1;
Pi(81:180,2) = ones(100,1)*sigma_cr2;
Pi(181:260,3) = ones(80,1)*sigma_cr3;
B = eye(260);
%
% Sudaroma apribojimų lygybių koeficientų matrica:
Aeq = zeros(500,503);
Aeq(1:240,1:260) = A;
Aeq(241:500,1:260) = D; Aeq(241:500,261:500) = -1*A';

```

```

% Sudaromas apribojimų lygybių laisvųjų narių vektorius:
beq = zeros(500,1);
beq(1:240) = F + G + A*S_dyn;
%
% Sudaroma apribojimų nelygybių koeficientų matrica:
Anq = zeros(783,503);
Anq(1:520,1:260) = Fi; Anq(1:520,501:503) = -Gama;
Anq(521:780,1:260) = -B; Anq(521:780,501:503) = -Pi;
Anq(781:783,501:503) = -eye(3);
%
% Sudaromas apribojimų nelygybių laisvųjų narių vektorius:
bnq = zeros(783,1);
Amin = 0.000836;
bnq(781:783) = -1*[Amin; Amin; Amin];
%
% Sprendžiamas tiesinio programavimo uždavinys:
options = optimset('LargeScale','off','Simplex','off');
[x,fval,exitflag] = linprog(c,Anq,bnq,Aeq,beq,[],[],[],options);
%
% Iteracijos rezultatų spausdinimas:
disp(['Iteracijos numeris: ' num2str(iteracija)]);
A0 = [x(501); x(502); x(503)]
fval, exitflag
%
S1 = x(1:80); S2 = x(81:180); S3 = x(181:260);
% Rezultatų surinkimas:
rez(1,iteracija) = iteracija;
rez(2,iteracija) = fval;
rez(3:5,iteracija) = A0;
rez(6,iteracija) = exitflag;
rez(7,iteracija) = max(x(261:500));
rez(8,iteracija) = min(S1); rez(9,iteracija) = min(S2);
rez(10,iteracija) = min(S3);
rez(11,iteracija) = Fcr1; rez(12,iteracija) = Fcr2;
rez(13,iteracija) = Fcr3;
rez(14,iteracija) = omega;
%
% Konvergencijos tikrinimas:
tikslumas = ((fval-fval0)*100)/fval;
if abs(tikslumas) <= 0.001, break;
end;
%
% Duomenų parengimas naujai iteracijai:
A01 = x(501); A02 = x(502); A03 = x(503);
fval0 = fval;
end;
%
% Galutinių rezultatų spausdinimas:
disp('Galutiniai optimizavimo rezultatai:');
A0 = [A01; A02; A03]
S = x(1:260); u = x(261:500);
fval, exitflag, rez

```

Optimizavimo rezultatai pateikti 4.5 lentelėje. Reikėtų paminėti, kad šiuose skaičiavimuose gniuždomiems elementams buvo taikomos Eulerio klupumo sąlygos, apie kurias buvo kalbėta anksčiau. Buvo priimta, kad elementų skerspjūviai yra SHS tipo su pastoviu 5 mm sienutės storiu. Kadangi skerspjūvio kintamas parametras yra tik vienas, t. y. išorinis matmuo, pagal atitinkamas formules jis nesunkiai išsireiškiamas iš skerspjūvio ploto. Žinant matmenis, vėliau nustatomos elementų kritinės jėgos ir kritiniai įtempiai, kurie tikslinami kiekvienoje iteracijoje.

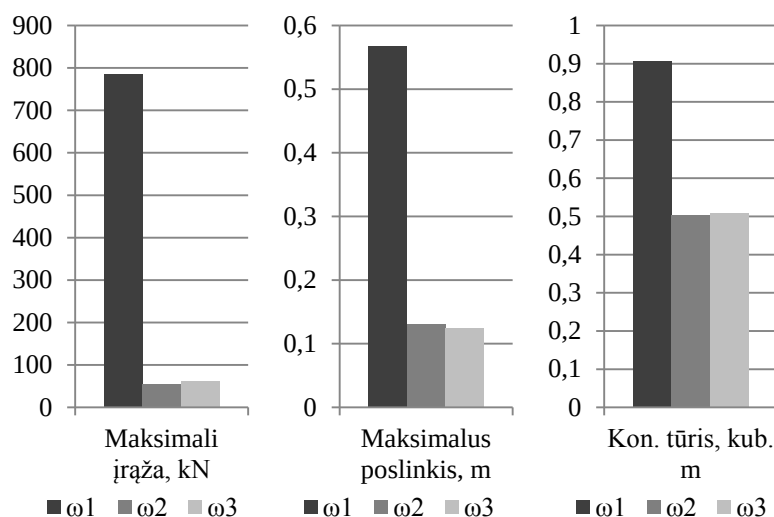
Be klupumo sąlygų į šį uždavinį dar įtraukti ir konstruktyviniai apribojimai. Priimta, kad visų elementų skerspjūviai turi būti ne mažesni kaip SHS 50×50 ($A_{min} = 8,36 \text{ cm}^2$).

4.5 lentelė. Pirmojo bokšto dinaminio optimizavimo su stabilumo sąlygomis rezultatai

	1 iteracija	2 iteracija	3 iteracija	4 iteracija	5 iteracija	6 iteracija
V, m^3	1,10352	0,91058	0,90622	0,90611	0,90610	0,90610
A_{01}, cm^2	45,8310	33,7726	33,4995	33,4928	33,4926	33,4926
A_{02}, cm^2	8,3600	8,3600	8,3600	8,3600	8,3600	8,3600
A_{03}, cm^2	8,3600	8,3600	8,3600	8,3600	8,3600	8,3600
u_{max}, cm	222,06	42,149	56,495	56,939	56,951	56,951
$S_{1,min}, kN$	-769,053	-793,656	-787,239	-787,081	-787,077	-787,077
$S_{2,min}, kN$	-59,259	-63,964	-62,771	-62,741	-62,741	-62,741
$S_{3,min}, kN$	-13,616	-10,908	-11,613	-11,630	-11,630	-11,630
$F_{cr,1}, kN$	140,283	21219,6	8552,74	8348,84	8343,85	8343,73
$F_{cr,2}, kN$	70,141	70,141	70,141	70,141	70,141	70,141
$F_{cr,3}, kN$	140,283	140,283	140,283	140,283	140,283	140,283
$\omega_1, rad/s$	3,3056	6,4056	5,8142	5,7983	5,7979	5,7979

Optimalus sprendinys buvo gautas atlikus 6 iteracijas. Gauti tokie optimalūs elementų skerspjūviai: $A_1 = 33,49 cm^2$, $A_2 = 8,36 cm^2$, $A_3 = 8,36 cm^2$. Minimalios plieno sąnaudos – $0,9061 m^3$. Matyti, kad A_2 ir A_3 parinkti pagal konstruktyvinius reikalavimus.

Visi optimizavimo, įvertinant dinامينius efektus, uždaviniai buvo sprendžiami svarbia laikant tik pagrindinę konstrukcijos svyravimų formą. Siekiant nustatyti, kokią įtaką optimizavimo rezultatams daro kitų svyravimo formų įvertinimas, papildomai buvo išspręsti ir kiti optimizavimo uždaviniai. Rezultatai parodė, kad kiti dažniai sukuria kur kas mažiau pavojingus įtempių ir deformacijų būvius. 4.4 paveiksle pateikti grafikai, kuriuose palygintos kai kurių parametų reikšmės, gautos įvertinant skirtingus dažnius.



4.4 pav. Kai kurių optimalios konstrukcijos parametų palyginimas, kai įvertinami skirtingi savųjų svyravimų dažniai

4.6. Skyriaus išvados

Šiame skyriuje pasiūlyta optimizacijos uždavinio modifikacija, kuri leidžia nustatyti optimalius konstrukcijos elementų skerspjūvius, kartu įvertinant statinių ir dinaminių apkrovų sukeltus efektus. Modifikuotas modelis vienodai sėkmingai gali būti taikomas, kai konstrukciją veikia neapibrėžto ir pastovaus dažnio žadinančios apkrovos. Darbe ištirtos pasiūlyto matematinio modelio taikymo galimybės. Tyrimai parodė, kad skaičiavimuose reikėtų atsižvelgti tik į tas konstrukcijos savųjų svyravimų formas, kurios susijusios su žadinančių apkrovų veikimo pobūdžiu. Tirtos konstrukcijos atveju svarbi buvo tik pirmoji svyravimų forma.

Tamprių konstrukcijų optimizavimo uždaviniai paprastai formuluojami kaip netiesinio matematinio programavimo uždaviniai, tačiau jų sprendimą galima palengvinti taikant iteracinius skaičiavimo metodus. Iteracinis skaičiavimo metodas papildomai leidžia įvertinti ir konstrukcijos savąjį svorį, kuris yra labai svarbus projektuojant realias konstrukcijas.

Dinaminių efektų įvertinimas projektuojant kai kurias (ypač liaunas) konstrukcijas yra labai svarbus. Tyrimai parodė, kad optimizavimo rezultatai, gauti įvertinant dinامينius efektus, nuo gautųjų neįvertinant apkrovų dinamiškumo, skiriasi net kelis kartus. Tirta bokšto atveju optimalios konstrukcijos tūris skyrėsi net 6,5 karto.

Darbe tirti dviejų skirtingų struktūrų bokštai. Spręsti konstrukcijų optimizavimo uždaviniai parodė, kad daugeliu atveju tinkamesnė yra antroji bokšto struktūra.

Į modifikuotą optimizavimo matematinį modelį buvo įtrauktos stiprumo, elementų stabilumo sąlygos bei konstruktyviniai apribojimai. Projektuojant liaunas konstrukcijas svarbu yra užtikrinti ir pakankamą jų standumą. Tam tikslui modelis turėtų būti papildytas ir standumo apribojimais.

DARBO IŠVADOS

Šiame darbe tirti liaunų plieninių bokštų dinaminio skaičiavimo ypatumai. Pirmiausia išanalizuoti literatūros šaltiniai ir juose aprašyti konstrukcijų dinaminės analizės ir optimizavimo metodai. Jų apžvalga pateikta pirmajame darbo skyriuje. Plačiai nagrinėti konstrukcijų savųjų ir priverstinių svyravimų analizės metodai bei įvairios konstrukcijų optimizavimo uždavinių formuluotės. Išanalizavus įvairius literatūros šaltinius nustatyta, kad trūksta optimizavimo uždavinių, kuriuose būtų įvertinami dinaminiai poveikių sukelti efektai.

Konstrukcijos savųjų svyravimų analizės metodų bei jų atmainų yra gana nemažai ir juos visus vienaip ar kitaip būtų galima pritaikyti erdvinėms santvarinėms konstrukcijoms, tačiau ne visų jų taikymas būtų racionalus. Statybinėms strypinėms konstrukcijoms tinkamiausias yra koncentruotų masių metodas. Literatūroje aprašytais tyrimais įrodyta, kad rezultatų tikslumas, naudojant koncentruotų masių metodą, labai mažai skiriasi nuo kitų, tikslesnių, metodų, be to, tokiu būdu suformuluoto dinamikos uždavinio realizacija yra paprastesnė.

Vėjo sukeltas dinaminis poveikis konstrukcijoms yra gana sudėtingas reiškinys ir iki šiol vis dar nėra sukurtų tikslų jo nustatymo būdų. Sudėtingoms ir svarbioms konstrukcijoms vėjo dinaminis poveikis dažniausiai nustatomas atliekant realius bandymus vėjo tuneliuose. Kitais atvejais naudojami apytiksliai skaičiavimo metodai. Darbe apžvelgta literatūra, kurioje aprašomi įvairūs vėjo apkrovų nustatymo metodai. Nustatyta, kad kai kurioms konstrukcijoms galima taikyti supaprastintus žadinančios vėjo apkrovos įvertinimo metodus.

Remiantis literatūros šaltiniais sudarytas strypinių konstrukcijų savųjų svyravimų analizės matematinis modelis. Taikant sudarytą modelį atliktas santvarinio bokšto savųjų svyravimų tyrimas, kuris parodė, kokią įtaką savųjų svyravimų analizės rezultatams daro masių paskirstymo detalumas ir pobūdis. Rezultatai, gauti taikant sudarytą matematinį modelį, taip pat palyginti su programa *Autodesk Robot* gautais rezultatais. Nustatyta, kad dinaminei analizei skirtas koncentruotų masių modelio detalumas turi būti pasirenkamas atsižvelgiant į norimą gauti rezultatų tikslumą. Apytiksliai skaičiavimams konstrukciją pakanka diskretizuoti keliomis masėmis, tačiau jeigu svarbu įvertinti kelias svyravimų formas, reikėtų naudoti detalesnį modelį.

Nustatyta, kad atliekant bokštų savųjų svyravimų analizę racionaliau yra taikyti modifikuotą, arba kitaip – kontinualų, konstrukcijos dinaminį modelį. Taikant šį modelį, analizės uždavinio realizacija tampa paprastesnė, o rezultatai gaunami beveik vienodi.

Darbe taip pat atliktas konstrukcijos priverstinių svyravimų tyrimas, kuris parodė, kokią įtaką skaičiavimų rezultatams daro skirtingi sistemos koncentruotų masių modeliai ir skirtinga strypinė struktūra. Išanalizavus rezultatus nustatyta, kad skirtingi masių paskirstymo variantai konstrukcijos poslinkiams ir įrąžoms reikšmingos įtakos nedaro. Taigi galima daryti išvadą, kad skaičiavimų

paprastumo dėlei konstrukciją diskretizuoti galima vos keliomis koncentruotomis masėmis. Svarbesnis veiksnys čia yra pasirinkta konstrukcijos strypinė struktūra. Antrosios struktūros bokšto įrašos ir poslinkiai yra gerokai mažesni, todėl galima teigti, kad tokia struktūra yra tinkamesnė.

Ketvirtajame darbo skyriuje pasiūlyta optimizacijos uždavinio modifikacija, kuri leidžia nustatyti optimalius konstrukcijos elementų skerspjūvius, kartu įvertinant statinių ir dinaminių apkrovų sukeltus efektus. Darbe ištirtos pasiūlyto matematinio modelio taikymo galimybės. Modifikuotas modelis buvo sėkmingai pritaikytas optimizuojant skirtingų struktūrų bokštus. Tyrimai parodė, kad dinaminių efektų įvertinimas projektuojant kai kurias (ypač liaunas) konstrukcijas yra labai svarbus. Optimizavimo rezultatai, gauti įvertinant dinامينius efektus, nuo gautųjų neįvertinant apkrovų dinamiškumo, skiriasi net kelis kartus. Tirta bokšto atveju optimalios konstrukcijos tūris skyrėsi net 6,5 karto.

Darbe tirti dviejų skirtingų struktūrų bokštai. Spręsti konstrukcijų optimizavimo uždaviniai parodė, kad daugeliu atvejų tinkamesnė yra antroji bokšto struktūra.

Tamprių konstrukcijų optimizavimo uždaviniai paprastai formuluojami kaip netiesinio matematinio programavimo uždaviniai, tačiau jų sprendimą galima palengvinti taikant iteracinius skaičiavimo metodus. Iteracinis skaičiavimo metodas papildomai leidžia įvertinti ir konstrukcijos savąjį svorį, kuris yra labai svarbus projektuojant realias konstrukcijas.

Į modifikuotą optimizavimo matematinį modelį buvo įtrauktos stiprumo, elementų stabilumo sąlygos bei konstruktyviniai apribojimai. Projektuojant liaunas konstrukcijas svarbu yra užtikrinti ir pakankamą jų standumą. Tam tikslui pasiūlytas matematinis modelis turėtų būti papildytas ir standumo apribojimais.

LITERATŪRA

- Adhikari, S.; Friswell, M. I. 2006. *Random Matrix Eigenvalue Problems in Structural Dynamics*. International Journal of Numerical Methods in Engineering 69: 562 – 591.
- Atkočiūnas, J.; Karkauskas, R. 2010. *Tamprųjų plastinių strypinių konstrukcijų optimizavimas*. Vilnius: Technika. 376 p.
- Balendra, T. 1993. *Vibration of Buildings to Wind and Earthquake Loads*. London: Springer-Verlag. 149 p.
- Barauskas, R.; Belevičius, R.; Kačianauskas, R. 2004. *Baigtinių elementų metodo pagrindai*. Vilnius: Technika. 612 p.
- Baublys, P. 2001. *Statybinė mechanika. Deformuojamų sistemų dinamika. Mokomoji knyga*. Vilnius: Technika. 106 p.
- Bhatt, P. 2002. *Programming the Dynamic Analysis of Structures*. New York: Spon Press. 442 p.
- Bottega, W. J. 2006. *Engineering Vibrations*. New York: Taylor & Francis Group. 726 p.
- Chai, W.; Feng, M. Q. 1997. *Vibration Control of Super Tall Buildings Subjected to Wind loads*. International Journal Non-Linear Mechanics. Vol. 32, No. 4: 657 – 668.
- Chajes, M. J.; Zhang, L.; Kirby, J. T. 1996. *Dynamic Analysis of Tall Building Using Reduced-Order Continuum Model*. Journal of structural engineering.
- Cheng, Franklin Y. 2001. *Matrix Analysis of Structural Dynamics. Applications and Earthquake Engineering*. New York: Marcell Dekker. 997 p.
- Chopra, A. K. 1995. *Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering*. New Jersey: Englewood Cliffs. 729 p.
- Čyras, A. 1989. *Statybinė mechanika*. Vilnius: Mokslas. 444 p.
- Dyrbye, C.; Hansen, S. O. 1997. *Wind Loads on Structures*. Chichester: John Wiley & Sons. 226 p.
- Eisley, J. G.; Waas, A. M. 2011. *Analysis of Structures. An Introduction Including Numerical Methods*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd. 622 p.
- Feng, M. Q.; Kim, J. M.; Xue, H. 1998. *Identification of a Dynamic System Using Ambient Vibration Measurements*. Journal of Applied Mechanics: Vol. 65.
- Hodges, H. D.; Pierce, G. A. 2011. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. New York: Cambridge University Press. 247 p.
- Humar, J. L. 2002. *Dynamics of Structures. Second Edition*. Lisse: Swets & Zeitlinger B.V. 967 p.
- Kalanta, S. 2007. *Taikomosios optimizacijos pagrindai*. Vilnius: Technika. 480 p.
- Kappos, A. J. 2002. *Dynamic Loading and Design of Structures*. New York: Spon Press. 374 p.

- Magrab, E. B. 2012. *Vibrations of Elastic systems. With Applications to MEMS and NEMS*. London: Springer Science. 498 p.
- Marwala, T. 2010. *Finite-Element-Model Updating Using Computational Intelligence Techniques. Application to Structural Dynamics*. London: Springer-Verlag. 250 p.
- Miller, R. E. 2000. *Optimization. Foundations and Applications*. Chichester: John Wiley & Sons. 653 p.
- Rao, S. S. 2004. *The Finite Element Method in Engineering*. Oxford: Elsevier Science & Technology Books. 663 p.
- Singiresu, S. R.; 2009. *Engineering Optimization. Theory and Practice*. New Jersey: John Wiley & Sons. 813 p.
- Sircovich Saar, O. 2006. *Dynamics in the Practice of Structural Design*. Boston: WIT Press. 181 p.
- STR 2.05.04.2003. *Poveikiai ir apkrovos*. Vilnius. 105 p.
- STR 2.05.08:2005. *Plieninių konstrukcijų projektavimas. Pagrindinės nuostatos*. Vilnius. 128 p.
- Thomson, W. T.; Dahleh, M. D. 2005. *Theory of Vibrations with Applications*. Tsinghua University Press. 524 p.
- Thorby, D. 2008. *Structural Dynamics and Vibration in Practice. An Engineering Handbook*. Oxford: Elsevier Ltd. 401 p.
- Tobias, M. J. 2011. *Matrices in Engineering Problems*. St. Louis: Morgan & Claypool. 268 p.
- Ulitas, T.; Kalanta, S. 2010. *Santvarų aukščio optimizavimas*. Mokslas – Lietuvos ateitis 6: 56 – 60.
- Wang, D.; Zhang, W. H.; Jiang, J. S. 2004. *Truss Optimization on Shape and Sizing with Frequency Constraints*. AIAA Journal. Vol. 42, No. 3.
- Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. 2005. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann. 631 p.
- Кошур, в. д.; Немировский, ю. в. 1990. *Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций*. Новосибирск: Наука. 198 с.
- Саргсян, А. Е.; Демченко, А. Т.; Дворянчиков, Н. В.; Джинчвелашвили, Г. А. 2000. *Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов*. Москва: Высшая школа. 412 с.
- Смирнов, А. Ф. 1984. *Динамика и устойчивость*. Москва: Стройиздат. 415 с.
- Циглер, Ф. 2002. *Механика твердых тел и жидкостей*. Москва: Ижевск. 912 с.

PRIEDAI

A priedas. Pagrindinių matricių sudarymo komandiniai tekstai

A.1. Pirmojo bokšto pusiausvyros lygčių koeficientų matricos [A] sudarymo komandinis tekstas

