

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS, MATEMATIKOS IR E. STUDIJŲ INSTITUTAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Dalia GRIMAILAITĖ
Matematikos studijų programos studentė

**KOLATSO UŽDAVINYS ĮVAIRIOSE
SKAIČIAVIMO SISTEMOSE**
Bakalauro darbas

Darbo vadovė
prof. dr. R. Kačinskaitė

Šiauliai, 2015

Turinys

ĮVADAS	3
1 KOLATSO UŽDAVINYS	5
1.1 Pradinis uždavinys	5
1.2 Modifikuotas uždavinys	7
2 SKAIČIAVIMO SISTEMOS	10
2.1 Pozicinės skaičiavimo sistemos	10
2.2 Sistemos pagrindo keitimas	10
3 PROGRAMINIS KODAS $3n+1$ UŽDAVINIUI	12
3.1 Tiesioginis Kolatso uždavinys	12
3.2 Modifikuotas Kolatso uždavinys	13
4 $3n+1$ UŽDAVINYS ĮVAIRIOSE SKAIČIAVIMO SISTEMOSE	16
4.1 $3n+1$ uždavinys dešimtainėje skaičiavimo sistemoje	16
4.2 $3n+1$ uždavinys tryliktainėje skaičiavimo sistemoje	23
4.3 $3n+1$ uždavinys vienuoliktainėje skaičiavimo sistemoje	25
4.4 $3n+1$ uždavinys devynetaiše skaičiavimo sistemoje	26
4.5 $3n+1$ uždavinys aštuonetaiše skaičiavimo sistemoje	27
4.6 $3n+1$ uždavinys penketainėje skaičiavimo sistemoje	29
4.7 $3n+1$ uždavinys dvejetainėje skaičiavimo sistemoje	30
5 KOLATSO UŽDAVINIO ANALOGAS DVEJETAINĖJE SKAIČIAVIMO SISTEMOJE	34
IŠVADOS	41
LITERATŪRA	42
SANTRAUKA	44
ŽYMĖJIMAI IR KAI KURIOS SĄVOKOS	46
PRIEDAI	48

ĮVADAS

1937 m. vokiečių matematikas Lotaras Kolatsas (Lothar Collatz) iškėlė problemą, kuri yra žinoma kaip $3n + 1$ uždavinys arba *Kolatso uždavinys* [6]. Nors šis uždavinys ilgą laiką nebuvo publikuojamas viešai, bet gana plačiai pasklido po visą pasaulį. Todėl kituose šaltiniuose ji minima kaip *Sirakūzų*, *Ulamo* arba *Kakutanio problema* [16].

Suformuluosime Kolatso uždavinį. Sakykime, kad n yra sveikasis skaičius, $n \geq 1$ bei kartojami šie aritmetiniai veiksmai:

- jei skaičius n yra lyginis, tai $\frac{n}{2}$;
- jei skaičius n yra nelyginis, tai $3 \cdot n + 1$.

Tada nesvarbu, nuo kokio teigiamo sveikąjo skaičiaus pradėsime taikyti šiuos aritmetinius veiksmus, visada bus pasiektas skaičius 1, t.y. įteruoja į skaičių 1 [10].

Kad būtų aiškiau pateiksime pavyzdį. Pasirenkame skaičių 6. Kadangi 6 – lyginis, dalijame pusiau ir gauname 3. Skaičius 3 – nelyginis, dauginame iš 3, pridedame 1 ir gauname skaičių 10. Šis skaičius yra lyginis, todėl dalijame iš 2. Kitas gautasis skaičius yra 5, kuris yra nelyginis. Šį skaičių dauginame iš 3 ir pridedame 1, gauta iteracija yra lygi 16. Skaičius 16 yra lyginis, dalijame pusiau ir gauname 8. Kadangi 8 – lyginis, dalijame iš 2 ir gauname 4. Skaičius 4 taip pat yra lyginis, tai dalijame pusiau ir gauname 2. Ši gautoji iteracija yra lyginė, tad dalijame pusiau ir gauname skaičių 1.

$$6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

1985 m. Brajenas Tveitas (Bryan Thwaites) paskelbė autorystės teises į šį uždavinį [17] teigdamas, kad jam ši idėja kilo karšta 1952 m. vasaros dieną. Kadangi paskutinėmis mokslo metų dienomis mokiniai nuobodžiavo, norėdamas juos sudominti, sugalvojo šią problemą, prašydamas pateikti nors vieną skaičių neiteruojantį į 1. Tokiu pareiškimu sukėlė abejonių dėl problemos prigimties. Straipsnyje, kuris pasirodė *London Times* žurnale, B. Tveitas pasiūlė 1000 svarų premiją už šio uždavinio išsprendimą [14]. Bet, remiantis Jonu Hortonu Konvėjumi (John Horton Conway) [4], jau 1950 m. Kembridžo universitete buvo nagrinėjama ši problema. Todėl, $3n+1$ problemos pradininku yra laikomas L. Kolatsas.

Tikėtina, kad Kolatso uždavinys teisingas visiems skaičiams n , tačiau niekas nėra iki galo to įrodęs. Šiuo metu yra patikrintos daugiau kaip $20 \times 2^{28} \approx 5.7646 \times 10^{18}$ skaičių reikšmės ir visi jie galiausiai pasiekia 1 [12]. Polas Erdiošas (Paul Erdős) teigė, kad matematika dar nėra pasirengusi pilnam šio uždavinio išsprendimui [10]. Bet tam, kuriam pavyks jį įveikti, jis pasiūlė 500 dolerių premiją.

Iki šiol yra žinomi tik daliniai rezultatai. Ryhas Terras analizavo iteracijų sustojimo laiką bei modifikavo Kolatso uždavinį taip, kad sumažėjo iteracijų kiekis [15]. Deividas Apligeitas (David Applegate) ir Džefris Klarkas Lagarias (Jeffrey Clark Lagarias) nagrinėjo sveikųjų skaičių, susijusių su $3n + 1$ uždaviniu, aibės asimptotinį tankį [1]. Galima paminėti ir tokius matematikus, kurie sprendė Kolatso uždavinį, kaip Matijų Kalevį Sinisalą (Matti Kalevi Sinisalo) [13], J. C. Everetą (J. C. Everett) [7], Marką Čamberlandą (Marc Chamberland) [3] ir kitus.

Bakalauro darbo tikslas – Kolatso uždavinio ir jo išsprendžiamumo įvairiose skaičiavimo sistemose analizė.

Uždaviniai:

- 1) Išanalizuoti Kolatso uždavinio įvairias modifikacijas.
- 2) Pakeitus nagrinėjamų skaičių skaičiavimo sistemos pagrindą, pritaikyti Kolatso uždavinį.
- 3) Sukurti programinį kodą Matlab programoje.
- 4) Išanalizuoti gautus rezultatus.
- 5) Sukurti Kolatso uždavinio analogą dvejetainėje sistemoje.
- 6) Sukurti algoritmą leidžiantį nustatyti iteracijas be skaičiavimų dvejetainėje sistemoje.

Darbo struktūra. Bakalauro darbą sudaro įvadas, penki skyriai, išvados, literatūros sąrašas, 17 priedų. Pirmame ir antrame skyriuose išnagrinėta ir susteminta įvairių užsienio bei Lietuvos autorių literatūra. Trečiame skyriuje aptariami sukurti programiniai kodai tiesioginiui ir modifikuotui Kolatso uždaviniui. Ketvirtame ir penktame skyriuose analizuojamas Kolatso uždavinio bei jo modifikacijų išsprendžiamumas įvairiose skaičiavimo sistemose. Uždavinio analizei pasirinkome skaičius, kuriems dešimtainėje sistemoje šios problemos išsprendžiamumas yra patikrintas.

