



VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Ramunė Atroškaitė

DRAUDOS SUMINIŲ IŠMOKŲ SKIRSTINIO ANALIZĖ
THE ANALYSIS OF DISTRIBUTION OF INSURANCE TOTAL PAYOUT

Baigiamasis magistro darbas

Taikomosios statistikos studijų programa, valstybinis kodas 62401P203

Statistinių metodų finansuose ir ekonomikoje specializacija

Statistikos studijų mokslo kryptis

Vilnius, 2008

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

TVIRTINU

Katedros vedėjas

(Parašas)

Leonas Saulis

(Vardas, pavardė)

(Data)

Ramunė Atroškaite

DRAUDOS SUMINIŲ IŠMOKŲ SKIRSTINIO ANALIZĖ
THE ANALYSIS OF DISTRIBUTION OF INSURANCE TOTAL PAYOUT

Baigiamasis magistro darbas

Taikomosios statistikos studijų programa, valstybinis kodas 62401P203

Statistinių metodų finansuose ir ekonomikoje specializacija

Statistikos studijų mokslo kryptis

Vadovas prof. habil. dr. Leonas Saulis

(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

(Parašas)

(Data)

Konsultantas doc. dr. Angelė Kaulakienė

(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

(Parašas)

(Data)

Konsultantas

(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

(Parašas)

(Data)

Vilnius, 2008

GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Fizinių mokslų mokslo sritis

TVIRTINU

Matematikos mokslo kryptis

Katedros vedėjas

Statistikos studijų kryptis

Taikomosios statistikos studijų programa, valstybinis kodas 62401P203

Statistinių metodų finansuose ir ekonomikoje specializacija

(Parašas)

(Vardas, pavardė)

(Data)

**BAIGIAMOJO MAGISTRO DARBO
UŽDUOTIS**

.....Nr.

Vilnius

Studentui (ei)Ramunei Atroškaitei.....
(Vardas, pavardė)

Baigiamojo darbo tema:Draudos suminių išmokų skirstinio analizė.....

patvirtinta 2007m gruodžio 12 d. dekanų potvarkiu Nr.

Baigiamojo darbo užbaigimo terminas 2008m. Birželio 13 d.

BAIGIAMOJO DARBO UŽDUOTIS:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Baigiamojo darbo rengimo konsultantai: Docentė, daktarė Angelė Kaulakienė
(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

Vadovas prof. habil. dr. Leonas Saulis
(Paraša) (Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

Užduotį gavau

.....
(Parašas)
Ramunė Atroškaite
(Vardas, pavardė)
.....
(Data)

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTINIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Fizinių mokslų mokslo sritis

Matematikos mokslo mokslo kryptis

Statistikos studijų kryptis

Taikomosios statistikos studijų programa, valstybinis kodas 62401P203

.....specializacija

PAŽYMA
APIE BAIGIAMĄJĮ MAGISTRO DARBĄ

.....Nr.

Vilnius

Studentas (ė).....Ramunė Atroškaitė.....
(Vardas, pavardė)

Studento (ės) studijų svertinis įvertinimų vidurkis.....balo.

Baigiamojo darbo tema: Draudos suminių išmokų skirstinio analizė

Baigiamasis darbas peržiūrėtas ir studentui (ei)
leidžiama ginti šį baigiamąjį darbą magistro laipsnio suteikimo komisijoje.

Katedros vedėjas

.....
(Parašas)

.....
(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

Vadovo atsiliepimas

APIE BAIGIAMĄJĮ MAGISTRO DARBĄ

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Vadovas

.....
(Parašas)

.....
(Moksl. laipsnis, vardas, pavardė)

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Fundamentinių mokslų fakultetas

Matematinės statistikos katedra

ISBN ISSN

Egz. sk.

Data-....-....

Statistikos studijų programos baigiamasis magistro darbas

Pavadinimas **Draudos suminių išmokų skirstinio analizė**

Autorius **Ramunė Atroškaitė**

Vadovas prof. habil. dr. **Leonas Saulis**

Kalba

☒ X

lietuvių

☐

užsienio

Anotacija

Šiame darbe nagrinėjama atsitiktinio dėmenų (atsitiktinių dydžių) skaičiaus skirstinio funkcijos aproksimacijos normaliuoju dėsnio tolygusis ir netolygusis įverčiai. Atsitiktinių dydžių atsitiktinio dėmenų skaičiaus suma traktuojama kaip draudėjo suminės išmokos. Pilnai išnagrinėtas atvejis, kai atsitiktinis dėmenų skaičius N_t yra homogeninis Puasono procesas.

Kita darbo dalis skirta atvejui, kai N_t nėra Puasono procesas.

Darbą sudaro 8 dalys: įvadas, analitinė – metodinė dalis, rezultatai, kuriais remsimės darbe, darbo tikslas, darbo rezultatai, publikuotas straipsnis, išvados, literatūros sąrašas.

Darbo apimtis – 49 p. teksto be priedų, 2 iliustr., 4 bibliografiniai šaltiniai.

Prasminiai žodžiai: atsitiktinis dydis, vidurkis, dispersija, kumuliantas, standartinis normalusis skirtinys, charakteristinė funkcija, tankio funkcija, centrinė ribinė teorema.

Vilnius Gediminas Technical University Fundamental
Sciences faculty
Matematical Statistic department

ISBN ISSN
Copies No.
Date-....-....

Statisticals study programme bachelor (master) thesis.

Title: : **THE ANALYSIS OF DISTRIBUTION OF INSURANCE TOTAL PAYOUT**

Author **Ramunė Atroškaitė** Academic supervisor **prof. habil. doc. Leonas Saulis**

Thesis language

☒ Lithuanian

☐ Foreign (English)

Annotation

This work analyses the even and not even evaluations of distribution function approximation of random amount of random variables using normal law. The sum of random amount of random variables is treated as insurers total payout. In this paper there is fully explored the case when N_t (random amount of random values) is homogeneous Poisson process. The other part of this work explores the case when N_t is not a Poisson process.

Structure: introduction, analytical – methodical part, results, are used in work, work point, work results, conclusions, references.

Thesis consist of: 49 p. text without appendixes, 2 pictures, 4 bibliographical entries.

Keywords: random variable, average, dispersion, cumulant, standard normal distribution, character function, density function, central limitary theorem.

TURINYS

TURINYS	7
1. ĮVADAS	8
1.1. Tyrimo objektas	8
1.2. Darbo tikslas ir uždaviniai	9
1.3. Temos naujumas ir aktualumas	9
1.4. Tyrimo metodai	9
1.5. Mokslinė darbo vertė	9
2. ANALITINĖ – METODINĖ DALIS	10
2.1. Kumuliantai	10
2.2. Normalusis skirstinys	11
2.2.1. Standartinis normalusis skirstinys	13
2.3. Centrinė ribinė teorema	13
2.4. Koši formulė	14
3. REZULTATAI, KURIAIS REMSIMĖS DARBE	15
4. DARBO TIKSLAS	19
5. DARBO REZULTATAI	21
5.1. Atsitiktinis dėmenų skaičius N_t yra homogeninis Puasono procesas	21
5.2 Atsitiktinis dėmenų skaičius N_t nėra homogeninis Puasono procesas	31
6. MAGISTRO PUBLIKUOTAS STRAIPSNIS	42
7. IŠVADOS	48
LITERATŪRA	49

1. ĮVADAS

Nagrinėjant realiojo pasaulio dėsningumus, gerai žinomi matematiniai modeliai, kurie pakankamai adekvačiai apibūdina reiškinius (įvykius, dydžius, procesus). Didelė dalis mus supančio pasaulio reiškinių yra atsitiktiniai, kurių reikšmė ne ką menkesnė už deterministinius (neatsitiktinius) reiškinius.

Sunku rasti tokią mokslo ar technikos sritį, kurioje būtų nenaudojami tikimybių teorijos ir matematinės statistikos metodai. Šios dvi mokslo šakos yra glaudžiai susijusios, o jų teikiami statistiniai ir tikimybinių metodai sudėtingose situacijose dažnai yra paprastesni, o kartais – ir vieninteliai. Tikimybių teorijos ir statistikos taikymo sferą apibūdinsime kaip eksperimentus, kuriems nebūdingas visiškas stabilumas, tačiau santykiniai dažniai yra stabilūs. Tokius eksperimentus vadinsime atsitiktiniais, statistiniais arba tikimybinais.

Kad ir kokia būtų graži ir logiška teorija, vis vien ateina laikas, kai tenka ja pagrįsti pavyzdžiais. Tuomet atliekamas eksperimentas ir renkami duomenys. Remdamiesi intuityvia atsitiktinumo samprata, atsitiktinius įvykius apibūdinsime tokia schema: realizavus sąlygų kompleksą K (atlikus eksperimentą), įvykis gali įvykti arba neįvykti. Tai – atsitiktinis įvykis. Patį atsitiktinumą galime apibūdinti kaip mūsų nežinojimo rezultatą.

Tikimybių teorijos atrasti dėsningumai šiandien aktualūs įvairiose pažinimo srityse. Išaugo tikimybių teorijos ir matematinės statistikos poreikis ekonomikoje, bankininkystėje, draudime, biologijoje, medicinoje ir net lingvistikoje. Šis mokslas vis giliau veržiasi į technikos, verslo planavimo ir kitas mokslo sritis, taip spartindamas jų pažangą ir duodamas vaisingų rezultatų.

1.1. TYRIMO OBJEKTAS

Darbe pasirinkau vieną iš tikimybių teorijos taikymo sričių – draudimą. Jeigu į draudimo verslą žiūrėsime paprastu kiekvienam suvokiamu žvilgsniu, tai šio verslo pelningumą galime apibrėžti tokia schema:

$$\text{pradinis kapitalas} + \text{klientų įmokos} - \text{draudimo išmokos}.$$

Visą dėmesį sutelkėme į vieną iš svarbiausių draudimo pelningumo esančių faktorių – draudimo išmokas, t.y. jei įmonės turtas yra didesnis nei klientams išmokamos draudimo išmokos, tokiu atveju draudimo bendrovė dirba pelningai. Draudimo išmokos plačiai nagrinėjamos ir yra mažiausiai nuspėjamas dydis, todėl šio dydžio skirstinio analizei mokslininkai skiria didelį dėmesį.

1.2. DARBO TIKSLAS IR UŽDAVINIAI

Šiame darbe nagrinėjama atsitiktinio dėmenų (atsitiktinių dydžių) skaičiaus skirstinio funkcijos aproksimacijos normaliuoju dėsnio tolygusis ir netolygusis įverčiai. Atsitiktinių dydžių atsitiktinio dėmenų skaičiaus suma traktuojama kaip draudėjo suminės išmokos. Pilnai išnagrinėtas atvejis, kai atsitiktinis dėmenų skaičius N_t yra homogeninis Puasono procesas. Kita darbo dalis skirta atvejui, kai N_t nėra Puasono procesas, bet tenkina momentinio tipo sąlygas.

1.3. TEMOS NAUJUMAS IR AKTUALUMAS

Atsitiktinių dydžių atsitiktinio dėmenų sumos skirstinio analizė tikimybės teorijoje ir matematinėje statistikoje užima svarbią vietą, nes šis uždavinys itin dažnai sutinkamas sprendžiant praktinius uždavinius, pavyzdžiui draudos matematikoje, eilių teorijoje ir t.t.