```
% Pusiausvyros lygčių matrica:
A = zeros(240,260); k = cosd(45);
A(1,184)=1; A(1,85)=k;
A(2,5)=1; A(2,1)=-1; A(2,86)=k; A(2,82)=-k;
A(3,181)=-1; A(3,86)=-k; A(3,82)=-k; A(3,85)=-k;
A(4,182)=1; A(4,87)=k; A(4,83)=k;
A(5,6)=1; A(5,2)=-1; A(5,87)=k; A(5,83)=-k;
A(6,181)=1;
A(7,182)=-1; A(7,85)=-k;
A(8,7)=1; A(8,3)=-1; A(8,88)=k; A(8,84)=-k;
A(9,183)=1; A(9,88)=k; A(9,84)=k; A(9,85)=k;
A(10,184)=-1; A(10,89)=-k; A(10,81)=-k;
A(11,8)=1; A(11,4)=-1; A(11,89)=k; A(11,81)=-k;
A(12,183)=-1;
A(13,188)=1; A(13,91)=k; A(13,89)=k; A(13,90)=k;
A(14,9)=1; A(14,5)=-1; A(14,91)=k; A(14,89)=-k;
A(15,185)=-1; A(15,90)=-k;
A(16,186)=1;
A(17,10)=1; A(17,6)=-1; A(17,92)=k; A(17,86)=-k;
A(18,185)=1; A(18,92)=k; A(18,86)=k;
A(19,186)=-1; A(19,93)=-k; A(19,87)=-k; A(19,90)=-k;
A(20,11)=1; A(20,7)=-1; A(20,93)=k; A(20,87)=-k;
A(21,187)=1; A(21,90)=k;
A(22,188)=-1;
A(23,12)=1; A(23,8)=-1; A(23,94)=k; A(23,88)=-k;
A(24,187)=-1; A(24,94)=-k; A(24,88)=-k;
A(25,192)=1; A(25,95)=k;
A(26,13)=1; A(26,9)=-1; A(26,96)=k; A(26,92)=-k;
A(27,189)=-1; A(27,96)=-k; A(27,92)=-k; A(27,95)=-k;
A(28,190)=1; A(28,97)=k; A(28,93)=k;
A(29,14)=1; A(29,10)=-1; A(29,97)=k; A(29,93)=-k;
A(30,189)=1;
A(31,190)=-1; A(31,95)=-k;
A(32,15)=1; A(32,11)=-1; A(32,98)=k; A(32,94)=-k;
A(33,191)=1; A(33,98)=k; A(33,94)=k; A(33,95)=k;
A(34,192)=-1; A(34,99)=-k; A(34,91)=-k;
A(35,16)=1; A(35,12)=-1; A(35,99)=k; A(35,91)=-k;
A(36,191)=-1;
A(37,196)=1; A(37,101)=k; A(37,99)=k; A(37,100)=k;
A(38,17)=1; A(38,13)=-1; A(38,101)=k; A(38,99)=-k;
A(39,193)=-1; A(39,100)=-k;
A(40,194)=1;
A(41,18)=1; A(41,14)=-1; A(41,102)=k; A(41,96)=-k;
A(42,193)=1; A(42,102)=k; A(42,96)=k;
A(43,194)=-1; A(43,103)=-k; A(43,97)=-k; A(43,100)=-k;
A(44,19)=1; A(44,15)=-1; A(44,103)=k; A(44,97)=-k;
A(45,195)=1; A(45,100)=k;
A(46,196)=-1;
A(47,20)=1; A(47,16)=-1; A(47,104)=k; A(47,98)=-k;
A(48,195)=-1; A(48,104)=-k; A(48,98)=-k;
A(49,200)=1; A(49,105)=k;
A(50,21)=1; A(50,17)=-1; A(50,106)=k; A(50,102)=-k;
A(51,197)=-1; A(51,106)=-k; A(51,102)=-k; A(51,105)=-k;
A(52,198)=1; A(52,107)=k; A(52,103)=k;
A(53,22)=1; A(53,18)=-1; A(53,107)=k; A(53,103)=-k;
A(54,197)=1;
A(55,198)=-1; A(55,105)=-k;
A(56,23)=1; A(56,19)=-1; A(56,108)=k; A(56,104)=-k;
A(57,199)=1; A(57,108)=k; A(57,104)=k; A(57,105)=k;
A(58,200)=-1; A(58,109)=-k; A(58,101)=-k;
A(59,24)=1; A(59,20)=-1; A(59,109)=k; A(59,101)=-k;
A(60,199)=-1;
A(61,204)=1; A(61,111)=-k; A(61,109)=k; A(61,110)=k;
A(62,25)=1; A(62,21)=-1; A(62,111)=k; A(62,109)=-k;
A(63,201)=-1; A(63,110)=-k;
A(64,202)=1;
A(65,26)=1; A(65,22)=-1; A(65,112)=k; A(65,106)=-k;
A(66,201)=1; A(66,112)=k; A(66,106)=k;
A(67,202)=-1; A(67,113)=-k; A(67,107)=-k; A(67,110)=-k;
A(68,27)=1; A(68,23)=-1; A(68,113)=k; A(68,107)=-k;
A(69,203)=1; A(69,110)=k;
A(70,204)=-1;
A(71,28)=1; A(71,24)=-1; A(71,114)=k; A(71,108)=-k;
A(72,203)=-1; A(72,114)=-k; A(72,108)=-k;
A(73,208)=1; A(73,115)=k;
A(74,29)=1; A(74,25)=-1; A(74,116)=k; A(74,112)=-k;
A(75,205)=-1; A(75,116)=-k; A(75,112)=-k; A(75,115)=-k;
A(76,206)=1; A(76,117)=-k; A(76,113)=-k;
A(77,30)=1; A(77,26)=-1; A(77,117)=k; A(77,113)=-k;
A(78,205)=1;
A(79,206)=-1; A(79,115)=-k;
A(80,31)=1; A(80,27)=-1; A(80,118)=k; A(80,114)=-k;
A(81,207)=1; A(81,118)=k; A(81,114)=k; A(81,115)=k;
A(82,208)=-1; A(82,119)=-k; A(82,111)=-k;
A(83,32)=1; A(83,28)=-1; A(83,119)=k; A(83,111)=-k;
A(84,207)=-1;
A(85,212)=1; A(85,121)=k; A(85,119)=k; A(85,120)=k;
A(86,33)=1; A(86,29)=-1; A(86,121)=k; A(86,119)=-k;
A(87,209)=-1; A(87,120)=-k;
A(88,210)=1;
A(89,34)=1; A(89,30)=-1; A(89,122)=k; A(89,116)=-k;
```