1 KOLATSO UŽDAVINYS

1.1 Pradinis uždavinys

Kolatso uždavinys arba $3n + 1$ problema yra viena iš iki šiol neišspręstų matematinių problemų. Nors sprendžiant šį uždavinį, aritmetinius veiksmus gali atlikti net pradinės klasės mokinys, įrodyti šio uždavinio teisingumą yra sudėtinga.

Apibrėžkime *Kolatso funkciją*

$$C(m) = \begin{cases} 3m + 1, & m \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{m}{2}, & m \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Tada kiekvienam $m \in \mathbb{Z}^+$ egzistuoja $k \in \mathbb{Z}^+$ toks, kad $C^{(k)}(m) = 1$; čia $C^{(k)}(m)$ – apibrėžtos funkcijos iteracija. Tai reiškia, kad bet koks teigiamas sveikasis skaičius galiausiai pasiekia 1.

1.1 pavyzdys. Pasirinkime $m = 8$. Tada

$$C^{(1)}(8) = 4, \quad C^{(2)}(8) = 2, \quad C^{(3)}(8) = 1$$

ir

$$8 \xrightarrow{C^{(1)}} 4 \xrightarrow{C^{(2)}} 2 \xrightarrow{C^{(3)}} 1.$$

Pirmąją sekos iteraciją galime rašyti ir tokiu pavidalu $C(8) = 4$. Be to, pasiekus skaičių 1, iteracinę seką galima tęsti.

1.2 pavyzdys. Imkime $m = 1$. Tada gauname tokią seką

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

Akivaizdu, kad atsiranda ciklas, t.y. seka kartojasi. Šis ciklas $\{1, 2, 4\}$ vadinamas *trivialiu ciklu* (nors bus žinoma apie jo egzistavimą, tolimesniuose nagrinėjimuose jo neminėsime) [9].

1.1 apibrėžimas. Ciklas vadinamas netrivialiu, jeigu $C^{(k)}(m) \neq 1$ visiems $k \geq 1$. Priešingu atveju ciklas yra vadinamas trivialus.

1.2 apibrėžimas. Skaičiaus m iteracinė seka $(m, C(m), C^{(2)}(m), C^{(3)}(m), \dots)$ yra vadinama skaičiaus m trajektorija. Pagal savo elgesį trajektorija gali būti [10]:

- (i) konverguojanti, t.y. $C^{(k)}(m) = 1, \quad k \geq 1$;

- (ii) diverguojanti, kai $\lim_{k \rightarrow \infty} C^{(k)}(m) = \infty$;
- (iii) netrivialaus ciklo trajektorija, t.y. seka $C^{(k)}(m)$ galiausiai tampa periodine ir $C^{(k)}(m) \neq 1$ visiems $k \geq 1$.

Pateiksime dar vieną pavyzdį Kolatso uždaviniui.

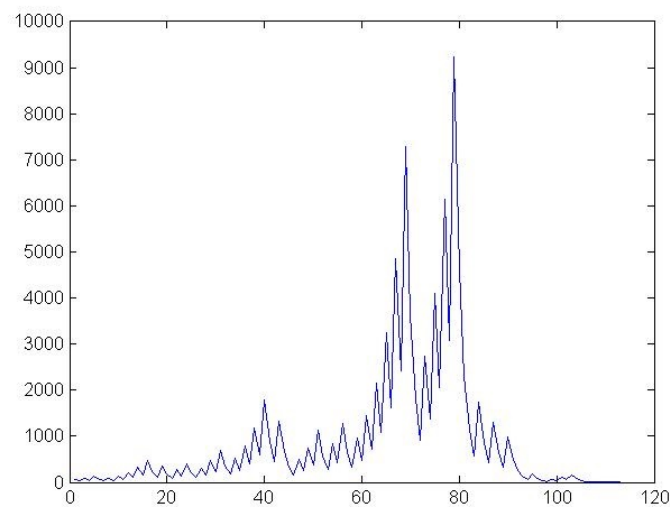
1.3 pavyzdys. Pasirikime skaičių $n = 11$. Gauname iteracinę seką

$$11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \\ \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Tokia seka dar yra vadinama *heilstono seka* (angl. *hailstone* – *kruša*), nes sekos reikšmės, kaip matyti, kyla į viršų ir leidžiasi žemyn (kaip ir ledo gabalėliai debesyse krušos metu prieš iškrentant į žemę) [11]. Tačiau tokia seka taip pat susiveda į begalinį ciklą

$$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

Kad būtų aiškiau, nagrinėkime skaičių 54. Šis skaičius iteruoja į 1 po 112 aritmetinių veiksmų, o pasiekta didžiausia sekos iteracija yra 9232. Gautoji seka taip pat vadinama heilstono seka. 1 paveiksle pavaizduotas gautos iteracinės sekos elgesys. Matome, kad gautos iteracijos yra išsidėsčiusios chaotiškai, nėra tolygaus didėjimo ar mažėjimo.



1 pav.: skaičiaus 54 heilstono seka.

1985 m. J. K. Lagarias gavo [10], kad neegzistuoja netrivialus ciklas reikšmėms mažesnėms už 270000. Paminėsimė, kad jis $3x + 1$ operaciją pakeitė $\frac{3x+1}{2}$ operacija, taip sumažindamas iteracijų kiekį.

1.2 Modifikuotas uždavinys

Amerikiečių matematikas R. Terras patobulino Kolatso uždavinį [18]: beveik visiems t_0 egzistuoja $n \in \mathbb{N}$, toks, kad $t_n < t_0$, o t_n yra apibrėžiamas tokiu būdu:

$$t_n = \begin{cases} \frac{1}{2}t_{n-1}, & \text{kai } t_{n-1} \text{ lyginis;} \\ \frac{1}{2}(3t_{n-1} + 1), & \text{kai } t_{n-1} \text{ nelyginis.} \end{cases} \quad (2)$$

Kaip matome, aritmetiniai veiksmai nelabai kuo skiriasi nuo originalaus $3n + 1$ uždavinio. Tačiau, kai nagrinėjamas skaičius yra nelyginis, atsiranda dalybos veiksmas. Ši modifikacija leidžia sumažinti iteracijų kiekį.

1.4 pavyzdys. Imkime skaičių $n = 11$. Gauname iteracinę seką

$$11 \rightarrow 17 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Dažniausiai matematinėje literatūroje sutinkamas toks Kolatso uždavinio užrašymas [10, 13]. Sakykime, kad

$$T(n) = \begin{cases} \frac{3n+1}{2}, & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases} \quad (3)$$

Tada kiekvienam $n \in \mathbb{Z}^+$ egzistuoja $k \in \mathbb{Z}^+$, toks, kad $T^{(k)}(n) = 1$; čia $T^{(k)}(n)$ – apibrėžtos funkcijos iteracija. Tokį uždavinį vėliau vadinsime modifikuotu arba patobulintu.

1.5 pavyzdys. Pasirinkime skaičių 3. Seką sudarome dviem būdais:

I būdas – skaičius analizuojamas originaliame $3n + 1$ uždavinyje;

II būdas – skaičius analizuojamas modifikuotoje versijoje.

I būdas.

1) $3 \cdot 3 + 1 = 10$	2) $\frac{10}{2} = 5$	3) $5 \cdot 3 + 1 = 16$	4) $\frac{16}{2} = 8$
5) $\frac{8}{2} = 4$	6) $\frac{4}{2} = 2$	7) $\frac{2}{2} = 1$	

Gauname iteracinę seką

$$C : 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

II būdas.