Darbe sprendžiami uždaviniai yra aktualūs ir nauji, nes jame gauti atskiri rezultatai nėra žinomi iš mokslinės literatūros.

1.4. TYRIMO METODAI

Baigiamajame darbe naudojamas V. Statulevičiaus 1966m. pasiūlytas kumuliantų (semiinvariantų) metodas, leidžiantis iš kumuliantų (skaitinių charakteristikų išsireiškiančių per momentus) elgesio įvertinti nagrinėjamo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos aproksimacijos normaliuoju dėsnio paklaidą.

1.5. MOKSLINĖ DARBO VERTĖ

Darbe pirmą kartą, nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių atsitiktinio dėmenų skaičiaus sumos pasiskirstymo funkcijai, gautas aproksimacijos normaliuoju dėsnio netolygus įvertis, bei įrodytos didžiųjų nuokrypių teoremos.

2. ANALITINĖ – METODINĖ DALIS

2.1. KUMULIANTAI

Kartais atsitiktinių dydžių X pasiskirstymą patogiau apibūdinti ne momentais, bet kita grupe skaitinių charakteristikų, vadinamais kumuliantais, kurie išsireiškia per paprastuosius momentus.

2.1.1. Apibrėžimas: Atsitiktinio dydžio k -osios eilės kumuliantas yra charakteristinės funkcijos logaritmo k -oji išvestinė taške $t = 0$:

$$\gamma_k = \Gamma_k(X) := \frac{1}{i^k} (\ln f_X(t))^{(k)} \Big|_{t=0}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.1)$$

Jeigu egzistuoja baigtinis s -tos eilės absoliutusias momentas $\beta_s = \mathbf{E}|X|^s < \infty$, tuomet charakteristinės funkcijos logaritmas išreiškiamas per kumuliantus tokia lygybe:

$$\ln f_X(t) = \sum_{k=1}^s \frac{\Gamma_k(X)}{k!} (it)^k + o(|t|^s), \quad \text{kai } t \rightarrow 0. \quad (2.1.2)$$

Yra žinoma kumuliantų išraiška per momentus:

$$\Gamma_k(X) = \sum_{v=1}^k \frac{(-1)^{v-1}}{v} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_v=k} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_v!} a_1 \cdot \dots \cdot a_v, \quad (2.1.3)$$

kur $\alpha_k = \mathbf{E}X^k$, $k = 1, 2, \dots$

Atskiru atveju:

$$\Gamma_1(X) = a_1,$$

$$\Gamma_2(X) = a_2 - a_1^2,$$

$$\Gamma_3(X) = a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3,$$

$$\Gamma_4(X) = a_4 - 3a_2^2 - 4a_1a_3 + 12a_1^2a_2 - 6a_1^4,$$

...

Normaliojo atsitiktinio dydžio $X \sim N(0,1)$ su vidurkiu $\mathbf{E}X = 0$ ir dispersija $\sigma^2 = \mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 = 1$, tankio ir charakteristinė funkcijos atitinkamai lygios:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.1.4)$$

$$f_X(t) = \mathbf{E}e^{itX} = e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.1.5)$$

Normaliojo atsitiktinio dydžio $X \sim N(0,1)$ kumuliantai

$$\Gamma_1(X) = \mathbf{E}X, \quad \Gamma_2(X) = \mathbf{D}X,$$

$$\Gamma_k(X) = 0, \quad \text{jei } k = 3, 4, \dots \quad (2.1.6)$$

2.2 NORMALUSIS SKIRSTINYS

2.2.1 Apibrėžimas: Atsitiktinio dydžio X skirstinį vadiname normaliuoju (Gauso), jei jo tankio funkcija

$$p(x) = \varphi(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.2.1)$$

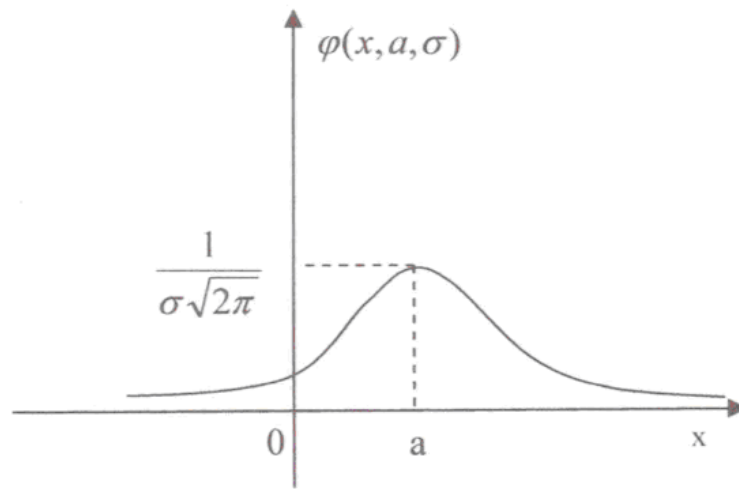
ir parametrai $a \in R$, $\sigma > 0$. Šį skirstinį trumpai pažymėkime taip:

$$X \sim N(a, \sigma). \quad (2.2.2)$$

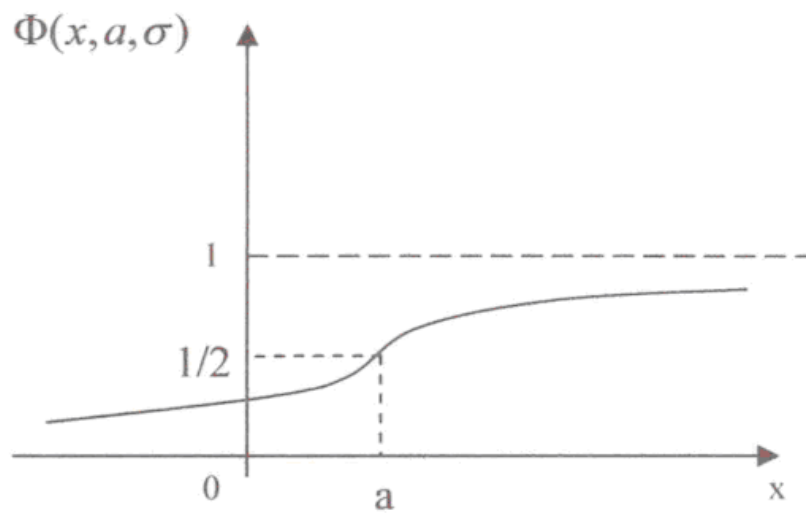
Šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \Phi(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy. \quad (2.2.3)$$

Funkcijos $F(x)$ reikšmės, išskyrus reikšmes $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ ir $F(a) = \frac{1}{2}$, apskaičiuojamos tik apytiksliai.



2.2.1. pav. Normaliojo skirstinio tankio funkcijos grafikas



2.2.2. pav. Normaliojo skirstinio funkcijos grafikas

Normaliojo skirstinio tikimybė: m yra vidurkis, σ - vidutinis kvadratinis nuokrypis (dispersija σ^2). Iš apibrėžimo išplaukia, kad normalųjį atsitiktinį dydį visiškai apibūdina jo vidurkis ir dispersija.

Jei $a = 0$, $\sigma = 1$, tai normalusis skirstinys vadinamas standartiniu.

2.2.1. Standartinis normalusis skirstinys

2.2.1.1. Apibrėžimas. Standartinis normalusis skirstinys - tai atskiras bendrojo normaliojo skirstinio atvejis, kai $a = 0$ ir $\sigma = 1$. Pasiskirstymo ir jo tankio funkcijos šiuo atveju yra

$$\varphi(x) = \varphi(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.2.1.1)$$

$$F(x) = \Phi(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2.2.1.2)$$

2.3. CENTRINĖ RIBINĖ TEOREMA

2.3.1. Apibrėžimas. Sakome, kad atsitiktinių dydžių sekai $X_1, X_2, \dots$, galioja centrinė ribinė teorema, jei centruotų ir normuotų sumų

$$\bar{S}_n = \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}, \quad S_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad (2.3.1)$$

skirstinių seka, kai $n \rightarrow \infty$, konverguoja į standartinį normalųjį skirstinį.

Pasiskirstymo funkcijų terminais tai reiškia, jog su bet kuriuo realiuoju x

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} < x\right) \Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (2.3.2)$$

Teoremą vadinsime centrine, nes ribinis skirstinys yra normalusis – vienas iš pagrindinių tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje. Praktikoje pasitaiko daug dydžių, kurių skirstiniai yra normalieji arba jiems artimi.

Detaliau tirsime atvejį, kai dydžiai yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę.

Sakykime, $\{X_k, k \geq 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkais

$\mathbf{E}X_k = m$ ir dispersijomis $\mathbf{D}X_k = \sigma^2 \neq 0$.

Tada sumos vidurkis ir dispersija yra:

$$\mathbf{E}S_n = nm, \quad \mathbf{D}S_n = n\sigma^2. \quad (2.3.3)$$

3.3.1. Teorema. Jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai $\{X_k, k \geq 1\}$ yra vienodai pasiskirstę ir turi baigtines dispersijas $\sigma^2 \neq 0$, tai sumos $\bar{S}_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$, pasiskirstymo funkcija $\mathbf{P}(\bar{S}_n < x) \Rightarrow \Phi(x)$, kai $n \rightarrow \infty$.

2.4. KOŠI FORMULĖ

Tegul $f(z)$ yra kompleksinio kintamojo funkcija t. y. $z = x + iy$, kur x ir y įgyja realiąsias reikšmes. Koši formulė leidžia rasti šios funkcijos k -tosios eilės išvestinę taške z_0 , t.y.

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z| \leq A} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}. \quad (2.4.1)$$

Ši formulė sudaro galimybę, žinant funkcijos $f(z)$ modulio $|f(z)|$ įvertį srityje $|z| \leq A$, įvertinti šios funkcijos k -tosios eilės išvestinę.

3. REZULTATAI, KURIAIS REMSIMĖS DARBE

Draudiko, nuolat apdraudžiančio draudėjų rizikas, atsargų raidą apibūdina jo pradinės atsargos ir pajamų bei išlaidų srautų skirtumas. Draudiko pajamos sudaro draudėjų įmokos, o išlaidas – draudiminiai ieškiniai ir draudiko paslaugų sąnaudos (draudimo bendrovės darbuotojų atlyginimai ir akciniai dividendai, mokesčiai, techninės įrangos atnaujinimo bei priežiūros, reklamos ir kitos išlaidos). Draudiko atsargų raidą apibrėžia atsitiktinis procesas

$$R_t = R_0 + P_t - Z_t, \quad t \geq 0. \quad (3.1)$$

Čia:

R_t - draudiko atsargos laiko momentu t ,

R_0 – pradinės atsargos,

P_t – draudėjų įmokų gautų laiko momentu $[0, t]$, sumos ir draudiko paslaugų sąnaudų laikotarpiu $[0, t]$ sumos skirtumas,

Z_t – suminės išmokos laiko intervalu $[0, t]$: $Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$.

