VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS IR MATEMATIKOS TAIKYMŲ BAKALAURO STUDIJŲ PROGRAMA

Bakalauro baigiamasis darbas

Apie tekstinių uždavinių, sprendžiamų aritmetiniais veiksmais, klasifikaciją 5 - 8 klasės mokyklos programoje

On a Classification of Word Problems Solvable by Arithmetic Operations from Curriculum of 5 - 8th Grades

Simonas Mamaitis

Darbo vadovas prof., habil. dr. Rimas Norvaiša

Vilnius 2021

Turinys

Įvadas

Vienas didžiausių iššūkių, tenkančių moksleiviams mokykloje, yra išmokti interpretuoti tekstą. Žmogus, neturintis teksto interpretavimo įgūdžių, ne tik negeba darniai reikšti minčių ir susiorientuoti įvariose situacijose, bet negeba ir bendrauti kultūringai, tinkamai reaguodamas į pašnekovo mintis, nėra laisvas kalbos, itin svarbios žmogaus savybės, „vartotojas“ , yra savo ribotumo įkaitas. Matematinio lavinimo kontekste teksto interpretavimas lydi tiek mokyklinių tekstinių uždavinių sprendimą, tiek studijuojant aukštajai matematikai būdingus teoremų įrodymus, tiek remiantis kitų autorių mintimis moksliniuose tyrimuose.

Tekstinių uždavinių sprendimas yra viena pirmųjų patirčių, su kuriomis susiduria jaunas žmogus siekdamas mokyklinio išsilavinimo. Tačiau valstybinių matematikos brandos egzaminų rezultatai rodo, kad tekstinius uždavinius, kuriems išspręsti reikia bent kelių aritmetinių veiksmų, įveikia tik nedidelė dalis moksleivių. Vadinasi, daugumos moksleivių pažintis su teksto interpretavimu matematikos pamokose greičiausiai buvo nesėkminga. Kokios priežastys galėjo lemti šią nesėkmę?

Šio darbo tikslas yra pateikti teorinę aplinką, kuria remiantis galima analizuoti 5 - 8 klasių mokyklinių uždavinių turinį. Pirmoje darbo dalyje iš pradžių suformuluosime elementariojo tekstinio uždavinio konstruktą, pagal kurį galima nuspręsti, kurie uždaviniai priklauso tyrimo apimčiai, pristatysime su kokiais iššūkiais susiduria moksleiviai, spręsdami tokio tipo uždavinius. Antroje dalyje pateiksime kategorijas, padėsiančias suskirstyti uždavinius į atskiras klases priklausomai nuo į sprendimą įeinančių aritmetinių veiksmų interpretacijos. Taip pat bus apžvelgiami edukacijoje taikomi klasifikacijos modeliai, siūlomas būdas apdoroti surinktus duomenis.

1 skyrius

Elementarieji tekstiniai uždaviniai

1.1 Elementariojo tekstinio uždavinio konstruktas

Penktos - aštuntos klasių „Atrask“ matematikos vadovėliuose kiekvienoje klasėje yra pateikiama apie 10 skyrių su naujomis temomis, o kiekvieną skyrių sudaro po keletą poskyrių. Bet kurį poskyrį sudaro du puslapiai: kairiajame puslapyje pateikiama probleminė situacija, ja remiantis išaiškinama pagrindinė temos teorija, pateikiama sprendimo pavyzdžių; dešiniajame puslapyje - trijų lygių uždaviniai. Dalis uždavinių yra palyginus nesudėtingi, pavyzdžiui, prašoma apskaičiuoti vieną dėmenį, kai duotas kitas dėmuo ir dviejų dėmenų suma [1], nurodyti mažiausią galimą žiūrovų skaičių, kai jų yra apie 13000 tūkstančių tikslumu [2] arba išspręsti galvosūkį su magiškaisiais kvadratais [3]. Tokius uždavinius intuityviai laikysime per daug paprastais palyginus su uždaviniais, kurių sprendimuose reiktų atlikti pagrindines aritmetines operacijas, ženklinančius realaus pasaulio kontekste pasitaikančių dydžių sąryšius.

Sieksime apibūdinti tokį elementariojo tekstinio uždavinio konstruktą, kuris leistų remiantis pateiktu apibūdinimu vienareikšmiškai patvirtinti, ar uždaviniai iš „Atrask“ vadovėlių, tame tarpe ir uždaviniai [1], [2], [3], įeina į apibrėžimo apimtį. Čia susiduriame su dar viena problema: ne visos dydžio, elementariojo sąryšio ir realaus pasaulio konteksto sąvokos turi visuotinai priimtus apibrėžimus, todėl siekiant paprastumo joms pateiksime atskirus apibūdinimus.

1.1 apibūdinimas. *Dydis - tai objekto ar reiškinio savybė, kuriai priskiriama lygintina skaitinė reikšmė pasirenkant matavimo vienetą.*

1.2 apibūdinimas. *Sąryšis R tarp dviejų aibių X ir Y yra Dekarto sandaugos $X \times Y$*

poaibis. Jei du nariai $x \in X$ ir $y \in Y$ priklauso sąryšiui, tai sakoma, kad x ir y yra susieti sąryšiu R.

1.3 apibrėžimas. *Ryšys tarp baigtinio skaičiaus aibių $X_1, X_2, \ldots X_n$ yra Dekarto sandaugos $\prod_{i=1}^{n} X_i$ poaibis.*

Matematinėje kalboje sąryšis dar vadinamas binariuoju sąryšiu, o ryšys - n - nariuoju sąryšiu, tačiau tekstinių uždavinių kontekste apsiribosime paprastesniais pavadinimais norėdami pabrėžti, kad sprendžiant tekstinį uždavinį stengiamasi suprasti, kaip jame paminėti dydžiai siejasi. Tekstiniuose uždaviniuose gali pasitaikyti tam tikras ryšys, apibrėžtas nebūtinai vienu sąryšiu. Tačiau į elementariojo tekstinio uždavinio konstruktą įtrauksime tik elementarius (nesudėtingus) sąryšius.

1.4 apibūdinimas. *Sąryšį X vadinsime elementariu, jei vieno iš reiškinių $x - y$, $x + y$, xy arba $x : y$ reikšmė yra apibrėžta ir pastovi su visais $(x, y) \in X$.*

Priklausomai nuo reiškinio vadinsime, kad visiems $(x, y) \in X$ nariai x ir y yra susieti suma, atimtimi, sandauga arba santykiu.

1.5 apibūdinimas. *Realaus pasaulio kontekstas - tai uždavinyje pateikta situacija, kurią nagrinėjant:*

- *uždavinio sprendime pagal bendrą susitarimą priimta ryšį tarp kintamųjų išreikšti tam tikromis matematinėmis operacijomis;*
- *uždavinio kintamieji yra tam tikri pavadinimus turintys dydžiai.*

Kontekstas apibrėžia, apie kokius objektus kalbama uždavinyje. Dydžiai - realaus pasaulio objektai. Tačiau skaičius nelaikytinas realaus pasaulio objektu, nes neturi konkretaus matavimo vieneto ir todėl neįeina į dydžio apibrėžimą.

