ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS, MATEMATIKOS IR E. STUDIJŲ INSTITUTAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Evelina Budrikaitė
Matematikos su gretutine ekonomikos kryptimi studijų programos studentė

Mintino skaičiavimo matematinis pagrindimas

Bakalauro darbas

Darbo vadovas
doc. dr. Daiva Korsakienė

Šiauliai, 2015

TURINYS

ĮVADAS

Pagrindinis mintino skaičiavimo tikslas yra greitai ir lengvai skaičiuoti. Naudojant tam tikrus metodus galima išlavinti greitą skaičiavimą ir greitą mąstymą, taip pat galimybę susikaupti. Metodai padeda išvystyti refleksą neskaičiuojant iškart atlikti paprastus veiksmus. Bill Handley [1, 2], Jakow Trachtenberg [5] kalba apie mintiną skaičiavimą ir pateikia tam tikras skaičiavimo taisykles, bet jos pateikiamos be įrodymų kaip savaime suprantamos. Šis darbas yra skirtas susisteminti bei matematiškai pagrįsti mintinos daugybos ir kėlimo kvadratu taisykles, kurios remiasi įvairiomis skaičių dalumo savybėmis bei kitomis taisyklėmis. Visoms greitos daugybos taisyklėms yra pateikiami taikymo pavyzdžiai. Nagrinėjami tik teigiami skaičiai.

Bakalauro darbą sudaro įvadas, 5 skyriai, išvados, literatūros sąrašas ir santrauka.

Darbo teorinė dalis yra taisyklių formulavimas ir jų įrodymas, o praktinė dalis – pavyzdžiai. Dėl to šios dalys nėra atskirai išskiriamos.

Kadangi darbe yra nagrinėjamas mintinas skaičiavimas dešimtainėje sistemoje, pirmame skyriuje ji ir yra aptariama. Tolesniuose skyriuose grupuojamos mintino skaičiavimo taisyklės. Antras skyrius yra apie skaičių daugybą, atsižvelgiant į skaičių savybes. Išskiriamas dauginamųjų keitimo metodas ir papildinių metodas bei pateikiami naudingi greito ir patogesnio skaičiavimo patarimai. Trečiame skyriuje nagrinėjama dviženklių skaičių daugyba. Išskiriamos taisyklės kai skaičius yra tarp 10 ir 20, baigiasi vienetu, skaičiaus skaitmenys yra vienodi ar turi atitinkamą vienetų sumą. Ketvirtame skyriuje aptariama daugyba iš skaičiaus artimo 10^n. Grupuojama skaičių daugyba iš $10^n - z$, daugyba iš 9, 99, 999 ir daugyba iš 11, 111, 1111. Penktajame skyriuje tiriamas sveikųjų skaičių kėlimas kvadratu. Išskiriamos kėlimo kvadratu taisyklės kai žinomas prieš tai arba po to einančio skaičiaus kvadratas, kai skaičius baigiasi atitinkamais skaitmenimis, tokiais kaip 5, 25, 75 ir kai paskutinis skaičiaus skaitmuo yra didesnis nei 5.

Darbo tikslas: aptarti ir matematiškai pagrįsti metodus, kurie padeda greitai ir lengvai skaičiuoti tam tikrų skaičių sandaugas, bei kvadratus.

Uždaviniai:

1. sugrupuoti mintino skaičiavimo taisykles;
2. matematiškai pagrįsti pateiktas taisykles;
3. pateikti taikymo pavyzdžių.

Uždaviniai sprendžiami tokiu principu: surandama taisyklė, ji paaiškinama, pagrindžiama matematiškai ir pateikiami naudojimo pavyzdžiai.

1. SKAIČIAVIMO SISTEMOS

1.1. DALYBOS SU LIEKANA TEOREMA

Skaičių yra be galo daug ir reikalinga tam tikra skaičių žymėjimo sistema, kuri padėtų užrašyti skaičius turint baigtinį ženklų skaičių. Skaičiams užrašyti naudojamos **skaičiavimo sistemos**. Skaičiavimo sistemos remiasi „dalybos su liekana teorema“.

Teorema [4]. Kad ir kokie būtų natūralieji skaičiai *n* ir *m*, yra vienintelė pora neneigiamų sveikųjų skaičių *q* ir *r*, $0 \le r \le m$, su kuriais teisinga lygybė $n = mq + r$.

Šioje lygybėje skaičius *q* vadinamas nepilnuoju dalmeniu, gautu dalijant skaičių *n* iš skaičiaus *m*, skaičius *r* vadinamas liekana, gauta dalijant skaičių *n* iš *m*.

Jei $r = 0$, tai sakoma, kad *n* dalijasi iš *m*.

Plačiausiai vartojama yra dešimtainė skaičiavimo sistema.

1.2. DEŠIMTAINĖ SKAIČIAVIMO SISTEMA

Dešimtainė skaičiavimo sistema yra tokia, kai visi skaičiai užrašomi dešimties ženklų pagalba. Tai yra pozicinė skaičiavimo sistema, kurioje „... tas pats ženklas (skaitmuo) gali reikšti skirtingus skaičius, priklausomai nuo vietos, t. y. pozicijos, kurią jis užima“ [3].

Apibrėžimas [4]. Skaičius, kuris užrašytas daugianariu

$$n = c_s \cdot 10^s + c_{s-1} \cdot 10^{s-1} + c_{s-2} \cdot 10^{s-2} + ... + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0,$$

$c_s > 0$, $c_0, c_1 ..., c_s$ priklauso aibei {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, vadinamas dešimtainiu.

Trumpesnis žymėjimas yra toks

$$n = c_s \cdot 10^s + c_{s-1} \cdot 10^{s-1} + c_{s-2} \cdot 10^{s-2} + ... + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0 = \overline{c_s c_{s-1} ... c_2 c_1 c_0},$$

čia $c_s c_{s-1} ... c_2 c_1 c_0$ vadinami skaičiaus *n* (dešimtainiais) skaitmenimis. Brūkšnys reiškia, kad čia užrašytas skaičius su skaitmenimis, o ne sandauga. Kai skaičius konkretus, skaitmenys irgi yra konkretūs ir brūkšnys užrašyme nededamas [3, 4].

Pavyzdys.

$$4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 = 4025;$$

čia $s = 3$, $c_3 = 4$, $c_2 = 0$, $c_1 = 2$, $c_0 = 5$. Šiame skaičiuje pirmas skaitmuo reiškia tūkstančius, antras – šimtus, trečias – dešimtis, o ketvirtas – vienetus.

2. SKAIČIŲ DAUGYBA, ATSIŽVELGIANT Į SKAIČIŲ SAVYBES

2.1. DAUGINAMŲJŲ KEITIMO METODAS

Jei vieną iš dauginamųjų padidiname *m* kartų, o kitą tiek pat kartų sumažiname, rezultatas nesikeičia, tačiau dauginti gali būti lengviau ir greičiau [1].

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $24 \cdot 25$. Pastebėkime, kad lengviau dauginti bus jeigu antrą dauginamąjį dauginsime iš 4 ir gausime 100. Kadangi 25 dauginome iš 4, tai 24 reikia iš to paties skaičiaus dalinti. Atlikus šiuos veiksmus, belieka tik 6 dauginti iš 100, taip gaunama sandauga 600:
$$24 \cdot 25 = (24:4) \cdot (25 \cdot 4) = 6 \cdot 100 = 600.$$

2. Apskaičiuokime $17 \cdot 12$. Pastebėkime, kad antrą dauginamąjį galime dalinti iš 3, o pirmąjį tuomet dauginame iš to paties skaičiaus. Atlikus šiuos veiksmus lieka tik 51 sudauginti su 4 ir gauta sandauga lygi 204:
$$17 \cdot 12 = (17 \cdot 3) \cdot (12:3) = 51 \cdot 4 = 204.$$

Jei vienas iš dauginamųjų yra $5 \cdot 10^n$, $25 \cdot 10^n$ arba $125 \cdot 10^n$, tai jį dauginame atitinkamai iš 2, 4 arba 8, o kitą dauginamąjį arba visą reiškinį daliname iš to paties skaičiaus. Dalinant iš $5 \cdot 10^n$, $25 \cdot 10^n$ arba $125 \cdot 10^n$ veiksmus atliekame analogiškai [1].