1) $\frac{10}{2} = 5$	2) $\frac{16}{2} = 8$	3) $\frac{8}{2} = 4$	4) $\frac{4}{2} = 2$
5) $\frac{2}{2} = 1$			

Tada

$$T : 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Akivaizdu, kad pirmuoju atveju iteracijų kiekis yra lygus 7, o taikant modifikuotą variantą, 1 pasiekiamas kartojant aritmetinius veiksmus 5 kartus. Be to, kaip buvo minėta anksčiau, taikant originalią problemos versiją, egzistuoja trivialus ciklas $\{1, 2, 4\}$.

Modifikuotos versijos atveju yra gaunamas naujas begalinis ciklas

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

M. Čamberlandas teigia [3], kad egzistuoja algoritmas, kuris padeda nustatyti, ar visi skaičiai iki pasirinktojo N iteruoja iki 1. Patikrinus, ar visi teigiami sveikieji skaičiai iki $N - 1$ pasiekia 1, analizuojamos skaičiaus N iteracijos. Jei gautas rezultatas yra mažesnis už pasirinktą skaičių N , galima teigti, kad N patenka į konverguojančią trajektoriją. Dėl šios priežasties apibrėžiama *skaičiaus N sustojimo laiko* sąvoka.

1.3 apibrėžimas. Sustojimo laikas – tai atliktų aritmetinių veiksmų skaičius, kai pasiekta iteracija yra mažesnė už pasirinktą skaičių n , t.y.

$$\sigma(n) = \inf\{k : T^{(k)}(n) < n\}.$$

1.4 apibrėžimas. Visiško sustojimo laiku vadiname atliktų veiksmų skaičių, kai n iteruoja iki 1, t.y.

$$\sigma_{\infty}(n) = \inf\{k : T^{(k)}(n) = 1\}.$$

1.5 apibrėžimas. Iteracijos aukštis – skaičiaus n didžiausia pasiekta iteracija, t.y.

$$s(n) = \sup\{T^{(k)}(n) : k \in \mathbb{Z}^+\}.$$

M. Čamberlandas gavo [3] rezultatus, susijusius su iteracijos aukščio ir visiško sustojimo laiku.

1.1 teorema. *Jei skaičiaus n trajektorija yra diverguojanti, tai $\sigma_\infty(n) = s(n) = \infty$.*

1.2 teorema. *Sveikųjų skaičių aibė $S_k = \{n : n \text{ sustojimo laikas} \leq k\}$ turi ribinį asimptotinį tankį $F(k)$, t. y.*

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \#\{n : n \leq x \text{ ir } \sigma(n) \leq k\}. \quad (4)$$

Šios teoremos įrodymą pateikė R. Terras [15].

Kitokį šio rezultato formulavimą pateikė J. K. Everetas, kuris pateikė trumpesnį šio teiginio įrodymą [7].

1.3 teiginys. *Kai $k \rightarrow \infty$, $F(k) \rightarrow 1$, t. y. beveik visi sveikieji skaičiai turi baigtinį sustojimo laiką. Visiems $k \geq 1$ teisingas sąryšis.*

$$1 - F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N_x(k)}{x} \leq 2^{-\eta k};$$

čia $N_x(k)$ yra n numeris, kai $n \leq x$ ir $\sigma(n) \leq k$ ir $H(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$, $\theta = \frac{1}{\lg 3}$, $\eta = 1 - H(\theta) = 0,05004 \dots$.

2 SKAIČIAVIMO SISTEMOS

Kadangi bakalauro darbo tikslas – Kolatso uždavinio įvairiose sistemose tyrimas, šiame skyriuje trumpai prisiminkime žinomus faktus.

2.1 apibrėžimas. Skaičiavimo sistema – tai skaičių vaizdavimo būdas skaitmenų pagalba.

Skaičiavimo sistemos yra skirtos į pozicines (arabiškoji) ir nepozicines (romėniškoji) sistemas. *Pozicinėse sistemose* kiekvienas skaičiaus skaitmuo turi atitinkamą svorį, kuris priklauso nuo skaitmens vietos (pozicijos) skaičių išreiškiančių skaitmenų (simbolių) sekoje. *Nepozicinėje skaičiavimo sistemoje* kiekvienas simbolis reiškia atitinkamą skaičių nepriklausomai nuo simbolio vietos užrašė [8]. Dažniausiai naudojama pozicinė sistema, nes lengviau atliekami aritmetinius veiksmus.

2.1 Pozicinės skaičiavimo sistemos

Pozicinėje skaičiavimo sistemoje skaitmens vertė priklauso nuo jo pozicijos skaičiuje. Kiekvieną skaičių galime užrašyti taip

$$a_{m-1}P^{m-1} + a_{m-2}P^{m-2} + \dots + a_1P^1 + a_0P^0 + a_{-1}P^{-1} + \dots + a_{-k}P^{-k},$$

čia a_i – i -tasis skaičiaus skaitmuo, m – skaitmens eilė sveikajame skaičiaus dalyje, k – skaitmenų kiekis trupmeninėje skaičiaus dalyje, P – skaičiavimo sistemos pagrindas [8].

2.2 Sistemos pagrindo keitimas

Norint pereiti nuo vienos skaičiavimo sistemos prie kitos naudojami du būdai: daugybos ir dalybos būdas. Trumpai juos aprašysime.

Taikant daugybos būdą, sisteminio skaičiaus užrašas pertvarkomas į tokį reiškinį, kuriame nuosekliai keičiasi daugybos ir sudėties veiksmas.

Daugybos būdas. Norint skaičių $\alpha = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_P$ sistemoje P užrašyti naujos sistemos pagrindu h , vyriausiąjį skaičiaus α koeficientą reikia dauginti iš senojo pagrindo P , prie sandaugos pridėti skaitmenį a_{m-1} ir vėl dauginti iš P . Prie

2.1 pavyzdys. Skaičių $250_{(9)}$ užrašyti aštuonetainėje sistemoje ($h = 8$).

$$\begin{aligned} 2 \cdot 9 = 18 &= 22_{(8)}, \\ 22_{(8)} + 5 &= 27_{(8)}, \\ 27_{(8)} \cdot 9 &= 317_{(8)}, \\ 317_{(8)} + 0 &= 317_{(8)}, \\ 250_{(9)} &= 317_{(8)}. \end{aligned}$$

2.2 pavyzdys. Skaičių $317_{(8)}$ užrašyti devynetaise sistemoje ($h = 9$).

$$h = 9 = 11_{(8)},$$

$$\begin{array}{r} \frac{-317_8}{22} \quad \frac{\lfloor 11_8}{27} \quad \frac{\lfloor 11_8}{2} \\ \frac{-77}{77} \quad \frac{-22}{5} \\ \hline 0 \end{array}$$

Taigi 317₍₈₎ = 250₍₉₎.

3 PROGRAMINIS KODAS $3n + 1$ UŽDAVINIUI

Siekiant palengvinti skaičiavimus sprendžiant Kolatso uždavinį, patogiu naudoti matematines programas. Darbe yra naudojama Matlab programa.

Matlab yra daugiaplatformė MathWorks programinė įranga, skirta įvairių mokslo šakų problemoms spręsti. Programa itin patogi taikyti matematikoje. Ji turi puikias operacijų su matricomis galimybes (būtent toks buvo pirminis šios programos tikslas). Tai – galingas paketas, turintis savitą ir lengvai suprantamą programavimo kalbą.