1.6 apibūdinimas. *Realaus pasaulio konteksto uždavinys, kuriame dydžius sieja ryšys, išreiškiamas elementariais sąryšiais, laikomas elementariu tekstiniu uždaviniu (ETU).*

Remiantis šiuo apibūdinimu pavyzdžiai [1] ir [3] netenkina ETU apibrėžimo, nes uždavinyje pateikti kintamieji nėra realaus pasaulio objektai. Tuo tarpu pavyzdys [2] atitinka realaus pasaulio kontekstą, tačiau ETU apibrėžimas netenkinamas, nes prašoma rasti mažiausią galimą tam tikro dydžio skaitinę reikšmę, tenkinančią sąlygą, kad ją suapvalinus tūkstančių tikslumu, gausime 13000. Nei apvalinimas, nei mažiausios reikšmės radimas nėra išreiškiami elementariais sąryšiais.

1.2 Dydžio apibrėžimo korektiškumo klausimas

Fizikinių dydžių, tokių kaip atstumas, greitis, masė, laiko intervalas, jėga ir temperatūra, matavimo vienetai įprastai pateikiami pagal visuotiniu susitarimu priimtą etaloną. Kitais atvejais dydis dažnai būna susijęs su objektų: picų, obuolių, žmonių, geometrinių figūrų ir pan. skaičiavimu, todėl matavimo vienetais laikysime kitokius objektus.

Jei atliekamas veiksmas yra sudėtis ir atimtis, tai tiek abu nariai, tiek rezultatas ženklina skaitines išraiškos dydžių, reiškiamų tais pačiais matavimo vienetais. Daugybos ir dalybos atveju situacija sudėtingesnė. Lygybės $b \times c = a$ ir $c = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$ yra ekvivalenčios. Tačiau kintamasis c ne visais atvejais yra dydis. Tai priklauso nuo trupmenos interpretavimo. Pedersen ir Bjerre savo darbe *Two conceptions of fraction equivalence* siūlo du trupmenų suvokimo aspektus:

1.7 apibrėžimas. *Vieneto ekvivalentiškumas - tai trupmenų lygumas, kai jos atitinka tą pačią vienodos visumos dalį.*

1.8 apibrėžimas. *Proporcijos ekvivalentiškumas - tai trupmenų lygumas, kai santykis tarp skaitiklio ir vardiklio yra vienodas (rezultatas laikomas neturinčiu vienetų).*

1.7 ir 1.8 apibrėžimai buvo pailiustruoti tokiais pavyzdžiais.

1a pavyzdys. Tarkime vienas žmogus suvalgė vieną iš trijų bananų, o kitas - dvi iš šešių picos skiltelių. Palyginkite jų suvalgyto maisto dydį.

1b pavyzdys. Tarkime vienas žmogus suvalgė vieną iš trijų turimų pyragaičių, o kitas - du iš šešių pyragaičių. Palyginkite jų suvalgyto maisto dydį.

2.3 pavyzdyje abu žmonės suvalgė tą pačią trupmeninę dalį savo maisto. Ši dalis nėra matuojama tais pačiais vienetais, todėl trupmeninės dalies dydis gali būti skirtingas, nepaisant to, kad lygybė $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ galioja. Lygybėje vienetai nerašomi, nes skaičiuojamos ne tos pačios visumos dalys, todėl šiuo atveju kalbama apie proporcijos ekvivalentiškumą.

2.3 pavyzdyje vienetai yra vienodi: išlaikoma ne tik skaitinių reikšmių lygybė, bet ir dydžių lygumas. Lygybėje matavimo vienetai rašomi: $\frac{1}{3}$ pyragaičių $= \frac{2}{6}$ pyragaičių. Šiuo atveju kalbama apie vieneto ekvivalentiškumą.

Matome, kad, jei kiekvieno nario (a, b), priklausančio elementariam sąryšiui X, kintamieji a ir b susieti santykiu ($a : b$ reikšmė yra pastovi), tai rezultatas $a : b = c$ ne visuomet tenkina dydžio 1.1 apibūdinimą ir nėra realaus pasaulio objektas. Dėl šios priežasties ekvivalenčioje lygybėje $b \times c = a$ kintamasis c taip pat neprivalo būti realaus pasaulio objektas

- apibūdinimas 1.6 tampa nekorektišku. Tačiau atvirkščiai - teiginyje *Lietuvoje vienam pasiskiepijusiam nuo Covid - 19 tenka du nepasiskiepiję* kalbama apie realaus pasaulio objektus - žmones, todėl būtų nekorektiška šią situaciją atsieti nuo realaus pasaulio. Norint išspręsti šį prieštaravimą daugelyje mokslo sričių naudojama bedimensinio dydžio sąvoka. Tokiems dydžiams yra deklaruojamas matavimo vienetas 1, įprastai neįeinantis į dydžio žymėjimą. Tarptautiniame metrologijos žodyne [5] paminėta, kad bedimensinių dydžių matavimo vienetai ir skaitinės reikšmės yra skaičiai, suteikiantys daugiau informacijos nei kitokie skaičiai.

1.3 Elementariųjų tekstinių uždavinių sprendimo procesas

Natūralu, kad moksleivio pastangos didina galimybes pasiekti aukštesnius mokymosi rezultatus pademonstruojant įvairias mokykloje įgytas kompetencijas, tame tarpe ir tekstinių uždavinių sprendimo gebėjimus. Kai kurie autoriai pažymi, kad mokymosi metu susiduriant su matematiniu turiniu mokymosi procesas nėra vientisas. George Pólya knygoje *How To Solve It* tvirtina[7], kad besimokantysis turėtų įgyti tiek patirties, kiek tai gali padaryti savarankiškai. Jei jis yra paliekamas be pagalbos arba su per maža pagalba, pažangos nepadarys. Jeigu jam būtų padedama per daug, indėlis į pažangą būtų per mažas. Vadinasi, mokytojai turėtų moksleiviams padėti padėti nei per mažai, nei per daug tam, kad besimokančiojo ir mokytojo darbas pasiskirstytų tam tikrose ribose.

Mokymosi procese svarbu ne tik mokytojo ir moksleivio bendradarbiavimas, bet ir mokomosios medžiagos turinys. Mokytojai dažnai nėra pajėgūs identifikuoti konkrečių kiekvieno moksleivio trūkumų, stabdančių pažangą ir įvertinti, kas turėtų įeiti į mokomąjį turinį, padedantį juos pašalinti. Šioje dalyje pailiustruosime, kaip atrodo ETU sprendimo procesas ir kas gali daryti įtaką ETU sudėtingumui.

2a pavyzdys. Man dabar dvigubai daugiau metų nei Jums buvo tada, kai man buvo tiek metų, kiek Jums dabar. Mums abiems kartu 35 metai. Kokie mūsų amžiai?