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $256 \cdot 5$. Kadangi vienas iš dauginamųjų yra 5, tai jį dauginame iš dviejų, o kitą dauginamąjį, t. y. 256 iš dviejų daliname. Atlikus šiuos veiksmus lieka 128 dauginti iš 10, gauta sandauga yra 1280:
$$256 \cdot 5 = (256:2) \cdot (5 \cdot 2) = 128 \cdot 10 = 1280.$$

2. Apskaičiuokime $48 \cdot 125$. Kadangi vienas iš dauginamųjų yra 125, tai jį dauginame iš 8, o 48 iš šio skaičiaus daliname. Atlikus šiuos veiksmus lieka 6 dauginti iš 1000, taip gaunama sandauga 6000:
$$48 \cdot 125 = (48:8) \cdot (125 \cdot 8) = 6 \cdot 1000 = 6000.$$

3. Apskaičiuokime $35 \cdot 25$. Kadangi vienas iš dauginamųjų yra 25, tai jį dauginame iš 4, gautą sandaugą dauginame iš 35 ir tuomet visą reiškinį daliname iš 4. Pastebėkime, kad gavus sandaugą 3500 lengviau iš pradžių dalinti iš dviejų (taip gauname 1550) ir po to dar kartą dalinti iš dviejų (taip gauname galutinį atsakymą 875):
$$35 \cdot 25 = (35 \cdot (25 \cdot 4)) : 4 = 3500 : 4 = (3500 : 2) : 2 = 1550 : 2 = 875.$$

4. Apskaičiuokime $120 \cdot 25$. Pastebėkime, kad dalmenį lengviau apskaičiuoti jeigu abu dauginamuosius padidinsime keturis kartus. Padauginus 120 ir 25 iš 4, gauname 480 ir 100, dabar lieka dalinį 480 dalinti iš daliklio 100 ir gauname dalmenį 4,8:
$$120 : 25 = (120 \cdot 4) : (25 \cdot 4) = 480 : 100 = 4{,}8.$$

Daugindant iš 5, 6, 14 ir 16 galima remtis keliais patarimais, kurie padės supaprastinti skaičiavimus.

Daugyba iš 5: norint dauginti skaičių iš 5, lengviau pirmiausia dalinti iš 10 ir po to dalinti iš 2 [1].

Daugyba iš 6: norint dauginti skaičių iš 6, lengviau pirmiausia dauginti iš 3, vėliau iš 2.

Daugyba iš 14: norint dauginti skaičių iš 14, lengviau pirmiausia dauginti iš 7, o tada iš 2.

Daugyba iš 16: norint dauginti skaičių iš 16, lengviau pirmiausia dauginti iš 8, o tada iš 2.

Paprastesnis skaičiavimas yra, kai vieną iš dauginamųjų pakeičiame dviejų skaičių suma.

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $48 \cdot 12$. Pastebėkime, kad lengviau dauginti, jeigu 12 užrašome dviejų skaičių suma, t. y. $10 + 2$. Taigi 48 dauginame iš 10 ir gauname 480, prie šios sandaugos pridedame sandaugą 96, kurią gauname sudauginę 48 ir 2. Suma 576 ir yra atsakymas:
$$48 \cdot 12 = 48 \cdot (10 + 2) = 48 \cdot 10 + 48 \cdot 2 = 480 + 96 = 576.$$

2. Apskaičiuokime $425 \cdot 21$. Pastebėkime, kad galime 21 pakeisti dviejų skaičių suma $(10+11)$. Dauginame atskirai 425 iš 10 ir 425 iš 11, tada gautas sandaugas, atitinkamai 4250 ir 4675, sudedame ir rezultatas yra 8925:

$$425 \cdot 21 = 425 \cdot (10+11) = 425 \cdot 10 + 425 \cdot 11 = 4250 + 4675 = 8925.$$

Paprasti patarimai kaip lengviau dauginti iš 13, 15 ir 17.

Daugyba iš 13: norint dauginti skaičių iš 13, kartais lengviau pirmiausia dauginti iš 3, vėliau 10 kartų pridėti tikrąjį, pradinį skaičių.

Daugyba iš 15: norint dauginti skaičių iš 15, dauginama iš 10 ir 5 kartus pridedamas pradinis skaičius.

Daugyba iš 17: norint dauginti skaičių iš 17, dauginama iš 7 ir 10 kartų pridedamas pradinis skaičius.

2.2. SKAIČIŲ ARTIMŲ $N \cdot 10^n$ ($N \geq 1$) DAUGYBA (PAPILDINIŲ METODAS)

Skaičius *a* vadinamas skaičiaus *A* papildiniu iki skaičiaus *X*, jeigu teisinga lygybė: $A = X - a$.

Sakykime turime du skaičius *A* ir *B*, pažymėkime jų papildinius iki $N \cdot 10^n$ ($N \geq 1$) atitinkamai *a* ir *b*. Papildiniai gali būti skirtingų ženklų, jų sandauga nebūtinai yra *n*-ženklis skaičius.

1 taisyklė. Skaičių *A* ir *B* sandaugą galime apskaičiuoti iš vieno iš skaičių atėmę kito skaičiaus papildinį, jį padauginę iš $N \cdot 10^n$ ir pridėję papildinių sandaugą, t. y.

$$A \cdot B = (A - b) \cdot N \cdot 10^n + ab$$

arba

$$A \cdot B = (B - a) \cdot N \cdot 10^n + ab.$$

Įrodymas.

$$A \cdot B = (N \cdot 10^n - a)(N \cdot 10^n - b) = (N \cdot 10^n - a) \cdot N \cdot 10^n - (N \cdot 10^n - a) \cdot b =$$
$$= (N \cdot 10^n - a - b) \cdot N \cdot 10^n + ab = (A - b) \cdot N \cdot 10^n + ab.$$

Analogiškai įrodome, kad

$$A \cdot B = (B - a) \cdot N \cdot 10^n + ab.$$

Dviženkliams skaičiams *A* ir *B* mažesniems už 100 formuluojame 2 taisyklę.

2 taisyklė. Dviejų dviženklių skaičių sandauga yra keturženklis skaičius gautas prie vieno iš skaičiaus ir kito skaičiaus papildinio iki 100 skirtumo prirašius abiejų skaičių papildinių sandaugą. Jeigu papildinių sandauga yra vienaženklis skaičius, tai jo pradžioje prirašome 0 [2].

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $94 \cdot 97$. Raskime skaičių papildinius iki 100: $100 - 94 = 6$ ir $100 - 97 = 3$. Tuomet iš pirmojo dauginamojo atimame antrojo dauginamojo papildinį iki 100: $94 - 3$, gautas skirtumas bus pirmieji du atsakymo skaitmenys. Paskutinius du atsakymo skaitmenis gauname sudauginus abiejų skaičių papildinius iki 100, t. y. $6 \cdot 3 = 18$ ir taip gauname rezultatą 9118:
$$94 \cdot 97 = \overline{(94-3)(6 \cdot 3)} = 9118$$
arba galime iš antro dauginamojo atimti pirmo dauginamojo papildinį iki 100, t. y., toliau atliekami tie patys veiksmai ir gauname rezultatą:
$$94 \cdot 97 = \overline{(97-6)(6 \cdot 3)} = 9118.$$

2. Apskaičiuokime $99 \cdot 98$. Laužtiniuose skliaustuose randame skaičių papildiniai iki 100. Tuomet iš pirmojo dauginamojo atimame antrojo dauginamojo papildinį iki 100: $99 - 2$, gautas skirtumas bus pirmieji du atsakymo skaitmenys. Paskutinius du atsakymo skaitmenis gauname sudauginus abiejų skaičių papildinius iki 100, t. y. $1 \cdot 2 = 2$ ir, kadangi gauname vienaženklį skaičių, pagal 2 taisyklę prieš dvejetą parašome 0. Taip gauname atsakymą 9702:
$$99 \cdot 98 = \begin{bmatrix} 100 - 99 = 1 \\ 100 - 98 = 2 \end{bmatrix} = \overline{(99-2)(1 \cdot 2)} = \overline{(97)(02)} = 9702.$$

3. Apskaičiuokime $87 \cdot 92$. Atliekame visus 2 taisyklėje aprašytus veiksmus. Pastebėkime, kad sudauginus skaičių papildinius, gauname triženklį skaičių: $13 \cdot 8 = 104$. Nulį ir ketvertą paliekame kaip atsakymo paskutinius du skaitmenis, o papildomą vienetą tiesiog pridedame prie pirmojo skaičiaus ir antrojo skaičiaus papildinio iki 100 skirtumo t. y. $(87 - 8) + 1 = 79 + 1 = 80$, tai pirmieji du atsakymo skaitmenys:
$$87 \cdot 92 = \begin{bmatrix} 100 - 87 = 13 \\ 100 - 92 = 8 \end{bmatrix} = \overline{(87-8)(13 \cdot 8)} = \overline{(79)(104)} = \overline{(79+1)(04)} = 8004.$$

4. Apskaičiuokime $115\cdot 107$. Galime veiksmus užrašyti šiek tiek kitaip. Laužtiniuose skliaustuose randami skaičių 115 ir 107 papildiniai iki 100. Tuomet iš pirmojo skaičiaus atimame antrojo skaičiaus papildinį iki 100 ir šį skirtumą dauginame iš 100, tada prie šio skaičiaus pridedame papildinių sandaugą ir gauname rezultatą:

$$115\cdot 107 = \begin{bmatrix} 100-115=-15 \\ 100-107=-7 \end{bmatrix} = \left(115-(-7)\right)\cdot 100 + (-15)\cdot(-7) = 12200+105 = 12305.$$

5. Apskaičiuokime $105\cdot 97$. Galime dauginti ir triženklį skaičių iš dviženklio. Atliekame ankstesniame pavyzdyje aprašytus veiksmus ir gauname rezultatą:

$$105\cdot 97 = \begin{bmatrix} 100-105=-5 \\ 100-97=3 \end{bmatrix} = \left(105-3\right)\cdot 100 + (-5)\cdot 3 = 10200-15 = 10185.$$

6. Apskaičiuokime $1009\cdot 998$. Čia ieškome skaičių papildinių iki 1000, taigi pirmojo skaičiaus ir antrojo skaičiaus papildinio skirtumą dauginame iš 1000. Toliau visus veiksmus atliekame analogiškai:

$$1009\cdot 998 = \begin{bmatrix} 1000-1009=-9 \\ 1000-998=2 \end{bmatrix} = \left(1009-2\right)\cdot 1000 + (-9)\cdot 2 = 1006982.$$

Sandaugai rasti papildomai galime naudoti dauginamųjų keitimo metodą.