Tegul X bet koks atsitiktinis dydis su vidurkiu $\mathbf{E}X = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}X = 1$. Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkciją ir charakteristinę funkciją atitinkamai žymėsime:

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X < x), \quad (3.2)$$

$$f_X(t) = \mathbf{E}e^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X \quad (3.3)$$

ir standartinį normalųjį skirstinį $X \sim N(0,1)$.

Toliau reikalausime, kad atsitiktinis dydis X su vidurkiu $\mathbf{E}X = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}X = 1$ tenkintų sąlygą: egzistuoja dydžiai $\gamma \geq 0$ ir $\Delta > 0$ tokie, kad

$$|\Gamma_k(X)| \leq \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta^{k-2}}, \quad k = 3, 4, \dots \quad (S_\gamma)$$

1. Lema. (R.Rudzkis, L.Saulis, V. Statulevičius). Jei bet koks atsitiktinis dydis X su vidurkiu $\mathbf{E}X = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}X = 1$ tenkina sąlygą (S_γ) , tai

$$\sup_x |F_X(x) - \Phi(x)| \leq \frac{18}{\Delta_\gamma}, \quad (3.4)$$

kur

$$\Delta_\gamma = c_\gamma \Delta^{1/(1+2\gamma)}, \quad c_\gamma = \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right)^{1/(1+2\gamma)}. \quad (3.5)$$

2. Lema. (Akhmedov (1990)). Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai X su $\mathbf{E}X = 0$ ir $\mathbf{E}X^2 = 1$ tenkina sąlygą (S_γ) su visais x ir $k > 1$, galioja nelygybė

$$|F(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c(k, \gamma)(\ln \Delta)^{\frac{k}{2}}}{(1 + |x|^k) \Delta_\gamma}, \quad (3.6)$$

kur

$$c(k, \gamma) = \left(7c(k) \vee \frac{2\sqrt{2} \cdot 4}{7} k! \right) \left(\frac{1}{1+2\gamma} \right)^{\frac{k}{2}} \quad (3.7)$$

ir

$$c(k) \leq 2^{\frac{k}{2}} \left(5 + \sqrt{\frac{e}{\pi}} 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \right), \quad (3.8)$$

čia $a \vee b = \max(a, b)$ ir $a \wedge b = \min(a, b)$.

3. Lema. (Rudzkis, Saulis ir Statulevičius). Jei atsitiktinis dydis X su $\mathbf{E}X = 0$ ir $\mathbf{E}X^2 = 1$ tenkina sąlygą (S_γ) , tai intervale $0 \leq x \leq \Delta_\gamma$ galioja lygybės:

$$\frac{1 - F_X(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\{L_\gamma(x)\} \left(1 + \theta_1 f_1(x) \frac{x+1}{\Delta_\gamma}\right), \quad (3.9)$$

$$\frac{F_X(-x)}{\Phi(-x)} = \exp\{L_\gamma(-x)\} \left(1 + \theta_2 f_2(x) \frac{x+1}{\Delta_\gamma}\right). \quad (3.10)$$

Čia

$$f(x) = 60(1 + 10\Delta_\gamma^2 \exp\{-1(1 - \frac{x}{\Delta_\gamma})\sqrt{\Delta_\gamma}\}) \left(1 - \frac{x}{\Delta_\gamma}\right)^{-1} \quad (3.11)$$

ir

$$L_\gamma(x) = \sum_{3 \leq k < p} \lambda_k x^k + \theta \left(\frac{x}{\Delta_\gamma}\right)^3, \quad (3.12)$$

kur

$$p = \begin{cases} 2 + \frac{1}{\gamma}, \gamma > 0, \\ \infty, \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Koeficientų λ_k išraiškos, X komuliantų išraiškose, sutampa su Cramer-Petrov eilutės koeficientais ir gali būti rasti pagal formulę:

$$\lambda_k = \frac{-b_{k-1}}{k}, \quad (3.14)$$

b_k yra nustatomas iš lygčių

$$\sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} \Gamma_{r+1}(\xi) \sum_{\substack{j_1+\dots+j_r=j \\ j_i \geq 1}} \prod_{i=1}^r b_{j_i} = \begin{cases} 1, j=1 \\ 0, j=2,3,\dots \end{cases}. \quad (3.15)$$

Atskiru atveju,

$$b_1 = 1,$$

$$b_2 = -\frac{1}{2} \Gamma_3(X),$$

$$b_3 = -\frac{1}{6} (\Gamma_4(X) - 3\Gamma_3^2(X)),$$

$$b_4 = -\frac{1}{24} (\Gamma_5(X) - 10\Gamma_3(X)\Gamma_4(X) + 15\Gamma_3^3(X)), \dots$$

Koeficientams λ_k galioja įvertis

$$|\lambda_k| \leq \frac{2}{k} (16/\Delta)^{k-2} ((k+1)!)^\gamma, \quad (3.16)$$

iš pareinamybės (3.12), gauname

$$L_\gamma(x) \leq \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x}{x+8\Delta_\gamma}, \quad L_\gamma(-x) \geq -\frac{x^3}{3\Delta_\gamma}. \quad (3.17)$$

4. DARBO TIKSLAS

Tegul $X_1, X_2, \dots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu $\mathbf{E}X_1 = \mu$ ir dispersija $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2 > 0$ ir tenkina apibendrintą S. N. Bernšteino sąlygą: egzistuoja dydžiai $\gamma \geq 0$ ir $K > 0$ tokie, kad

$$|\mathbf{E}X_1^k| \leq (k!)^{1+\gamma} K^{k-2} \mathbf{E}X_1^2, \quad k = 3, 4, \dots \quad (B_\gamma)$$

Tegul $\{N_t, t \geq 0\}$ yra Puasono procesas su parametru λ , t.y.

$$\mathbf{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad t \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

Atsitiktinio dydžio

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad (4.2)$$

centruotą ir normuotą atsitiktinį dydį ir jo pasiskirstymo funkciją atitinkamai pažymėkime:

$$\tilde{Z}_t = \frac{Z_t - \mathbf{E}Z_t}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}}, \quad F_{\tilde{Z}_t}(x) = \mathbf{P}(\tilde{Z}_t < x). \quad (4.3)$$

Darbo tikslas:

1. Esant patenkindoms aukščiau nurodytoms sąlygoms gauti atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t$ pasiskirstymo funkcijai $F_{\tilde{Z}_t}(x)$ aproksimacijos normaliuoju dėsnio absoliutinės paklaidos tolygų įvertį.
2. Esant patenkindoms aukščiau nurodytoms sąlygoms gauti atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t$ pasiskirstymo funkcijai $F_{\tilde{Z}_t}(x)$ aproksimacijos normaliuoju dėsnio absoliutinės paklaidos netolygų įvertį.
3. Iširti didžiųjų nuokrypių, tai yra tikimybės $\mathbf{P}(\tilde{Z}_t \geq x)$ asimptotinę elgesį.

4. Gauti atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t$, kuris yra centruotas ir normuotas, pasiskirstymo funkcijai $F_{\tilde{Z}_t}(x)$ aproksimacijos normaliuoju dėsniu absoliutinės paklaidos tolygų įvertį, kai N_t tenkina sąlygą, Egzistuoja dydžiai $K_2 > 0$ ir $q \geq 0$, tokie kad

$$|\Gamma_k(N_t)| \leq \frac{1}{2} k! K_2^{k-2} (\beta_t^2)^{1+(k-2)q/(1+q)}. \quad (L)$$

5. Gauti atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t$, kuris yra centruotas ir normuotas, pasiskirstymo funkcijai $F_{\tilde{Z}_t}(x)$ aproksimacijos normaliuoju dėsniu absoliutinės paklaidos netolygų įvertį, kai N_t tenkina sąlygą (L) ir atsitiktinis dydis X_1 Bernšteino sąlygą (B_γ) su $\gamma = 0$.

5. DARBO REZULTATAI

5.1. ATSITIKTINIS DĖMENŲ SKAIČIUS N_t YRA

HOMOGENINIS PUASONO PROCESAS

1. Teiginys. Esant patenkinčiai (B_γ) sąlygai ir kai N_t yra homogeninis Puasono procesas, tuomet

$$\left| \Gamma_k(\tilde{Z}_t) \right| = \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta_t^{k-2}}, \quad \Delta_t = \frac{\sqrt{\lambda t \mathbf{E} X_1^2}}{K}, \quad k=3, 4, \dots \quad (5.1.1)$$

Irodymas.

Tegul $Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$, kur $\{N_t, t \geq 0\}$ yra Puasono procesas su parametru λ , ir X_k , $k=1, 2, \dots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Be to, reikalaujame, kad N_t ir X_i , $i=1, 2, \dots$ būtų nepriklausomi. Atsitiktinio dydžio Z_t charakteristinė funkcija

$$\begin{aligned} f_{Z_t}(u) &= \mathbf{E} e^{iuZ_t} = \sum_k \mathbf{E} e^{iu(X_1 + \dots + X_k)} \mathbf{P}(N_t = k) = \sum_k \mathbf{E}(e^{iuX_1} \cdot \dots \cdot e^{iuX_k}) \mathbf{P}(N_t = k) = \\ &= \sum_k (f_{X_1}(u))^k \mathbf{P}(N_t = k) = \sum_k e^{\ln(f_{X_1}(u))^k} \mathbf{P}(N_t = k) = \sum_k e^{k \ln f_{X_1}(u)} \mathbf{P}(N_t = k) = \\ &= \mathbf{E} e^{N_t \ln f_{X_1}(u)} = \mathbf{E} \left(1 + \frac{N_t \ln f_{X_1}(u)}{1!} + \dots + \frac{(N_t \ln f_{X_1}(u))^k}{k!} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln f_{X_1}(u))^k}{k!} \mathbf{E} N_t^k. \end{aligned}$$

Taigi

$$f_{Z_t}(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln f_{X_1}(u))^k}{k!} \mathbf{E} N_t^k. \quad (5.1.2)$$

Iš čia gauname

$$\ln f_{Z_t}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln f_{X_1}(u))^k}{k!} \Gamma_k(N_t), \quad (5.1.3)$$

kur $\Gamma_k(N_t)$ yra atsitiktinio dydžio N_t , k – tosios eilės kumuliantas.