Pirmas sprendimo būdas galėtų būti mano ir Jūsų amžių pažymėti nežinomaisiais x ir y. Antroji sąlyga nesudėtinga: žodis „kartu“ siūlo užuominą, kad sudėję abu nežinomuosius gausime kitą dydį, kuriam priskiriamas skaičius 35. Todėl gauname, kad nežinomieji x ir y tenkina elementarųjį sąryšį, kurį ženklina lygybė $x+y=35$. Likusioje sąlygos dalyje siejami laiko atžvilgiu kintantys dydžiai, o sprendimą apsunkina nestandartinis atvejis, kuomet dydžiams priskiriamos reikšmės ne tuo pačiu laiko momentu. Norint suprasti, kaip sąryšį pateikti aiškiau, galima nagrinėti tokį pagalbinį uždavinį:

2b pavyzdys. Man dabar 25 metai, o Jums - 20. Kiek man metų buvo tada, kai man buvo tiek metų, kiek Jums dabar?

Dabar matyti, kad kalbama apie laikotarpį prieš $25 - 20 = 5$ metus. Grįžkime prie ankstesnio pavyzdžio 2a. Naudojantis anksčiau įvestais nežinomaisiais, galima užrašyti, kad minėtas laikotarpis buvo prieš mūsų amžių skirtumą: $x - y$ metų. Jei dabar Jums y metų, tai tuo laikotarpiu Jums buvo $y-(x-y)$ metų. Liko neišnaudota tik gana paprasta sąlygos dalis, kurioje yra žodis „dvigubai“ . Šis žodis siūlo užuominą, kaip užrašyti sąryšį tarp dydžių x ir $y - (x - y)$: $x = 2\,(y - (x - y))$

2c pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą: $\begin{cases} x = 2\,(y - (x - y)) \\ x + y = 35 \end{cases}$

Išsprendę šią lygčių sistemą randame nežinomųjų x ir y reikšmes: 20 ir 15. Šio pavyzdžio apimtyje nėra pasakyta, kokie ženklinamų dydžių pavadinimai, vadinasi suformuluotame uždavinyje nebuvo pateiktas realaus pasaulio kontekstas. Tačiau lygčių sistemos sprendimas galimai įeina į pavyzdžio 2a sprendimą.

Atkreipkime dėmesį, kad ETU lygčių arba lygčių sistemų sprendimo ir sąryšius nusakančių formuluočių keitimo procesai yra panašūs. Galima išskirti tokias bendras savybes:

- ***Invariantiškumas.*** Tiek sąryšiai, tiek lygties ar lygčių sistemos sprendinių aibės yra nekintamos.
- ***Redukuojamumas.*** Sąlygos formuluotę stengiamasi pakeisti taip, kad būtų galima lengviau atpažinti aritmetines operacijas, siejančias dydžius, o lygtis taip, kad, kad tolimesnis sprendinio gavimas supaprastėtų.
- ***Baigtinumas.*** Po baigtinio kiekio pakeitimų procesas turi užsibaigti aiškia išvestimi. Lygčių atveju įprasta pateikti lygybę, nurodančią lygties sprendinį. Keičiant sąryšius nusakančias formuluotes įprasta arba išsiaiškinti, koks veiksmas sieja duotus dydžius arba užrašyti lygtį, įprasminančią jų ryšį.

Įvardyti panašumai pakankamai dažnai lemia ir pasirinkimo tarp kelių skirtingų ETU sprendimo būdų galimybę. Ją pailiustruosime 3 pavyzdžiu.

3 pavyzdys. Joniukas ir Grytutė turėjo po lygiai riekelių. Kai Joniukas Grytutei atidavė 5 duonos riekeles, jis turėjo dvigubai mažiau riekelių už Grytutę. Kiek riekelių kiekvienas turėjo iš pradžių?

Pažymėjus nežinomuoju pradinį Grytutės riekelių skaičių x, galime išvesti naujus kintamuosius (galutinius Grytutės ir Joniuko riekelių kiekius), priklausančius nuo x ir atiduotų riekelių kiekio, lygaus 5. Juos sieja ryšys, užrašomas lygtimi $2(x - 5) = x + 5$. Sprendžiant šią lygtį būtų gaunamas sprendinys $x = 15$. Lygties sprendimą galima pakeisti samprotavimu. Joniuko riekelių skaičius sumažėjo tiek, kiek Grytutės padidėjo, vadinasi susidarė skirtumas, lygus dvigubam atiduotų riekelių skaičiui, t.y. 10. Tai yra antra tiek, kiek galiausiai liko pas Joniuką. Vadinasi, pas Joniuką liko 10 riekelių, o jiedu prieš tai turėjo po 15 riekelių.

2a pavyzdžio sudėtingiausia sprendimo dalis buvo pastebėti, kaip ryšį tarp dabartinio laikotarpio ir laikotarpio, kai man buvo tiek metų, kiek Jums dabar, išreikšti elementariais sąryšiais. Norint įgyti kompetenciją, kaip spręsti tokius ETU, galime rinktis šias išeitis:

1 išeitis. Studijuoti ETU su analogiškomis sąlygomis.

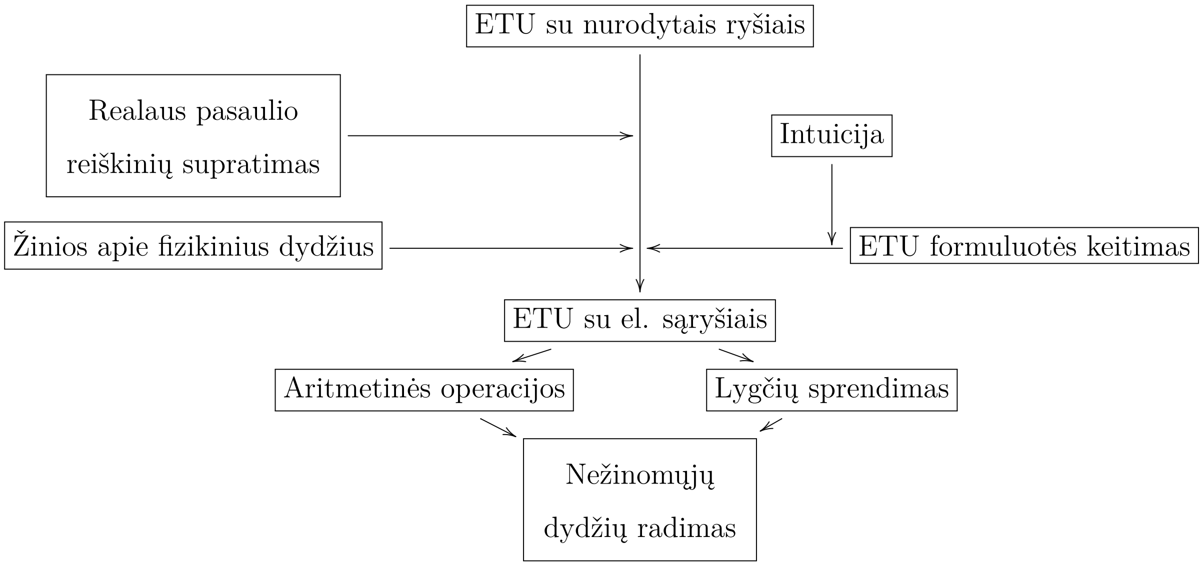
2 išeitis. Studijuoti ETU, kuriuose pagalbinio uždavinio suformulavimas ir išsprendimas padeda įžvelgti, kaip ryšys tarp įvairių dydžių reiškiamas elementariais sąryšiais