7. Apskaičiuokime $1003\cdot 97$. Pastebėkime, kad galime taikyti 2 taisyklę, jeigu vietoje 97 imame skaičių 970. Gautą rezultatą padalinsime iš 10:

$$1003\cdot 97 = \left(1003\cdot 970\right):10 = \begin{bmatrix} 1000-1003=-3 \\ 1000-970=30 \end{bmatrix} = \left(\left(970-(-3)\right)\cdot 1000 + (-3)\cdot 30\right):10 =$$
$$= (973000-90):10 = 97291.$$

8. Apskaičiuokime $0{,}998\cdot 0{,}997$. Pastebėkime, kad galime taikyti 2 taisyklę, jeigu abu skaičius pakeičiame sveikaisiais. Gautą rezultatą padauginsime iš 10^{-6}:

$$0{,}998\cdot 0{,}997 = \left(998\cdot 997\right)\cdot 10^{-6} = \begin{bmatrix} 1000-998=2 \\ 1000-997=3 \end{bmatrix} = \left(\left(998-3\right)\cdot 1000 + 2\cdot 3\right)\cdot 10^{-6} =$$
$$= 995006\cdot 10^{-6} = 0{,}995006.$$

9. Apskaičiuokime $196\cdot 197$. Raskime šių skaičių papildinius iki artimiausio skaičiaus $N\cdot 10^n = 200$: $200-196=4$ ir $200-197=3$. Kadangi ieškome papildinių iki 200, tai skaičiaus ir papildinio skirtumą dauginame iš 200. Vadinasi,

$$196\cdot 197 = \left(196-3\right)\cdot 2\cdot 100 + 4\cdot 3 = 38600+12 = 38612.$$

10. Apskaičiuokime $61 \cdot 83$. Raskime šių skaičių papildinius iki artimiausio skaičiaus $N \cdot 10^n = 70$, čia $N = 7$, $n = 1$: $70 - 61 = 9$ ir $70 - 83 = -13$. Kadangi ieškome papildinių iki 70, tai skaičiaus ir papildinio skirtumą dauginame iš 70. Vadinasi,

$$61 \cdot 83 = \left(61 - (-13)\right) \cdot 7 \cdot 10 + 9 \cdot (-13) = 5180 - 117 = 5063.$$

Pastaba: šiame uždavinyje skaičiavimai bus paprastesni, jei artimiausią skaičių imsime 60, o ne 70:

$$61 \cdot 83 = \begin{bmatrix} 60 - 61 = -1 \\ 60 - 83 = -23 \end{bmatrix} = \left(61 - (-23)\right) \cdot 6 \cdot 10 + (-1) \cdot (-23) = 84 \cdot 6 \cdot 10 + 23 = 5063.$$

Šį metodą galime taikyti ir trijų dauginamųjų atveju.

Sakykime turime tris skaičius *A*, *B* ir *C*, pažymėkime jų papildinius iki 10^n atitinkamai *a*, *b* ir *c*. Tuomet

$$A \cdot B \cdot C = \left(10^n - a\right)\left(10^n - b\right)\left(10^n - c\right) = 10^{3n} - 10^{2n} \cdot (a + b + c) + 10^n \cdot (ab + ac + bc) - abc =$$
$$= (10^n - a - b - c) \cdot 10^{2n} + (ab + ac + bc - 1) \cdot 10^n + \left(10^n - abc\right).$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $96 \cdot 98 \cdot 99$.

   Šiame uždavinyje $n = 2$, $A = 96$, $B = 98$, $C = 99$. Šių skaičių papildiniai iki 100 atitinkamai yra $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$. Tuomet,

$$A \cdot B \cdot C = (100 - a - b - c) \cdot 10000 + (ab + ac + bc - 1) \cdot 100 + \left(100 - abc\right);$$

čia $100 - a - b - c$ yra pirmieji sandaugos skaitmenys, $ab + ac + bc - 1$ – kiti du skaitmenys, $100 - abc$ – paskutinieji skaitmenys.

Pirmuosius du sandaugos skaitmenis apskaičiuojame taip: iš bet kurio skaičiaus atimame kitų skaičių papildinių sumą, t. y.

$$96 - (2 + 1) = 98 - (4 + 1) = 99 - (4 + 2) = 93.$$

Kiti du sandaugos skaitmenys yra $4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 = 13$.

Paskutinieji du sandaugos skaitmenys yra skaičių sandaugos papildinys iki 100:

$$100 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 100 - 8 = 92.$$

Taigi, $96 \cdot 98 \cdot 99 = 931392$.

2. Apskaičiuokime $995 \cdot 996 \cdot 997$.

Šiame uždavinyje $n = 3$, $A = 995$, $B = 996$, $C = 997$. Šių skaičių papildiniai iki 1000 atitinkamai yra $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$.

Pirmieji trys sandaugos skaitmenys:

$$995-(4+3)=988.$$

Sekantys trys sandaugos skaitmenys:

$$5\cdot 4+5\cdot 3+4\cdot 3-1=046.$$

Paskutinieji sandaugos skaitmenys:

$$1000-5\cdot 4\cdot 3=1000-60=940.$$

Vadinasi, $995\cdot 996\cdot 997=988046940$.

3. DVIŽENKLIŲ SKAIČIŲ DAUGYBA

3.1. DVIŽENKLIŲ SKAIČIŲ TARP 10 IR 20 DAUGYBA

3 taisyklė. Norėdami rasti dviejų dviženklių skaičių tarp 10 ir 20 sandaugą, turime prie vieno iš dauginamųjų pridėti kito skaičiaus vienetus, rezultatą dauginti iš 10 ir prie jo pridėti vienetų sandaugą [1]:

$$\overline{1a}\cdot\overline{1b}=\overline{1(a+b)(a\cdot b)}.$$

Įrodymas.

$$(10+a)(10+b)=100+(a+b)\cdot 10+a\cdot b.$$

Pavyzdys.

Apskaičiuokime $17\cdot 14$. Prie 17 pridedame antrojo dauginamojo vienetus, t. y. 4 ir dauginame iš 10: $(17+4)\cdot 10=210$, prie šios sandaugos pridedame vienetų sandaugą, t. y. $7\cdot 4=28$ ir gauname atsakymą 238:

$$17\cdot 14=(17+4)\cdot 10+7\cdot 4=210+28=238$$

arba galime užrašyti taip:

$$17\cdot 14=\overline{1(7+4)(7\cdot 4)}=\overline{1(11)(28)}=\overline{(1+1)(1+2)8}=238.$$

3.2. DVIŽENKLIŲ SKAIČIŲ, KURIE BAIGIASI „1“, DAUGYBA

4 taisyklė. Norėdami sudauginti du dviženklius skaičius, kurie baigiasi „1“, turime parašyti šių skaičių pirmų skaitmenų sandaugą, po to jų sumą, tuomet gautojo skaičiaus gale prirašyti 1, t. y.

$$\overline{a1}\cdot\overline{b1}=\overline{(ab)(a+b)1}.$$

Įrodymas:

$$\overline{a1}\cdot\overline{b1}=(10a+1)(10b+1)=ab\cdot 100+(a+b)\cdot 10+1=\overline{(ab)(a+b)1}.$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $51\cdot 31$. Čia $a=5, b=3$, vadinasi:

$$51\cdot 31=\begin{bmatrix}5\cdot 3=15\\ 5+3=8\end{bmatrix}=1581.$$

2. Apskaičiuokime $61\cdot 71$. Randame pirmųjų skaitmenų sandaugą bei sumą ir gale prirašome 1:

$$61\cdot 71=\begin{bmatrix} 6\cdot 7=42 \\ 6+7=13 \end{bmatrix}=\overline{42(13)1}=\overline{4(2+1)31}=4331.$$

3.3. DVIŽENKLIŲ SKAIČIŲ, KURIŲ VIENETŲ SUMA YRA LYGI 10, DAUGYBA

Nagrinėkime skaičių $\overline{ab}$ ir $\overline{cd}$, kai $b+d=10$, daugybą.

1 atvejis. Tarkime, kad $a=c$, t. y. skaičių dešimtys sutampa, o vienetų suma yra 10.