3.1 Tiesioginis Kolatso uždavinys

Remiantis Kolatso uždavinio sąlygomis:

- jei skaičius n yra lyginis, tai $\frac{n}{2}$,
- jei skaičius n yra nelyginis, tai $3 \cdot n + 1$,

sukūrėme programinį kodą, kuris atlieka tiesioginio Kolatso uždavinio aritmetinius veiksmus. Naudojantis šiuo kodu randamos nagrinėjamo skaičiaus iteracijos ir višiško sustojimo laikas.

```
function [k, seka]=Kolatsas(n)
seka(1)=n; % pradinio skaičiaus vieta sekoje.
i=2;      % kito skaičiaus vieta sekoje.
while seka(i-1)~= 1 % ciklas kartojamas kol seka pasiekia 1.
    if mod(seka(i-1),2) == 0 % nustato ar skaičius lyginis.
        seka(i) = seka(i-1)/2; % skaičius dalijamas iš 2.
    else % atvejis, kai skaičius yra nelyginis.
        seka(i) = 3*seka(i-1) + 1; % skaičius dauginamas iš 3 ir pridedamas 1.
    end % užbaigiamas ciklas while.
    i = i+1; % indekso didinimas.
end % ciklo užbaigimas.
k= (length(seka)-1); % iteracijų kiekis.
```

2 pav.: Kolatso uždavinio programinis kodas.

Šiame kode yra naudojamas ciklas *while*, kurio paskirtis yra atlikti nurodytus veiksmus tol, kol ciklo kintamasis įgis tam tikrą reikšmę, t.y. kol įgis reikšmę 1. Norint išsiaiškinti, ar pasirinktas skaičius yra lyginis, naudojamas sąlyginis sakinyss *if*. Pasitvirtinus prielaidai, atliekamas nurodytas aritmetinis veiksmas, kitu atveju naudojama *else* sąlyginio sakinio dalis. Kintamasis k parodo, kiek kartų buvo atliekami aritmetiniai veiksmai iki tol, kol buvo gautas skaičius 1.

Pateiksime programinio kodo veikimo pavyzdį (3 ir 4 paveikslai).

```
>> [k, seka] = Kolatsas(10)

k =

    6

seka =
|
10    5    16    8    4    2    1
```

3 pav.: Tiesioginis Kolatso uždavinys skaičiui 10.

```
>> [k, seka] = Kolatsas(11)

k =

   14

seka =
11    34    17    52    26    13    40    20    10    5    16    8    4    2    1
```

4 pav.: Tiesioginis Kolatso uždavinys skaičiui 11.

3 paveiksle nagrinėjamas skaičius 10, gaunama k reikšmė yra lygi 6; čia k – iteracijų kiekis. Toliau yra suformuojama skaičių seka, kuri yra gaunama atliekant Kolatso uždavinio aritmetinius veiksmus. Nagrinėjant skaičių 11 (4 paveikslas) matome, jog tam, kad būtų pasiektas 1, veiksmus teko kartoti 14 kartų.

3.2 Modifikuotas Kolatso uždavinys

Jau minėjome, kad R. Terras patobulino $3n + 1$ problemą sumažindamas iteracijų kiekį [10]. Šiems skaičiavimams atlikti taip pat sukūrėme programinį kodą apibrėžiantį modifikuoto Kolatso uždavinio, aprašyto (3) formule, aritmetinius veiksmus.

5 paveiksle matome, kad programiniame kode taip pat atsirado dar vienas dalybos veiksmas.

```
function [k, seka]=Terras(n)

seka(1)=n; % pradinio skaičiaus vieta sekoje.

i=2;      % kito skaičiaus vieta sekoje.

while seka(i-1)~= 1 % ciklas kartojamas kol seka pasiekia 1.

    if mod(seka(i-1),2) == 0 % nustato ar skaičius lyginis.

        seka(i) = seka(i-1)/2; % skaičius dalijamas iš 2.

    else % atvejis, kai skaičius yra nelyginis.

        seka(i) = (3*seka(i-1) + 1)/2; % skaičius dauginamas iš 3, pridedamas 1 ir dalijamas iš 2.

    end % užbaigiamas ciklas while.

    i = i + 1; % indekso didinimas.

end % ciklo užbaigimas.

k = (length (seka) - 1); % iteracijų kiekis.
```

5 pav.: Modifikuoto Kolatso uždavinio programinis kodas.

6 ir 7 paveiksle pavaizduotas tų pačių skaičių, kaip ir pirmuoju atveju (10 ir 11), nagrinėjimas.

```
>> [k, seka] = Terras(10)

k =

     5

seka =

    10     5     8     4     2     1
```

6 pav.: Programinio kodo Terras modifikuotam Kolatso uždavinio rezultatas skaičiui 10.

```

>> [k, seka] = Terras(11)

k =

    10

seka =

    11    17    26    13    20    10     5     8     4     2     1

```

7 pav.: Programinio kodo Terro modifikuotam Kolatso uždavinio rezultatas skaičiui 11.

Šį kartą skaičius 10 iteruoja į 1 po 5 aritmetinių veiksmų, o skaičiaus 11 iteracijų kiekis yra 10. Gaunamas nežymus skirtumas (atitinkamai 1 ir 4) tarp atliekamų aritmetinių veiksmų kiekio lyginant originalios problemos versiją su modifikuota. Tačiau patikrinus skaičių 27 tiesioginiu Kolatso uždavinio programiniu kodu, 1 pasiekiamas po 111 aritmetinių veiksmų, o naudojant modifikuotą kodą – po 70 veiksmų. Šiam skaičiui iteracijų kiekis sumažėjo 41 vienetu (žiūrėti 1, 2 prieduose). Dar kartą įsitikinome, kad Terro atlikta modifikacija ženkliai sumažina iteracijų kiekį.

4 $3n + 1$ UŽDAVINYS ĮVAIRIOSE SKAIČIAVIMO SISTEMOSE

Šiame skyriuje nagrinėsime Kolatso uždavinį įvairiose skaičiavimo sistemose. Jos pasirinktos atsitiktinai. Tai yra dešimtainė, tryliktainė, vienuoliktainė, devy-
netainė, aštuonetainė, penketainė ir dvejetainė sistemos. Analizuojame tik tuos
skaičius, kurie patenka į anksčiau minėtą patikrintą intervalą [12].

4.1 $3n + 1$ uždavinys dešimtainėje skaičiavimo sistemoje

Pirmiausiai Kolatso uždavinį nagrinėsime dešimtainėje skaičiavimo sistemoje,
naudodami originalią uždavinio versiją.

Atsitiktinai pasirenkame skaičius 6, 37, 456, 2464, 16384. Tada gauti skaičia-
vimai yra tokie:

Skaičiui 6:

1) $\frac{6}{2} = 3$	2) $3 \cdot 3 + 1 = 10$	3) $\frac{10}{2} = 5$	4) $5 \cdot 3 + 1 = 16$
5) $\frac{16}{2} = 8$	6) $\frac{8}{2} = 4$	7) $\frac{4}{2} = 2$	8) $\frac{2}{2} = 1$

$$6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Skaičiui 37:

1) $37 \cdot 3 + 1 = 112$	2) $\frac{112}{2} = 56$	3) $\frac{56}{2} = 28$	4) $\frac{28}{2} = 14$
5) $\frac{14}{2} = 7$	6) $7 \cdot 3 + 1 = 22$	7) $\frac{22}{2} = 11$	8) $11 \cdot 3 + 1 = 34$
9) $\frac{34}{2} = 17$	10) $17 \cdot 3 + 1 = 52$	11) $\frac{52}{2} = 26$	12) $\frac{26}{2} = 13$
13) $13 \cdot 3 + 1 = 40$	14) $\frac{40}{2} = 20$	15) $\frac{20}{2} = 10$	16) $\frac{10}{2} = 5$
17) $5 \cdot 3 + 1 = 16$	18) $\frac{16}{2} = 8$	19) $\frac{8}{2} = 4$	20) $\frac{4}{2} = 2$
21) $\frac{2}{2} = 1$			

$$\begin{aligned}
 37 &\rightarrow 112 \rightarrow 56 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \\
 &\rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.
 \end{aligned}$$