Pasinaudoję atsitiktinio dydžio k -tosios eilės kumulanto (semiinvarianto) apibrėžimu apskaičiuojame $\Gamma_k(N_t)$ išraišką. Kadangi Puasono proceso N_t charakteristinė funkcija

$$f_{N_t}(u) = \mathbf{E}e^{iuN_t} = \exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\}, \quad (5.1.4)$$

tai

$$\Gamma_k(N_t) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{du^k} \ln f_{N_t}(u) \big|_{u=0} = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{du^k} (\lambda t(e^{iu} - 1)) \big|_{u=0} = \lambda t. \quad (5.1.5)$$

Naudodamiesi (5.1.3) ir (5.1.5) formulėmis gauname

$$\begin{aligned} \ln f_{Z_t}(u) &= \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln f_{X_1}(u))^k}{k!} = \lambda t \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln f_{X_1}(u))^k}{k!} + 1 - 1 \right) = \\ &= \lambda t \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} 1 + \frac{(\ln f_{X_1}(u))^k}{k!} \right) - 1 \right) = \lambda t (e^{\ln f_{X_1}(u)} - 1) = \\ &= \lambda t (f_{X_1}(u) - 1). \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Taigi gavome atsitiktinio dydžio Z_t charakteristinės funkcijos išraišką

$$f_{Z_t}(u) = e^{\lambda t(f_{X_1}(u) - 1)}. \quad (5.1.7)$$

Tuomet atsitiktinio dydžio $Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$, k -tosios eilės kumuliantas

$$\begin{aligned} \Gamma_k(Z_t) &= \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{du^k} \ln f_{Z_t}(u) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{du^k} \lambda t (f_{X_1}(u) - 1) \big|_{u=0} = \\ &= \lambda t \frac{1}{i^k} f_{X_1}^{(k)}(u) \big|_{u=0} = \lambda t \mathbf{E} X_1^k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Nesunku įsitikinti, kad atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t$, apibrėžto lygybe (4.3) vidurkis ir dispersija atitinkamai lygūs

$$\mathbf{E}\tilde{Z} = \mathbf{E}\left(\frac{Z_t - \mathbf{E}Z_t}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}} \mathbf{E}(Z_t - \mathbf{E}Z_t) = \quad (5.1.9)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}} (\mathbf{E}Z_t + \mathbf{E}(-\mathbf{E}Z_t)) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}} (\mathbf{E}Z_t - \mathbf{E}Z_t) = 0.$$

$$\mathbf{D}\tilde{Z} = \mathbf{D}\left(\frac{Z_t - \mathbf{E}Z_t}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}}\right) = \frac{1}{\mathbf{D}Z_t} \mathbf{D}(Z_t - \mathbf{E}Z_t) = \quad (5.1.10)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{D}Z_t} (\mathbf{D}Z_t + \mathbf{D}(-\mathbf{E}Z_t)) = \frac{1}{\mathbf{D}Z_t} (\mathbf{D}Z_t - 0) = 1.$$

Taigi gavome kad:

$$\mathbf{E}\tilde{Z}_t = 0, \quad \mathbf{D}\tilde{Z}_t = 1. \quad (5.1.11)$$

Pastebėję, kad

$$\Gamma_k(Z_t - \mathbf{E}Z_t) = \Gamma_k(Z_t), \quad k = 2, 3, \dots, \quad (5.1.12)$$

ir remdamiesi atsitiktinio dydžio Z_t , k -tosios eilės kumulanto išraiška (5.1.8), gauname

$$\Gamma_k(\tilde{Z}_t) = \Gamma_k\left(\frac{Z_t - \mathbf{E}Z_t}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}}\right)^k \Gamma_k(Z_t - \mathbf{E}Z_t) = \quad (5.1.13)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}} \right)^k \Gamma_k(Z_t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda t \mathbf{E}X_1^2}} \right)^k \lambda t \mathbf{E}X_1^k = \\
&= \frac{\lambda t}{(\lambda t)^{k/2}} \frac{\mathbf{E}X_1^k}{(\mathbf{E}X_1^2)^{k/2}} = \frac{1}{(\lambda t)^{(k-2)/2}} \cdot \frac{\mathbf{E}X_1^k}{(\mathbf{E}X_1^2)^{k/2}}, \quad k = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Įvertinsime atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t = \frac{Z_t - \mathbf{E}Z_t}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}}$, k -tosios eilės kumulantą $\Gamma_k(\tilde{Z}_t)$, kai atsitiktinis dydis $X_1, X_2, \dots, X_n$ tenkina S.N. Bernšteino sąlygą (B_γ):

$$\begin{aligned}
|\Gamma_k(\tilde{Z}_t)| &= \left| \frac{1}{(\lambda t)^{(k-2)/2}} \cdot \frac{\mathbf{E}X_1^k}{(\mathbf{E}X_1^2)^{k/2}} \right| = \frac{1}{(\lambda t)^{(k-2)/2}} \cdot \frac{1}{(\mathbf{E}X_1^2)^{k/2}} \cdot |\mathbf{E}X_1^k| \leq \\
&\leq \frac{(k!)^{1+\gamma} K^{k-2} \mathbf{E}X_1^2}{(\lambda t)^{(k-2)/2} (\mathbf{E}X_1^2)^{k/2}} = \frac{(k!)^{1+\gamma} K^{k-2}}{(\lambda t)^{(k-2)/2} (\mathbf{E}X_1^2)^{(k-2)/2}} = \frac{(k!)^{1+\gamma} K^{k-2}}{(\sqrt{\lambda t \mathbf{E}X_1^2})^{k-2}} = \\
&= \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta_t^{k-2}},
\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

kur

$$\frac{1}{\Delta_t^{k-2}} = \frac{K^{k-2}}{(\sqrt{\lambda t \mathbf{E}X_1^2})^{k-2}}.$$

Taigi

$$|\Gamma_k(\tilde{Z}_t)| \leq \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta_t^{k-2}}, \quad \Delta_t = \frac{\sqrt{\lambda t \mathbf{E}X_1^2}}{K}, \quad k=3, 4, \dots \tag{5.1.15}$$

1. Teorema. Tegul nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ su vidurkiu $\mathbf{E}X_1 = \mu$ ir dispersija $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2 > 0$ tenkina apibendrintą S. N. Bernšteino sąlygą (B_γ). Tada atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t$ apibrėžto (4.3) lygybe pasiskirstymo funkcijai $F_{\tilde{Z}_t}(x)$ galioja nelygybė

$$\sup_x \left| F_{\tilde{Z}_t}(x) - \Phi(x) \right| \leq \frac{18}{\Delta_{t,\gamma}}, \quad (5.1.16)$$

kur

$$\Delta_{t,\gamma} = c_\gamma \Delta_t^{\frac{1}{1+2\gamma}}, \quad \Delta_t = \frac{\sqrt{\lambda t \mathbf{E}X_1^2}}{K}, \quad (5.1.17)$$

$$c_\gamma = \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right)^{\frac{1}{1+2\gamma}}. \quad (5.1.18)$$

Įrodymas.

Remiantis pirmuoju teiginiu ir pirmąją lema gauname pirmos teoremos tvirtinimą.

2. Teorema. Esant patenkintoms **1. Teoremos** sąlygoms, galioja nelygybė:

$$\left| F_{\tilde{Z}_t}(x) - \Phi(x) \right| \leq \frac{c(k, \gamma) (\ln \Delta_{t,\gamma})^{\frac{k}{2}}}{(1 + |x|^k) \Delta_{t,\gamma}}, \quad (5.1.19)$$

su visais x ir $k > 1$, kur

$$c(k, \gamma) = \left(7c(k) \vee \frac{2\sqrt{2} \cdot 4}{7} k! \right) \left(\frac{1}{1+2\gamma} \right)^{\frac{k}{2}} \quad (5.1.20)$$

ir

$$c(k) \leq 2^{\frac{k}{2}} \left(5 + \sqrt{\frac{e}{\pi}} 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \right), \quad (5.1.21)$$

$k > 1$.

Čia $a \vee b = \max(a, b)$ ir $a \wedge b = \min(a, b)$.

Įrodymas.

Remiantis pirmuoju teiginiu ir antrąją lema gauname antros teoremos tvirtinimą.

3. Teorema. Jei atsitiktiniai dydžiai X_k , $k=1,2,\dots$ tenkina sąlygą (B_γ) , tai intervale $0 \leq x \leq \Delta_t$ galioja nelygybės:

$$\frac{1 - F_{\tilde{Z}_t}(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\{L_\gamma(x)\} \left(1 + \theta_1 f_1(x) \frac{x+1}{\Delta_{t,\gamma}} \right), \quad (5.1.22)$$

$$\frac{F_{\tilde{Z}_t}(-x)}{\Phi(-x)} = \exp\{L_\gamma(-x)\} \left(1 + \theta_2 f_2(x) \frac{x+1}{\Delta_{t,\gamma}} \right). \quad (5.1.23)$$

Čia

$$f(x) = \frac{60(1 + 10\Delta_{t,\gamma}^2 \exp\{-1(1 - \frac{x}{\Delta_{t,\gamma}})\sqrt{\Delta_{t,\gamma}}\})}{(1 - \frac{x}{\Delta_{t,\gamma}})} \quad (5.1.24)$$

ir

$$L_\gamma(x) = \sum_{3 \leq k < p} \lambda_k x^k + \theta \left(\frac{x}{\Delta_{t,\gamma}} \right)^3, \quad (5.1.25)$$

kur

$$p = \begin{cases} 2 + \frac{1}{\gamma}, \gamma > 0, \\ \infty, \gamma = 0. \end{cases} \quad (5.1.26)$$

Koeficientų λ_k išraiškos, gali būti rastos pagal formulę:

$$\lambda_k = \frac{-b_{k-1}}{k}, \quad (5.1.27)$$

b_k yra nustatomas iš lygčių sistemos

$$\sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} \Gamma_{r+1}(\tilde{Z}_t) \sum_{\substack{j_1+\dots+j_r=j \\ j_i \geq 1}} \prod_{i=1}^r b_{j_i} = \begin{cases} 1, j=1 \\ 0, j=2,3,\dots \end{cases}. \quad (5.1.28)$$

Koeficientams λ_k galioja įvertis

$$|\lambda_k| \leq \frac{2}{k} (16 / \Delta_{t,\gamma})^{k-2} ((k+1)!)^\gamma, \quad (5.1.29)$$

Iš pareinamybės (5.1.25), gauname

$$L_\gamma(x) \leq \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x}{x+8\Delta_{t,\gamma}}, \quad L_\gamma(-x) \geq -\frac{x^3}{3\Delta_{t,\gamma}}. \quad (5.1.30)$$

Įrodymas.

Trečiąją lemą pritaikę atsitiktiniam dydžiui $X = \tilde{Z}_t$, ir pastenėję, kad šiuo atveju Δ iš sąlygos (S_γ) yra lygus Δ_t , gauname trečios teoremos tvirtinimą.

4. Teorema. Jei nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai X_k , $k=1,2,\dots$ tenkina sąlygą (B_γ) , o sumavimo indeksas N_t yra homogeninis Puasono procesas, tai

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{\tilde{Z}_t}(x)}{1 - \Phi(x)} = 1, \quad (5.1.31)$$

kai

$$x \geq 0, \quad x = o(\Delta_{t,\gamma}^\nu), \text{ kur } \nu = (1 + 2(1 \vee \gamma))^{-1}. \quad (5.1.32)$$

Irodymas.

Norint gauti ketvirtosios teoremos teiginį reikia parodyti, kad $L_\gamma(x) \rightarrow 0$ ir $f_1(x) \cdot \frac{x}{\Delta_{t,\gamma}} \rightarrow 0$, kai $t \rightarrow \infty$. Pastebime, kad funkcijos $L_\gamma(x)$ didžiausias narys yra pirmasis dėmuo:

$$L_\gamma(x) = \lambda_3 x^3 + \dots \quad (5.1.33)$$

Apskaičiuokime λ_3 išraišką:

$$\lambda_3 = -\frac{b_2}{3}, \quad b_2 = -\frac{1}{2} \Gamma_3(\tilde{Z}_t). \quad (5.1.34)$$

Iš čia

$$\lambda_3 = \frac{1}{6} \Gamma_3(\tilde{Z}_t). \quad (5.1.35)$$

Taigi reikia parodyti, kad $x = o(\Delta_{t,\gamma}^\nu)$, $\nu = (1 + 2(1 \vee \gamma))^{-1}$ reiškinyje $\Gamma_3(\tilde{Z}_t)x^3 \rightarrow 0$.