```
A(90,209)=1; A(90,122)=k; A(90,116)=k;
A(91,210)=-1; A(91,123)=-k; A(91,117)=-k; A(91,120)=-k;
A(92,35)=1; A(92,31)=-1; A(92,123)=k; A(92,117)=-k;
A(93,211)=1; A(93,120)=k;
A(94,212)=-1;
A(95,36)=1; A(95,32)=-1; A(95,124)=k; A(95,118)=-k;
A(96,211)=-1; A(96,124)=-k; A(96,118)=-k;
A(97,216)=1; A(97,125)=k;
A(98,37)=1; A(98,33)=-1; A(98,126)=k; A(98,122)=-k;
A(99,213)=-1; A(99,126)=-k; A(99,122)=-k; A(99,125)=-k;
A(100,214)=1; A(100,127)=k; A(100,123)=k;
A(101,38)=1; A(101,34)=-1; A(101,127)=k; A(101,123)=-k;
A(102,213)=1;
A(103,214)=-1; A(103,125)=-k;
A(104,39)=1; A(104,35)=-1; A(104,128)=k; A(104,124)=-k;
A(105,215)=1; A(105,128)=k; A(105,124)=k; A(105,125)=k;
A(106,216)=-1; A(106,129)=-k; A(106,121)=-k;
A(107,40)=1; A(107,36)=-1; A(107,129)=k; A(107,121)=-k;
A(108,215)=-1;
A(109,220)=1; A(109,131)=k; A(109,129)=k; A(109,130)=k;
A(110,41)=1; A(110,37)=-1; A(110,131)=k; A(110,129)=-k;
A(111,217)=-1; A(111,130)=-k;
A(112,218)=1;
A(113,42)=1; A(113,38)=-1; A(113,132)=k; A(113,126)=-k;
A(114,217)=1; A(114,132)=k; A(114,126)=k;
A(115,218)=-1; A(115,133)=-k; A(115,127)=-k; A(115,130)=-k;
A(116,43)=1; A(116,39)=-1; A(116,133)=k; A(116,127)=-k;
A(117,219)=1; A(117,130)=k;
A(118,220)=-1;
A(119,44)=1; A(119,40)=-1; A(119,134)=k; A(119,128)=-k;
A(120,219)=-1; A(120,134)=-k; A(120,128)=-k;
A(121,224)=1; A(121,135)=k;
A(122,45)=1; A(122,41)=-1; A(122,136)=k; A(122,132)=-k;
A(123,221)=-1; A(123,136)=-k; A(123,132)=-k; A(123,135)=-k;
A(124,222)=1; A(124,137)=k; A(124,133)=k;
A(125,46)=1; A(125,42)=-1; A(125,137)=k; A(125,133)=-k;
A(126,221)=1;
A(127,222)=-1; A(127,135)=-k;
A(128,47)=1; A(128,43)=-1; A(128,138)=k; A(128,134)=-k;
A(129,223)=1; A(129,138)=k; A(129,134)=k; A(129,135)=k;
A(130,224)=-1; A(130,139)=-k; A(130,131)=-k;
A(131,48)=1; A(131,44)=-1; A(131,139)=k; A(131,131)=-k;
A(132,223)=-1;
A(133,228)=1; A(133,141)=k; A(133,139)=k; A(133,140)=k;
A(134,49)=1; A(134,45)=-1; A(134,141)=k; A(134,139)=-k;
A(135,225)=-1; A(135,140)=-k;
A(136,226)=1;
A(137,50)=1; A(137,46)=-1; A(137,142)=k; A(137,136)=-k;
A(138,225)=1; A(138,142)=k; A(138,136)=k;
A(139,226)=-1; A(139,143)=-k; A(139,137)=-k; A(139,140)=-k;
A(140,51)=1; A(140,47)=-1; A(140,143)=k; A(140,137)=-k;
A(141,227)=1; A(141,140)=k;
A(142,228)=-1;
A(143,52)=1; A(143,48)=-1; A(143,144)=k; A(143,138)=-k;
A(144,227)=-1; A(144,144)=-k; A(144,138)=-k;
A(145,232)=1; A(145,145)=k;
A(146,53)=1; A(146,49)=-1; A(146,146)=k; A(146,142)=-k;
A(147,229)=-1; A(147,146)=-k; A(147,142)=-k; A(147,145)=-k;
A(148,230)=1; A(148,147)=k; A(148,143)=k;
A(149,54)=1; A(149,50)=-1; A(149,147)=k; A(149,143)=-k;
A(150,229)=1;
A(151,230)=-1; A(151,145)=-k;
A(152,55)=1; A(152,51)=-1; A(152,148)=k; A(152,144)=-k;
A(153,231)=1; A(153,148)=k; A(153,144)=k; A(153,145)=k;
A(154,232)=-1; A(154,149)=-k; A(154,141)=-k;
A(155,56)=1; A(155,52)=-1; A(155,149)=k; A(155,141)=-k;
A(156,231)=-1;
A(157,236)=1; A(157,151)=k; A(157,149)=k; A(157,150)=k;
A(158,57)=1; A(158,53)=-1; A(158,151)=k; A(158,149)=-k;
A(159,233)=-1; A(159,150)=-k;
A(160,234)=1;
A(161,58)=1; A(161,54)=-1; A(161,152)=k; A(161,146)=-k;
A(162,233)=1; A(162,152)=k; A(162,146)=k;
A(163,234)=-1; A(163,153)=-k; A(163,147)=-k; A(163,150)=-k;
A(164,59)=1; A(164,55)=-1; A(164,153)=k; A(164,147)=-k;
A(165,235)=1; A(165,150)=k;
A(166,236)=-1;
A(167,60)=1; A(167,56)=-1; A(167,154)=k; A(167,148)=-k;
A(168,235)=-1; A(168,154)=-k; A(168,148)=-k;
A(169,240)=1; A(169,155)=k;
A(170,61)=1; A(170,57)=-1; A(170,156)=k; A(170,152)=-k;
A(171,237)=-1; A(171,156)=-k; A(171,152)=-k; A(171,155)=-k;
A(172,238)=1; A(172,157)=k; A(172,153)=k;
A(173,62)=1; A(173,58)=-1; A(173,157)=k; A(173,153)=-k;
A(174,237)=1;
A(175,238)=-1; A(175,155)=-k;
A(176,63)=1; A(176,59)=-1; A(176,158)=k; A(176,154)=-k;
A(177,239)=1; A(177,158)=k; A(177,154)=k; A(177,155)=k;
A(178,240)=-1; A(178,159)=-k; A(178,151)=-k;
A(179,64)=1; A(179,60)=-1; A(179,159)=k; A(179,151)=-k;
A(180,239)=-1;
A(181,244)=1; A(181,161)=k; A(181,159)=k; A(181,160)=k;
A(182,65)=1; A(182,61)=-1; A(182,161)=k; A(182,159)=-k;
```

```

A(183,241)=-1; A(183,160)=-k;
A(184,242)=1;
A(185,66)=1; A(185,62)=-1; A(185,162)=k; A(185,156)=-k;
A(186,241)=1; A(186,162)=k; A(186,156)=k;
A(187,242)=-1; A(187,163)=-k; A(187,157)=-k; A(187,160)=-k;
A(188,67)=1; A(188,63)=-1; A(188,163)=k; A(188,157)=-k;
A(189,243)=1; A(189,160)=k;
A(190,244)=-1;
A(191,68)=1; A(191,64)=-1; A(191,164)=k; A(191,158)=-k;
A(192,243)=-1; A(192,164)=-k; A(192,158)=-k;
A(193,248)=1; A(193,165)=k;
A(194,69)=1; A(194,65)=-1; A(194,166)=k; A(194,162)=-k;
A(195,245)=-1; A(195,166)=-k; A(195,162)=-k; A(195,165)=-k;
A(196,246)=1; A(196,167)=k; A(196,163)=k;
A(197,70)=1; A(197,66)=-1; A(197,167)=k; A(197,163)=-k;
A(198,245)=1;
A(199,246)=-1; A(199,165)=-k;
A(200,71)=1; A(200,67)=-1; A(200,168)=k; A(200,164)=-k;
A(201,247)=1; A(201,168)=k; A(201,164)=k; A(201,165)=k;
A(202,248)=-1; A(202,169)=-k; A(202,161)=-k;
A(203,72)=1; A(203,68)=-1; A(203,169)=k; A(203,161)=-k;
A(204,247)=-1;
A(205,252)=1; A(205,171)=k; A(205,169)=k; A(205,170)=k;
A(206,73)=1; A(206,69)=-1; A(206,171)=k; A(206,169)=-k;
A(207,249)=-1; A(207,170)=-k;
A(208,250)=1;
A(209,74)=1; A(209,70)=-1; A(209,172)=k; A(209,166)=-k;
A(210,249)=1; A(210,172)=k; A(210,166)=k;
A(211,250)=-1; A(211,173)=-k; A(211,167)=-k; A(211,170)=-k;
A(212,75)=1; A(212,71)=-1; A(212,173)=k; A(212,167)=-k;
A(213,251)=1; A(213,170)=k;
A(214,252)=-1;
A(215,76)=1; A(215,72)=-1; A(215,174)=k; A(215,168)=-k;
A(216,251)=-1; A(216,174)=-k; A(216,168)=-k;
A(217,256)=1; A(217,175)=k;
A(218,77)=1; A(218,73)=-1; A(218,176)=k; A(218,172)=-k;
A(219,253)=-1; A(219,176)=-k; A(219,172)=-k; A(219,175)=-k;
A(220,254)=1; A(220,177)=k; A(220,173)=k;
A(221,78)=1; A(221,74)=-1; A(221,177)=k; A(221,173)=-k;
A(222,253)=1;
A(223,254)=-1; A(223,175)=-k;
A(224,79)=1; A(224,75)=-1; A(224,178)=k; A(224,174)=-k;
A(225,255)=1; A(225,178)=k; A(225,174)=k; A(225,175)=k;
A(226,256)=-1; A(226,179)=-k; A(226,171)=-k;
A(227,80)=1; A(227,76)=-1; A(227,179)=k; A(227,171)=-k;
A(228,255)=-1;
A(229,260)=1; A(229,180)=k; A(229,179)=k;
A(230,77)=-1; A(230,179)=-k;
A(231,257)=-1; A(231,180)=-k;
A(232,258)=1;
A(233,78)=-1; A(233,176)=-k;
A(234,257)=1; A(234,176)=k;
A(235,258)=-1; A(235,180)=-k; A(235,177)=-k;
A(236,79)=-1; A(236,177)=-k;
A(237,259)=1; A(237,180)=k;
A(238,260)=-1;
A(239,80)=-1; A(239,178)=-k;
A(240,259)=-1; A(240,178)=-k;
A = -1*A;

```

A.2. Antrojo bokšto pusiausvyros lygčių koeficientų matricos sudarymo komandinis tekstas