Pagal Romašką[6] matematikų tikslas turėtų būti maksimizuoti rezultatų bei laiko sąnaudų naudingumą, o tai padėtų padaryti objektyvesnis požiūris į mokslo ribas bei sugebėjimas taikyti paprastus modelius problemoms spręsti. 1 išeityje siūloma kiekvienai nenumatytai problemai kurti atskirą modelį, o tai būtų ir beribis, ir rizikingas procesas turint mintyje ribotą mokyklinėje programoje numatytą mokymosi laiką. Tuo tarpu 2 išeitis būtų tikslingenė: ji leistų pamatyti, kas sieja skirtingas problemines situacijas, būtų bandoma ieškoti kelių, supaprastinančių sudėtingų uždavinių sprendimą, kai nėra iš anksto žinoma tinkančių teorinių modelių.

2 išeitis taip pat lavina matematinę intuiciją - galėjimą įgyti žinias nesiremiant sąmoningu samprotavimu. Pólya pateikia sąrašą veiksmų, netiesiogiai susijusių su mintinėmis operacijomis, įprastai pasitarnaujančiomis uždavinių sprendimui. Šie veiksmai gali būti suskirstyti į keturias pagrindines kategorijas: susipažinimą su uždaviniu, sprendimo plano sudarymą, sprendimo plano realizavimą bei sprendimo apžvalgą. Sudėtingiausios 2a pavyzdžio sprendimo dalies fragmentas atitinka dalį Pólya pateikto plano sudarymo:

Pabandyk sugalvoti pažįstamą uždavinį, turintį tą patį ar panašų nežinomąjį. Tarkim radai panašų prieš tai išspręstą uždavinį. Ar gali juo pasinaudoti? Ar gali panaudoti jo rezultatą, sprendimo metodą?

Nors sprendžiant ETU svarbus tiek lygčių ir lygčių sistemų sprendimo gebėjimas, tiek matematinė intuicija, šių dviejų ypatybių toliau netyrinėsime. Dydžius siejančių arit-



1.1 schema: ETU sprendimo procesas

metinių veiksmų paieškos gali būti nepaaiškinamos vien aprašytu, nuo konteksto atsietu intuityviu mąstymu. Antai sudedant valties savąjį greitį su upės greičiu gaunamas valties greitis plaukiant pasroviui, galioja pagal bendrą susitarimą priimtas ryšys tarp trijų dydžių. Be minėto ryšio suvokimo uždavinys taptų neišsprendžiamu. Tačiau abejotina, ar panašus ryšys galėtų sieti dviratininko savąjį greitį, vėjo greitį ir pavėjui važiuojančio dviratininko greitį. Būtų galima pagrįstai prieštarauti tokiam susitarimui [11]. Vadinasi, norint suprasti, kaip bendru susitarimu siejami realaus pasaulio kontekste apibūdinti dydžiai, kartais būtinas gilesnis realiame pasaulyje vykstančių reiškinių supratimas. Tam tikri bendrai sutarti dėsniai, išreiškiami elementariais sąryšiais, tokie kaip greičio, laiko ir kelio ryšys arba pločio, ilgio ir ploto ryšys, mokykloje kartojami tol, kol tampa savaime suprantamais ir be jų pritaikymo dalis ETU taip pat tampa neišsprendžiamais.

Aprašyti pastebėjimai apie ETU sprendimo procesą apibendrinami 1.1 schemoje.

2 skyrius

Elementariųjų tekstinių uždavinių klasifikacija

Kai norime apskaičiuoti tam tikro reiškinio reikšmę, ar išspręsti lygtį, naudojamame žymėjime dydžių pavadinimai tampa pertekline, beprasme informacija iki tol, kol negauname rezultato. Šioje sprendimo dalyje atsiranda galimybė mąstymą atsieti nuo realaus pasaulio ir tai leidžia labiau susikoncentruoti į skaičiavimus. Vis dėlto, jei moksleiviai sprendžia per mažai uždavinių, kur reikia atlikti ne vien skaičiavimus, toks mokymosi procesas ilgainiui virsta į ankstesnio skyrelio pradžioje aprašytą situaciją, kai jiems suteikiama per didelė pagalba, lemianti per silpną pažangą. Šią tendenciją patvirtina ir 2014m. atlikta kokybinė matematikos valstybinio brandos egzamino analizė [8]. Pastebėta, kad kiek geriau spręsti uždaviniai, kurie išsprendžiami atliekant įpročiu tapusius veiksmus, kai nereikia reflektuoti situacijos, gilintis, pastebėti ir pasirinkti. Taigi, ETU kintamuosius siejančių aritmetinių operacijų atpažinimas šiame darbe laikomas daug aktualesniu klausimu, o nežinomųjų radimo remiantis jau gautais aritmetiniais veiksmais arba lygtimis procesą paliksime už šio darbo ribų. Stengsimės detaliai apžvelgti visas galimas ETU situacijas, kur du kintamuosius sieja suma, skirtumas, sandauga, santykis.

2.1 Dviejų kintamųjų santykis

Šiame poskyryje apibendrinsime trupmenų subkonstruktus ir jų atsiradimo istoriją remiantis straipsnio [4] mintimis.

Tarp praeito amžiaus XIII - ojo ir IX - ojo dešimtmečių Kieren (1976), Vergnaud (1983) ir Freudenthal (1983) nepriklausomai plėtojo įvairius trupmenų subkonstruktus,

Subkonstruktas	Veiksmas	Tipas	Kintamųjų paaiškinimai
Dalmuo	$a : b$	Skaidymas	a - visumos dydis; b - gavėjų kiekis
		Matavimas	a - visumos dydis; b - dalies dydis
Matavimas	a/b	Interpretacija 1	a - panaudotų dalių kiekis; b - dalių kiekis vienetinėje atkarpoje
		Interpretacija 2	a - intervalo ilgis; b - dalių kiekis intervale
Operacija	$a \times (b/c)$	Didinimas/mažinimas	a - objektų kiekis; b - objekto dydžio padidinimas; c - objekto dydžio sumažinimas
		Kopijavimas/skaidymas	a - objektų dydis; b - objektų kiekio padidinimas; c - objektų kiekio sumažinimas
Santykis	$a : b$	Proporcijos ekvivalentiškumas	a ir b - bet kokie dydžiai su vienodu santykiu

2.1 lentelė: Trupmenų subkonstruktai

aspektus ir objektus. Pradiniame tyrimų etape Kieren išskyrė 4 trupmenų subkonstruktus: trupmeną kaip dalmenį, kaip matavimą, kaip operaciją ir kaip santykį. Vėlesni jo darbai pasipildė dar vienu, trupmenos kaip dalies - visumos subkonstruktu, kuriame trupmena interpretuojama kaip viena ar kelios lygios vieneto arba visumos dalys. 1983 m. Racionaliųjų Skaičių Projekte buvo pasiūlyta šį subkonstruktą laikyti persidengiančiu su visais likusiais subkonstruktais. Vėlesniame darbe nagrinėdami uždavinius dalies - visumos subkonstrukto neįtrauksime. Išvardinsime likusių subkonstruktų apibūdinimus.