Skaičiai 456:

1) $\frac{456}{2} = 228$	2) $\frac{228}{2} = 114$	3) $\frac{114}{2} = 57$
4) $57 \cdot 3 + 1 = 172$	5) $\frac{172}{2} = 86$	6) $\frac{86}{2} = 43$
7) $43 \cdot 3 + 1 = 130$	8) $\frac{130}{2} = 65$	9) $65 \cdot 3 + 1 = 196$
10) $\frac{196}{2} = 98$	11) $\frac{98}{2} = 49$	12) $49 \cdot 3 + 1 = 148$
13) $\frac{148}{2} = 74$	14) $\frac{74}{2} = 37$	15) $37 \cdot 3 + 1 = 112$
16) $\frac{112}{2} = 56$	17) $\frac{56}{2} = 28$	18) $\frac{28}{2} = 14$
19) $\frac{14}{2} = 7$	20) $7 \cdot 3 + 1 = 22$	21) $\frac{22}{2} = 11$
22) $11 \cdot 3 + 1 = 34$	23) $\frac{34}{2} = 17$	24) $17 \cdot 3 + 1 = 52$
25) $\frac{52}{2} = 26$	26) $\frac{26}{2} = 13$	27) $13 \cdot 3 + 1 = 40$
28) $\frac{40}{2} = 20$	29) $\frac{20}{2} = 10$	30) $\frac{10}{2} = 5$
31) $5 \cdot 3 + 1 = 16$	32) $\frac{16}{2} = 8$	33) $\frac{8}{2} = 4$
34) $\frac{4}{2} = 2$	35) $\frac{2}{2} = 1$	

456 $\rightarrow$ 228 $\rightarrow$ 114 $\rightarrow$ 57 $\rightarrow$ 172 $\rightarrow$ 86 $\rightarrow$ 43 $\rightarrow$ 130 $\rightarrow$ 65 $\rightarrow$ 196 $\rightarrow$ 98 $\rightarrow$ 49
 $\rightarrow$ 148 $\rightarrow$ 74 $\rightarrow$ 37 $\rightarrow$ 112 $\rightarrow$ 56 $\rightarrow$ 28 $\rightarrow$ 14 $\rightarrow$ 7 $\rightarrow$ 22 $\rightarrow$ 11 $\rightarrow$ 34 $\rightarrow$ 17
 $\rightarrow$ 52 $\rightarrow$ 26 $\rightarrow$ 13 $\rightarrow$ 40 $\rightarrow$ 20 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 16 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 1.

Skaičiai 2464:

1) $\frac{2464}{2} = 1232$	2) $\frac{1232}{2} = 616$	3) $\frac{616}{2} = 308$
4) $\frac{308}{2} = 154$	5) $\frac{154}{2} = 77$	6) $77 \cdot 3 + 1 = 232$
7) $\frac{232}{2} = 116$	8) $\frac{116}{2} = 58$	9) $\frac{58}{2} = 29$
10) $29 \cdot 3 + 1 = 88$	11) $\frac{88}{2} = 44$	12) $\frac{44}{2} = 22$
13) $\frac{22}{2} = 11$	14) $11 \cdot 3 + 1 = 34$	15) $\frac{34}{2} = 17$
16) $17 \cdot 3 + 1 = 52$	17) $\frac{52}{2} = 26$	18) $\frac{26}{2} = 13$
19) $13 \cdot 3 + 1 = 40$	20) $\frac{40}{2} = 20$	21) $\frac{20}{2} = 10$
22) $\frac{10}{2} = 5$	23) $5 \cdot 3 + 1 = 16$	24) $\frac{16}{2} = 8$
25) $\frac{8}{2} = 4$	26) $\frac{4}{2} = 2$	27) $\frac{2}{2} = 1$

2464 $\rightarrow$ 1232 $\rightarrow$ 616 $\rightarrow$ 308 $\rightarrow$ 154 $\rightarrow$ 77 $\rightarrow$ 232 $\rightarrow$ 116 $\rightarrow$ 58 $\rightarrow$ 29 $\rightarrow$ 88
 $\rightarrow$ 44 $\rightarrow$ 22 $\rightarrow$ 11 $\rightarrow$ 34 $\rightarrow$ 17 $\rightarrow$ 52 $\rightarrow$ 26 $\rightarrow$ 13 $\rightarrow$ 40 $\rightarrow$ 20 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 5
 $\rightarrow$ 16 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 1.

Skaičiui 16384:

1) $\frac{16384}{2} = 8192$	2) $\frac{8192}{2} = 4096$	3) $\frac{4096}{2} = 2048$	4) $\frac{2048}{2} = 1024$
5) $\frac{1024}{2} = 512$	6) $\frac{512}{2} = 256$	7) $\frac{256}{2} = 128$	8) $\frac{128}{2} = 64$
9) $\frac{64}{2} = 32$	10) $\frac{32}{2} = 16$	11) $\frac{16}{2} = 8$	12) $\frac{8}{2} = 4$
13) $\frac{4}{2} = 2$	14) $\frac{2}{2} = 1$		

$$16384 \rightarrow 8192 \rightarrow 4096 \rightarrow 2048 \rightarrow 1024 \rightarrow 512 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \\ \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Kaip matome, visais atvejais buvo grįžtama prie skaičiaus 1. Tačiau vieniems skaičiams aritmetinius veiksmus teko kartoti daugiau kartų, o kitiems – mažiau. Skaičius 6 iteruoja į 1 po 6 kartų, skaičius 37 – po 21 karto, 456 pasiekė vieneta po 35 aritmetinių veiksmų, 2464 – po 27 veiksmų, o skaičius 16384 iteruoja į 1 po 14 kartų. Nagrinėtuose pavyzdžiuose skaičiavimai buvo atlikti „rankiniu būdu“.

Nagrinėkime tuos pačius skaičius 6, 37, 456, 2464, 16384 modifikuota uždavinio versija „rankiniu būdu“.

Skaičiui 6:

1) $\frac{6}{2} = 3$	2) $\frac{3 \cdot 3 + 1}{2} = 5$	3) $\frac{5 \cdot 3 + 1}{2} = 8$	4) $\frac{8}{2} = 4$
5) $\frac{4}{2} = 2$	6) $\frac{2}{2} = 1$		

$$6 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Skaičiui 37:

1) $\frac{37 \cdot 3 + 1}{2} = 56$	2) $\frac{56}{2} = 28$	3) $\frac{28}{2} = 14$	4) $\frac{14}{2} = 7$
5) $\frac{7 \cdot 3 + 1}{2} = 11$	6) $\frac{11 \cdot 3 + 1}{2} = 17$	7) $\frac{17 \cdot 3 + 1}{2} = 26$	8) $\frac{26}{2} = 13$
9) $\frac{13 \cdot 3 + 1}{2} = 20$	10) $\frac{20}{2} = 10$	11) $\frac{10}{2} = 5$	12) $\frac{5 \cdot 3 + 1}{2} = 8$
13) $\frac{8}{2} = 4$	15) $\frac{4}{2} = 2$	16) $\frac{2}{2} = 1$	

$$37 \rightarrow 56 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \\ \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Skaičiai 456:

1) $\frac{456}{2} = 228$	2) $\frac{228}{2} = 114$	3) $\frac{114}{2} = 57$
4) $\frac{57 \cdot 3 + 1}{2} = 86$	5) $\frac{86}{2} = 43$	6) $\frac{43 \cdot 3 + 1}{2} = 65$
7) $\frac{65 \cdot 3 + 1}{2} = 98$	8) $\frac{98}{2} = 49$	9) $\frac{49 \cdot 3 + 1}{2} = 74$
10) $\frac{74}{2} = 37$	11) $\frac{37 \cdot 3 + 1}{2} = 56$	12) $\frac{56}{2} = 28$
13) $\frac{28}{2} = 14$	14) $\frac{14}{2} = 7$	15) $\frac{7 \cdot 3 + 1}{2} = 11$
16) $\frac{11 \cdot 3 + 1}{2} = 17$	17) $\frac{17 \cdot 3 + 1}{2} = 26$	18) $\frac{26}{2} = 13$
19) $\frac{13 \cdot 3 + 1}{2} = 20$	20) $\frac{20}{2} = 10$	21) $\frac{10}{2} = 5$
22) $\frac{5 \cdot 3 + 1}{2} = 8$	23) $\frac{8}{2} = 4$	24) $\frac{4}{2} = 2$
25) $\frac{2}{2} = 1$		

456 $\rightarrow$ 114 $\rightarrow$ 57 $\rightarrow$ 86 $\rightarrow$ 43 $\rightarrow$ 65 $\rightarrow$ 98 $\rightarrow$ 49 $\rightarrow$ 74 $\rightarrow$ 37 $\rightarrow$ 56
 $\rightarrow$ 28 $\rightarrow$ 14 $\rightarrow$ 7 $\rightarrow$ 11 $\rightarrow$ 17 $\rightarrow$ 26 $\rightarrow$ 13 $\rightarrow$ 20 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 4
 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 1.

Skaičiai 2464:

1) $\frac{2464}{2} = 1232$	2) $\frac{1232}{2} = 616$	3) $\frac{616}{2} = 308$	4) $\frac{308}{2} = 154$
5) $\frac{154}{2} = 77$	6) $\frac{77 \cdot 3 + 1}{2} = 116$	7) $\frac{116}{2} = 58$	8) $\frac{58}{2} = 29$
9) $\frac{29 \cdot 3 + 1}{2} = 44$	10) $\frac{44}{2} = 22$	11) $\frac{22}{2} = 11$	12) $\frac{11 \cdot 3 + 1}{2} = 17$
13) $\frac{17 \cdot 3 + 1}{2} = 26$	14) $\frac{26}{2} = 13$	15) $\frac{13 \cdot 3 + 1}{2} = 20$	16) $\frac{20}{2} = 10$
17) $\frac{10}{2} = 5$	18) $\frac{5 \cdot 3 + 1}{2} = 8$	19) $\frac{8}{2} = 4$	20) $\frac{4}{2} = 2$
21) $\frac{2}{2} = 1$			

2464 $\rightarrow$ 1232 $\rightarrow$ 616 $\rightarrow$ 308 $\rightarrow$ 154 $\rightarrow$ 77 $\rightarrow$ 116 $\rightarrow$ 58 $\rightarrow$ 29 $\rightarrow$ 44 $\rightarrow$ 22
 $\rightarrow$ 11 $\rightarrow$ 17 $\rightarrow$ 26 $\rightarrow$ 13 $\rightarrow$ 20 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 1.

Skaičiai 16384:

1) $\frac{16384}{2} = 8192$	2) $\frac{8192}{2} = 4096$	3) $\frac{4096}{2} = 2048$	4) $\frac{2048}{2} = 1024$
5) $\frac{1024}{2} = 512$	6) $\frac{512}{2} = 256$	7) $\frac{256}{2} = 128$	8) $\frac{128}{2} = 64$
9) $\frac{64}{2} = 32$	10) $\frac{32}{2} = 16$	11) $\frac{16}{2} = 8$	12) $\frac{8}{2} = 4$
13) $\frac{4}{2} = 2$	14) $\frac{2}{2} = 1$		

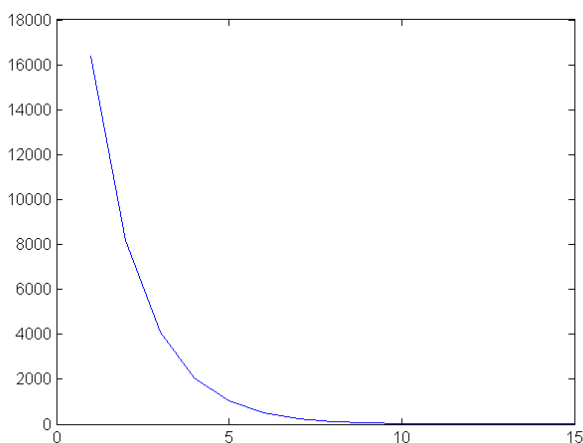
16384 $\rightarrow$ 8192 $\rightarrow$ 4096 $\rightarrow$ 2048 $\rightarrow$ 1024 $\rightarrow$ 512 $\rightarrow$ 256 $\rightarrow$ 128 $\rightarrow$ 64 $\rightarrow$ 32 $\rightarrow$ 16

$$\rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Iš gautų rezultatų matome, kad naudojant modifikuotą versiją iteracijų skaičius sumažėjo. Skaičius 6 iteruoja į 1 po 6 kartų, skaičius 37 iteruoja po 16 kartų, skaičiaus 456 iteracijų kiekis lygus 25, 2464 pasiekia vieneta po 21 aritmetinių veiksmų. Tačiau skaičiui 16384 iteracijų kiekis nepakito.

Nagrinėjame skaičių 16384. Raskime skaičiaus sustojimo laiką, visiško sustojimo laiką ir iteracijos aukštį.

$$\sigma(16384) = 1, \quad \sigma(16384)_{\infty} = 14, \quad s(16384) = 16384.$$



8 pav.: Skaičiaus 16384 iteracinės sekos grafinis vaizdavimas.

8 paveiksle pavaizduotos skaičiaus 16384 iteracijos: ant y ašies atidėtos nagrinėjamo skaičiaus iteracijos, o ant x ašies – iteracijos vieta sekoje. Kaip matome, ši seka nėra heilstono seka. Sekos iteracijos tolygiai mažėja, nėra chaotiško išsidėstymo. Šį skaičių dar galima užrašyti ir taip: $16384 = 2^{14}$.

Dabar nagrinėjame skaičius, kuriuos galime išreikšti 2^s pavidalu, pavyzdžiui, $32 = 2^5$, $128 = 2^7$, $1048576 = 2^{20}$. Tada gauname tokias iteracijų sekas.

Skaičiui 32:

$$32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Skaičiui 128:

$$128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Skaičiui 1048576:

$$\begin{aligned} 1048576 &\rightarrow 524288 \rightarrow 262144 \rightarrow 131072 \rightarrow 65536 \rightarrow 32768 \rightarrow 16384 \\ &\rightarrow 8192 \rightarrow 4096 \rightarrow 2048 \rightarrow 1024 \rightarrow 512 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \\ &\rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Nesvarbu, kuria uždavinio versija bus atliekami veiksmai, šioms skaičiams iteracijų kiekis nepakis. Atsižvelgus į skaičių visiško sustojimo laiką $\sigma(16384 = 2^{14})_{\infty} = 14$, $\sigma(32 = 2^5)_{\infty} = 5$, $\sigma(128 = 2^7)_{\infty} = 7$, $\sigma(1048576 = 2^{20})_{\infty} = 20$, pastebėkime, jog visiško sustojimo laikas sutampa su laipsnio rodikliu. Galima teigti, kad neheilstono sekos iteracijų kiekiai abiejose uždavinio versijose sutampa. Skaičiaus 2^s iteracijų seka nėra neheistolono seka, nes reikšmės tolygiai mažėja. Šios neheilstono sekos visiško sustojimo laikas yra lygus skaičiaus 2 laipsnio rodikliui $\sigma(2^s)_{\infty} = s$.