```

% Pusiausvyros lygciu matrica:
A = zeros(240,340); a = cosd(45);

```

```

%
A(1,244)=1; A(1,321)=a; A(1,87)=a; A(1,90)=a;
A(2,1)=-1; A(2,5)=1; A(2,87)=-a; A(2,90)=a;
A(2,83)=-a; A(2,89)=a;
A(3,241)=-1; A(3,321)=-a; A(3,83)=-a; A(3,89)=-a;
A(4,242)=1; A(4,85)=a; A(4,92)=a;
A(5,2)=-1; A(5,6)=1; A(5,81)=-a; A(5,91)=a;
A(5,85)=-a; A(5,92)=a;
A(6,241)=1; A(6,81)=a; A(6,91)=a;
A(7,242)=-1; A(7,321)=-a; A(7,84)=-a; A(7,93)=-a;
A(8,3)=-1; A(8,7)=1; A(8,88)=-a; A(8,94)=a; A(8,84)=-a;
A(8,93)=a;
A(9,243)=1; A(9,321)=a; A(9,88)=a; A(9,94)=a;
A(10,244)=-1; A(10,82)=-a; A(10,95)=-a;
A(11,4)=-1; A(11,8)=1; A(11,82)=-a; A(11,95)=a;
A(11,86)=-a; A(11,96)=a;
A(12,243)=-1; A(12,86)=-a; A(12,96)=-a;
%
A(13,248)=1; A(13,322)=a; A(13,95)=a; A(13,98)=a;
A(14,5)=-1; A(14,9)=1; A(14,95)=-a; A(14,98)=a;
A(14,91)=-a; A(14,97)=a;
A(15,245)=-1; A(15,322)=-a; A(15,91)=-a; A(15,97)=-a;
A(16,246)=1; A(16,93)=a; A(16,100)=a;
A(17,6)=-1; A(17,10)=1; A(17,89)=-a; A(17,99)=a;
A(17,93)=-a; A(17,100)=a;
A(18,245)=1; A(18,89)=a; A(18,99)=a;
A(19,246)=-1; A(19,322)=-a; A(19,92)=-a; A(19,101)=-a;
A(20,7)=-1; A(20,11)=1; A(20,96)=-a; A(20,102)=a;
A(20,92)=-a; A(20,101)=a;
A(21,247)=1; A(21,322)=a; A(21,96)=a; A(21,102)=a;
A(22,248)=-1; A(22,90)=-a; A(22,103)=-a;
A(23,8)=-1; A(23,12)=1; A(23,90)=-a; A(23,103)=a;
A(23,94)=-a; A(23,104)=a;
A(24,247)=-1; A(24,94)=-a; A(24,104)=-a;
%
A(25,252)=1; A(25,323)=a; A(25,103)=a; A(25,106)=a;

```

```

A(26,9)=-1; A(26,13)=1; A(26,103)=-a; A(26,106)=a;
A(26,99)=-a; A(26,105)=a;
A(27,249)=-1; A(27,323)=-a; A(27,99)=-a; A(27,105)=-a;
A(28,250)=1; A(28,101)=a; A(28,108)=a;
A(29,10)=-1; A(29,14)=1; A(29,97)=-a; A(29,107)=a;
A(29,101)=-a; A(29,108)=a;
A(30,249)=1; A(30,97)=a; A(30,107)=a;
A(31,250)=-1; A(31,323)=-a; A(31,100)=-a; A(31,109)=-a;
A(32,11)=-1; A(32,15)=1; A(32,104)=-a; A(32,110)=a;
A(32,100)=-a; A(32,109)=a;
A(33,251)=1; A(33,323)=a; A(33,104)=a; A(33,110)=a;
A(34,252)=-1; A(34,98)=-a; A(34,111)=-a;
A(35,12)=-1; A(35,16)=1; A(35,98)=-a; A(35,111)=a;
A(35,102)=-a; A(35,112)=a;
A(36,251)=-1; A(36,102)=-a; A(36,112)=-a;
%
A(37,256)=1; A(37,324)=a; A(37,111)=a; A(37,114)=a;
A(38,13)=-1; A(38,17)=1; A(38,111)=-a; A(38,114)=a;
A(38,107)=-a; A(38,113)=a;
A(39,253)=-1; A(39,324)=-a; A(39,107)=-a; A(39,113)=-a;
A(40,254)=1; A(40,109)=a; A(40,116)=a;
A(41,14)=-1; A(41,18)=1; A(41,105)=-a; A(41,115)=a;
A(41,109)=-a; A(41,116)=a;
A(42,253)=1; A(42,105)=a; A(42,115)=a;
A(43,254)=-1; A(43,324)=-a; A(43,108)=-a; A(43,117)=-a;
A(44,15)=-1; A(44,19)=1; A(44,112)=-a; A(44,118)=a;
A(44,108)=-a; A(44,117)=a;
A(45,255)=1; A(45,324)=a; A(45,112)=a; A(45,118)=a;
A(46,256)=-1; A(46,106)=-a; A(46,119)=-a;
A(47,16)=-1; A(47,20)=1; A(47,106)=-a; A(47,119)=a;
A(47,110)=-a; A(47,120)=a;
A(48,255)=-1; A(48,110)=-a; A(48,120)=-a;
%
A(49,260)=1; A(49,325)=a; A(49,119)=a; A(49,122)=a;
A(50,17)=-1; A(50,21)=1; A(50,119)=-a; A(50,122)=a;
A(50,115)=-a; A(50,121)=a;
A(51,257)=-1; A(51,325)=-a; A(51,115)=-a; A(51,121)=-a;
A(52,258)=1; A(52,117)=a; A(52,124)=a;
A(53,18)=-1; A(53,22)=1; A(53,113)=-a; A(53,123)=a;
A(53,117)=-a; A(53,124)=a;
A(54,257)=1; A(54,113)=a; A(54,123)=a;
A(55,258)=-1; A(55,325)=-a; A(55,116)=-a; A(55,125)=-a;
A(56,19)=-1; A(56,23)=1; A(56,120)=-a; A(56,126)=a;
A(56,116)=-a; A(56,125)=a;
A(57,259)=1; A(57,325)=a; A(57,120)=a; A(57,126)=a;
A(58,260)=-1; A(58,114)=-a; A(58,127)=-a;
A(59,20)=-1; A(59,24)=1; A(59,114)=-a; A(59,127)=a;
A(59,118)=-a; A(59,128)=a;
A(60,259)=-1; A(60,118)=-a; A(60,128)=-a;
%
A(61,264)=1; A(61,326)=a; A(61,127)=a; A(61,130)=a;
A(62,21)=-1; A(62,25)=1; A(62,127)=-a; A(62,130)=a;
A(62,123)=-a; A(62,129)=a;
A(63,261)=-1; A(63,326)=-a; A(63,123)=-a; A(63,129)=-a;
A(64,262)=1; A(64,125)=a; A(64,132)=a;
A(65,22)=-1; A(65,26)=1; A(65,121)=-a; A(65,131)=a;
A(65,125)=-a; A(65,132)=a;
A(66,261)=1; A(66,121)=a; A(66,131)=a;
A(67,262)=-1; A(67,326)=-a; A(67,124)=-a; A(67,133)=-a;
A(68,23)=-1; A(68,27)=1; A(68,128)=-a; A(68,134)=a;
A(68,124)=-a; A(68,133)=a;
A(69,263)=1; A(69,326)=a; A(69,128)=a; A(69,134)=a;
A(70,264)=-1; A(70,122)=-a; A(70,135)=-a;
A(71,24)=-1; A(71,28)=1; A(71,122)=-a; A(71,135)=a;
A(71,126)=-a; A(71,136)=a;
A(72,263)=-1; A(72,126)=-a; A(72,136)=-a;
%
A(73,268)=1; A(73,327)=a; A(73,135)=a; A(73,138)=a;
A(74,25)=-1; A(74,29)=1; A(74,135)=-a; A(74,138)=a;
A(74,131)=-a; A(74,137)=a;
A(75,265)=-1; A(75,327)=-a; A(75,131)=-a; A(75,137)=-a;
A(76,266)=1; A(76,133)=a; A(76,140)=a;
A(77,26)=-1; A(77,30)=1; A(77,129)=a; A(77,139)=a;
A(77,133)=-a; A(77,140)=a;
A(78,265)=1; A(78,129)=a; A(78,139)=a;
A(79,266)=-1; A(79,327)=-a; A(79,132)=-a; A(79,141)=-a;
A(80,27)=-1; A(80,31)=1; A(80,136)=-a; A(80,142)=a;
A(80,132)=-a; A(80,141)=a;
A(81,267)=1; A(81,327)=a; A(81,136)=a; A(81,142)=a;
A(82,268)=-1; A(82,130)=-a; A(82,143)=-a;
A(83,28)=-1; A(83,32)=-1; A(83,130)=-a; A(83,143)=a;
A(83,134)=-a; A(83,144)=a;
A(84,267)=-1; A(84,134)=-a; A(84,144)=-a;
%
A(85,272)=1; A(85,328)=a; A(85,143)=a; A(85,146)=a;
A(86,29)=-1; A(86,33)=1; A(86,143)=-a; A(86,146)=a;
A(86,139)=-a; A(86,145)=a;
A(87,269)=-1; A(87,328)=-a; A(87,139)=-a; A(87,145)=-a;
A(88,270)=1; A(88,141)=a; A(88,148)=a;
A(89,30)=-1; A(89,34)=1; A(89,137)=-a; A(89,147)=a;
A(89,141)=-a; A(89,148)=a;
A(90,269)=1; A(90,137)=a; A(90,147)=a;
A(91,270)=-1; A(91,328)=-a; A(91,140)=-a; A(91,149)=-a;
A(92,31)=-1; A(92,35)=1; A(92,144)=-a; A(92,150)=a;
A(92,140)=-a; A(92,149)=a;
A(93,271)=1; A(93,328)=a; A(93,144)=a; A(93,150)=a;
A(94,272)=-1; A(94,138)=-a; A(94,151)=-a;
A(95,32)=-1; A(95,36)=1; A(95,138)=-a; A(95,151)=a;
A(95,142)=-a; A(95,152)=a;
A(96,271)=-1; A(96,142)=-a; A(96,152)=-a;
%
A(97,276)=1; A(97,329)=a; A(97,151)=a; A(97,154)=a;
A(98,33)=-1; A(98,37)=1; A(98,151)=-a; A(98,154)=a;
A(98,147)=-a; A(98,153)=a;
A(99,273)=-1; A(99,329)=-a; A(99,147)=-a; A(99,153)=-a;
A(100,274)=1; A(100,149)=a; A(100,156)=a;
A(101,34)=-1; A(101,38)=1; A(101,145)=a; A(101,155)=a;

```