5 taisyklė. Prie dešimčių sandaugos pridedame pasikartojantį skaitmenį ir prie rezultato prirašome vienetų sandaugą [1]:

$$\overline{ab}\cdot\overline{ad}=(a\cdot a+a)\cdot 100+b\cdot d\,.$$

Įrodymas.

$$\overline{ab}\cdot\overline{ad}=(10a+b)(10a+d)=100a^2+10\cdot a\cdot(b+d)+b\cdot d\,.$$

Kadangi $b+d=10$, tai

$$\overline{ab}\cdot\overline{ad}=(a\cdot a+a)\cdot 100+b\cdot d\,.$$

Pastaba: šis žodinis daugybos aprašymas tinka ir skaičiams, kurių vienetai sutampa, o dešimčių suma yra 10, t. y. skaičiams $\overline{ab}$ ir $\overline{cb}$, kai $a+c=10$.

$$\overline{ab}\cdot\overline{cb}=(a\cdot c+b)\cdot 100+b\cdot b\,.$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $68\cdot 62$. Pasikartojantis skaitmuo yra 6. Vadinasi,

$$\underline{6}8\cdot\underline{6}2=(6\cdot 6+\underline{6})\cdot 100+8\cdot 2=4200+16=4216.$$

2. Apskaičiuokime $48\cdot 68$. Pasikartojantis skaitmuo yra 8. Vadinasi,

$$4\underline{8}\cdot 6\underline{8}=(4\cdot 6+\underline{8})\cdot 100+8\cdot 8=3200+64=3264.$$

2 atvejis. Tarkime, kad $c=a+1$ ir $b=d=5$, t. y. skaičių dešimtys skiriasi per vienetą, o vienetai yra 5.

6 taisyklė. Prie didesnio skaičiaus dešimčių pridedame vienetą, rezultatą padauginame iš kito skaičiaus dešimčių ir prie gauto skaičiaus prirašome skaitmenis 75:

$$\overline{a5}\cdot\overline{c5}=\overline{(a(c+1))75}.$$

Įrodymas.

Nagrinėjame du skaičius $\overline{a5}$ ir $\overline{c5}$. Tarkime, kad $c = a+1$. Tuomet,

$$\overline{a5}\cdot\overline{c5} = (10a+5)(10c+5) = 100a\cdot c + 50\cdot(a+c) + 25.$$

Kadangi $c = a+1$, tai

$$\overline{a5}\cdot\overline{c5} = 100a\cdot(a+1) + 50\cdot(2a+1) + 25 = 100a(a+1) + 100a + 75 = 100a(a+1+1) + 75 =$$
$$= 100a(c+1) + 75.$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $15\cdot 25$. Čia $25 > 15$, todėl $c = 2$, $a = 1$. Vadinasi,

$$15\cdot 25 = \overline{(1(2+1))75} = 375.$$

2. Apskaičiuokime $55\cdot 65$. Čia $65 > 55$, todėl $c = 6$, $a = 5$. Vadinasi,

$$55\cdot 65 = \overline{(5(6+1))75} = 3575.$$

3 atvejis. Tarkime, kad $a = c+1$, t. y. skaičių dešimtys skiriasi vienetu, o vienetų suma yra 10.

7 taisyklė. Didesnio skaičiaus dešimčių kvadratą mažiname vienetu, rezultatą dauginame iš 100 ir pridedame skaičiaus vienetų kvadrato papildinį iki 100:

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd} = \overline{(a^2-1)(100-b^2)}. \qquad (1)$$

Įrodymas.

Nagrinėkime du skaičius $\overline{ab}$ ir $\overline{cd}$, tokius, kad $a = c+1$ ir $b + d = 10$. Tuomet,

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd} = (10a+b)(10c+d) = 100a\cdot c + 10\cdot a\cdot d + 10\cdot c\cdot b + b\cdot d.$$

Kadangi $c = a-1$ ir $d = 10-b$, tai

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd} = 100a\cdot(a-1) + 10\cdot a\cdot(10-b) + 10\cdot(a-1)\cdot b + b\cdot(10-b) =$$
$$= 100a^2 - b^2 = 100\cdot(a^2-1) + (100-b^2).$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $53\cdot 67$. Laužtiniuose skliaustuose patikriname, kuris iš skaičių didesnis, ir skaičiuojame pagal (1) formulę:

$$53\cdot 67 = [67 > 53] = (6^2-1)\cdot 100 + (100-7^2) = 3551.$$

2. Apskaičiuokime $341\cdot 359$. Patikriname kuris skaičius didesnis ir skaičiuojame:

$$341 \cdot 359 = [359 > 341] = (35^2 - 1) \cdot 100 + (100 - 9^2) = 122400 + 19 = 122419.$$

4 atvejis. Bendras atvejis $\overline{ab}$ ir $\overline{cd}$, kai $b + d = 10$, daugyba.

8 taisyklė. Didesnio skaičiaus dešimtis didiname vienetu ir dauginame iš mažesnio skaičiaus dešimčių, rezultatą dauginame iš 100; prie gauto skaičiaus pridedame didesnio skaičiaus ir mažesnio skaičiaus be vienetų skirtumą padaugintą iš mažesnio skaičiaus vienetų [1]:

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = (a+1) \cdot c \cdot 100 + \left(\overline{ab} - \overline{c0}\right) \cdot d\ .$$

Įrodymas.

Nagrinėjami du skaičiai $\overline{ab}$ ir $\overline{cd}$, kai $a > c$ ir $b + d = 10$. Tuomet,

$$\begin{aligned}\overline{ab} \cdot \overline{cd} &= (10a + b)(10c + d) = 100 \cdot a \cdot c + 10 \cdot a \cdot d + 10 \cdot b \cdot c + b \cdot d = \\ &= 100 \cdot a \cdot c + 10 \cdot b \cdot c + 10 \cdot c \cdot d - 10 \cdot c \cdot d + 10 \cdot a \cdot d + b \cdot d = \\ &= 100 \cdot a \cdot c + 10 \cdot c \cdot (b + d) + d(10 \cdot a + b - 10 \cdot c) = \\ &= 100 \cdot c \cdot (a+1) + (10 \cdot a + b - 10 \cdot c) \cdot d = (a+1) \cdot c \cdot 100 + \left(\overline{ab} - \overline{c0}\right) \cdot d.\end{aligned}$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $78 \cdot 42$. Kadangi $78 > 42$ ir $8 + 2 = 10$, tai

$$78 \cdot 42 = (7+1) \cdot 4 \cdot 100 + (78 - 40) \cdot 2 = 3200 + 76 = 3276.$$

2. Apskaičiuokime $16 \cdot 84$. Kadangi $84 > 16$ ir $6 + 4 = 10$, tai

$$16 \cdot 84 = [84 > 16] = (8+1) \cdot 1 \cdot 100 + (84 - 10) \cdot 6 = 900 + 444 = 1344.$$

3. Taisyklę galime taikyti ir triženkliams skaičiams. Apskaičiuokime $128 \cdot 112$. Čia $a = 12$, $c = 11$. Vadinasi,

$$128 \cdot 112 = [128 > 112] = (12+1) \cdot 11 \cdot 100 + (128 - 110) \cdot 2 = 14300 + 36 = 14336.$$

3.4. DVIŽENKLIŲ SKAIČIŲ, KURIŲ DEŠIMTYS ARBA VIENETAI SUTAMPA ARBA KAI VIENO IŠ SKAIČIAUS ABU SKAITMENYS VIENODI, DAUGYBA

Nagrinėkime skaičių $\overline{ab}$ ir $\overline{ad}$, arba $\overline{ab}$ ir $\overline{cb}$, arba $\overline{aa}$ ir $\overline{cd}$, arba $\overline{ab}$ ir $\overline{cc}$ daugybą.

9 taisyklė. Skaičių dešimčių sandaugą dauginame iš 100, prie rezultato pridedame skirtingų skaitmenų sumos sandaugą iš pasikartojančio skaitmens ir iš 10, po to pridedame vienetų sandaugą:

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = a \cdot c \cdot 100 + (skirting\text{ų}\ skaitmen\text{ų}\ suma) \cdot (pasikartojantis\ skaitmuo) \cdot 10 + b \cdot d.$$

Įrodymas.

$$\overline{ab} \cdot \overline{ad} = (10a + b)(10a + d) = 100 \cdot a \cdot a + 10 \cdot a \cdot (b + d) + b \cdot d\ .$$

$$\overline{ab} \cdot \overline{cb} = (10a + b)(10c + b) = 100 \cdot a \cdot c + 10 \cdot b \cdot (a + c) + b \cdot b\ .$$

$$\overline{aa} \cdot \overline{cd} = (10a + a)(10c + d) = 100 \cdot a \cdot a + 10 \cdot a \cdot (c + d) + a \cdot d\ .$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $63 \cdot 69$. Pasikartojantis skaitmuo yra 6, vadinasi,

$$63 \cdot 69 = 6 \cdot 6 \cdot 100 + (3 + 9) \cdot 6 \cdot 10 + 3 \cdot 9 = 3600 + 720 + 27 = 4347.$$

2. Apskaičiuokime $33 \cdot 58$. Pasikartojantis skaitmuo yra 3, vadinasi,

$$33 \cdot 58 = 3 \cdot 5 \cdot 100 + (5 + 8) \cdot 3 \cdot 10 + 3 \cdot 8 = 1500 + 390 + 24 = 1914.$$

3.5. DVIŽENKLIŲ SKAIČIŲ, KAI ABIEJŲ SKAIČIŲ PIRMASIS ARBA PASKUTINIS SKAITMUO YRA 5 ARBA KAI VIENAS IŠ SKAIČIŲ YRA 55, DAUGYBA

10 taisyklė. Dviženklių skaičių $\overline{ab}$ ir $\overline{cd}$, kai abiejų skaičių pirmasis arba paskutinis skaitmuo yra 5 arba kai vienas iš skaičių yra 55, sandaugą randame pagal formulę:

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = (a \cdot c + \text{"}ne\ 5\ suma\text{"} : 2) \cdot 100 + b \cdot d\ .$$

Įrodymas.