Kadangi

$$|\Gamma_3(\tilde{Z}_t)| \leq \frac{(3!)^{1+\gamma}}{\Delta_{t,\gamma}}, \quad (5.1.36)$$

tai

$$\frac{x^3}{\Delta_{t,\gamma}} = \frac{o(\Delta_{t,\gamma}^{3\nu})}{\Delta_{t,\gamma}} = o(\Delta_{t,\gamma}^{3\nu-1}). \quad (5.1.37)$$

Toliau turime

$$3\nu - 1 = \frac{3}{1 + 2(1 \vee \gamma)} - 1 = \frac{3 - 1 - 2(1 \vee \gamma)}{1 + 2(1 \vee \gamma)} = \frac{2 - 2(1 \vee \gamma)}{1 + 2(1 \vee \gamma)} = \frac{2(1 - (1 \vee \gamma))}{1 + 2(1 \vee \gamma)} \leq 0, \quad \gamma \geq 0. \quad (5.1.38)$$

Čia $a \vee b = \max\{a, b\}$.

Vadinasi, kai

$$v = (1 + 2(1 \vee \gamma))^{-1}, \text{ tai } \frac{x^3}{\Delta_{t,\gamma}} = o(\Delta_{t,\gamma}^{3v-1}) \rightarrow 0, \text{ kai } \Delta_{t,\gamma} \rightarrow \infty. \quad (5.1.39)$$

Nesunku įsitikinti, kad $x \geq 0$, $x = o(\Delta_{t,\gamma}^v)$ trečios lemos liekamasis narys

$$f_1(x) \cdot \frac{x}{\Delta_{t,\gamma}} \rightarrow 0, \text{ kai } \Delta_{t,\gamma} \rightarrow \infty. \quad (5.1.40)$$

Kadangi $f_1(x) = \text{const.}$, tai matome iš funkcijos $f_1(x)$ išraiškos belieka įsitikinti, kad

$$\frac{x}{\Delta_{t,\gamma}} = \frac{o(\Delta_{t,\gamma}^v)}{\frac{1}{c_\gamma \Delta_{t,\gamma}^{1+2\gamma}}} = \frac{1}{c_\gamma} o\left(\Delta_{t,\gamma}^{v-\frac{1}{1+2\gamma}}\right). \quad (5.1.41)$$

Kadangi

$$\begin{aligned} v - \frac{1}{1+2\gamma} &= \frac{1}{1+2(1 \vee \gamma)} - \frac{1}{1+2\gamma} = \frac{1+2\gamma-1-2(1 \vee \gamma)}{(1+2\gamma)(1+2(1 \vee \gamma))} = \\ &= \frac{2\gamma-2(1 \vee \gamma)}{(1+2\gamma)(1+2(1 \vee \gamma))} = \frac{2(\gamma-(1 \vee \gamma))}{(1+2\gamma)(1+2(1 \vee \gamma))} \leq 0, \end{aligned} \quad (5.1.42)$$

Taigi gauname, kad

$$\frac{x}{\Delta_{t,\gamma}} \rightarrow 0, \text{ kai } \Delta_{t,\gamma} \rightarrow \infty. \quad (5.1.43)$$

Taigi parodėme, kad trečioje lemoje, liekamasis narys ir $L_\gamma(x)$ artėja į nulį, kai $\Delta_{t,\gamma} \rightarrow \infty$.

Vadinasi:

$$\frac{1 - F_{\tilde{z}_t}(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\{L_\gamma(x)\} \left(1 + \theta_1 f_1(x) \frac{x+1}{\Delta_{t,\gamma}} \right) \rightarrow 1, \quad (5.1.44)$$

su visais $x \geq 0$, $x = o(\Delta_t^v)$, kur $v = (1 + 2(1 \vee \gamma))^{-1}$.

5.2 ATSITIKTINIS DĖMENŲ SKAIČIUS N_t NĖRA HOMOGENINIS PUASONO PROCESAS

2. Teiginys. Kai nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai X_k , $k=1,2,\dots$ tenkina sąlygą (B_γ) su $\gamma = 0$:

$$|\mathbf{E}X_1^k| \leq (k!)K^{k-2}\mathbf{E}X_1^2, \quad k = 3,4,\dots, \quad (B_0)$$

o sumavimo indeksas N_t (nėra homogeninis procesas) tenkina sąlygą (L):

$$|\Gamma_k(N_t)| \leq \frac{1}{2}k!K_2^{k-2}(\beta_t^2)^{1+(k-2)q/(1+q)}. \quad (L)$$

tuomet:

$$|\Gamma_k(\bar{Z}_t)| \leq \frac{(3/2)k!}{\Delta_t^{(*)k-2}}, \quad k=3,4,\dots, \quad (5.2.1)$$

kur

$$\Delta_t^* = A(\sqrt{\mathbf{D}Z_t}) = \frac{(\alpha_t\sigma^2 + \beta_t^2\mu^2)^{1/2}}{\max\{(1 \vee |\mu|^{-1}\sigma)4M, 3|\mu|K_2\beta_t^{2q/(1+q)}\}}. \quad (5.2.2)$$

Įrodymas.

Pradžioje raskime vidurkio $(\mathbf{E}Z_t)$ ir dispersijos $(\mathbf{D}Z_t)$ išraiškas.

$$\mathbf{E}Z_t = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{N_t} X_i = \sum_l \mathbf{E}S_l \mathbf{P}(N_t = l) = \sum_l \mathbf{E}(Z_t | N_t = l) \mathbf{P}(N_t = l). \quad (5.2.3)$$

Atskirai raskime $\mathbf{E}(Z_t | N_t = l)$ išraišką

$$\mathbf{E}(Z_t | N_t = l) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \middle| N = l\right) = \mathbf{E}\sum_{i=1}^l X_i = \mathbf{E}S_l. \quad (5.2.4)$$

Pasinaudoję (5.2.4) išraišką pratęskime (5.2.3) lygybę

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}Z_t &= \sum_l \mathbf{E}(Z_t | N_t = l) \mathbf{P}(N_t = l) = \sum_l \mathbf{E}(X_1 + \dots + X_l) \mathbf{P}(N_t = l) = \\
 &= \sum_l (\mathbf{E}X_1 + \dots + \mathbf{E}X_l) \mathbf{P}(N_t = l) = \sum_l l \mathbf{E}X_1 \mathbf{P}(N_t = l) = \\
 &= \mathbf{E}X_1 \sum_l l \mathbf{P}(N_t = l) = \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}N_t = \mu \alpha_t,
 \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

kur $\alpha_t = \mathbf{E}N_t$, $\mu = \mathbf{E}X_i$.

Atsitiktinio dydžio Z_t vidurkio išraiška

$$\mathbf{E}Z_t = \mu \alpha_t. \tag{5.2.6}$$

Toliau dispersijos apskaičiavimo formulė pateikta (5.2.7) lygybėje

$$\mathbf{D}Z_t = \mathbf{E}Z_t^2 - (\mathbf{E}Z_t)^2. \tag{5.2.7}$$

Norint rasti dispersiją, reikia surasti $\mathbf{E}Z_t^2$ išraišką:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}Z_t^2 &= \sum_l \mathbf{E}(Z_t^2 | N_t = l) \mathbf{P}(N_t = l) = \sum_l \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right)^2 \middle| N_t = l\right) \mathbf{P}(N_t = l) = \\
 &= \sum_l \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^l X_i\right)^2 \mathbf{P}(N_t = l) = \sum_l \mathbf{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_l)^2 \mathbf{P}(N_t = l) = \\
 &= \sum_l \mathbf{E}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_l^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq l, i \neq j} X_i X_j) \mathbf{P}(N_t = l) = \\
 &= \sum_l (\mathbf{E}X_1^2 + \dots + \mathbf{E}X_l^2 + \mathbf{E}(\sum_{1 \leq i, j \leq l, i \neq j} X_i X_j)) \mathbf{P}(N_t = l) = \\
 &= \sum_l (l \mathbf{E}X_1^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq l, i \neq j} \mathbf{E}X_i \mathbf{E}X_j) \mathbf{P}(N_t = l).
 \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Nors $i \neq j$, bet X_i, X_j yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, todėl

$$\mathbf{E}X_i X_j = \mathbf{E}X_i \mathbf{E}X_j = \mathbf{E}X_i \mathbf{E}X_i = (\mathbf{E}X_1)^2. \quad (5.2.9)$$

Gauname išraišką

$$\sum_{1 \leq i, j \leq l, i \neq j} (\mathbf{E}X_1)^2 = l(l-1)(\mathbf{E}X_1)^2. \quad (5.2.10)$$

Istatę (5.2.10) lygybę į (5.3.8) formulę gauname:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Z_t^2 &= \sum_l (l\mathbf{E}X_1^2 + l(l-1)(\mathbf{E}X_1)^2) \mathbf{P}(N_t = l) = \mathbf{E}X_1^2 \sum_l l \cdot \mathbf{P}(N_t = l) + \\ &+ (\mathbf{E}X_1)^2 \sum_l l(l-1) \cdot \mathbf{P}(N_t = l) = \mathbf{E}X_1^2 \mathbf{E}N_t + (\mathbf{E}X_1)^2 \sum_l l(l-1) \cdot \\ &\cdot \mathbf{P}(N_t = l) = \mathbf{E}X_1^2 \mathbf{E}N_t + (\mathbf{E}X_1)^2 \sum_l l^2 \cdot \mathbf{P}(N_t = l) - (\mathbf{E}X_1)^2 \sum_l l \cdot \\ &\cdot \mathbf{P}(N_t = l) = \mathbf{E}X_1^2 \mathbf{E}N_t + (\mathbf{E}X_1)^2 \mathbf{E}N_t^2 - (\mathbf{E}X_1)^2 \cdot \mathbf{E}N_t = \\ &= \mathbf{E}X_1^2 \mathbf{E}N_t - (\mathbf{E}X_1)^2 \mathbf{E}N_t + (\mathbf{E}X_1)^2 \mathbf{E}N_t^2 = \\ &= \mathbf{E}N_t (\mathbf{E}X_1^2 - (\mathbf{E}X_1)^2) + (\mathbf{E}X_1)^2 \mathbf{E}N_t^2 = \\ &= \mathbf{E}N_t \mathbf{D}X_1 + (\mathbf{E}X_1)^2 \mathbf{E}N_t^2. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Tai gauname $\mathbf{D}Z_t$ išraišką

$$\mathbf{D}Z_t = \sigma^2 \alpha_t + \mu^2 \beta_t^2 = (\sigma^2 + \mu^2) \lambda t, \quad (5.2.12)$$

kur $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1$, $\alpha_t = \mathbf{E}N_t$, $\mu = \mathbf{E}X_1$, $\beta_t^2 = \mathbf{E}N_t^2$.