```

A(101,149)=-a; A(101,156)=a;
A(102,273)=1; A(102,145)=a; A(102,155)=a;
A(103,274)=-1; A(103,329)=-a; A(103,148)=-a; A(103,157)=-a;
A(104,35)=-1; A(104,39)=1; A(104,152)=-a; A(104,158)=a;
A(104,148)=-a; A(104,157)=a;
A(105,275)=1; A(105,329)=a; A(105,152)=a; A(105,158)=a;
A(106,276)=-1; A(106,146)=-a; A(106,159)=-a;
A(107,36)=-1; A(107,40)=1; A(107,146)=-a; A(107,159)=a;
(107,150)=-a; A(107,160)=a;
A(108,275)=-1; A(108,150)=-a; A(108,160)=-a;
%
A(109,280)=1; A(109,330)=a; A(109,159)=a; A(109,162)=a;
A(110,37)=-1; A(110,41)=1; A(110,159)=-a; A(110,162)=a;
A(110,155)=-a; A(110,161)=a;
A(111,277)=-1; A(111,330)=-a; A(111,155)=-a; A(111,161)=-a;
A(112,278)=1; A(112,157)=a; A(112,164)=a;
A(113,38)=-1; A(113,42)=1; A(113,153)=-a; A(113,163)=a;
A(113,157)=-a; A(113,164)=a;
A(114,277)=1; A(114,153)=a; A(114,163)=a;
A(115,278)=-1; A(115,330)=-a; A(115,156)=-a; A(115,165)=-a;
A(116,39)=-1; A(116,43)=1; A(116,160)=-a; A(116,166)=a;
A(116,156)=-a; A(116,165)=a;
A(117,279)=1; A(117,330)=a; A(117,160)=a; A(117,166)=a;
A(118,280)=-1; A(118,154)=-a; A(118,167)=-a;
A(119,40)=-1; A(119,44)=1; A(119,154)=-a; A(119,167)=a;
A(119,158)=-a; A(119,168)=a;
A(120,279)=-1; A(120,158)=-a; A(120,168)=-a;
%
A(121,284)=1; A(121,331)=a; A(121,167)=a; A(121,170)=a;
A(122,41)=-1; A(122,45)=1; A(122,167)=-a; A(122,170)=a;
A(122,163)=-a; A(122,169)=a;
A(123,281)=-1; A(123,331)=-a; A(123,163)=-a; A(123,169)=-a;
A(124,282)=1; A(124,165)=a; A(124,172)=a;
A(125,42)=-1; A(125,46)=1; A(125,161)=-a; A(125,171)=a;
A(125,165)=-a; A(125,172)=a;
A(126,281)=1; A(126,161)=a; A(126,171)=a;
A(127,282)=-1; A(127,331)=-a; A(127,164)=-a; A(127,173)=-a;
A(128,43)=-1; A(128,47)=1; A(128,168)=-a; A(128,174)=a;
A(128,164)=-a; A(128,173)=a;
A(129,283)=1; A(129,331)=a; A(129,168)=a; A(129,174)=a;
A(130,284)=-1; A(130,162)=-a; A(130,175)=-a;
A(131,44)=-1; A(131,48)=1; A(131,162)=-a; A(131,175)=a;
A(131,166)=-a; A(131,176)=a;
A(132,283)=-1; A(132,166)=-a; A(132,176)=-a;
%
A(133,288)=1; A(133,332)=a; A(133,175)=a; A(133,178)=a;
A(134,45)=-1; A(134,49)=1; A(134,175)=-a; A(134,178)=a;
A(134,171)=-a; A(134,177)=a;
A(135,285)=-1; A(135,332)=-a; A(135,171)=-a; A(135,177)=-a;
A(136,286)=1; A(136,173)=a; A(136,180)=a;
A(137,46)=-1; A(137,50)=1; A(137,169)=-a; A(137,179)=a;
A(137,173)=-a; A(137,180)=a;
A(138,285)=1; A(138,169)=a; A(138,179)=a;
A(139,286)=-1; A(139,332)=-a; A(139,172)=-a; A(139,181)=-a;
A(140,47)=-1; A(140,51)=1; A(140,176)=-a; A(140,182)=a;
A(140,172)=-a; A(140,181)=a;
A(141,287)=1; A(141,332)=a; A(141,176)=a; A(141,182)=a;
A(142,288)=-1; A(142,170)=-a; A(142,183)=-a;
A(143,48)=-1; A(143,52)=1; A(143,170)=-a; A(143,183)=a;
A(143,174)=-a; A(143,184)=a;
A(144,287)=-1; A(144,174)=-a; A(144,184)=-a;
%
A(145,292)=1; A(145,333)=a; A(145,183)=a; A(145,186)=a;
A(146,49)=-1; A(146,53)=1; A(146,183)=-a; A(146,186)=a;
A(146,179)=-a; A(146,185)=a;
A(147,289)=-1; A(147,333)=-a; A(147,179)=-a; A(147,185)=-a;
A(148,290)=1; A(148,181)=a; A(148,188)=a;
A(149,50)=-1; A(149,54)=1; A(149,177)=-a; A(149,187)=a;
A(149,181)=-a; A(149,188)=a;
A(150,289)=1; A(150,177)=a; A(150,187)=a;
A(151,290)=-1; A(151,333)=-a; A(151,180)=-a; A(151,189)=-a;
A(152,51)=-1; A(152,55)=1; A(152,184)=-a; A(152,190)=a;
A(152,180)=-a; A(152,189)=a;
A(153,291)=1; A(153,333)=a; A(153,184)=a; A(153,190)=a;
A(154,292)=-1; A(154,178)=-a; A(154,191)=-a;
A(155,52)=-1; A(155,56)=1; A(155,178)=-a; A(155,191)=a;
A(155,182)=-a; A(155,192)=a;
A(156,291)=-1; A(156,182)=-a; A(156,192)=-a;
%
A(157,296)=1; A(157,334)=a; A(157,191)=a; A(157,194)=a;
A(158,53)=-1; A(158,57)=1; A(158,191)=-a; A(158,194)=a;
A(158,187)=-a; A(158,193)=a;
A(159,293)=-1; A(159,334)=-a; A(159,187)=-a; A(159,193)=-a;
A(160,294)=1; A(160,189)=a; A(160,196)=a;
A(161,54)=-1; A(161,58)=1; A(161,185)=-a; A(161,195)=a;
A(161,189)=-a; A(161,196)=a;
A(162,293)=1; A(162,185)=a; A(162,195)=a;
A(163,294)=-1; A(163,334)=-a; A(163,188)=-a; A(163,197)=-a;
A(164,55)=-1; A(164,59)=1; A(164,192)=-a; A(164,198)=a;
A(164,188)=-a; A(164,197)=a;
A(165,295)=1; A(165,334)=a; A(165,192)=a; A(165,198)=a;
A(166,296)=-1; A(166,186)=-a; A(166,199)=-a;
A(167,56)=-1; A(167,60)=1; A(167,186)=-a; A(167,199)=a;
A(167,190)=-a; A(167,200)=a;
A(168,295)=-1; A(168,190)=-a; A(168,200)=-a;
%
A(169,300)=1; A(169,335)=a; A(169,199)=a; A(169,202)=a;
A(170,57)=-1; A(170,61)=1; A(170,199)=-a; A(170,202)=a;
A(170,195)=-a; A(170,201)=a;
A(171,297)=-1; A(171,335)=-a; A(171,195)=-a; A(171,201)=-a;
A(172,298)=1; A(172,197)=a; A(172,204)=a;
A(173,58)=-1; A(173,62)=1; A(173,193)=-a; A(173,203)=a;
A(173,197)=-a; A(173,204)=a;
A(174,297)=1; A(174,193)=a; A(174,203)=a;
A(175,298)=-1; A(175,335)=-a; A(175,196)=-a; A(175,205)=-a;
A(176,59)=-1; A(176,63)=1; A(176,200)=-a; A(176,206)=a;
A(176,196)=-a; A(176,205)=a;

A(177,299)=1; A(177,335)=a; A(177,200)=a; A(177,206)=a;
A(178,300)=-1; A(178,194)=-a; A(178,207)=-a;
A(179,60)=-1; A(179,64)=1; A(179,194)=-a; A(179,207)=a;
A(179,198)=-a; A(179,208)=a;
A(180,299)=-1; A(180,198)=-a; A(180,208)=-a;
%
A(181,304)=1; A(181,336)=a; A(181,207)=a; A(181,210)=a;
A(182,61)=-1; A(182,65)=1; A(182,207)=-a; A(182,210)=a;
A(182,203)=-a; A(182,209)=a;
A(183,301)=-1; A(183,336)=-a; A(183,203)=-a; A(183,209)=-a;
A(184,302)=1; A(184,205)=a; A(184,212)=a;
A(185,62)=-1; A(185,66)=1; A(185,201)=-a; A(185,211)=a;
A(185,205)=-a; A(185,212)=a;
A(186,301)=1; A(186,201)=a; A(186,211)=a;
A(187,302)=-1; A(187,336)=-a; A(187,204)=-a; A(187,213)=-a;
A(188,63)=-1; A(188,67)=1; A(188,208)=-a; A(188,214)=a;
A(188,204)=-a; A(188,213)=a;
A(189,303)=1; A(189,336)=a; A(189,208)=a; A(189,214)=a;
A(190,304)=-1; A(190,202)=-a; A(190,215)=-a;
A(191,64)=-1; A(191,68)=1; A(191,202)=-a; A(191,215)=a;
A(191,206)=-a; A(191,216)=a;
A(192,303)=-1; A(192,206)=-a; A(192,216)=-a;
%
A(193,308)=1; A(193,337)=a; A(193,215)=a; A(193,218)=a;
A(194,65)=-1; A(194,69)=1; A(194,215)=-a; A(194,218)=a;
A(194,211)=-a; A(194,217)=a;
A(195,305)=-1; A(195,337)=-a; A(195,211)=-a; A(195,217)=-a;
A(196,306)=1; A(196,213)=a; A(196,220)=a;
A(197,66)=-1; A(197,70)=1; A(197,209)=a; A(197,219)=a;
A(197,213)=-a; A(197,220)=a;
A(198,305)=1; A(198,209)=a; A(198,219)=a;
A(199,306)=-1; A(199,337)=-a; A(199,212)=-a; A(199,221)=-a;
A(200,67)=-1; A(200,71)=1; A(200,216)=-a; A(200,222)=a;
A(200,212)=-a; A(200,221)=a;
A(201,307)=1; A(201,337)=a; A(201,216)=a; A(201,222)=a;
A(202,308)=-1; A(202,210)=-a; A(202,223)=-a;
A(203,68)=-1; A(203,72)=1; A(203,210)=-a; A(203,223)=a;
A(203,214)=-a; A(203,224)=a;
A(204,307)=-1; A(204,214)=-a; A(204,224)=-a;
%
A(205,312)=1; A(205,338)=a; A(205,223)=a; A(205,226)=a;
A(206,69)=-1; A(206,73)=1; A(206,223)=-a; A(206,226)=a;
A(206,219)=-a; A(206,225)=a;
A(207,309)=-1; A(207,338)=-a; A(207,219)=-a; A(207,225)=-a;
A(208,310)=1; A(208,221)=a; A(208,228)=a;
A(209,70)=-1; A(209,74)=1; A(209,217)=-a; A(209,227)=a;
A(209,221)=-a; A(209,228)=a;
A(210,309)=1; A(210,217)=a; A(210,227)=a;
A(211,310)=-1; A(211,338)=-a; A(211,220)=-a; A(211,229)=-a;
A(212,71)=-1; A(212,75)=1; A(212,224)=-a; A(212,230)=a;
A(212,220)=-a; A(212,229)=a;
A(213,311)=1; A(213,338)=a; A(213,224)=a; A(213,230)=a;
A(214,312)=-1; A(214,218)=-a; A(214,231)=-a;
A(215,72)=-1; A(215,76)=1; A(215,218)=-a; A(215,231)=a;
A(215,222)=-a; A(215,232)=a;
A(216,311)=-1; A(216,222)=-a; A(216,232)=-a;
%
A(217,316)=1; A(217,339)=a; A(217,231)=a; A(217,234)=a;
A(218,73)=-1; A(218,77)=1; A(218,231)=-a; A(218,234)=a;
A(218,227)=-a; A(218,233)=a;
A(219,313)=-1; A(219,339)=-a; A(219,227)=-a; A(219,233)=-a;
A(220,314)=1; A(220,229)=a; A(220,236)=a;
A(221,74)=-1; A(221,78)=1; A(221,225)=-a; A(221,235)=a;
A(221,229)=-a; A(221,236)=a;
A(222,313)=1; A(222,225)=a; A(222,235)=a;
A(223,314)=-1; A(223,339)=-a; A(223,228)=-a; A(223,237)=-a;
A(224,75)=-1; A(224,79)=1; A(224,232)=-a; A(224,238)=a;
A(224,228)=-a; A(224,237)=a;
A(225,315)=1; A(225,339)=a; A(225,232)=a; A(225,238)=a;
A(226,316)=-1; A(226,226)=-a; A(226,239)=-a;
A(227,76)=-1; A(227,80)=1; A(227,226)=-a; A(227,239)=a;
A(227,230)=-a; A(227,240)=a;
A(228,315)=-1; A(228,230)=-a; A(228,240)=-a;
%
A(229,320)=1; A(229,340)=a; A(229,239)=a;
A(230,77)=-1; A(230,239)=-a; A(230,235)=-a;
A(231,317)=-1; A(231,340)=-a; A(231,235)=-a;
A(232,318)=1; A(232,237)=a;
A(233,78)=-1; A(233,233)=-a; A(233,237)=-a;
A(234,317)=1; A(234,233)=a;
A(235,318)=-1; A(235,340)=-a; A(235,236)=-a;
A(236,79)=-1; A(236,240)=-a; A(236,236)=-a;
A(237,319)=1; A(237,340)=a; A(237,240)=a;
A(238,320)=-1; A(238,234)=-a;
A(239,80)=-1; A(239,234)=-a; A(239,238)=-a;
A(240,319)=-1; A(240,238)=-a;
%
A = -1*A;

```

A.3. Pirmojo bokšto savojo svorio vektoriaus sudarymo komandinis tekstas