Randame dviženklių skaičių, kurių pirmasis skaitmuo yra 5, sandaugą:

$$\overline{5a} \cdot \overline{5b} = (50 + a)(50 + b) = 2500 + 50a + 50b + ab = (25 + (a + b) : 2) \cdot 100 + ab =$$
$$= (5 \cdot 5 + (a + b) : 2) \cdot 100 + ab.$$

Randame dviženklių skaičių, kurių antrasis skaitmuo yra 5, sandaugą:

$$\overline{a5} \cdot \overline{b5} = (10a + 5)(10b + 5) = 100ab + 50a + 50b + 25 = (ab + (a + b) : 2) \cdot 100 + 25 =$$
$$= (ab + (a + b) : 2) \cdot 100 + 5 \cdot 5.$$

Randame dviženklių skaičių, iš kurių vienas yra 55, sandaugą:

$$\overline{ab}\cdot 55=(10a+b)\cdot(10\cdot 5+5)=500a+50a+50b+5b=\big(5a+(a+b):2\big)\cdot 100+5b\,.$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $54\cdot 51$. Pirmieji skaitmenys yra 5, $a=4$, $b=1$, taigi,

$$54\cdot 51=\big(5\cdot 5+(4+1):2\big)\cdot 100+4\cdot 1=(25+2{,}5)\cdot 100+4=2754.$$

2. Apskaičiuokime $35\cdot 75$. Antrieji skaitmenys yra 5, $a=3$, $b=7$, taigi,

$$35\cdot 75=\big(3\cdot 7+(3+7):2\big)\cdot 100+5\cdot 5=(21+5)\cdot 100+25=2625.$$

3. Apskaičiuokime $55\cdot 82$. Pirmasis skaičius yra 55, $a=8$, $b=2$, taigi,

$$55\cdot 82=\big(5\cdot 8+(8+2):2\big)\cdot 100+5\cdot 2=(40+5)\cdot 100+10=4510.$$

4. DAUGYBA IŠ SKAIČIAUS ARTIMO 10^N

4.1. DAUGYBA IŠ $10^n - z$

11 taisyklė. Skaičiaus $\overline{ac}$ ir skaičiaus artimo 10^n, t. y. iš $10^n - z$, sandauga yra

$$\overline{ac}\cdot(10^n - z) = (\overline{ac} - (a+1)\cdot z)\cdot 10^n + (10^n - c)\cdot z\,;$$

čia c – paskutiniai n skaitmenys skaičiuje $\overline{ac}$, z – skaičiaus papildinys iki 10^n.

Kai skaičiai $\overline{ac}$ ir 10^n turi vienodai skaitmenų, t. y. $\overline{ac} < 10^n$, tai a = 0. Tuomet,

$$c\cdot(10^n - z) = (c - z)\cdot 10^n + (10^n - c)\cdot z\,.$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $452\cdot 98$. Čia $n = 2$, $a = 4$, $c = 52$, o $z = 2$, tuomet

$$452\cdot 98 = (452 - 5\cdot 2)\cdot 100 + (100 - 52)\cdot 2 = 44200 + 96 = 44296.$$

2. Apskaičiuokime $12785\cdot 998$. Čia $n = 3$, $a = 12$, $c = 795$, o $z = 2$, tada

$$12795\cdot 998 = (12795 - (12+1)\cdot 2)\cdot 10^3 + (1000 - 795)\cdot 2 = 12769410.$$

12 taisyklė (bendras daugybos iš $(10^n - 1)$ atvejis). Bendru atveju daugindami iš $(10^n - 1)$ skaičiavimus atliekame tokiu būdu

$$\overline{ac}\cdot(10^n - 1) = (\overline{ac} - (a+1))\cdot 10^n + (10^n - c)\,;$$

čia $c - n\cdot(10^n)$ paskutiniai skaičiaus skaitmenys, o a – skaitmenys į kairę nuo c.

Taisyklė nurodo, kad norėdami padauginti m skaitmenų skaičius iš (10^n -1), $m > n$, turime iš dauginamojo atimti padidintą vienetu skaičių, suformuotą iš pirmųjų (m-n) skaitmenų, gautą skirtumą padauginti iš 10^n ir prie gauto rezultato pridėti papildinius iki 10^n.

Įrodymas.

Tegu $a = b\cdot 10^n + c$, čia b – atsitiktinis skaičius, $\overline{ac} < 10^n$. Tada,

$$a\cdot(10^n - 1) = (b\cdot 10^n + c)\cdot(10^n - 1) = ((b\cdot 10^n + c) - (b+1))\cdot 10^n + (10 - c)\,.$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $25455\cdot 9999$. Čia $n = 4$, $a = 2$ ir $c = 5455$. Tada,

$$25455\cdot 9999 = (25455 - (2+1))\cdot 10^4 + (10000 - 5455) = 254524545.$$

2. Apskaičiuokime $5678 \cdot 9999$. Čia $n = 4$, $a = 0$ ir $c = 5678$. Galime užrašyti ir tokia forma:

$$5678 \cdot 9999 = \overline{5677(10000 - 5678)} = 56774322.$$

4.2. DAUGYBA IŠ 9, 99, 999

13 taisyklė (vienaženklių skaičių daugyba iš 9). Vienaženklių skaičių daugybą iš „9“ apskaičiuojame pagal formulę [1]

$$a \cdot 9 = \overline{(a-1)(10-a)}.$$

Pavyzdys.

Apskaičiuokime $7 \cdot 9$. Pirmą sandaugos skaitmenį gausime atėmę iš 7 vienetą, o antrąjį – iš 10 atėmę 7:

$$7 \cdot 9 = (7-1) \cdot 10 + (10-7) = 63.$$

Lengvas pirmųjų dešimties skaičių daugybos būdas iš 9 yra naudojant rankų pirštus. Trumpai jį aprašysime.

Padėkime abi rankas šalia ant stalo ir ištieskime pirštus. Tegu kiekvienas pirštas pagal eiliškumą reiškia atitinkamą skaičių: pirmas iš kairės – 1, kitas po jo – 2, trečias – 3, ir t. t. iki dešimto, kuris reiškia 10. Dabar reikia bet kurį iš pirmų dešimties skaičių padauginti iš 9. Tam reikia (nejudinant rankos nuo stalo) pakleti į viršų tą pirštą, kuris reiškia dauginamąjį. Tada likę pirštai, gulintys į kairę nuo pakelto piršto, duos dešimčių skaičių (dešimtis), o pirštai į dešinę – vienetų skaičių (vienetus).

14 taisyklė (daugiaženklių skaičių daugyba iš 9). Daugindami iš 9 dažnai naudojame būdą, kai skaičių dauginame iš 10 ir iš gautos sandaugos atimame pradinį skaičių [5]:

$$9 \cdot a = 10 \cdot a - a.$$

Pavyzdžiui, $368 \cdot 9 = 3680 - 368$. Čia tenka atimti iš keturženklio skaičiaus.

Egzistuoja paprastesnis būdas:

$$\overline{ac} \cdot 9 = (\overline{ac} - (a+1)) \cdot 10 + (10 - c),$$

čia c $(9 = 10^1 - 1)$ – paskutinis skaičiaus skaitmuo, o a – skaitmenys iš kairės nuo c.

Įrodymas.

$$(\overline{ac} - (a+1)) \cdot 10 + (10 - c) = 90a + 9c = 9 \cdot (10a + c).$$

Pavyzdys.

Apskaičiuokime $368 \cdot 9$. Čia $a = 36$, o $c = 8$. Vadinasi,

$$368 \cdot 9 = (386 - (36 + 1)) \cdot 10 + (10 - 8) = (368 - 37) \cdot 10 + 2 = 3312.$$

15 taisyklė (skaičių daugyba iš 99). Daugybą iš 99 atliekame tokiu būdu:

$$\overline{ac} \cdot 99 = (\overline{ac} - (a + 1)) \cdot 10^2 + (10^2 - c);$$

čia c – du $(99 = 10^2 - 1)$ paskutiniai skaičiaus skaitmenys, o a – skaitmenys iš kairės nuo c.

Pavyzdys.

Apskaičiuokime $368 \cdot 99$. Čia $a = 3$, o $c = 68$. Vadinasi,

$$368 \cdot 99 = (386 - (3 + 1)) \cdot 100 + (100 - 68) = 36400 + 32 = 36432.$$

16 taisyklė (skaičių daugyba iš 999). Daugybą iš 999 atliekame tokiu būdu:

$$\overline{ac} \cdot 999 = (\overline{ac} - (a + 1)) \cdot 10^3 + (10^3 - c);$$

čia c – trys ($999 = 10^3 - 1$) paskutiniai skaičiaus skaitmenys, o a – skaitmenys iš kairės nuo c.

Pavyzdys.