- ***Dalmuo***. Trupmena interpretuojama kaip dalybos rezultatas. ***Skaidymo*** kontekste skaitiklis gali būti visumos dydis, o vardiklis gavėjų kiekis. ***Matavimo*** kontekste skaitiklis gali būti visumos dydis, o vardiklis vienos visumos dalies dydis.

- ***Matavimas***. Šiame subkonstrukte trupmena yra glaustai susijusi su dviem savokomis: skaičius, atitinkantis tašką skaičių ašyje, ir skaičius, atitinkantis atkarpos ilgį. Pagal ***pirmą interpretaciją*** vardiklis nurodo, į kiek dalių yra dalijama vienetinė atkarpa, o skaitiklis - šių dalių skaičių. Pagal ***antrą interpretaciją*** vardiklis nurodo, į kiek dalių yra dalijamas tam tikras intervalas, o skaitiklis - to intervalo ilgį.

- ***Operacija***. Trupmena yra susijusi su procesu, vykstančiu keičiant objektą į kito dydžio objektą. Operatorius suvokiamas kaip funkcija, taikoma tam tikram objektui. Jis skirstomas į ***didinimo/mažinimo*** operatorių ir ***kopijavimo/skaidymo*** operatorių. ***Didinimo/mažinimo*** operatorius keičia ne tam tikrų vienetų skaičių, o jų dydį. ***Kopijavimo/skaidymo*** operatorius - atvirkščiai.

- ***Santykis***. Trupmena išreiškia dviejų dydžių palyginimą. Lyginimo rezultatas atitinka palyginimo rodiklį, simbolizuojantį proporciją.

Lentelėje 2.1 apibendrinamos kintamųjų prasmės, kurių galima tikėtis tarp ETU, kuriuose kintamieji yra susieti santykiu.

2.2 Dviejų kintamųjų skirtumas ir suma

Šiame poskyryje apibendrinsime atimties kategorijas ir jų atsiradimo istoriją remiantis straipsnio [9] mintimis

Kategorijos, skirtos klasifikuoti uždaviniams, kuriuose atimami arba sudedami tam tikri dydžiai, buvo pasiūlytos 1978m. Heller ir Greeno darbuose: ***keitimas***, ***sujungimas*** ir ***palyginimas***. Vėliau Carpenter ir Moser (1981) pasiūlė įtraukti taip pat ir ***sulyginimo*** kategoriją. Norint lengviau suprasti uždavinių, atliekamų sudėtimi arba atimtimi, klasifikavimo procesą, patogu apibrėžti, ar kintamieji yra statiški, ar dinamiški.

Jei kintamieji dinamiški:

- ***Poslinkio*** atveju kalbame apie tam tikrą pradinį dydį, kuris tam tikro veiksmo pagalba buvo transformuotas į galutinį dydį. Transformavimas gali duoti dvejopą pokytį: sumažėjimą ir padidėjimą.

- ***Sulyginimo*** atveju siūloma vieną dydį pakeisti, kad jis taptų lygus antrajam. Pirmąjį dydį vadinsime stabiliu, o antrąjį keičiamu.

Jei kintamieji statiški:

- ***Sujungimo*** atveju kalbama apie tam tikrą objektą (visumą), sudarytą iš kitų atskirų objektų (visumos dalių).

- ***Palyginimo*** atveju vartojamas lyginimas: *vienas dydis mažesnis ar didesnis už kitą*. Pirmąjį dydį vadinsime ***lyginamu***, o antrąjį ***lygintinu***.

Taip pat naudosime tokias sutartines sąvokas:

- Dinamiškų kintamųjų atveju ***neigiamu pokyčiu*** vadinsime dydį, nurodantį, kiek sumažėjo pradinis arba keičiamas dydis, o ***teigiamu*** - kiek padidėjo.

- Statiškų kintamųjų atveju ***neigiamu skirtumu*** vadinsime dydį, nurodantį, kiek antras dydis mažesnis už pirmą, o ***teigiamu*** - kiek didesnis.

Tekstinių uždavinių, kuriuose kintamuosius sieja suma, klasifikacijai tinka tas pats modelis, kaip ir skirtumui, kadangi lygybės $c - a = b$ ir $a + b = c$ ekvivalenčios.

Subkonstruktas	Tipas	Kintamųjų paaiškinimai
Poslinkis	Ieškomas galutinis dydis	a - pradinis dydis; b - neigiamas pokytis
	Ieškomas pradinis dydis	a - galutinis dydis; b - teigiamas pokytis
	Ieškomas teigiamas pokytis	a - pradinis dydis; b - galutinis dydis
	Ieškomas neigiamas pokytis	a - galutinis dydis; b - pradinis dydis
Sulyginimas	Ieškomas stabilus dydis[1]	a - keičiamas dydis; b - neigiamas pokytis
	Ieškomas keičiamas dydis[1]	a - stabilus dydis; b - teigiamas pokytis
	Ieškomas teigiamas pokytis	a - keičiamas dydis; b - stabilus dydis
	Ieškomas neigiamas pokytis	a - stabilus dydis; b - keičiamas dydis
Sujungimas	Ieškomas antros dalies dydis	a - visumos dydis; b - vienos dalies dydis
Palyginimas	Ieškomas lyginamas dydis	a - lygintinas dydis; b - teigiamas skirtumas
	Ieškomas lygintinas dydis	a - lyginamas dydis; b - neigiamas skirtumas
	Ieškomas teigiamas skirtumas	a - lygintinas dydis; b - lyginamas dydis
	Ieškomas neigiamas skirtumas	a - lyginamas dydis; b - lygintinas dydis

2.2 lentelė: Atimties kategorijos

Subkonstruktas	Tipas	Kintamųjų paaiškinimai
Change	Ieškomas galutinis dydis	a - pradinis dydis; b - teigiamas pokytis
	Ieškomas pradinis dydis	a - galutinis dydis; b - neigiamas pokytis
Equalize	Ieškomas stabilus dydis[1]	a - keičiamas dydis; b - teigiamas pokytis
	Ieškomas keičiamas dydis[1]	a - stabilus dydis; b - neigiamas pokytis
Combine	Ieškomas visumos dydis	a - vienos dalies dydis; b - kitos dalies dydis
Compare	Ieškomas lygintinas dydis	a - lyginamas dydis; b - teigiamas skirtumas
	Ieškomas lyginamas dydis	a - lygintinas dydis; b - neigiamas skirtumas

2.3 lentelė: Sudėties kategorijos

Lentelėje 2.2 apibendrinamos situacijos, kurių galima tikėtis tarp ETU, kuriuose kintamieji yra susieti skirtumu, o lentelėje 2.3 - suma.