```

% SAVOJO SVORIO VEKTORIUS
G = zeros(240,1); ro = 7.8;
g1 = (1.5*L1*A1 + 2*L2*A2 + L3*A3) * ro;
g2 = (1.5*L1*A1 + 1.5*L2*A2 + L3*A3) * ro;
g3 = (L1*A1 + 1.5*L2*A2 + L3*A3) * ro;
g4 = (L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro;
g5 = (0.5*L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro + 0.5;
g6 = (0.5*L1*A1 + 0.5*L2*A2 + L3*A3) * ro + 0.5;
G(2) = g1; G(5) = g2; G(8) = g1; G(11) = g2;
G(14) = g3; G(17) = g4; G(20) = g3; G(23) = g4;

```

```
G(26) = g3; G(29) = g4; G(32) = g3; G(35) = g4;
G(38) = g3; G(41) = g4; G(44) = g3; G(47) = g4;
G(50) = g3; G(53) = g4; G(56) = g3; G(59) = g4;
G(62) = g3; G(65) = g4; G(68) = g3; G(71) = g4;
G(74) = g3; G(77) = g4; G(80) = g3; G(83) = g4;
G(86) = g3; G(89) = g4; G(92) = g3; G(95) = g4;
G(98) = g3; G(101) = g4; G(104) = g3; G(107) = g4;
G(110) = g3; G(113) = g4; G(116) = g3; G(119) = g4;
G(122) = g3; G(125) = g4; G(128) = g3; G(131) = g4;
G(134) = g3; G(137) = g4; G(140) = g3; G(143) = g4;
G(146) = g3; G(149) = g4; G(152) = g3; G(155) = g4;
G(158) = g3; G(161) = g4; G(164) = g3; G(167) = g4;
G(170) = g3; G(173) = g4; G(176) = g3; G(179) = g4;
G(182) = g3; G(185) = g4; G(188) = g3; G(191) = g4;
G(194) = g3; G(197) = g4; G(200) = g3; G(203) = g4;
G(206) = g3; G(209) = g4; G(212) = g3; G(215) = g4;
G(218) = g3; G(221) = g4; G(224) = g3; G(227) = g4;
G(230) = g5; G(233) = g6; G(236) = g5; G(239) = g6;
G = -9.81*G;
```

A.3. Antrojo bokšto savojo svorio vektoriaus sudarymo komandinis tekstas

```
% SAVOJO SVORIO VEKTORIUS
G = zeros(240,1); ro = 7.8;
g1 = (L1*A1 + 2*L2*A2 + L3*A3 + 0.5*L4*A4) * ro;
g2 = (L1*A1 + 2*L2*A2 + L3*A3) * ro;
g3 = (0.5*L1*A1 + L2*A2 + L3*A3 + 0.5*L4*A4) * ro + 0.5;
g4 = (0.5*L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro + 0.5;
G(2) = g1; G(5) = g2; G(8) = g1; G(11) = g2;
G(14) = g1; G(17) = g2; G(20) = g1; G(23) = g2;
G(26) = g1; G(29) = g2; G(32) = g1; G(35) = g2;
G(38) = g1; G(41) = g2; G(44) = g1; G(47) = g2;
G(50) = g1; G(53) = g2; G(56) = g1; G(59) = g2;
G(62) = g1; G(65) = g2; G(68) = g1; G(71) = g2;
G(74) = g1; G(77) = g2; G(80) = g1; G(83) = g2;
G(86) = g1; G(89) = g2; G(92) = g1; G(95) = g2;
G(98) = g1; G(101) = g2; G(104) = g1; G(107) = g2;
G(110) = g1; G(113) = g2; G(116) = g1; G(119) = g2;
G(122) = g1; G(125) = g2; G(128) = g1; G(131) = g2;
G(134) = g1; G(137) = g2; G(140) = g1; G(143) = g2;
G(146) = g1; G(149) = g2; G(152) = g1; G(155) = g2;
G(158) = g1; G(161) = g2; G(164) = g1; G(167) = g2;
G(170) = g1; G(173) = g2; G(176) = g1; G(179) = g2;
G(182) = g1; G(185) = g2; G(188) = g1; G(191) = g2;
G(194) = g1; G(197) = g2; G(200) = g1; G(203) = g2;
G(206) = g1; G(209) = g2; G(212) = g1; G(215) = g2;
G(218) = g1; G(221) = g2; G(224) = g1; G(227) = g2;
G(230) = g3; G(233) = g4; G(236) = g3; G(239) = g4;
G = -9.81*G;
```

A.4. Pirmojo bokšto masių matricos sudarymo komandinis tekstas

```
% Koncentruotos masės:
m01 = (L1*A01 + 1.5*L2*A02 + L3*A03) * ro;
m02 = (L1*A01 + L2*A02 + L3*A03) * ro;
m1 = m01; m2 = m02; m3 = m01; m4 = m02;
m5 = m01; m6 = m02; m7 = m01; m8 = m02;
m9 = m01; m10 = m02; m11 = m01; m12 = m02;
m13 = m01; m14 = m02; m15 = m01; m16 = m02;
m17 = m01; m18 = m02; m19 = m01; m20 = m02;
m21 = m01; m22 = m02; m23 = m01; m24 = m02;
m25 = m01; m26 = m02; m27 = m01; m28 = m02;
m29 = m01; m30 = m02; m31 = m01; m32 = m02;
m33 = m01; m34 = m02; m35 = m01; m36 = m02;
m37 = m01; m38 = m02; m39 = m01; m40 = m02;
m41 = m01; m42 = m02; m43 = m01; m44 = m02;
m45 = m01; m46 = m02; m47 = m01; m48 = m02;
m49 = m01; m50 = m02; m51 = m01; m52 = m02;
m53 = m01; m54 = m02; m55 = m01; m56 = m02;
m57 = m01; m58 = m02; m59 = m01; m60 = m02;
m61 = m01; m62 = m02; m63 = m01; m64 = m02;
m65 = m01; m66 = m02; m67 = m01; m68 = m02;
m69 = m01; m70 = m02; m71 = m01; m72 = m02;
m73 = m01; m74 = m02; m75 = m01; m76 = m02;
m77 = 0.25*mk + (0.5*L1*A01 + L2*A02 + L3*A03) * ro;
m78 = 0.25*mk + (0.5*L1*A01 + 0.5*L2*A02 + L3*A03) * ro;
m79 = m77; m80 = m78;
%
% Sudaroma masių matrica:
M = blkdiag(m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10, ...
m11,m12,m13,m14,m15,m16,m17,m18,m19,m20,m21,m22,m23,m24, ...
m25,m26,m27,m28,m29,m30,m31,m32,m33,m34,m35,m36,m37,m38, ...
m39,m40,m41,m42,m43,m44,m45,m46,m47,m48,m49,m50,m51,m52, ...
m53,m54,m55,m56,m57,m58,m59,m60,m61,m62,m63,m64,m65,m66, ...
m67,m68,m69,m70,m71,m72,m73,m74,m75,m76,m77,m78,m79,m80);
```

B priedas. Bokštų savųjų svyravimų analizės komandiniai tekstai

B.1. Pirmojo bokšto komandiniai tekstai

```
clear all
clc
% PIRMOJO BOKŠTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.1 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Koncentruotos masės:
m01 = (L1*A1 + 1.5*L2*A2 + L3*A3) * ro;
m02 = (L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro;
m1 = m01; m2 = m02; m3 = m01; m4 = m02;
m5 = m01; m6 = m02; m7 = m01; m8 = m02;
m9 = m01; m10 = m02; m11 = m01; m12 = m02;
m13 = m01; m14 = m02; m15 = m01; m16 = m02;
m17 = m01; m18 = m02; m19 = m01; m20 = m02;
m21 = m01; m22 = m02; m23 = m01; m24 = m02;
m25 = m01; m26 = m02; m27 = m01; m28 = m02;
m29 = m01; m30 = m02; m31 = m01; m32 = m02;
m33 = m01; m34 = m02; m35 = m01; m36 = m02;
m37 = m01; m38 = m02; m39 = m01; m40 = m02;
m41 = m01; m42 = m02; m43 = m01; m44 = m02;
m45 = m01; m46 = m02; m47 = m01; m48 = m02;
m49 = m01; m50 = m02; m51 = m01; m52 = m02;
m53 = m01; m54 = m02; m55 = m01; m56 = m02;
m57 = m01; m58 = m02; m59 = m01; m60 = m02;
m61 = m01; m62 = m02; m63 = m01; m64 = m02;
m65 = m01; m66 = m02; m67 = m01; m68 = m02;
m69 = m01; m70 = m02; m71 = m01; m72 = m02;
m73 = m01; m74 = m02; m75 = m01; m76 = m02;
m77 = 0.25*mk + (0.5*L1*A1 + L2*A2 + L3*A3) * ro;
m78 = 0.25*mk + (0.5*L1*A1 + 0.5*L2*A2 + L3*A3) * ro;
m79 = m77; m80 = m78;
%
% Sudaroma masių matrica:
masių_matrica = blkdiag(m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10, ...
m11,m12,m13,m14,m15,m16,m17,m18,m19,m20,m21,m22,m23,m24, ...
m25,m26,m27,m28,m29,m30,m31,m32,m33,m34,m35,m36,m37,m38, ...
m39,m40,m41,m42,m43,m44,m45,m46,m47,m48,m49,m50,m51,m52, ...
m53,m54,m55,m56,m57,m58,m59,m60,m61,m62,m63,m64,m65,m66, ...
m67,m68,m69,m70,m71,m72,m73,m74,m75,m76,m77,m78,m79,m80);
%
% Ikeliami pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygčių_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
%
% Sudaroma poslinkių inliuente matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(80,240);
for i = 1:80;
P(i,(3*i-2)) = 1; end;
%
% Dinaminis poslinkių inliuente matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masių_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes,lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savųjų svyravimų dažniai rad/s:
for i = 1:10;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimų dažniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaičiavimų rezultatai:
dažniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:10);
dažniai, amplitudes
```

```
clear all
clc
% PIRMOJO BOKŠTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.2 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
ro = 7.8; mk = 2;
```