Apskaičiuokime $368 \cdot 999$. Čia $a = 0$, o $c = 368$. Vadinasi,

$$368 \cdot 999 = (386 - (0 + 1)) \cdot 1000 + (1000 - 368) = 367000 + 632 = 367632$$

Paskutiniame pavyzdyje pastebime, kad daugindami $(10^n - 1)$ iš skaičių, mažesnių už 10^n, veiksmus galime suformuluoti papraščiau:

$$(c < 10^n) = c \cdot (10^n - 1) = (c - 1) \cdot 10^n + (10^n - c).$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $36 \cdot 99$. Čia $c = 36$, tada

$$36 \cdot 99 = (36 - 1) \cdot 100 + (100 - 36) = 3564.$$

2. Apskaičiuokime $78 \cdot 999$. Čia $c = 78$. Iš jo atėmę vienetą, gauname pirmus du atsakymo skaitmenis ir iš 1000 atėmę 78, likusius skaitmenis:

$$78 \cdot 999 = \overline{77(1000 - 78)} = 77922.$$

4.3. DAUGYBA IŠ 11, 111, 1111

17 taisyklė (skaičių daugyba iš 11). Daugybą iš 11 atliekame tokiu būdu [1]:

$$\overline{ac}\cdot 11=\overline{a(a+c)c}\text{, kai } (a+c<10);$$

$$\overline{ac}\cdot 11=\overline{(a\cdot 10+(a+c))c}\,.$$

Tarkime, reikia sudauginti $27\cdot 11$. Atsakymo pradžioje paliekame 2, paskutinis skaitmuo bus 7, o viduryje rašome šių dviejų skaitmenų sumą $2+7=9$, gauname rezultatą $27\cdot 11=297$. Daugindami galime gauti dviženklį skaičių, prasidedantį vienetu. Tada šitą vienetą turime pridėti prie dešimčių skaičiaus, o per vidurį rašyti vienetų sumos skaičius.

Pavyzdžiui, $85\cdot 11, 8+5=13$. Vadinasi, $85\cdot 11=\overline{(8+1)35}=935$.

Šis skaičiavimo būdas paaiškinamas tokia matematine lygybe:

$$(10a+b)\cdot 11=110\cdot a+11\cdot b==100\cdot a+10\cdot(a+b)+b.$$

Pavyzdžiai.

1. Daugyba iš 11, kai skaitmenų suma neviršija 10:

   $72\cdot 11=\overline{7(7+2)2}=792;$ $\qquad$ $35\cdot 11=\overline{3(3+5)5}=385.$

2. Daugyba iš 11, kai skaitmenų suma daugiau už 10:

   $94\cdot 11=\overline{9(9+4)4}=\overline{9(13)4}=1034;$ $\qquad$ $78\cdot 11=\overline{7(7+8)8}=858.$

3. Bet kurio daugiaženklio skaičiaus daugyba iš 11:

   $24579\cdot 11=270369;$ $\qquad$ $9673421\cdot 11=10407631.$

18 taisyklė (daugyba iš 111, 1111 ir t. t.). Daugiaženklio skaičiaus daugybą iš 111, 1111 ir t. t. paaiškinsime pateikdami pavyzdį. Sakykime, $1342\cdot 11$.

1) Paskutinysis skaičiaus 1342 skaitmuo yra 2. Šis skaitmuo rašomas kaip paskutinis atsakymo skaitmuo.

2) Kiekvienas kitas skaitmuo prisideda prie kaimyno iš dešinės, t. y. skaičiui 1342 pridedame skaitmenis 4 prie 2, ir galime užrašyti antrą nuo pabaigos atsakymo skaitmenį – 6. Jau turime paskutinius du skaitmenis – 62. Toliau pridedame 3 prie 4, kad gautume trečią nuo pabaigos skaitmenį – 7, jau turėsime tris paskutinius atsakymo skaitmenis – 762. Galiausiai pridedame 1 prie 3, gauname ketvirtąjį nuo galo skaitmenį – 4 ir gauname 4762. Dabar liko atlikti paskutinį žingsnį.

3) Pirmas dauginamojo 1342 skaitmuo tampa kairiuoju (pirmu) atsakymo skaitmeniu, taigi sandauga lygi 14762.

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime $24 \cdot 111$. Vidurinius atsakymo skaitmenis randame sudėdami skaičiaus 24 skaitmenis du kartus, nes dauginame iš 111:
$$24 \cdot 111 = 2\,(2+4)\,(2+4)\,4 = 2664.$$

2. Apskaičiuokime $24 \cdot 1111$. Vidurinius skaitmenis randame kartodami sudėtį 3 kartus, nes dauginame iš 1111:
$$24 \cdot 1111 = 2\,(2+4)\,(2+4)\,(2+4)\,4 = 26664.$$

3. Apskaičiuokime $72 \cdot 111111$. Vidurinius atsakymo skaitmenis gauname sudėję $7+2$ penkis kartus, nes dauginame iš 111111:
$$72 \cdot 111111 = 7999992.$$

Skaičiaus daugybos iš 37 greito skaičiavimo rekomendacija. Atsiminkime, kad $2 \cdot 37 = 74$ ir $3 \cdot 37 = 111$, tada kitus veiksmus galime atlikti pakeisdami dauginamuosius:

$37 \cdot 6 = 37 \cdot 3 \cdot 2 = 111 \cdot 2 = 222$ (čia daugybą iš 6 pakeičiame į daugybą iš $2 \cdot 3$);

$37 \cdot 8 = 37 \cdot (6+2) = 222 + 74 = 296$ (čia daugybą iš 8 pakeičiame į daugybą iš $6+2$);

$37 \cdot 18 = 37 \cdot 3 \cdot 6 = 111 \cdot 6 = 666$ (čia daugybą iš 18 pakeičiame į daugybą iš $3 \cdot 6$).

Pastebėkime, kad dauginant 37 iš 3 kartotinių, labai paprasta atsiminti atsakymus:

Pirmasis trejeto kartotinis yra 3 ir sudauginus gauname $37 \cdot 3 = 111$;

Antrasis trejeto kartotinis yra 6 ir sudauginus gauname $37 \cdot 6 = 222$;

Trečiasis trejeto kartotinis yra 9 ir sudauginus gauname $37 \cdot 9 = 333$;

Ketvirtasis trejeto kartotinis yra 12 ir sudauginus gauname $37 \cdot 12 = 444$;

Penktasis trejeto kartotinis yra 15 ir sudauginus gauname $37 \cdot 15 = 555$ ir t. t.

Skaičiaus daugybos iš 77 greito skaičiavimo rekomendacija. Atsiminkime, kad $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Tada dauginant 77 iš 13 kartotinių, sandaugas atsiminti labai nesudėtinga:

Pirmasis trylikos kartotinis yra 13 ir sudauginus gauname $77 \cdot 13 = 1001$;

Antrasis trylikos kartotinis yra 26 ir sudauginus gauname $77 \cdot 26 = 2002$;

Trečiasis trylikos kartotinis yra 39 ir sudauginus gauname $77 \cdot 39 = 3003$ ir t. t.

5. SVEIKOJO SKAIČIAUS KĖLIMAS KVADRATU

5.1. KĖLIMAS KVADRATU NAUDOJANT PAPILDINIO METODĄ

Keliant skaičių kvadratu, natūraliai, taikomi dauguma jau minėtų supaprastintos daugybos metodų. Pavyzdžiui, 998^2 lengva apskaičiuoti naudojant papildinio metodą. Kai kurie kėlimo kvadratu būdai (pavyzdžiui, $\overline{a5} \cdot \overline{a5}$) taip pat jau buvo išanalizuoti ankstesniuose pavyzdžiuose.

19 taisyklė (pirmoji skaičiaus kėlimo kvadratu). Norėdami pakelti skaičių kvadratu, taikome tokią formulę:

$$(a \cdot 10^n + z)^2; \tag{2}$$

čia z^2 – žinomas.

20 taisyklė (antroji skaičiaus kėlimo kvadratu). (2) formulę galime užrašyti taip:

$$a^2 = (a - z) \cdot (a + z) + z^2.$$

21 taisyklė (dviženklio skaičiaus kėlimas kvadratu). Dviženklio skaičiaus kvadratui skaičiuoti naudojame formulę

$$(\overline{ac})^2 = (\overline{ac} + c) \cdot 10^n \cdot a + c^2;$$

čia c – tai paskutiniai skaičiaus skaitmenys, a – skaitmenys į kairę nuo jų.