[1] Į I. Kilienės darbą apie pirmos klasės tekstinių uždavinių klasifikavimą[10] įtraukti tipai, nepaminėti pradiniame šaltinyje[9]

2.3 Dviejų kintamųjų sandauga

Kaip matėme, lygybės $b \times c = a$ ir $c = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$, ekvivalenčios ir tai rodo, kad kintamųjų paaiškinimai, naudoti trupmenų subkonstruktuose, turėtų būti abipusiai taikytini ir į daugybos modelį įeinantiems kintamiesiems. Vis dėlto, daugybėje studijų apie tekstinių uždavinių su daugyba klasifikaciją, taip nėra. Viena iš priežasčių galėtų būti dvejopa skaičiaus $\frac{a}{b}$ interpretacija, sutinkama operatoriaus subkonstrukte. Pavyzdžiui 25% atitinka skaičių $\frac{25}{100}$, tačiau šis objektas interpretuojamas kaip vientisas, nes skaitiklio ir vardiklio paaiškinimai neaktualūs. Objekto vientisumo atveju rezultatas $c \times \frac{a}{b}$ apibrėžtų ryšį $\left\langle \left(c, \frac{a}{b}\right) \middle| c \times \frac{a}{b} = const \right\rangle$, kurį galima išreikšti vienu elementariuoju sąryšiu. Kitu atveju, kai dydžių a ir b paaiškinimai svarbūs, šiam ryšiui apibrėžti reikėtų dviejų elementariųjų sąryšių: $X := \left\langle (a, b) \middle| a : b = const_1 \right\rangle$ ir $Y := \left\langle (c, const_1) \middle| c \times const_1 = const_2 \right\rangle$. Taigi, ETU, kuriuose nežinomąjį reikia rasti atliekant veiksmą $c \times \frac{a}{b}$, kartais ši aritmetinių veiksmų subkategorija yra išimtinė, tarsi turinti ir molekulės, ir atomo bendrų požymių. Likusioje poskyrio dalyje remiantis straipsnio [12] mintimis pristatysime žinomus ETU su dauginimu klasifikavimo modelius.

Modeliai, susiję su dauginimu, gali būti grindžiami iš dviejų perspektyvų: iš besimokančiojo spręsti tekstinius uždavinius besivystančio supratimo apie daugybą ir iš dimensinės analizės perspektyvos. Prieš pradedant nagrinėti pastarąja perspektyva paremtus darbus svarbu susipažinti su pagrindiniais mokslo teiginiais apie dimensinę analizę.

Centrinę dimensinės analizės sąvoką - fizikinę dimensiją 1822 m. pasiūlė Žanas Furjė [14]. Ši sąvoka panaši tiek į matematiškai apibūdintą dydžio sąvoką 1.1, tiek į 1.2 poskyryje paminėtą fizikinio dydžio sąvoką, tačiau turi esminį skirtumą: dimensijos matavimo vienetas privalo būti formos $\prod_{i=1}^{7} {a_i}^{n_i}$, čia a_i yra pagrindinių dydžių matavimo vienetai: kilogramas, metras, kandela, sekundė, amperas, kelvinas, ir molis, o n_i yra tam tikri sveikieji laipsnių rodikliai; fizikinių dydžio matavimo vienetams reikalaujamas ne šių išraiškų atitikimas, o konteksto atitikimas. Pavyzdžiui mechaninis darbas matuojamas džauliais (J), o sukimo momentas yra matuojamas niutonmetrais (Nm). Jie abu yra skirtingi dydžiai, tačiau dimensijos atžvilgiu yra vienodi: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$ [14]. Fizikinės dimensijos sąvoka atvėrė galimybes dviem plačiai naudojamoms dydžių kategorizacijoms: pagrindinių ir išvestinių dydžių bei bendramačių ir nebendramačių. Nebendramačiai dydžiai praranda palyginimo savybę: kilogramų negalima lyginti su valandomis, džaulių - su niutonmetrais. Jie taip pat glaudžiai susiję su ir pavyzdžiais, kuomet picos dalis yra nelygintina su pyragėlių dalimi.

Skiriamasis kategorijos požymis	Duotų dydžių pavyzdžiai
Ekstensyviojo ir intensyviojo dydžių dauginimas	a - sausainių kiekis; b - sausainių kaina
Ekstensyviųjų dydžių dauginimas	a - stačiakampio ilgis; b - stačiakampio plotis
Intensyviųjų dydžių dauginimas	a - vidutinis greitis; b - kelionės valandų kiekis per dieną

2.4 lentelė: Daugybos klasifikavimo modelis pagal Schwartz

Schwartz (1988) klasifikacijos modelis buvo paremtas dar viena fizikinių dydžių kategorizacija: intensyviųjų ir ekstensyviųjų. Intensyviųjų dydžių pagrindinė ypatybė yra nepriklausomumas nuo sistemos dydžio ar medžiagos kiekio sistemoje, o intensyviųjų - priklausomumas [15]. Schwartz siūlo išskirti tris dauginimo subkategorijas: ekstensyviojo dydžio dauginimą su intensyviuoju, dviejų ekstensyviųjų dydžių dauginimą ir dviejų ekstensyviųjų dydžių dauginimą. Uždavinių, kuriuose nežinomasis randamas atliekant veiksmą $a \times b$, duotųjų dydžių pavyzdžiai pateikiami 2.4 lentelėje.

Vergnaud (1983, 1988, 1994) nepriklausomai išplėtojo modelį, kuriame siūlė išskirti tris kitokias dauginimo kategorijas.

- ***Matų izomorfizmu*** laikomas ryšys tarp dviejų skirtingų mačiųjų erdvių, pavyzdžiui sausainių kiekio ir kainos.
- ***Į matų sandaugą*** įeina trečiosios dimensijos gavimas dauginant kitas dvi dimensijas, pavyzdžių skaičiuojant stačiakampio plotą arba Dekarto sandaugą.
- ***Kartotinio proporcingumo uždaviniuose*** pateikiamos trys mačiosios erdvės, iš kurių viena yra proporcinga dviem kitoms tarpusavyje nepriklausančioms erdvėms. Šiuo atveju uždavinio sprendimas yra skaidomas į du ar daugiau sprendimo žingsnių, priskiriamų matų izomorfizmo ar matų dauginimo kategorijoms.

2.5 lentelėje detalizuojamos Vergnaud modelio kategorijos, subkategorijos ir uždavinių pavyzdžiai.