```

%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Koncentruotos mases:
m01 = (2*L1*A1 + 3*L2*A2 + 2*L3*A3) * ro;
m02 = (2*L1*A1 + 2*L2*A2 + 2*L3*A3) * ro;
m1 = m01; m2 = m02; m3 = m01; m4 = m02;
m5 = m01; m6 = m02; m7 = m01; m8 = m02;
m9 = m01; m10 = m02; m11 = m01; m12 = m02;
m13 = m01; m14 = m02; m15 = m01; m16 = m02;
m17 = m01; m18 = m02; m19 = m01; m20 = m02;
m21 = m01; m22 = m02; m23 = m01; m24 = m02;
m25 = m01; m26 = m02; m27 = m01; m28 = m02;
m29 = m01; m30 = m02; m31 = m01; m32 = m02;
m33 = m01; m34 = m02; m35 = m01; m36 = m02;
m37 = 0.25*mk + (L1*A1 + 2*L2*A2 + 2*L3*A3) * ro;
m38 = 0.25*mk + (L1*A1 + L2*A2 + 2*L3*A3) * ro;
m39 = m37; m40 = m38;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = blkdiag(m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10,m11, ...
m12,m13,m14,m15,m16,m17,m18,m19,m20,m21,m22,m23,m24,m25,m26, ...
m27,m28,m29,m30,m31,m32,m33,m34,m35,m36,m37,m38,m39,m40);
%
% Ikeliami pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(40,240);
P(1,13) = 1; P(2,16) = 1; P(3,19) = 1; P(4,22) = 1;
P(5,37) = 1; P(6,40) = 1; P(7,43) = 1; P(8,46) = 1;
P(9,61) = 1; P(10,64) = 1; P(11,67) = 1; P(12,70) = 1;
P(13,85) = 1; P(14,88) = 1; P(15,91) = 1; P(16,94) = 1;
P(17,109) = 1; P(18,112) = 1; P(19,115) = 1; P(20,118) = 1;
P(21,133) = 1; P(22,136) = 1; P(23,139) = 1; P(24,142) = 1;
P(25,157) = 1; P(26,160) = 1; P(27,163) = 1; P(28,166) = 1;
P(29,181) = 1; P(30,184) = 1; P(31,187) = 1; P(32,190) = 1;
P(33,205) = 1; P(34,208) = 1; P(35,211) = 1; P(36,214) = 1;
P(37,229) = 1; P(38,232) = 1; P(39,235) = 1; P(40,238) = 1;
%
% Dinaminiu poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes,lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:10;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:10);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% PIRMOJO BOKSTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.3 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*100 + L3*A3*80) * ro;
m01 = ((m_sum/20)*3)/4; m02 = ((m_sum/20)*1.5)/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(28)*m01;
masiu_matrica(25:28,25:28) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliami pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(20,240);
P(1,37) = 1; P(2,40) = 1; P(3,43) = 1; P(4,46) = 1;
P(5,85) = 1; P(6,88) = 1; P(7,91) = 1; P(8,94) = 1;
P(9,133) = 1; P(10,136) = 1; P(11,139) = 1; P(12,142) = 1;
P(13,181) = 1; P(14,184) = 1; P(15,187) = 1; P(16,190) = 1;
P(17,229) = 1; P(18,232) = 1; P(19,235) = 1; P(20,238) = 1;
%
% Dinaminiu poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes,lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:10;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:10);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% PIRMOJO BOKSTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.5 variantas

```

```

%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*100 + L3*A3*80) * ro;
m01 = ((m_sum/20)*5)/4; m02 = ((m_sum/20)*2.5)/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(16)*m01;
masiu_matrica(13:16,13:16) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliamą pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
%
% Sudaroma poslinkių influentinė matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(16,240);
P(1,49) = 1; P(2,52) = 1; P(3,55) = 1; P(4,58) = 1;
P(5,109) = 1; P(6,112) = 1; P(7,115) = 1; P(8,118) = 1;
P(9,169) = 1; P(10,172) = 1; P(11,175) = 1; P(12,178) = 1;
P(13,229) = 1; P(14,232) = 1; P(15,235) = 1; P(16,238) = 1;
%
% Dinaminių poslinkių influentinė matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes,lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaičiuojami savųjų svyravimų dažniai rad/s:
for i = 1:10;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaičiuojami svyravimų dažniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaičiavimų rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:10);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% PIRMOJO BOKSTO SAVUJŲ SVYRAVYMŲ DAZNIŲ IR FORMŲ NUSTATYMAS
% 1.6 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*100 + L3*A3*80) * ro;
m01 = ((m_sum/20)*7)/4; m02 = ((m_sum/20)*3.5)/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(12)*m01;
masiu_matrica(9:12,9:12) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliamą pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
%
% Sudaroma poslinkių influentinė matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(12,240);
P(1,61) = 1; P(2,64) = 1; P(3,67) = 1; P(4,70) = 1;
P(5,145) = 1; P(6,148) = 1; P(7,151) = 1; P(8,154) = 1;
P(9,229) = 1; P(10,232) = 1; P(11,235) = 1; P(12,238) = 1;
%
% Dinaminių poslinkių influentinė matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;

%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes,lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaičiuojami savųjų svyravimų dažniai rad/s:
for i = 1:8;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaičiuojami svyravimų dažniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaičiavimų rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:8);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% PIRMOJO BOKSTO SAVUJŲ SVYRAVYMŲ DAZNIŲ IR FORMŲ NUSTATYMAS
% 1.8 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*100 + L3*A3*80) * ro;
m01 = ((m_sum/20)*7)/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(4)*m01;
%
% Ikeliamą pusiausvyros lygčių matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(260,260);
for i = 1:80;

```



```

D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:180;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 181:260;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(4,240);
P(1,229) = 1; P(2,232) = 1; P(3,235) = 1; P(4,238) = 1;
%
% Dinaminiu poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes,lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:4;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:4);
dazniai, amplitudes

```

B.2. Antrojo bokšto komandiniai tekstai

```

clear all
clc
% ANTROJO BOKSTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.1 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (m_sum/20)/4; m02 = (0.5*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(80)*m01;
masiu_matrica(77:80,77:80) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliami pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(80,240);
for i = 1:80;
P(i,(3*i-2)) = 1; end;
%
% Dinaminiu poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes,lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:5;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:5);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% ANTROJO BOKSTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.2 variantas

```

```

%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = ((m_sum/20)*2)/4; m02 = (m_sum/20)/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(40)*m01;
masiu_matrica(37:40,37:40) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliami pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(40,240);
P(1,13) = 1; P(2,16) = 1; P(3,19) = 1; P(4,22) = 1;
P(5,37) = 1; P(6,40) = 1; P(7,43) = 1; P(8,46) = 1;
P(9,61) = 1; P(10,64) = 1; P(11,67) = 1; P(12,70) = 1;
P(13,85) = 1; P(14,88) = 1; P(15,91) = 1; P(16,94) = 1;
P(17,109) = 1; P(18,112) = 1; P(19,115) = 1; P(20,118) = 1;
P(21,133) = 1; P(22,136) = 1; P(23,139) = 1; P(24,142) = 1;
P(25,157) = 1; P(26,160) = 1; P(27,163) = 1; P(28,166) = 1;
P(29,181) = 1; P(30,184) = 1; P(31,187) = 1; P(32,190) = 1;
P(33,205) = 1; P(34,208) = 1; P(35,211) = 1; P(36,214) = 1;
P(37,229) = 1; P(38,232) = 1; P(39,235) = 1; P(40,238) = 1;
%
% Dinaminiu poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes,lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:5;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:5);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% ANTROJO BOKSTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.3 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (3*(m_sum/20))/4; m02 = (1.5*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(28)*m01;
masiu_matrica(25:28,25:28) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliami pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:

```

```

P = zeros(28,240);
P(1,13) = 1; P(2,16) = 1; P(3,19) = 1; P(4,22) = 1;
P(5,49) = 1; P(6,52) = 1; P(7,55) = 1; P(8,58) = 1;
P(9,85) = 1; P(10,88) = 1; P(11,91) = 1; P(12,94) = 1;
P(13,121) = 1; P(14,124) = 1; P(15,127) = 1; P(16,130) = 1;
P(17,157) = 1; P(18,160) = 1; P(19,163) = 1; P(20,166) = 1;
P(21,193) = 1; P(22,196) = 1; P(23,199) = 1; P(24,202) = 1;
P(25,229) = 1; P(26,232) = 1; P(27,235) = 1; P(28,238) = 1;
% Dinaminio poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes, lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:5;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:5);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% ANTRJO BOKSTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.4 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (4*(m_sum/20))/4; m02 = (2*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(20)*m01;
masiu_matrica(17:20,17:20) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliam pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(20,240);
P(1,37) = 1; P(2,40) = 1; P(3,43) = 1; P(4,46) = 1;
P(5,85) = 1; P(6,88) = 1; P(7,91) = 1; P(8,94) = 1;
P(9,133) = 1; P(10,136) = 1; P(11,139) = 1; P(12,142) = 1;
P(13,181) = 1; P(14,184) = 1; P(15,187) = 1; P(16,190) = 1;
P(17,229) = 1; P(18,232) = 1; P(19,235) = 1; P(20,238) = 1;
%
% Dinaminio poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes, lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:5;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:5);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% PIRMOJO BOKSTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.5 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;

```

```

A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (5*(m_sum/20))/4; m02 = (2.5*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(16)*m01;
masiu_matrica(13:16,13:16) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliam pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(16,240);
P(1,49) = 1; P(2,52) = 1; P(3,55) = 1; P(4,58) = 1;
P(5,109) = 1; P(6,112) = 1; P(7,115) = 1; P(8,118) = 1;
P(9,169) = 1; P(10,172) = 1; P(11,175) = 1; P(12,178) = 1;
P(13,229) = 1; P(14,232) = 1; P(15,235) = 1; P(16,238) = 1;
%
% Dinaminio poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes, lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:5;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:5);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% ANTRJO BOKSTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.6 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (7*(m_sum/20))/4; m02 = (3.5*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(12)*m01;
masiu_matrica(9:12,9:12) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliam pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(12,240);
P(1,61) = 1; P(2,64) = 1; P(3,67) = 1; P(4,70) = 1;
P(5,145) = 1; P(6,148) = 1; P(7,151) = 1; P(8,154) = 1;
P(9,229) = 1; P(10,232) = 1; P(11,235) = 1; P(12,238) = 1;
%
% Dinaminio poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:

```

```

C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes, lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:5;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:5);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% ANTROJO BOKSTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.7 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (10*(m_sum/20))/4; m02 = (5*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = zeros(8,8);
masiu_matrica(1:4,1:4) = eye(4)*m01;
masiu_matrica(5:8,5:8) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliam pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(8,240);
P(1,109) = 1; P(2,112) = 1; P(3,115) = 1; P(4,118) = 1;
P(5,229) = 1; P(6,232) = 1; P(7,235) = 1; P(8,238) = 1;
%
% Dinaminiu poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes, lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:5;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:5);
dazniai, amplitudes

clear all
clc
% ANTROJO BOKSTO SAVUJU SVYRAVYMU DAZNIU IR FORMU NUSTATYMAS
% 1.8 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m02 = (7*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(4)*m02;
%
% Ikeliam pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%

```

```

% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu influentine matrica:
beta = inv(A*inv(D)*A');
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(4,240);
P(1,229) = 1; P(2,232) = 1; P(3,235) = 1; P(4,238) = 1;
%
% Dinaminiu poslinkiu influentine matrica:
beta_dyn = P*beta*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
[amplitudes, lambda0] = eig(C);
lambda = diag(lambda0);
%
% Apskaiciuojami savuju svyravimu dazniai rad/s:
for i = 1:4;
omega(i,1) = (1/lambda(i))^(0.5); end;
%
% Apskaiciuojami svyravimu dazniai Hz:
Hz = omega/(2*pi);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
dazniai = [omega Hz]; amplitudes = amplitudes(:,1:4);
dazniai, amplitudes

```

C priedas. Antrojo bokšto priverstinių svyravimų analizės komandiniai tekstai

```

clear all
clc
% ANTROJO BOKSTO PRIVERSTINIŲ SVYRAVIMŲ ANALIZĖ
% 1 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (m_sum/20)/4; m02 = (0.5*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(80)*m01;
masiu_matrica(77:80,77:80) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliam pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta = inv(A*inv(D)*A'); alfa = inv(D)*A'*beta;
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(80,240);
for i = 1:80;
P(i,(3*i-2)) = 1; end;
%
% Dinaminiu poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta_dyn = P*beta*P'; alfa_dyn = alfa*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
lambda = eig(C);
%
% Apskaiciuojamas savuju svyravimu pagrindinio tono daznis:
omega = (1/max(lambda))^(0.5);
%
% Apskaiciuojamas zadinancios apkrovos ciklinis daznis:
teta = 0.95*omega; beta_m = (1/teta^2)*inv(masiu_matrica);
%

```