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime 48^2. Čia $z = 2$, todėl iš 48 atimame 2. Šį skirtumą dauginame iš $48 + 2 = 50$ ir dar pridedame 2^2:

$$48^2 = (48 - 2) \cdot (48 + 2) + 2^2 = 46 \cdot 50 + 4 = 2304.$$

2. Apskaičiuokime 205^2. Atliekame analogiškus veiksmus, kai $z = 5$:

$$205^2 = (205 - 5)(205 + 5) + 5^2 = 200 \cdot 210 + 25 = 42025.$$

3. Apskaičiuokime 3004^2. Čia $z = 4$, vadinasi,

$$3004^2 = 3000 \cdot 3008 + 4^2 = 9024016.$$

5.2. SVEIKOJO SKAIČIAUS N KĖLIMAS KVADRATU, KAI ŽINOMAS PRIEŠ JĮ ESANČIO ARBA KITO, EINANČIO PO JO, SKAIČIAUS KVADRATAS

22 taisyklė. Žinodami prieš sveikąjį skaičių N esančio arba kito, einančio po jo, skaičiaus kvadratą, N galime pakelti kvadratu, pagal formules išvestas iš dvinario kvadrato formulės ($(N+1)^2 = N^2 + 2N + 1$)

$$(N+1)^2 = N^2 + N + (N+1), \tag{3}$$

$$N^2 = (N+1)^2 - (N+1) - N, \tag{4}$$

$$N^2 = (N+1)^2 - 2(N+1) + 1.$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime 21^2. Žinome prieš tai esančio skaičiaus 20 kvadratą. Todėl taikome (3) formulę:

$$21^2 = 20^2 + 20 + 21 = 441.$$

2. Apskaičiuokime 46^2. Pastebėkime, kad galime lengvai suskaičiuoti 45 kvadratą (remdamiesi 5.5 skyreliu). Toliau analogiškai taikome (3) formulę:

$$46^2 = 45^2 + 45 + 46 = \overline{(4\cdot 5)25} + 45 + 46 = 2025 + 45 + 46 = 2070 + 46 = 2116.$$

3. Apskaičiuokime 39^2. Žinome kito skaičiaus 40 kvadratą, todėl taikome (4) formulę:

$$39^2 = 40^2 - 40 - 39 = 1600 - 40 - 39 = 1560 - 39 = 1521.$$

4. Apskaičiuokime 44^2. Žinome kito skaičiaus 45 kvadratą, todėl taikome (4) formulę:

$$44^2 = 45^2 - 45 - 44 = 2025 - 45 - 44 = 1980 - 44 = 1936.$$

5.3. SVEIKOJO SKAIČIAUS N KĖLIMAS KVADRATU, KAI ŽINOMI SKAIČIAI $(N+2)^2$ ARBA $(N-2)^2$

23 taisyklė. Norėdami sveikąjį skaičių N pakelti kvadratu, kai žinome skaičių $(N+2)^2$, turime iš šio skaičiaus atimti skaičių N ir $N+2$ dvigubą sumą:

$$N^2 = (N+2)^2 - 2\big(N + (N+2)\big). \tag{5}$$

24 taisyklė. Norėdami sveikąjį skaičių N pakelti kvadratu, kai žinome skaičių $(N-2)^2$, turime prie šio skaičiaus pridėti skaičių N ir $N-2$ dvigubą sumą:

$$N^2 = (N-2)^2 + 2\big(N + (N-2)\big). \tag{6}$$

Įrodymas:

Tarkime, reikia apskaičiuoti N^2, kai žinome skaičių $(N+2)^2$. Tada

$$N^2 = \left(N^2 + 4N + 4\right) - \left(4N + 4\right) = (N+2)^2 - 2\big(N + (N+2)\big).$$

Analogiškai, kai žinome skaičių $(N-2)^2$, turime

$$N^2 = \left(N^2 - 4N + 4\right) + \left(4N - 4\right) = (N-2)^2 + 2\big(N + (N-2)\big).$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime 58^2. Naudojame (5) formulę, kai žinome skaičių $(N+2)^2$:

$$58^2 = \begin{bmatrix} N = 58 \\ N+2 = 60 \end{bmatrix} = 60^2 - \left(58 + 60\right)\cdot 2 = 3600 - 118\cdot 2 = 3600 - 236 = 3364.$$

2. Apskaičiuokime 42^2. Naudojame (6) formulę, kai žinome skaičių $(N-2)^2$:

$$42^2 = \begin{bmatrix} N = 42 \\ N-2 = 40 \end{bmatrix} = 40^2 + \left(42 + 40\right)\cdot 2 = 1600 + 82\cdot 2 = 1600 + 164 = 1764.$$

5.4. SKAIČIAUS $5\cdot 10^n + z$ KĖLIMAS KVADRATU

Nagrinėsime atskirą atvejį, kai $n = 1$.

25 taisyklė. Norėdami skaičių $50 + z$ pakelti kvadratu turime prie 25 pridėti z ir prie rezultato prirašyti z^2 [1]:

$$\left(50 + z\right)^2 = \left(25 + z\right)\cdot 100 + z^2 = \overline{\left(25 + z\right)\left(z^2\right)}.$$

Įrodymas.

Nagrinėkime du skaičius $N > 50$ ir $M < 50$. Tuomet

$$N^2 = \left(50 + n\right)z^2 = 2500 + 100\cdot z + z^2 = \left(25 + z\right)\cdot 100 + z^2$$

arba

$$M^2 = \left(50 - z\right)^2 = 2500 - 100\cdot z + z^2 = \left(25 - z\right)\cdot 100 + z^2.$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime 53^2. Čia $z = 3$ ir $N > 50$. Vadinasi,

$$53^2 = (50+3)^2 = (25+3)\cdot 100 + 3^2 = 2800 + 9 = 2809.$$

2. Apskaičiuokime 46^2. Čia $z = 4$ ir $M < 50$. Vadinasi,

$$46^2 = (50-4)^2 = (25-4)\cdot 100 + 4^2 = 2100 + 16 = 2116.$$

3. Apskaičiuokime 62^2. Čia $z = 12$ ir $N > 50$. Vadinasi,

$$62^2 = (50+12)^2 = (25+12)\cdot 100 + 12^2 = 3700 + 144 = 3844.$$

26 taisyklė. Norėdami skaičių $5\cdot 10^n + z$ pakelti kvadratu turime 25 padauginti iš 10^{n-1} pridėti z, rezultatą dauginti iš 10^{n+1} ir pridėti z^2 [1]:

$$(5\cdot 10^n + z)^2 = (25\cdot 10^{n-1} + z)\cdot 10^{n+1} + z^2.$$

Įrodymas.

$$(5\cdot 10^n + z)^2 = 25\cdot 10^{2n} + 10\cdot 10^n \cdot z + z^2 = (25\cdot 10^{n-1} + z)\cdot 10^{n+1} + z^2.$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime 507^2. Kadangi $507^2 = (5\cdot 10^2 + 7)^2$, čia $n = 2$, tai

$$507^2 = (5\cdot 10^2 + 7)^2 = (25\cdot 10^{2-1} + 7)\cdot 10^{2+1} + 7^2 = 257000 + 49 = 257049.$$

2. Apskaičiuokime 4991^2. Kadangi $4991^2 = (5\cdot 10^3 - 9)^2$, čia $n = 3$, tai

$$4991^2 = (5\cdot 10^3 - 9)^2 = (2500 - 9)\cdot 10^4 + 9^2 = 24910000 + 81 = 24910081.$$

5.5. SKAIČIAUS, KURIO PASKUTINIS SKAITMUO 5, KĖLIMAS KVADRATU

Aptarkime dviženklio skaičiaus, kurio paskutinis skaitmuo 5, kėlimą kvadratu.

27 taisyklė. Norėdami dviženklį skaičių $\overline{a5}$ pakelti kvadratu, turime prie jo pirmojo skaitmens pridėti vienetą a+1, šią sumą padauginti iš to skaitmens $a\cdot(a+1)$, tuomet gautojo skaičiaus gale prirašyti 25 [1].

Įrodymas.

$$\overline{a5}^2 = (10a+5)^2 = 100a^2 + 2\cdot 10\cdot 5\cdot a + 25 = 100\cdot a\cdot(a+1) + 25 = \overline{(a\cdot(a+1))25}.$$

Pastaba. Šią taisyklę galime taikyti ne tik dviženkliams skaičiams.

Pavyzdys.

1. Apskaičiuokime 75^2. Tiesiog taikome 27 taisyklę:

$$75^2 = \overline{(7\cdot(7+1))25} = \overline{(7\cdot 8)25} = 5625.$$

2. Apskaičiuokime 345^2. Taikome 27 taisyklę, imdami $a = 34$:

$$345^2 = \overline{(34\cdot(34+1))25} = \overline{(34\cdot 35)25} = 119025.$$

Triženklį skaičių, kurio paskutinis skaitmuo 5, kelti kvadratu galime pagal taisyklę, apibrėžtą šio skyrelio pradžioje [5]:

$$\overline{a5}^2 = \overline{(a\cdot(a+1))25}.$$

Ši taisyklė reikalauja dauginti dviženklius skaičius, kas gali būti sunku. Yra dar viena taisyklė, pagal kurią galime kelti kvadratu triženklį skaičių $\overline{ab5}^2$.