Kitos, besimokančiųjų patirtimi paremtos, klasifikacijos įprastai apima daugiau kategorijų. Greer (1992) modelis apima 10 kategorijų, iš kurių 7 galima priskirti Vergnaud apibrėžtai matų izomorfizmo kategorijai ir tris - matų sandaugos. Greer modelyje atsižvelgiama, jog mokiniai skirtingai suvokia diskrečiuosius ir tolydžiuosius dydžius, todėl kartotinę tam tikrų objektų grupių sudėtį siūloma priskirti kitai kategorijai nei atkarpos sudarymą iš vienodo ilgio dalių. Trejos matų sandaugai priskirtinos kategorijos nedaug skiriasi nuo 2.5 lentelėje pateiktų matų sandaugos subkategorijų, išskyrus tai, kad viena

Kategorija	Subkategorija	Uždavinys
Matų izomorfizmas	-	Kiek kainuoja 12 sausainių, jei 4 sausainiai kainuoja 20 kronų?
	Užd. su neišreikštu skaičiumi 1	Kiek kainuoja 12 sausainių, jei sausainis kainuoja 5 kronas?
Matų sandauga	Ploto skaičiavimas	Koks stačiakampio plotas, jei jo plotis 4 cm, o ilgis 5 cm?
	Dekarto sandaugos skaičiavimas	Kelias poras galima sudaryti iš 4 mergaičių ir 5 berniukų grupės?
Kartotinis proporcingumas	-	4 vištos per 4 dienas sulesa 4 kg grūdų. Kiek grūdų sulesa 12 vištų per 12 dienų?

2.5 lentelė: Daugybos klasifikavimo modelis pagal Vergnaud

Kategorija	Subkategorija	Kintamųjų paaiškinimai
Grupavimas	-	a - vienodų grupių skaičius, b - grupės didumas
Rodiklis	-	a - rodiklis, b - dydis, matuojamas rodiklio vienetais[3]
Dauginamasis palyginimas	-	a - dydis, b - bedimensis daugiklis
Stačiakampė figūra	Diskretūs dydžiai	a ir b - objektų kiekiai
	Tolydūs dydžiai	a ir b - stačiakampio kraštinės
Dekarto sandauga	-	a ir b - tam tikrų aibių elementų kiekiai

2.6 lentelė: Papildytas daugybos klasifikavimo modelis pagal Greer

iš tų kategijų atitinka bendresnį Dekarto sandaugos atvejį už kitos. Savo darbo apžvalgoje Greer siūlė 10 kategorijų susiaurinti ligi 4 skirtingų uždavinių modelių: grupavimo, dauginamojo palyginimo, stačiakampės figūros dydžio ir Dekarto sandaugos. Būtent ši susiaurinta klasifikacija ir tapo plačiai naudojama vidurinės mokyklos matematikos turinio tyrimuose. Tiesa, kai kurių dydžių, tokių, kaip kaina už sąsiuvinį ir pirktų sąsiuvinių kiekis, dauginimas (dėl dydžių diskretumo) pakliūva į grupavimo kategoriją, o vidutinio greičio ir įveikto kelio - jau į kitą, dauginamojo palyginimo kategoriją, nors modeliai yra panašūs. Kai kurie autoriai siūlo šiems pavyzdžiams rezervuoti atskirą, rodiklio[2], kategoriją. Tolydžių dydžių atveju taip bus daroma ir šiame darbe. 2.6 lentelėje pateikiamos ETU su dauginimu kategorijos ir dydžių paaiškinimai pagal papildytą Greer modelį.

[2] *Angl.* sąvoka „rate“ neturi plačiai vartojamo ekvivalento lietuvių kalboje, todėl siūlomas sutartinis vertimas

[3] Rodiklio vienetu laikome matavimo vienetą, kuriam priskiriamas kitais vienetais matuojamas dydis

Sąlyga	Veiksmas	Operacija	Kategorija	Subkategorija
Uždavinys 1	aAb	A	A1	A1a2
	aBb	B	B3	-1
Uždavinys 2	aCb	C	C2	C2c3
	aCb	C	C1	C1c1
	aAb	A	A1	A1a3
Uždavinys 3	aCb	C	C1	C1c2
	aCb	C	C2	C2c3
	aDb	D	D4	D4d2

2.7 lentelė: Teorinis tekstinių uždavinių nagrinėjimo pavyzdys

2.4 Klasifikacijos modelio taikymo galimybės

Visoje ankstesnėje dalyje buvo stengtasi pasiūlyti metodiką, pagal kurią būtų galima tyrimui atrinkti ir tirti nemažą dalį konkrečių 5 - 8 klasės mokyklinio turinio tekstinių uždavinių. Deja, dėl ribotų laiko išteklių, apsiribojime tik teoriniu ETU atrankos kriterijaus išplėtojimu bei šiandienos matematikos edukologijoje plačiai naudojamų ETU klasifikacijos metodų apžvalga. Tyrimas būtų prasmingesnis, jei detalizuotą klasifikavimą būtų galima patikrinti empiriškai - tirti konkretaus vadovėlio mokyklinių uždavinių turinį. Tikėdamiesi, kad detalus ETU klasifikavimo planas gali būti naudingas ateities tyrimuose, pateiksime vieną iš galimų surinktų duomenų analizės būdų.

2.7 yra pateikiamas teorinis trijų tekstinių uždavinių nagrinėjimo pavyzdys su fiktyviais duomenimis. Norint kiekvieną uždavinį išspręsti, reikia atlikti 2 - 3 veiksmus su tam tikrais kintamaisiais. Uždavinio sąlyga ir atliekami veiksmai yra įrašomi į atskirus lentelės stulpelius. Kiekviename užrašytas veiksmas atitinka vieną iš aritmetinių operacijų (sudėtį, atimtį, daugybą arba dalybą), o kintamieji, su kuriais jis atliekamas, leidžia atpažinti jo kategoriją ir subkategoriją.

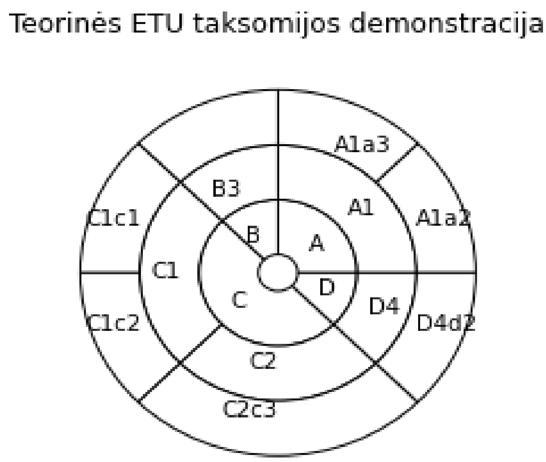
Lentelę galima pildyti *Excel* programoje. Duomenys, įrašyti į `test.xlsx` failą, pateikti Priede. Kodas, nuskaitantis duomenis iš failo, rašomas *Python* programa:

```
import pandas as pd
df = pd.read_excel('test.xlsx', index_col=[0,1]).reset_index()
df.fillna(-1, inplace=True)
df.set_index(['Operacija', 'Kategorija', 'Subkategorija'])
```

Kai duomenys nuskaitomi, juos galima grupuoti pagal operaciją, kategoriją arba subkategoriją. Grupių dydžiai leidžia pamatyti kiekvienos grupės uždavinių pasiskirstymą. Šį pasiskirstymą galima pavaizduoti kelių lygių skrituline diagrama. *Python* programos kodas, vykdantis grupavimą ir skaičiavimą, pateikiamas priede.