Atsitiktinio dydžio Z_t momentus generuojanti funkcija yra:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{Z_t}(z) &= \mathbf{E}e^{zZ_t} = \mathbf{E}e^{z\sum_{i=1}^{N_t} X_i} = \sum_l \mathbf{E} \left(e^{z\sum_{i=1}^{N_t} X_i} \middle| N_t = l \right) \mathbf{P}(N_t = l) = \sum_l \mathbf{E}e^{z\sum_{i=1}^l X_i} \mathbf{P}(N_t = l) = \\
 &= \sum_l \mathbf{E}e^{z(X_1 + \dots + X_l)} \mathbf{P}(N_t = l) = \sum_l \mathbf{E}e^{zX_1} e^{zX_2} \dots e^{zX_l} \cdot \mathbf{P}(N_t = l) = \\
 &= \sum_l \mathbf{E}e^{zX_1} \cdot \mathbf{E}e^{zX_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{E}e^{zX_1} \cdot \mathbf{P}(N_t = l) = \sum_l e^{\ln(\mathbf{E}e^{zX_1})^l} \mathbf{P}(N_t = l) = \\
 &= \sum_l e^{l \ln \varphi_{X_1}(z)} \mathbf{P}(N_t = l) = \mathbf{E}e^{N_t \ln \varphi_{X_1}(z)} = \mathbf{E} \exp \{N_t \ln \varphi_{X_1}(z)\}.
 \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

Iš sąlygos (B_γ) , remdamiesi pirma lema, gauname

$$|\Gamma_k(\bar{X}_1)| \leq k! M^{k-2} \sigma^2, \quad k = 3, 4, \dots \tag{5.2.14}$$

$$\ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \Gamma_k(\bar{X}_1) z^k = \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 + \theta \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} k! M^{k-2} \sigma^2 z^k = \tag{5.2.15}$$

$$= \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 + \theta \cdot z^2 \sigma^2 \sum_{k=3}^{\infty} (M|z|)^{k-2} = \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 + \theta \cdot z^2 \sigma^2 \frac{M|z|}{1 - M|z|} =$$

$$= \sigma^2 z^2 \left(\frac{1}{2} + \theta \cdot 1 \right) = \theta \frac{3}{2} \sigma^2 z^2,$$

$$|z| \leq \frac{1}{2M}. \tag{5.2.16}$$

Tegul $\bar{X}_1 = X - \mathbf{E}X = X - \mu$ ir $\bar{Z}_t = Z_t - \mathbf{E}Z_t = Z_t - \mu\alpha_t$.

Remdamiesi lygybe (5.2.13) ir sąlyga (L), gauname

$$\ln \varphi_{\bar{Z}_t}(z) = \ln \mathbf{E}e^{z\bar{Z}_t} = \ln \mathbf{E}e^{z(Z_t - \mu\alpha_t)} = \ln \mathbf{E}e^{zZ_t} \cdot e^{-\mu\alpha_t z} = \tag{5.2.17}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(e^{-z\mu\alpha_t} \cdot \mathbf{E}e^{zZ_t}) = \ln e^{-z\mu\alpha_t} + \ln \mathbf{E}e^{zZ_t} = -z\mu\alpha_t + \ln \varphi_{Z_t}(z) = \\
&= -z\mu\alpha_t + \ln(\mathbf{E} \exp\{N_t \ln \varphi_{X_1}(z)\}) = -z\mu\alpha_t + \ln \mathbf{E}e^{N_t \ln Ee^{X_1 z}} = \\
&= -z\mu\alpha_t + \ln(\mathbf{E}e^{N_t \ln Ee^{(\bar{X}_1 + \mu)z}}) = -z\mu\alpha_t + \ln(\mathbf{E}e^{N_t \ln(Ee^{\bar{X}_1 z} \cdot e^{\mu z})}) = \\
&= -z\mu\alpha_t + \ln \mathbf{E}e^{N_t(\mu z + \ln Ee^{\bar{X}_1 z})} = -z\mu\alpha_t + \ln \mathbf{E}e^{N_t(\mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z))} = \\
&= -z\mu\alpha_t + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \Gamma_l(N_t)(\mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z))^l = \\
&= -z\mu\alpha_t + \Gamma_1(N_t)(\mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z)) + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \Gamma_l(N_t)(\mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z))^l = \\
&= -z\mu\alpha_t + \mu z \alpha_t + \alpha_t \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) + (\mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z))^2 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \cdot \\
&\cdot \Gamma_l(N_t)(\mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z))^{l-2} = \alpha_t \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) + (\mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z))^2 \cdot \\
&\cdot \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \Gamma_l(N_t)(\mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z))^{l-2} = \alpha_t \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) + (\mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z))^2 \cdot \\
&\cdot \theta \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \Gamma_l(N_t) \left| \mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) \right|^{l-2} = \alpha_t \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) + \theta \frac{1}{2} \beta_t^2 (\mu z + \\
&+ \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z))^2 \sum_{l=2}^{\infty} (K_2 \left| \mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) \right| \beta_t^{2q/(1+q)})^{l-2} = \\
&= \alpha_t \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) + \theta (1 + \left| (\mu z)^{-1} \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) \right|)^2 \beta_t^2 (\mu z)^2,
\end{aligned}$$

kur $\Gamma_1(N_t) = \mathbf{E}N_t = \alpha_t$, $\Gamma_2(N_t) = \mathbf{D}N_t = \beta_t^2$. Kai

$$K_2 \left| \mu z + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) \right| \beta_t^{2q/(1+q)^{-1}} \leq 1/2. \quad (5.2.19)$$

Kai (5.2.19) nelygybė teisinga ir pratęsus (5.2.18) lygybę gauname

$$\ln \varphi_{\bar{z}_i}(z) = \alpha_i \ln \varphi_{\bar{x}_1}(z) + \theta \cdot \beta_i^2 (\mu z + \ln \varphi_{\bar{x}_1}(z))^2 = \alpha_i \ln \varphi_{\bar{x}_1}(z) + \theta \cdot \beta_i^2 \cdot$$

(5.2.20)

$$\cdot (\mu z (1 + \frac{\ln \varphi_{\bar{x}_1}(z)}{\mu z})^2 = \alpha_i \ln \varphi_{\bar{x}_1}(z) + \theta \cdot \beta_i^2 (\mu z)^2 (1 + \frac{\ln \varphi_{\bar{x}_1}(z)}{\mu z})^2.$$

$$\text{kur } \left| \frac{\ln \varphi_{\bar{x}_1}(z)}{\mu z} \right| \leq \frac{1}{5}, \text{ kai } |z| \leq ((1 \vee \frac{\sigma}{|\mu|}) 4M)^{-1}$$

(5.2.21)

Patikrinkime ar teisingai gavome sąlygas (5.2.21) lygybei (5.2.20). Iš (5.2.15) lygybės gavome išraišką $\ln \varphi_{\bar{x}_1}(z) = \frac{3}{2} \theta (\sigma |z|)^2$ su sąlyga (5.2.16). Gautą išraišką įsistatę į (5.2.20) lygybę ir žinodami, kad

$$\frac{36}{25} \leq \frac{3}{2} \text{ gauname:}$$

$$\ln \varphi_{\bar{z}_i}(z) = \alpha_i \cdot \frac{3}{2} \cdot \theta \sigma^2 |z|^2 + \theta \cdot \frac{36}{25} \cdot \beta_i^2 (\mu z)^2 = \theta \cdot \frac{3}{2} |z|^2 (\alpha_i \sigma^2 + \beta_i^2 \mu^2),$$

(5.2.22)

$$\text{kai } |z| \leq A,$$

(5.2.23)

kur

$$A = (\max \{ (1 \vee |\mu|^{-1} \sigma) 4M, 3 |\mu| K_2 \beta_i^{2q/(1+q)} \})^{-1}.$$

(5.2.24)

Taigi gauname

$$\ln \varphi_{\bar{z}_i}(z) = \theta \frac{3}{2} k! (\alpha_i \sigma^2 + \beta_i^2 \mu^2) |z|^2, \quad |z| \leq A.$$

(5.2.25)

Dabar pasinaudoję Koši formule (2.4.1) ir ankščiau užrašyta formule gauname

$$|f \varphi_{\bar{z}_i}(0)| \leq \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z| \leq A} \frac{|\ln \varphi_{\bar{z}_i}(z)|}{|z|^{k+1}} dz \right| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z| \leq A} \frac{\frac{3}{2} (\alpha_i \sigma^2 + \beta_i^2 \mu^2) |z|^2}{|z|^{k+1}} dz \right| =$$

$$= \frac{3}{2} k! (\alpha_t \sigma^2 + \beta_t^2 \mu^2) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| \leq A} \frac{dz}{|z|^{k-1}} \leq \frac{3}{2} k! (\alpha_t \sigma^2 + \beta_t^2 \mu^2) \cdot \frac{1}{A^{k-2}}.$$

Taigi

$$|\Gamma_k(\bar{Z}_t)| \leq \frac{3}{2} k! (\alpha_t \sigma^2 + \beta_t^2 \mu^2) A^{2-k}, k=3,4,\dots \quad (5.2.26)$$

Kadangi atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t = \frac{\bar{Z}_t}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}}$, k -tosios eilės kumulantas $\Gamma_k(\tilde{Z}_t) = (\sqrt{\mathbf{D}Z_t})^{-k} \Gamma_k(\bar{Z}_t)$,

tai remdamiesi nelygybe (5.2.23), gauname

$$\Gamma_k(\tilde{Z}_t) \leq \frac{(3/2)k!}{\Delta_t^{(*)k-2}}, k=3,4,\dots, \quad (5.2.27)$$

kur

$$\Delta_t^* = A(\sqrt{\mathbf{D}Z_t}) = \frac{(\alpha_t \sigma^2 + \beta_t^2 \mu^2)^{1/2}}{\max\{(1 \vee |\mu|^{-1} \sigma) 4M, 3|\mu| K_2 \beta_t^{2q/(1+q)}\}}. \quad (5.2.28)$$

5. Teorema. Jei nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai X_i tenkina S. N. Bernšteino sąlygą (B_γ) su $\gamma=0$, o atsitiktinis dydis N_t su vidurkiu $\alpha_t = \mathbf{E}N_t$ ir dispersija $\beta_t^2 = \mathbf{D}N_t$ tenkina sąlygą: egzistuoja dydžiai $K_2 > 0$ ir $q \geq 0$ tokie, kad

$$|\Gamma_k(N_t)| \leq \frac{1}{2} k! K_2^{k-2} (\beta_t^2)^{1+(k-2)q/(1+q)}, k=2,3,\dots, \quad (L)$$

tai

$$\sup_x |F_{\tilde{Z}_t}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{7}{\Delta_t^*}, \quad (5.2.29)$$

kur

$$\Delta_t^* = \frac{(\alpha_t \sigma^2 + \beta_t^2 \mu^2)^{1/2}}{\max\{(1 \vee |\mu|^{-1} \sigma) 4M, 3|\mu| K_2 \beta_t^{2q/(1+q)}\}}. \quad (5.2.30)$$

Irodymas.

Remiantis antruoju teiginiu ir pirmąja lema gauname penktos teoremos tvirtinimą.