4.1 lema. *Neheilstono sekos visiško sustojimo laikas yra lygus skaičiaus 2 laipsnio rodikliui $\sigma(2^s)_{\infty} = s$.*

4.1 lemą įrodysime naudodami matematinės indukcijos metodą.

Įrodymas. Nagrinėjamas skaičius $n = 2^s$ yra lyginis, taigi naudosime šį aritmetinį veiksma $\frac{2^s}{2^p} = 1$. Sakykime, kad kintamasis p parodo atliktų dalybos veiksmų skaičių, kuris yra lygus visiško sustojimo laikui, be to $s = p$.

Pirmasis etapas. Tarkime $s = 1$, tai ir $p = 1$, tai

$$\begin{aligned} \frac{2^1}{2^1} &= 1, \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

Antrasis etapas. Tarkime $s = k$, tai ir $p = k$, tai

$$\begin{aligned} \frac{2^k}{2^k} &= 1, \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

Trečiasis etapas. Tarkime $s = k + 1$, tai ir $p = k + 1$, tai

$$\begin{aligned} \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}} &= 1, \\ \frac{2^k \cdot 2^1}{2^k \cdot 2^1} &= 1, \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

Visais atvejais skaičius iteruoja į 1. Prieš tai minėjome, kad kintamasis p yra lygus visiško sustojimo laikui $\sigma_\infty(n)$, be to kintamasis p – lygus ir nagrinėjamo skaičiaus 2^s laipsnio rodikliui. Iš to seka, kad visiško sustojimo laikas yra lygus nagrinėjamo skaičiaus 2^s laipsnio rodikliui, t.y. $\sigma(2^s)_\infty = s$. $\square$

Nagrinėsime iteracijų elgesį pasirinkdami natūraliuosius skaičius iš intervalų $[12; 17]$, $[346; 352]$, $[1423; 1430]$, t.y. jų sustojimo laiką $\sigma(n)$, visiško sustojimo laiką $\sigma_\infty(n)$, iteracijų aukštį $s(n)$; čia n – nagrinėjamas skaičius (duomenys pateikti 1 lentelėje).

Naudojant sukurta Matlab kodą modifikuotam Kolatso uždaviniui (3 priedas), buvo patikrinta keletas skaičių, kurie taip pat galiausiai pasiekė 1. Skaičių sekos didžiausią reikšmę $s(n)$ randame panaudoję komandą *max*. $\sigma(n)$ radimui buvo pasitelktas ciklas *while*. Pastebėkime, kad kai kurių gretimų skaičių porų visiško sustojimo laikas sutampa: $\sigma_\infty(12) = \sigma_\infty(13) = 7$, $\sigma_\infty(14) = \sigma_\infty(15) = 12$, $\sigma_\infty(348) = \sigma_\infty(349) = 23$, $\sigma_\infty(350) = \sigma_\infty(351) = 53$, $\sigma_\infty(1425) = \sigma_\infty(1426) = \sigma_\infty(1427) = 20$, $\sigma_\infty(1428) = \sigma_\infty(1429) = 25$. Nagrinėjant skaičius iš intervalo $[98; 102]$ visiško sustojimo laikas $\sigma_\infty(n) = 18$ sutapo 5 kartus. Iš $[1121; 1126]$ intervalo visiško sustojimo laikas $\sigma_\infty(n) = 31$ sutapo 6 kartus. Iš $[3202; 3206]$ intervalo visiško sustojimo laikas $\sigma_\infty(n) = 42$ sutapo 5 kartus. Iš $[7083; 7099]$ intervalo visiško sustojimo laikas $\sigma_\infty(n) = 40$ sutapo 17 kartų (4 priedas). Remiantis J. K. Lagarias [10], šis reiškinys egzistuoja dėl „saugų“ tarp skirtingų skaičių trajektorijų.

1 lentelė: Iteracijų $T^{(k)}(n)$ elgsena dešimtainėje sistemoje.

n	$\sigma(n)$	$\sigma_{\infty}(n)$	s(n)
12	1	7	12
13	2	7	20
14	1	12	26
15	7	12	80
16	1	4	16
17	2	9	26
346	1	23	346
347	10	80	4616
348	1	23	348
349	2	23	524
350	1	53	4616
351	8	53	4616
352	1	15	352
1423	7	44	7208
1424	1	25	1424
1425	2	20	2138
1426	1	20	1808
1427	4	20	3212
1428	1	25	1428
1429	2	25	2144
1430	1	20	1610

4.2 $3n + 1$ uždavinys tryliktainėje skaičiavimo sistemoje

Prisiminkime, kad tryliktainėje skaičiavimo sistemoje naudojami skaitmenys nuo 1 iki 12, t.y. ją sudarantys skaitmenys neviršija skaičių sistemos pagrindo 13. Siekiant išvengti painiavos tarp dviženklų skaičių ir skaitmenų, susitarta, kad dviženkliai skaitmenys bus žymimi didžiosiomis lotyniškėmis raidėmis: 10 – A, 11 – B, 12 – C.

Išnagrinėkime Kolatso uždavinį „rankiniu būdu“ tryliktainėje skaičiavimo sis-

temoje, naudojant modifikuotą uždavinį

$$T(n) = \begin{cases} \frac{3n+1}{2}, & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

skaičiams: $6_{13}, 2B_{13}, 291_{13}, 1177_{13}, 75C4_{13}$. Skaičiavimai pateikti 5 priede 3-7 lentelėse. Tada turime sekas.

Skaičiui 6_{13} :

$$6_{13} \rightarrow 3_{13} \rightarrow 5_{13} \rightarrow 8_{13} \rightarrow 4_{13} \rightarrow 2_{13} \rightarrow 1_{13}.$$

Skaičiui $2B_{13}$:

$$\begin{aligned} 2B_{13} &\rightarrow 44_{13} \rightarrow 22_{13} \rightarrow 11_{13} \rightarrow 7_{13} \rightarrow B_{13} \rightarrow 14_{13} \rightarrow 20_{13} \rightarrow 10_{13} \rightarrow 17_{13} \rightarrow A_{13} \\ &\rightarrow 5_{13} \rightarrow 8_{13} \rightarrow 4_{13} \rightarrow 2_{13} \rightarrow 1_{13}. \end{aligned}$$

Skaičiui 291_{13} :

$$\begin{aligned} 291_{13} &\rightarrow 147_{13} \rightarrow 8A_{13} \rightarrow 45_{13} \rightarrow 6B_{13} \rightarrow 34_{13} \rightarrow 50_{13} \rightarrow 77_{13} \rightarrow 3A_{13} \\ &\rightarrow 59_{13} \rightarrow 2B_{13} \rightarrow 44_{13} \rightarrow 22_{13} \rightarrow 11_{13} \rightarrow 7_{13} \rightarrow B_{13} \rightarrow 14_{13} \rightarrow 20_{13} \\ &\rightarrow 10_{13} \rightarrow 17_{13} \rightarrow A_{13} \rightarrow 5_{13} \rightarrow 8_{13} \rightarrow 4_{13} \rightarrow 2_{13} \rightarrow 1_{13}. \end{aligned}$$