2.5 Vietoje išvadų

Darbo pabaigą vainikuosime gauta skrituline diagrama, pademonstruojančia, kaip atrodo besiplečiančio tekstinių uždavinių supratimo akiratis kartu su sudėtinga ir nuolat diskutuotina mokyklinių tekstinių uždavinių anatomija, bei skatinančia realizuoti darbe išdėstytas gaires, kaip galėtų atrodyti tolimesnis - empirinis - tekstinių uždavinių analizavimas.



2.1 pav.: Fiktyvių uždavinių pasiskirstymas pagal operaciją, kategorijas ir subkategorijas

Apie tekstinių uždavinių, sprendžiamų aritmetiniais veiksmais, klasifikaciją 5 - 8 klasės mokyklos programoje

Santrauka

Šio darbo tikslas yra pateikti teorinę aplinką, kuria remiantis galima analizuoti 5 - 8 klasių mokyklinių uždavinių turinį. Darbas susideda iš dviejų dalių. Pirmoje dalyje deduktyviai išvedamas teorinis modelis, skirtas apibrėžti elementaraus tekstinio uždavinio konstruktą. Antroje dalyje remiantis matematikos edukacijoje plačiai taikomais modeliais stengiamasi pateikti kuo detalesnį planą elementarių tekstinių uždavinių klasifikacijai. Darbe buvo kruopščiai išanalizuotos tekstiniuose uždaviniuose apibūdintos situacijos, kai jie yra sprendžiami taikant bet kurį vieną iš keturių aritmetinių veiksmų. Darbo pabaigoje pateikiama tekstinių uždavinių duomenų valdymo sistema tikintis, kad šis tekstinių uždavinių klasifikacijos modelis gali būti realizuotas vertinant mokyklinių vadovėlių matematikos turinio sandarą.

Raktiniai žodžiai : tekstiniai uždaviniai; vadovėliai; klasifikacija; matematinis samprotavimas

On a Classification of Word Problems Solvable by Arithmetic Operations from Curriculum of 5 - 8th Grades

Abstract

An objective of this article is offering a theoretical framework flexible enough for analysing a content of word problems from curriculum of 5 - 8 th grades. In the first part we deduce a theoretical framework that defines a construct of elementary word problem. In the second part we devise a detailed plan of classification of elementary word problems based on widely applied models of education of mathematics. A narrow analysis of wide range of word problems solvable by the one of four main arithmetic operations was done. We conclude with possible way of data structure that helps to manage data of word problems with an eye to realisation of this classification model for further researches of content of word problems from exercise books of mathematics.

Key words : word problems; textbooks; classification; mathematical reasoning

Literatūra

[1] Ališauskas A., Janušaitienė O., Arefjeva M., Daukšytė-Koncevičienė L., *Serija „Atrask“. Matematika. 5 klasė. Vadovėlis. 1 dalis* 29, 17, 29psl., 2016.

[2] Ališauskas A., Janušaitienė O., Arefjeva M., Daukšytė-Koncevičienė L., *Serija „Atrask“. Matematika. 5 klasė. Vadovėlis. 1 dalis* 29, 17, 17psl., 2016.

[3] Ališauskas A., Janušaitienė O., Arefjeva M., Daukšytė-Koncevičienė L., *Serija „Atrask“. Matematika. 5 klasė. Vadovėlis. 1 dalis* 29, 17, 19psl., 2016.

[4] Pedersen P.L., Bjerre M., Two conceptions of fraction equivalence. Educ Stud Math 107, 135–157 (2021). `https://doi.org/10.1007/s10649-021-10030-7`

[5] International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM). ISO. `https://www.iso.org/sites/JCGM/VIM/JCGM_200e_FILES/MAIN_JCGM_200e/01_e.html#L_1_8`

[6] Romaška A., *Finansų, demografinių ir išgyvenamumo modelių nagrinėjimas iš matematinės filosofijos perspektyvos,* 6psl, 2014.

[7] Polya G., *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton, N.J: Princeton University Press*, 1957.

[8] Mazėtis E., Novikas A., Jonaitienė D., Zaveckaitė I. *2014 m. matematikos valstybinio brandos egzamino užduoties analizė*, 2014.

[9] Riley M.S., Greeno J.G., Heller J.I., Development of childrens problem-solving ability in arithmetic, p. 10-12, 1984.

[10] Kilienė I., On a classification of word problems from the first grade Lithuanian textbooks, LMR, vol. 61, no. A, pp. 18-24, Mar. 2021.

[11] Dzindzalieta I., Facebook pranešimas apie 2021m. matematikos bandomąjį valstybinį brandos egzaminą, 2021, https://www.facebook.com/dai.nius.370/posts/2913086852314051

[12] Larsson K., Students' understandings of multiplication, p. 7 - 10, 2016.

[13] Karthik (https://physics.stackexchange.com/users/124232/karthik), What is the difference between physical dimensions and physical quantities? https://physics.stackexchange.com/q/462654 (version: 2019-02-24)

[14] Wikipedia contributors, Physical quantity, Wikipedia, TheFreeEncyclopedia, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Physical_quantity&oldid=1024561313 (accessed May 24, 2021)

[15] Wikipedia contributors, Intensive and extensive properties, Wikipedia, The Free Encyclopedia, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Intensive_and_extensive_properties&oldid=1024842790 (accessed May 24, 2021).

A Priedai

A.1 Fiktyvių uždavinių operacijų, kategorijų ir subkategorijų pasiskirstymo diagramą braižantis kodas

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots()
level1_names = ['A', 'B', 'C', 'D']
level2_names = ['A1', 'B3', 'C1', 'C2', 'D4']
level3_names = ['A1a2', 'A1a3', '', 'C1c1', 'C1c2', 'C2c3', 'D4d2']
ax.pie(df.groupby('Operacija').size(), radius=0.4,
       labels=level1_names, labeldistance=0.55,
       wedgeprops=dict(width=0.3, edgecolor='k', fc='w'))
ax.pie(df.groupby(['Operacija', 'Kategorija']).size(), radius=0.7,
       labels=level2_names, labeldistance=0.7,
       wedgeprops=dict(width=0.3, edgecolor='k', fc='w'))
ax.pie(df.groupby(['Operacija', 'Kategorija', 'Subkategorija']).size(), radius=1,
       labels=level3_names, labeldistance=0.75,
       wedgeprops=dict(width=0.3, edgecolor='k', fc='w'))
ax.set(aspect="equal", title='Teorinės ETU taksomijos demonstracija')
plt.show()
```