```

% Sudaromas zadinanciu apkrovu vektorius:
F0 = zeros(80,1);
F0(77:80,1) = ones(4,1)*1.66;
% Sudaromas statiniu apkrovu vektorius:
F = zeros(240,1);
F(229) = 1.04; F(232) = 1.04; F(235) = 1.04; F(238) = 1.04;
%
% Apskaiciuojamos inercijos jegos:
Z = (beta_dyn - beta_m)^-1*beta_dyn*F0;
%
% Apskaiciuojamos dinamines irazos ir dinaminiai poslinkiai:
S_dyn = -(alfa_dyn*(Z + F0));
u_dyn = beta_dyn*(Z + F0);
%
% Ikeliamas savojo svorio vektorius:
savojo_svorio_vektorius;
% Apskaiciuojamos irazos ir poslinkiai nuo statiniu apkrovu:
S_st = alfa*(F + G); u_st = beta*(F + G);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
S_max = max(S_st + S_dyn);
S_min = min(S_st + S_dyn);
u_max = max(abs(u_st)) + max(abs(u_dyn));
S_max, S_min, u_max

clear all
clc
% ANTROJO BOKSTO PRIVERSTINIŲ SVYRAVIMŲ ANALIZĖ
% 2 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (3*(m_sum/20))/4; m02 = (1.5*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(28)*m01;
masiu_matrica(25:28,25:28) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliamas pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta = inv(A*inv(D)*A'); alfa = inv(D)*A'*beta;
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(28,240);
P(1,13) = 1; P(2,16) = 1; P(3,19) = 1; P(4,22) = 1;
P(5,37) = 1; P(6,40) = 1; P(7,43) = 1; P(8,46) = 1;
P(9,61) = 1; P(10,64) = 1; P(11,67) = 1; P(12,70) = 1;
P(13,85) = 1; P(14,88) = 1; P(15,91) = 1; P(16,94) = 1;
P(17,109) = 1; P(18,112) = 1; P(19,115) = 1; P(20,118) = 1;
P(21,133) = 1; P(22,136) = 1; P(23,139) = 1; P(24,142) = 1;
P(25,157) = 1; P(26,160) = 1; P(27,163) = 1; P(28,166) = 1;
P(29,181) = 1; P(30,184) = 1; P(31,187) = 1; P(32,190) = 1;
P(33,205) = 1; P(34,208) = 1; P(35,211) = 1; P(36,214) = 1;
P(37,229) = 1; P(38,232) = 1; P(39,235) = 1; P(40,238) = 1;
%
% Dinaminis poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta_dyn = P*beta*P'; alfa_dyn = alfa*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
lambda = eig(C);
%
% Apskaiciuojamas savuju svyravimu pagrindinio tono dažnis:
omega = (1/max(lambda))^(0.5);
%
% Apskaiciuojamas zadinancios apkrovos ciklinis dažnis:
teta = 0.95*omega; beta_m = (1/teta^2)*inv(masiu_matrica);
%
% Sudaromas zadinanciu apkrovu vektorius:
F0 = zeros(28,1);
F0(25:28,1) = ones(4,1)*1.66;
% Sudaromas statiniu apkrovu vektorius:
F = zeros(240,1);
F(229) = 1.04; F(232) = 1.04; F(235) = 1.04; F(238) = 1.04;
%
% Apskaiciuojamos inercijos jegos:
Z = (beta_dyn - beta_m)^-1*beta_dyn*F0;
%
% Apskaiciuojamos dinamines irazos ir dinaminiai poslinkiai:
S_dyn = -(alfa_dyn*(Z + F0));
u_dyn = beta_dyn*(Z + F0);
%
% Ikeliamas savojo svorio vektorius:
savojo_svorio_vektorius;
% Apskaiciuojamos irazos ir poslinkiai nuo statiniu apkrovu:
S_st = alfa*(F + G); u_st = beta*(F + G);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
S_max = max(S_st + S_dyn);
S_min = min(S_st + S_dyn);
u_max = max(abs(u_st)) + max(abs(u_dyn));
S_max, S_min, u_max

clear all
clc
% ANTROJO BOKSTO PRIVERSTINIŲ SVYRAVIMŲ ANALIZĖ
% 4 variantas
%
% Pradiniai duomenys:

```

```

E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (4*(m_sum/20))/4; m02 = (2*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(20)*m01;
masiu_matrica(17:20,17:20) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliamas pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta = inv(A*inv(D)*A'); alfa = inv(D)*A'*beta;
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(20,240);
P(1,37) = 1; P(2,40) = 1; P(3,43) = 1; P(4,46) = 1;
P(5,85) = 1; P(6,88) = 1; P(7,91) = 1; P(8,94) = 1;
P(9,133) = 1; P(10,136) = 1; P(11,139) = 1; P(12,142) = 1;
P(13,181) = 1; P(14,184) = 1; P(15,187) = 1; P(16,190) = 1;
P(17,229) = 1; P(18,232) = 1; P(19,235) = 1; P(20,238) = 1;
%
% Dinaminiu poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta_dyn = P*beta*P'; alfa_dyn = alfa*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
lambda = eig(C);
%
% Apskaiciuojamas savuju svyravimu pagrindinio tono daznis:
omega = (1/max(lambda))^(0.5);
%
% Apskaiciuojamas zadinancios apkrovos ciklinis daznis:
teta = 0.95*omega; beta_m = (1/teta^2)*inv(masiu_matrica);
%
% Sudaromas zadinanciu apkrovu vektorius:
F0 = zeros(20,1);
F0(17:20,1) = ones(4,1)*1.66;
% Sudaromas statiniu apkrovu vektorius:
F = zeros(240,1);
F(229) = 1.04; F(232) = 1.04; F(235) = 1.04; F(238) = 1.04;
%
% Apskaiciuojamos inercijos jegos:
Z = (beta_dyn - beta_m)^-1*beta_dyn*F0;
%
% Apskaiciuojamos dinamines irazos ir dinaminiai poslinkiai:
S_dyn = -(alfa_dyn*(Z + F0));
u_dyn = beta_dyn*(Z + F0);
%
% Ikeliamas savojo svorio vektorius:
savojo_svorio_vektorius;
% Apskaiciuojamos irazos ir poslinkiai nuo statiniu apkrovu:
S_st = alfa*(F + G); u_st = beta*(F + G);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
S_max = max(S_st + S_dyn);
S_min = min(S_st + S_dyn);
u_max = max(abs(u_st)) + max(abs(u_dyn));
S_max, S_min, u_max

clear all
clc
% ANTRJO BOKSTO PRIVERSTINIUV SVYRAVIMU ANALIZE
% 5 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (7*(m_sum/20))/4; m02 = (3.5*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(12)*m01;
masiu_matrica(9:12,9:12) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliamas pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta = inv(A*inv(D)*A'); alfa = inv(D)*A'*beta;
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(12,240);
P(1,61) = 1; P(2,64) = 1; P(3,67) = 1; P(4,70) = 1;
P(5,145) = 1; P(6,148) = 1; P(7,151) = 1; P(8,154) = 1;
P(9,229) = 1; P(10,232) = 1; P(11,235) = 1; P(12,238) = 1;
%
% Dinaminiu poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta_dyn = P*beta*P'; alfa_dyn = alfa*P';
%
% Charakteringoji matrica:

```

```

C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
lambda = eig(C);
%
% Apskaiciuojamas savuju svyravimu pagrindinio tono daznis:
omega = (1/max(lambda))^(0.5);
%
% Apskaiciuojamas zadinancios apkrovos ciklinis daznis:
teta = 0.95*omega; beta_m = (1/teta^2)*inv(masiu_matrica);
%
% Sudaromas zadinanciu apkrovu vektorius:
F0 = zeros(12,1);
F0(9:12,1) = ones(4,1)*1.66;
% Sudaromas statiniu apkrovu vektorius:
F = zeros(240,1);
F(229) = 1.04; F(232) = 1.04; F(235) = 1.04; F(238) = 1.04;
%
% Apskaiciuojamos inercijos jegos:
Z = (beta_dyn - beta_m)^-1*beta_dyn*F0;
%
% Apskaiciuojamos dinamines irazos ir dinaminiai poslinkiai:
S_dyn = -(alfa_dyn*(Z + F0));
u_dyn = beta_dyn*(Z + F0);
%
% Ikeliamas savojo svorio vektorius:
savojo_svorio_vektorius;
% Apskaiciuojamos irazos ir poslinkiai nuo statiniu apkrovu:
S_st = alfa*(F + G); u_st = beta*(F + G);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
S_max = max(S_st + S_dyn);
S_min = min(S_st + S_dyn);
u_max = max(abs(u_st)) + max(abs(u_dyn));
S_max, S_min, u_max

clear all
clc
% ANTRJO BOKSTO PRIVERSTINIUV SVYRAVIMU ANALIZE
% 7 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m02 = (7*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = eye(4)*m02;
%
% Ikeliamas pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta = inv(A*inv(D)*A'); alfa = inv(D)*A'*beta;
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(4,240);
P(1,229) = 1; P(2,232) = 1; P(3,235) = 1; P(4,238) = 1;
%
% Dinaminiu poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta_dyn = P*beta*P'; alfa_dyn = alfa*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
lambda = eig(C);
%
% Apskaiciuojamas savuju svyravimu pagrindinio tono daznis:
omega = (1/max(lambda))^(0.5);
%
% Apskaiciuojamas zadinancios apkrovos ciklinis daznis:
teta = 0.95*omega; beta_m = (1/teta^2)*inv(masiu_matrica);
%
% Sudaromas zadinanciu apkrovu vektorius:
F0 = ones(4,1)*1.66;
% Sudaromas statiniu apkrovu vektorius:
F = zeros(240,1);
F(229) = 1.04; F(232) = 1.04; F(235) = 1.04; F(238) = 1.04;
%
% Apskaiciuojamos inercijos jegos:
Z = (beta_dyn - beta_m)^-1*beta_dyn*F0;
%
% Apskaiciuojamos dinamines irazos ir dinaminiai poslinkiai:
S_dyn = -(alfa_dyn*(Z + F0));
u_dyn = beta_dyn*(Z + F0);
%
% Ikeliamas savojo svorio vektorius:
savojo_svorio_vektorius;
% Apskaiciuojamos irazos ir poslinkiai nuo statiniu apkrovu:
S_st = alfa*(F + G); u_st = beta*(F + G);
%
% Galutiniai skaiciavimu rezultatai:
S_max = max(S_st + S_dyn);
S_min = min(S_st + S_dyn);
u_max = max(abs(u_st)) + max(abs(u_dyn));
S_max, S_min, u_max

clear all
clc
% ANTRJO BOKSTO PRIVERSTINIUV SVYRAVIMU ANALIZE
% 8 variantas
%
% Pradiniai duomenys:
E = 210000000; A1 = 0.002836; A2 = 0.001036; A3 = 0.000836;
A4 = 0.001036; ro = 7.8; mk = 2;
%
% Elementu tipu ilgiai:
L1 = 2; L2 = inv(cosd(45))*2; L3 = 2; L4 = L2;
%
% Koncentruotos mases:
m_sum = (L1*A1*80 + L2*A2*160 + L3*A3*80 + L4*A4*20) * ro;
m01 = (10*(m_sum/20))/4; m02 = (5*(m_sum/20))/4 + mk/4;
%
% Sudaroma masiu matrica:
masiu_matrica = zeros(8,8);
masiu_matrica(1:4,1:4) = eye(4)*m01;
masiu_matrica(5:8,5:8) = eye(4)*m02;
%
% Ikeliamas pusiausvyros lygciu matrica:
pusiausvyros_lygciu_matrica;
%
% Sudaroma pasiduodamumo matrica:
D = zeros(340,340);
for i = 1:80;
D(i,i) = L1/(E*A1); end;
for i = 81:240;
D(i,i) = L2/(E*A2); end;
for i = 241:320;
D(i,i) = L3/(E*A3); end;
for i = 321:340;
D(i,i) = L4/(E*A4); end;
%
% Sudaroma poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta = inv(A*inv(D)*A'); alfa = inv(D)*A'*beta;
%
% Sudaroma logine matrica:
P = zeros(8,240);
P(1,109) = 1; P(2,112) = 1; P(3,115) = 1; P(4,118) = 1;
P(5,229) = 1; P(6,232) = 1; P(7,235) = 1; P(8,238) = 1;
%
% Dinaminiu poslinkiu ir irazu influentines matricos:
beta_dyn = P*beta*P'; alfa_dyn = alfa*P';
%
% Charakteringoji matrica:
C = beta_dyn*masiu_matrica;
%
% Charakteringosios lygties sprendinys:
lambda = eig(C);
%
% Apskaiciuojamas savuju svyravimu pagrindinio tono daznis:
omega = (1/max(lambda))^(0.5);
%
% Apskaiciuojamas zadinancios apkrovos ciklinis daznis:
teta = 0.95*omega; beta_m = (1/teta^2)*inv(masiu_matrica);
%
% Sudaromas zadinanciu apkrovu vektorius:
F0 = zeros(8,1);
F0(5:8,1) = ones(4,1)*1.66;
% Sudaromas statiniu apkrovu vektorius:
F = zeros(240,1);
F(229) = 1.04; F(232) = 1.04; F(235) = 1.04; F(238) = 1.04;
%
% Apskaiciuojamos inercijos jegos:
Z = (beta_dyn - beta_m)^-1*beta_dyn*F0;
%
% Apskaiciuojamos dinamines irazos ir dinaminiai poslinkiai:

```