28 taisyklė. Triženklį skaičių $\overline{ab5}^2$, galime kelti kvadratu tokiu būdu:

$$\overline{ab5}^2 = \left(10a + \overline{b5}:5\right)\cdot a\cdot 1000 + \overline{b5}^2. \tag{7}$$

Įrodymas.

$$\overline{ab5}^2 = (a\cdot 100 + b\cdot 10 + 5)^2 = (a\cdot 100 + \overline{b5})^2 = a^2\cdot 10000 + 200\cdot a\cdot \overline{b5} + \overline{b5}^2 =$$
$$= \left(10a + \overline{b5}:5\right)\cdot a\cdot 1000 + \overline{b5}^2.$$

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime 425^2. Čia $a = 4,\ b = 2$, taikome (7) formulę:

$$425^2 = \begin{bmatrix} a = 4,\ b = 2 \\ a\cdot 10 + \overline{b5}:5 = 40 + 25:5 = 45 \\ 45\cdot 4 = 180 \end{bmatrix} = 180\cdot 1000 + 25^2 = 180625.$$

2. Apskaičiuokime 145^2. Čia $a = 1,\ b = 4$, vadinasi:

$$145^2 = \begin{bmatrix} a = 1,\ b = 4 \\ a\cdot 10 + \overline{b5}:5 = 10 + 45:5 = 19 \\ 19\cdot 1 = 19 \end{bmatrix} = 19\cdot 1000 + 45^2 = 19000 + 2025 = 21025.$$

5.6. SKAIČIŲ, KURIŲ PASKUTINIEJI SKAITMENYS YRA 25, KĖLIMAS KVADRATU

29 taisyklė. Norėdami skaičių, kurio paskutinieji skaitmenys yra 25, pakelti kvadratu turime prie skaičiaus, gauto iš pradinio skaičiaus nubraukus paskutinius du skaitmenis t. y. 25, kvadrato pridėti šio skaičiaus pusę, tuomet gautąjį skaičių padauginti iš 10 ir gale prirašyti 625:

$$\overline{a25}^2 = \left(a^2 + a:2\right) \cdot 10 \cdot 1000 + 625. \tag{8}$$

Įrodymas:

$$\overline{a25}^2 = (a \cdot 100 + 25)^2 = 10000a^2 + 5000a + 625 = \left(10a^2 + 5a\right) \cdot 1000 + 625 =$$
$$= \left(a^2 + a:2\right) \cdot 10 \cdot 1000 + 625.$$

Vadinasi, $\overline{a25}^2 = \overline{A625}$; čia $A = \left(a^2 + a:2\right) \cdot 10$.

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime 425^2. Taikome (8) formulę:

$$425^2 = \begin{bmatrix} a = 4 \\ a^2 + a:2 = 18 \\ 18 \cdot 10 = 180 \end{bmatrix} = 180625.$$

2. Apskaičiuokime 1325^2. Taikome (8) formulę:

$$1325^2 = \begin{bmatrix} a = 13 \\ 13^2 + 13:2 = 169 + 6{,}5 = 175{,}5 \\ 175{,}5 \cdot 10 = 1755 \end{bmatrix} = 1755625.$$

5.7. SKAIČIŲ, KURIŲ PASKUTINIEJI SKAITMENYS YRA 75, KĖLIMAS KVADRATU

30 taisyklė. Norėdami skaičių, kurio paskutinieji skaitmenys yra 75, pakelti kvadratu turime skaičių, gautą iš pradinio skaičiaus nubraukus paskutinius du skaitmenis ir prirašius 5, padauginti iš vienetu didesnio skaičiaus ir gale prirašyti 625:

$$\overline{a75}^2 = \overline{a5} \cdot (a + 1) \cdot 1000 + 625. \tag{9}$$

Įrodymas:

$$\overline{a75}^2 = (a\cdot 100+75)^2 = 10000a^2+15000a+5625 = 10000a^2+15000a+5000+625 =$$
$$=\left(10a^2+15a+5\right)\cdot 1000+625 = \left(10a^2+5a+10a+5\right)\cdot 1000+625 =$$
$$=\left(a(10a+5)+10a+5\right)\cdot 1000+625 = (a+1)\cdot(10a+5)\cdot 1000+625.$$

Vadinasi, $\overline{a75}^2 = \overline{A625}$, čia $A = (10a+5)(a+1) = \overline{a5}\cdot(a+1)$.

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuokime 175^2. Taikome (9) formulę:

$$175^2 = \begin{bmatrix} a=1 \\ \overline{a5}\cdot(a+1)=15\cdot 2=30 \end{bmatrix} = 30625.$$

2. Apskaičiuokime 375^2. Taikome (9) formulę:

$$375^2 = \begin{bmatrix} a=3 \\ \overline{a5}\cdot(a+1)=35\cdot 4=140 \end{bmatrix} = 140625.$$

3. Apskaičiuokime 1275^2. Taikome (9) formulę:

$$1275^2 = \begin{bmatrix} a=12 \\ \overline{a5}\cdot(a+1)=125\cdot 13=1625 \end{bmatrix} = 1625625.$$

5.8. SKAIČIŲ, KURIŲ VIENETŲ SKAIČIUS YRA DIDESNIS NEI 5, KĖLIMAS KVADRATU

Dviženklių skaičių $\overline{ac}$ kėlimas kvadratu, kai vienetų skaičius yra didesnis nei 5 (c > 5) skiriamas į dvi taisykles.

31 taisyklė (atvejai, kai c = 7, 8, 9). Norėdami dviženklį skaičių $\overline{ac}$ pakelti kvadratu, kai c = 7, 8, 9, turime taikyti tokią formulę:

$$(ac)^2 = a\cdot(a+1)\cdot 100+(a+1)\cdot L\cdot 10+(c^2-L\cdot 10)\,.$$

32 taisyklė (atvejis, kai c = 6). Norėdami dviženklį skaičių $\overline{ac}$ pakelti kvadratu, kai c = 6, turime taikyti tokią formulę:

$$(ac)^2 = a\cdot(a+1)\cdot 100+((a+1)\cdot L+1)\cdot 10+(c^2-(L+1)\cdot 10);$$

čia $L = 2\cdot c-10$, t. y. dvigubas vienetų skaičius atėmus 10.

Šios formulės ilgos, tačiau detalus šio būdo aprašymas užima daugiau laiko, nei jo naudojimas.

Taigi, dviženklio skaičiaus (pavyzdžiui 78^2 ir 46^2), kurio vienetų skaičius yra didesnis už 5, kėlimą kvadratu atliekame tokiais nuosekliais žingsniais.

1) Pakeliame kvadratu skaičiaus vienetus, ir gauto rezultato vienetus parašome, kaip atsakymo paskutinį skaitmenį:

$$8^2 = 64; \qquad 6^2 = 36;$$

taigi,

$$78^2 = ...4; \qquad 46^2 = ...6.$$

2) Dešimtis padidiname vienetu ir padauginame skirtumo, gauto iš dvigubo vienetų skaičiaus atėmus 10 (jei c = 6, tada pridedame dar vieną vienetą) ir rezultatą dauginame iš 10 ($(a+1)\cdot(2\cdot c-10)\cdot 10$):

$$(7+1)\cdot(2\cdot 8-10)\cdot 10 = 480; \qquad ((4+1)\cdot(2\cdot 6-10)+1)\cdot 10 = 110;$$

taigi,

$$78^2 = ...{}^4 84; \qquad 46^2 = ...{}^1 16.$$

3) Skaičiaus dešimtis dauginame iš jų pačių padidintų vienetu ir dauginame iš 100 ($a\cdot(a+1)\cdot 100$).

$$7\cdot(7+1)\cdot 100 = 5600; \qquad 4\cdot(4+5)\cdot 100 = 2000;$$

taigi atsakymai yra:

$$78^2 = 6084; \qquad 46^2 = 2116.$$

IŠVADOS

1. Mintino daugybos skaičiavimo taisyklės sugrupuotos į: daugybą atsižvelgiant į skaičių dalumo savybes, dviženklių skaičių daugybą, daugybą iš skaičiaus artimo 10^n ir sveikųjų skaičių kėlimą kvadratu.
2. Mintino skaičiavimo taisyklės yra matematiškai pagrįstos remiantis skaičių užrašymo taisyklėmis, elementariais skaičiavimais bei loginiais samprotavimais.
3. Kiekvienai taisyklei iliustruoti yra sukonstruoti pavyzdžiai.

LITERATŪRA

1. HANDLEY, B. *Speed Mathematics: Secrets Skills for Quick Calculation.* Canada: John Wiley & Sons, Inc., 2003. 256 p. ISBN 0-471-46731-6. [žiūrėta 2015-06-02]. Prieiga per internetą: <http://books.google.lt/books/about/Speed_Mathematics.html?id=44W0LXR9Yt8C&redir_esc=y>.
2. HANDLEY, B. *Speed Math for Kids – Helping Children Achieve Their Full Potential*. Melburne: Whrightbooks, 2005. ISBN 0 7314 0227 8. [žiūrėta 2015-06-02]. Prieiga per internetą: <https://books.google.lt/books?id=h3Fd2_oc3N4C&printsec=frontcover&dq=inauthor:%22Bill+Handley%22&hl=lt&sa=X&ei=ZAs5VZbhDsHmyQPG1IDwCw&ved=0CB8Q6AEwAA#v=onepage&q&f=false>.
3. KISELIOVAS, A.; VIRUIŠIS, V. *Skaičiavimo sistemos. Sveikieji skaičiai*. Šiauliai: leidykla „Repriza“, 1993. 34 p.
4. SURVILA, P. *Natūralieji ir sveikieji skaičiai*. Vilnius: Leidykla „Pašekšta“, 1998. 124 p. ISBN 9986-502-11-X.
5. TRACHTENBERG, J. *The Trachtenberg speed system of basic mathematics / translated and adapted by Ann Cutler and Rudolph McShane.* Garden City (N. Y.): Doubleday & Company, Inc., 1960. 270 p.

MATHEMATICAL BASIS OF QUICK CALCULATION

SUMMARY

In Bachelor Thesis we give the mathematical foundations to the mental calculation which helps quickly and easily calculate multiplications and squares of certain numbers.

We investigate the mental calculus rules using method of multipliers substitution and complement method. Some of rules on the properties of divisibility of numbers are based. Special attention to the multiplication of two – digit numbers is paid. We investigate the multiplication by number which is close to 10^n, also. As a consequence of early mentioned we give the rules of mental calculus of quadrate power of integer numbers.