6. Teorema. Esant patenkindoms **5. Teoremos** sąlygoms, galioja nelygybė:

$$\left| F_{\bar{Z}_t}(x) - \Phi(x) \right| \leq \frac{c(k)(\ln \Delta_t^*)^{\frac{k}{2}}}{(1 + |x|^k) \Delta_t^*},$$

su visais x ir $k > 1$, kur

$$c(k) = \left(7c(k) \vee \frac{2\sqrt{2} \cdot 4}{7} k! \right) \quad (5.2.32)$$

ir

$$c(k) \leq 2^{\frac{k}{2}} \left(5 + \sqrt{\frac{e}{\pi}} 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \right), \quad (5.2.33)$$

čia $a \vee b = \max(a, b)$ ir $a \wedge b = \min(a, b)$.

Irodymas.

Remiantis antruoju teiginiu ir antrąją lema gauname šeštos teoremos tvirtinimą.

7. Teorema. Tegul nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai X_k , $k=1,2,\dots$, tenkina sąlygą (B_γ) ir N_t sąlygą (L) tuomet intervale $0 \leq x \leq \Delta_t^*$ galioja didžiųjų nuokrypių lygybės:

$$\frac{1 - F_{\bar{Z}_t}(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\{L(x)\} \left(1 + \theta_1 f_1(x) \frac{x+1}{\Delta_t^*} \right), \quad (5.2.34)$$

$$\frac{F_{\bar{Z}_t}(-x)}{\Phi(-x)} = \exp\{L(-x)\} \left(1 + \theta_2 f_2(x) \frac{x+1}{\Delta_t^*} \right). \quad (5.2.35)$$

Čia

$$f(x) = \frac{60(1 + 10\Delta_t^{*2} \exp\{-1(1 - \frac{x}{\Delta_t^*})\sqrt{\Delta_t^*}\})}{(1 - \frac{x}{\Delta_t^*})} \quad (5.2.36)$$

ir

$$L(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \lambda_k x^k + \theta \left(\frac{x}{\Delta_t^*}\right)^3. \quad (5.2.37)$$

Koeficientų λ_k išraiškos, gali būti rastos pagal formulę:

$$\lambda_k = \frac{-b_{k-1}}{k}, \quad (5.2.38)$$

b_k yra nustatomas iš lygčių sistemos

$$\sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} \Gamma_{r+1}(\bar{Z}_t) \sum_{\substack{j_1+\dots+j_r=j \\ j_i \geq 1}} \prod_{i=1}^r b_{j_i} = \begin{cases} 1, j=1 \\ 0, j=2,3,\dots \end{cases}. \quad (5.2.39)$$

Koeficientams λ_k galioja įvertis:

$$|\lambda_k| \leq \frac{2}{k} (16/\Delta_t^*)^{k-2} ((k+1)!). \quad (5.2.40)$$

Iš pareinamybės (5.2.37), gauname

$$L(x) \leq \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x}{x + 8\Delta_t^*}, \quad L(-x) \geq -\frac{x^3}{3\Delta_t^*}. \quad (5.2.41)$$

Irodymas.

Remiantis antruoju teiginiu ir trečiąja lema gauname septintos teoremos tvirtinimą.

8. Teorema. Jei nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $X_k, k=1,2,\dots$ tenkina sąlygą (B_γ) su $\gamma = 0$ ir sumavimo indeksas N_t tenkina sąlygą (L) tai

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{\bar{Z}_t}(x)}{1 - \Phi(x)} = 1, \quad (5.2.42)$$

kai

$$x \geq 0, \quad x = o(\Delta_t^{*v}), \text{ kur } v = \frac{1}{3}. \quad (5.2.43)$$

Irodymas.

Norint gauti ketvirtosios teoremos teiginį reikia parodyti, kad $L(x) \rightarrow 0$ ir $f_1(x) \cdot \frac{x}{\Delta_t^*} \rightarrow 0$, kai $t \rightarrow \infty$.

Pastebime, kad funkcijos $L(x)$ didžiausias narys yra pirmasis dėmuo:

$$L(x) = \lambda_3 x^3 + \dots \quad (5.2.44)$$

Apskaičiuokime λ_3 išraišką:

$$\lambda_3 = -\frac{b_2}{3}, \quad (5.2.45)$$

$$b_2 = -\frac{1}{2} \Gamma_3(\bar{Z}_t). \quad (5.2.46)$$

Istatę (5.2.46) išraišką į (5.2.45) gauname:

$$\lambda_3 = \frac{1}{6} \Gamma_3(\bar{Z}_t). \quad (5.2.47)$$

Taigi reikia parodyti, kad $x = o(\Delta_t^{*v})$, $v = \frac{1}{3}$ reiškiny $\Gamma_3(\bar{Z}_t)x^3 \rightarrow 0$.

Kadangi

$$|\Gamma_3(\bar{Z}_t)| \leq \frac{(3!)}{\Delta_t^*}, \quad (5.2.48)$$

tai

$$\frac{x^3}{\Delta_t^*} = \frac{o(\Delta_t^{*3\frac{1}{3}})}{\Delta_t^*} = o(1). \quad (5.2.49)$$

Nesunku įsitikinti, kad $x \geq 0$, $x = o(\Delta_t^{*(\frac{1}{3})})$ trečios lemos liekamasis narys:

$$f_1(x) \cdot \frac{x}{\Delta_t^*} \rightarrow 0, \text{ kai } \Delta_t^* \rightarrow \infty. \quad (5.2.50)$$

Kadangi $f_1(x) = \text{const.}$, tai matome iš funkcijos $f_1(x)$ išraiškos belieka įsitikinti, kad

$$\frac{x}{\Delta_t^*} = \frac{o(\Delta_t^{*(\frac{1}{3})})}{c_\gamma \Delta_t^*} = \frac{1}{c_\gamma} o\left(\Delta_t^{*\frac{2}{3}}\right). \quad (5.2.51)$$

Taigi parodėme, kad trečioje lemoje, liekamasis narys ir $L_\gamma(x)$ artėja į nulį, kai $\Delta_t \rightarrow \infty$.

Vadinasi:

$$\frac{1 - F_{\bar{Z}_t}(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\{L_\gamma(x)\} \left(1 + \theta_1 f_1(x) \frac{x+1}{\Delta_t^*}\right) \rightarrow 1, \quad (5.2.56)$$

su visais $x \geq 0$, $x = o(\Delta_t^{*v})$, kur $v = \frac{1}{3}$.

6. MAGISTRO PUBLIKUOTAS STRAIPSNIS

DRAUDOS SUMINIŲ IŠMOKŲ SKIRSTINIO ANALIZĖ

Ramunė Atroškaitė

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Anotacija. Nagrinėjama atsitiktinio dėmenų (atsitiktinių dydžių) skaičiaus skirstinio funkcijos aproksimacijos normaliuoju dėsniu tolygusis ir netolygusis įverčiai. Atsitiktinių dydžių atsitiktinio dėmenų skaičiaus suma traktuojama kaip draudėjo suminės išmokos. Visiškai išnagrinėtas atvejis, kai atsitiktinis dėmenų skaičius N_t yra homogeninis Puasono procesas. Kita darbo dalis skirta atvejui, kai N_t nėra Puasono procesas.

Įvadas

Darbe pasirinkau vieną iš tikimybių teorijos taikymo sričių – draudimą. Jeigu į draudimo verslą žiūrėsime paprastu kiekvienam suvokiamu žvilgsniu, tai šio verslo pelningumą galime apibrėžti tokia schema:

pradinis kapitalas + klientų įmokos – draudimo išmokos.

Visą dėmesį sutelkėme į vieną iš svarbiausių draudimo pelningumo veiksnių – draudimo išmokas, t. y. jei įmonės turtas yra didesnis nei klientams išmokamos draudimo išmokos, tokiu atveju draudimo bendrovė dirba pelningai. Draudimo išmokos plačiai nagrinėjamas ir yra mažiausiai nuspėjamas atsitiktinis dydis.

Bendrosios žinios

Tolydaus laiko draudiko atsargų dinaminio modelio struktūra:

$$R_t = R_0 + P_t - Z_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

čia R_t – draudiko atsargos laiko momentu, t , R_0 – pradinės atsargos, P_t – suminės įmokos, Z_t – suminės išmokos laiko intervale $[0, t]$.

Tegul X bet koks atsitiktinis dydis su vidurkiu $EX = 0$ ir dispersija $DX = 1$. Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkciją ir charakteristinę funkciją žymėsime:

$$F_X(x) = P(X < x), \quad f_X(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x). \quad (2)$$

Standartinis normalusis skirstinys:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy. \quad (3)$$

Atsitiktinio dydžio X , k -tosios eilės kumulantas $\Gamma_k(X)$ apibrėžiamas lygybe

$$\Gamma_k(X) = \frac{1}{i^k} \cdot \frac{d^k}{dt^k} \ln f_X(t) \Big|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Toliau reikalausime, kad atsitiktinis dydis X su vidurkiu $\mathbf{E}X = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}X = 1$ tenkintų sąlygą: egzistuoja dydžiai $\gamma \geq 0$ ir $\Delta > 0$ tokie, kad

$$|\Gamma_k(X)| \leq \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta^{k-2}}, \quad k = 3, 4, \dots \quad (S_\gamma)$$

1 lema. Jei bet koks atsitiktinis dydis X su vidurkiu $\mathbf{E}X = 0$ ir dispersija $\mathbf{D}X = 1$ tenkina sąlygą (S_γ) , tai

$$\sup_x |F_X(x) - \Phi(x)| \leq \frac{18}{\Delta_\gamma}, \quad (5)$$

čia
$$\Delta_\gamma = c_\gamma \Delta^{1/(1+2\gamma)}, \quad c_\gamma = \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right)^{1/(1+2\gamma)}. \quad (6)$$

Pagrindiniai darbo rezultatai

Tegul $X_1, X_2, \dots, X_n$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu $\mathbf{E}X_1 = \mu$ ir dispersija $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2 > 0$ ir tenkinta apibendrintą S. N. Bernšteino sąlygą: egzistuoja dydžiai $\gamma > 0$ ir $K > 0$ tokie, kad

$$|\mathbf{E}X_1^k| \leq (k!)^{1+\gamma} K^{k-2} \mathbf{E}X_1^2, \quad k = 3, 4, \dots \quad (B_\gamma)$$

Tegul $\{X_t, t \geq 0\}$ yra Puasono procesas su parametru λ , t. y.

$$\mathbf{P}(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, t \geq 0, k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Atsitiktinio dydžio

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad (8)$$

centruotą ir normuotą atsitiktinį dydį ir jo pasiskirstymo funkciją pažymėkime:

$$\tilde{Z}_t = \frac{Z_t - \mathbf{E}Z_t}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}}, \quad F_{\tilde{Z}_t}(x) = \mathbf{P}(\tilde{Z}_t < x). \quad (9)$$

1 teorema. Tegul nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ su vidurkiu $\mathbf{E}X_1 = \mu$ ir dispersija $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2 > 0$ ir tenkina apibendrintą S. N. Bernšteino sąlygą (B_γ). Tada atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t$, apibrėžto (2) lygybe, pasiskirstymo funkcijai $F_{\tilde{Z}_t}(x)$ galioja nelygybė

$$\sup_x |F_{\tilde{Z}_t}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{18}{\Delta_{t,\gamma}}, \quad (10)$$

čia
$$\Delta_{t,\gamma} = c_\gamma \Delta_t^{\frac{1}{1+2\gamma}}, \quad c_\gamma = \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right)^{\frac{1}{1+2\gamma}}. \quad (11)$$

Irodymas

Tegul $Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$, čia $\{N_t, t \geq 0\}$ yra Puasono procesas su parametru λ , ir X_k , $k = 1, 2, \dots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Atsitiktinio dydžio Z_t charakteristinė funkcija

$$f_{Z_t}(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln f_{X_1}(u))^k}{k!} \mathbf{E}N_t^k. \quad (12)$$

Iš čia gauname

$$\ln f_{Z_t}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln f_{X_1}(u))^k}{k!} \Gamma_k(N_t). \quad (13)$$

Pasinaudoję atsitiktinio dydžio k -tosios eilės kumulanto (semiinvarianto) apibrėžimu apskaičiuojame $\Gamma_k(N_t)$ išraišką. Kadangi Puasono proceso N_t charakteristinė funkcija

$$f_{N_t}(u) = \mathbf{E}e^{iuN_t} = \exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\}, \quad (14)$$

tai

$$\Gamma_k(N_t) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} \ln f_{N_t}(t) \big|_{t=0} = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} (\lambda t(e^{iu} - 1)) \big|_{u=0} = \lambda t, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Naudodamiesi (14) ir (15) formulėmis, gauname atsitiktinio dydžio Z_t charakteristinės funkcijos išraišką

$$f_{Z_t}(u) = e^{\lambda t(f_{X_1}(u) - 1)}. \quad (16)$$

Tuomet atsitiktinio dydžio $Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$, k -tosios eilės kumulantas

$$\Gamma_k(Z_t) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{du^k} \ln f_{Z_t}(u) = \lambda t \mathbf{E}X_1^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Nesunku įsitikinti, kad atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t$, apibrėžto lygybe (8), vidurkis ir dispersija atitinkamai lygūs

$$\mathbf{E}\tilde{Z}_t = 0, \quad \mathbf{D}\tilde{Z}_t = 1. \quad (18)$$

Pastebėję, kad

$$\Gamma_k(Z_t - \mathbf{E}Z_t) = \Gamma_k(Z_t), \quad k = 2, 3, \dots, \quad (19)$$

ir remdamiesi atsitiktinio dydžio Z_t , k -tosios eilės kumulanto išraiška (17), gauname

$$\Gamma_k(\tilde{Z}_t) = \frac{1}{(\lambda t)^{(k-2)/2}} \cdot \frac{\mathbf{E}X_1^k}{(\mathbf{E}X_1^2)^{k/2}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (20)$$

Įvertinsime atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t$, k -tosios eilės kumulantą $\Gamma_k(\tilde{Z}_t)$, kai atsitiktinis dydis $X_1, X_2, \dots, X_n$ tenkina S. N. Bernšteino sąlygą (B_γ):

$$|\Gamma_k(\tilde{Z}_t)| = \left| \frac{1}{(\lambda t)^{(k-2)/2}} \cdot \frac{\mathbf{E}X_1^k}{(\mathbf{E}X_1^2)^{k/2}} \right| = \frac{(k!)^{1+\gamma} K^{k-2}}{(\sqrt{\lambda t \mathbf{E}X_1^2})^{k-2}} = \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta_t^{k-2}}. \quad (21)$$

Taigi

$$|\Gamma_k(\tilde{Z}_t)| = \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta_t^{k-2}}, \quad \Delta_t = \frac{\sqrt{\lambda t \mathbf{E}X_1^2}}{K}. \quad (22)$$

Pastebėjus, kad atsitiktinis dydis $X = \tilde{Z}_t$ tenkina 1 lemos sąlygą (S_γ) su dydžiu

$$\Delta = \Delta_t = \frac{\sqrt{\lambda t \mathbf{E}X_1^2}}{K}, \quad (23)$$

gauname 1 teoremos tvirtinimą.

2 teorema. Esant patenkintoms 1 teoremos sąlygoms, galioja nelygybė:

$$|F_{\tilde{Z}_t}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c(k, \gamma)(\ln \Delta_t^{1/(1+2\gamma)})^{k/2}}{(1 + |x|^k) \Delta_t^{1/(1+2\gamma)}}, \quad (24)$$

$$\text{čia } k \geq 1 \text{ ir } c(k, \gamma) = \max \{252(6\sqrt{2})^{1/(1+2\gamma)} c(k); 122^{2\gamma} (\sqrt{2}/6)^{2\gamma/(1+2\gamma)} k!\}, \quad (25)$$

$$c(k) \leq 2^{k/2} (5 + 2^{k/2} \sqrt{e/\pi} \Gamma((s+1)/2)). \quad (26)$$

Įrodymas

Remiantis atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t$ kumuliantai $\Gamma_k(\tilde{Z}_t)$, gautuoju įverčiu (21) ir S. Achmedov (Achmedov 1990) lema, gauname teoremos 2 (24) tvirtinimą.

3 teorema. Jei nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai X_i tenkina S. N. Bernšteino sąlygą (B_γ) su $\gamma = 0$, o atsitiktinis dydis N_t su vidurkiu $\alpha_t = \mathbf{E}N_t$ ir dispersija $\beta_t^2 = \mathbf{D}N_t$ tenkina sąlygą: egzistuoja dydžiai $K_2 > 0$ ir $q \geq 0$ tokie, kad

$$|\Gamma_k(N_t)| \leq \frac{1}{2} k! K_2^{k-2} (\beta_t^2)^{1+((k-2)q)/(1+q)}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (L)$$

tai

$$\sup_x |F_{\bar{Z}_t}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{7}{\Delta_t^*}, \quad (27)$$

čia

$$\Delta_t^* = \frac{(\alpha_t \sigma^2 + \beta_t^2 \mu^2)^{1/2}}{\max\{(1 \vee |\mu|^{-1} \sigma) 4M, 3|\mu| K_2 \beta_t^{2q/(1+q)}\}}. \quad (28)$$

Įrodymas

Nesunku įsitikinti, kad atsitiktinio dydžio Z_t vidurkis ir dispersija atitinkamai lygūs:

$$\mathbf{E}Z_t = \mu \alpha_t, \quad \mathbf{D}Z_t = \sigma^2 \alpha_t + \mu^2 \beta_t^2 = (\mu^2 + \sigma^2) \lambda t. \quad (29)$$

Atsitiktinio dydžio Z_t momentus generuojanti funkcija

$$\varphi_{Z_t}(z) = \mathbf{E}e^{zZ_t} = \sum_l \mathbf{E}(e^{z \sum_{i=1}^{N_t} X_i} | N_t = l) \mathbf{P}(N_t = l) = \mathbf{E} \exp\{N_t \ln \varphi_{X_1}(z)\}. \quad (30)$$

Iš sąlygos, remiantis 1 lema, gauname

$$|\Gamma_k(\bar{X}_1)| \leq k! M^{k-2} \sigma^2, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (31)$$

$$\ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \Gamma_k(\bar{X}_1) z^k = \theta \frac{3}{2} \sigma^2 z^2, \quad |z| \leq \frac{1}{2M}. \quad (32)$$

Remdamiesi (32) lygybe ir (L) sąlyga, gauname

$$\ln \Phi_{\bar{Z}_t}(z) = \alpha_t \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z) + \theta(1 + |(\mu \mathcal{L})^{-1} \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z)|)^2 \beta_t^2 (\mu \mathcal{L})^2. \quad (33)$$

$$\text{Kai } K_2 |\mu \mathcal{L} + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z)| \beta_t^{2q(1+q)^{-1}} \leq 1/2.$$

Nesunku įrodyti, kad

$$|(\mu \mathcal{L})^{-1} \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z)| \leq 1/5, \text{ kai } |z| \leq ((1 \vee |\mu|^{-1} \sigma) 4M)^{-1} \quad (34)$$

ir

$$K_2 |\mu \mathcal{L} + \ln \varphi_{\bar{X}_1}(z)| \beta_t^{2q(1+q)^{-1}} \leq 1/2, \quad |z| \leq A, \quad (35)$$

čia

$$A = (\max\{(1 \vee |\mu|^{-1} \sigma) 4M, 3|\mu| K_2 \beta_t^{2q/(1+q)}\})^{-1}. \quad (36)$$

Taigi gauname

$$\ln \varphi_{\bar{Z}_t}(z) = \theta \frac{3}{2} k! (\alpha_t \sigma^2 + \beta_t^2 \mu^2) |z|^2, \quad |z| \leq A. \quad (37)$$

Dabar, pasinaudoję Koši formule ir anksčiau užrašyta formule, gauname

$$|\Gamma_k(\bar{Z}_t)| \leq \frac{3}{2} k! (\alpha_t \sigma^2 + \beta_t^2 \mu^2) A^{2-k}, \quad k = 3, 4, \dots. \quad (38)$$

Kadangi atsitiktinio dydžio $\tilde{Z}_t = \frac{\bar{Z}_t}{\sqrt{\mathbf{D}Z_t}}$, k-tosios eilės kumulantas $\Gamma_k(\tilde{Z}_t) = (\sqrt{\mathbf{D}Z_t})^{-k} \Gamma_k(\bar{Z}_t)$,

tai, remdamiesi nelygybe, (38), gauname

$$\Gamma_k(\tilde{Z}_t) \leq \frac{(3/2)k!}{\Delta_t^{k-2}}, k = 3, 4, \dots, \quad (39)$$

čia Δ_t^* išraiška pateikta (32) formulėje. 3 teorema įrodyta.

Išvados

1. Gautas sudėtinio Puasono proceso skirstinio funkcijos aproksimacijos normaliuoju dėsniu tikslus įvertis.

2. Įrodytas sudėtinio Puasono proceso CRT (centrinėje ribinėje teoremoje) netolygus įvertis.

3. Minėtosios teoremos įrodytos bendresnei procesų klasei, atsisakant reikalavimo, kad sumoje

$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ atsitiktinis dydis N_t būtų pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį.

7. IŠVADOS

1. Gauti sudėtinio Puasono proceso skirstinio funkcijos aproksimacijos normaliuoju dėsnio tolygus ir netolygus įverčiai.
2. Įrodyta didžiųjų nuokrypių teorema sudėtiniam (Compound) Puasono procesui Kramerio ir Liniko zonose.
3. Minėtos teoremos įrodytos bendresnei procesų klasei, atsisakant reikalavimo, kad sumoje

$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ atsitiktinis dydis N_t būtų pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį.

LITERATŪRA

1. R.Rudzkis, L.Saulis, V.Statulevičius, 1978. A General lemma of large deviasitions. *Lith. Math.* 169-179.
2. S.Achmedov, 1990. On nonuniform estimations in the central limit theorem for dependent random variables. *Lith. Math.* 623-629.
3. Л.Саулис В.Статулявичус, 1989. Предельные теоремы о больших уклонениях. *Моксласю.* 22-23.
4. H. Pragarauskas, 2007. Draudos matematika. *Vilnius.* 24-28.