Skaičiui 1177_{13} :

$$\begin{aligned} 1177_{13} &\rightarrow 73A_{13} \rightarrow 385_{13} \rightarrow 1A9_{13} \rightarrow BB_{13} \rightarrow 5C_{13} \rightarrow 8C_{13} \rightarrow 46_{13} \rightarrow 23_{13} \\ &\rightarrow 35_{13} \rightarrow 19_{13} \rightarrow B_{13} \rightarrow 14_{13} \rightarrow 20_{13} \rightarrow 10_{13} \rightarrow 17_{13} \rightarrow A_{13} \rightarrow 5_{13} \\ &\rightarrow 8_{13} \rightarrow 4_{13} \rightarrow 2_{13} \rightarrow 1_{13}. \end{aligned}$$

Skaičiui $75C4_{13}$:

$$\begin{aligned} 75C4_{13} &\rightarrow 3962_{13} \rightarrow 1B31_{13} \rightarrow C17_{13} \rightarrow 60A_{13} \rightarrow 305_{13} \rightarrow 169_{13} \rightarrow 9B_{13} \rightarrow 40_{13} \\ &\rightarrow 26_{13} \rightarrow 13_{13} \rightarrow 8_{13} \rightarrow 4_{13} \rightarrow 2_{13} \rightarrow 1_{13}. \end{aligned}$$

Matome, kad visos sekos iteruoja į 1. Palyginus skaičių visiško sustojimo laikus gauname: $\sigma_{\infty}(6_{13}) = \sigma_{\infty}(6) = 6, \sigma_{\infty}(2B_{13}) = \sigma_{\infty}(37) = 16, \sigma_{\infty}(291_{13}) = \sigma_{\infty}(456) = 25, \sigma_{\infty}(1177_{13}) = \sigma_{\infty}(2464) = 21, \sigma_{\infty}(75C4_{13}) = \sigma_{\infty}(24424) = 14$. Kyla klausimas: ar nagrinėjamų skaičių iteracijų kiekiai skirtingose skaičių sistemose sutampa?

Nagrinėkime skaičius iš intervalų $[C_{13}; 14_{13}], [208_{13}; 211_{13}], [856_{13}; 860_{13}]$ tryliktainėje skaičiavimo sistemoje. Šie skaičiai atitinka $h = 10$ sistemos pagrindo nagrinėtus skaičius. Palyginkime 1 lentelės duomenis su 6 priedo 8 lentelės duomenimis, kurioje pateiktos prieš tai išvardintų intervalų skaičių iteracijos. Matome, kad

visų skaičių sustojimo laikas $\sigma(n)$ ir visiško sustojimo laikas $\sigma(n)_\infty$ sutampa. Tryliktainėje sistemoje gauti iteracijų aukščiai $s(n)$ sutampa su dešimtainės sistemos rezultatais. Nors ir skiriasi jų skaitinės išraiškos, tačiau jų reikšmės yra vienodos.

4.3 $3n + 1$ uždavinys vienuoliktainėje skaičiavimo sistemoje

Vienuoliktainėje skaičiavimo sistemoje naudojami skaitmenys nuo 1 iki 10. Ją sudarantys skaitmenys neviršija skaičių sistemos pagrindo 11. Anskčiau buvo minėta, kad dviženkliai skaitmenys bus žymimi didžiosiomis lotyniškoms raidėmis, šiuo atveju $10 - A$.

Išnagrinėkime Kolatso uždavinį „rankiniu būdu“ vienuoliktainėje skaičiavimo sistemoje, naudojant modifikuotą Kolatso uždavinį aprašytą (3) formule skaičiams: $6_{11}, 34_{11}, 385_{11}, 1940_{11}, 11345_{11}$. Skaičiavimai pateikti 7 priede 9-13 lentelėse. Tada turime sekas.

Skaičiui 6_{11} :

$$6_{11} \rightarrow 3_{11} \rightarrow 5_{11} \rightarrow 8_{11} \rightarrow 4_{11} \rightarrow 2_{11} \rightarrow 1_{11}.$$

Skaičiui 34_{11} :

$$\begin{aligned} 34_{11} &\rightarrow 51_{11} \rightarrow 26_{11} \rightarrow 13_{11} \rightarrow 7_{11} \rightarrow 10_{11} \rightarrow 16_{11} \rightarrow 24_{11} \rightarrow 12_{11} \rightarrow 19_{11} \rightarrow A_{11} \\ &\rightarrow 5_{11} \rightarrow 8_{11} \rightarrow 4_{11} \rightarrow 2_{11} \rightarrow 1_{11}. \end{aligned}$$

Skaičiui 385_{11} :

$$\begin{aligned} 385_{11} &\rightarrow 198_{11} \rightarrow A4_{11} \rightarrow 52_{11} \rightarrow 79_{11} \rightarrow 3A_{11} \rightarrow 5A_{11} \rightarrow 8A_{11} \rightarrow 45_{11} \rightarrow 68_{11} \\ &\rightarrow 34_{11} \rightarrow 51_{11} \rightarrow 26_{11} \rightarrow 13_{11} \rightarrow 7_{11} \rightarrow 10_{11} \rightarrow 16_{11} \rightarrow 24_{11} \rightarrow 12_{11} \\ &\rightarrow 19_{11} \rightarrow A_{11} \rightarrow 5_{11} \rightarrow 8_{11} \rightarrow 4_{11} \rightarrow 2_{11} \rightarrow 1_{11}. \end{aligned}$$

Skaičiui 1940_{11} :

$$\begin{aligned} 1940_{11} &\rightarrow A20_{11} \rightarrow 510_{11} \rightarrow 260_{11} \rightarrow 130_{11} \rightarrow 70_{11} \rightarrow A6_{11} \rightarrow 53_{11} \rightarrow 27_{11} \\ &\rightarrow 40_{11} \rightarrow 20_{11} \rightarrow 10_{11} \rightarrow 16_{11} \rightarrow 24_{11} \rightarrow 12_{11} \rightarrow 19_{11} \rightarrow A_{11} \rightarrow 5_{11} \\ &\rightarrow 8_{11} \rightarrow 4_{11} \rightarrow 2_{11} \rightarrow 1_{11}. \end{aligned}$$

Skaičiui 11345_{11} :

$$11345_{11} \rightarrow 6178_{11} \rightarrow 3094_{11} \rightarrow 15A2_{11} \rightarrow 851_{11} \rightarrow 426_{11} \rightarrow 213_{11} \rightarrow 107_{11}$$

$$\rightarrow 59_{11} \rightarrow 2A_{11} \rightarrow 15_{11} \rightarrow 8_{11} \rightarrow 4_{11} \rightarrow 2_{11} \rightarrow 1_{11}.$$

Sekos iteruoja į 1. Palyginus skaičių visiško sustojimo laikus gauname:

$$\sigma_{\infty}(6_{11}) = \sigma_{\infty}(6) = 6, \sigma_{\infty}(34_{11}) = \sigma_{\infty}(37) = 16, \sigma_{\infty}(385_{11}) = \sigma_{\infty}(456) = 25, \\ \sigma_{\infty}(1940_{11}) = \sigma_{\infty}(2464) = 21, \sigma_{\infty}(11345_{11}) = \sigma_{\infty}(24424) = 14.$$

Nagrinėkime skaičius iš intervalų $[11_{11}; 16_{11}]$, $[295_{11}; 2A0_{11}]$, $[1084_{11}; 1090_{11}]$ vienuoliktainėje skaičiavimo sistemoje. Šie skaičiai atitinka skaičius, kurie buvo nagrinėti dešimtainėje skaičiavimo sistemoje. Palyginkime 1 lentelės duomenis su 8 priedo 14 lentelės duomenimis, kurioje pateiktos minėtų intervalų skaičių iteracijos. Matome, kad visų skaičių sustojimo laikas $\sigma(n)$ ir visiško sustojimo laikas $\sigma(n)_{\infty}$ sutampa. Iteracijų aukščiai $s(n)$ taip pat sutampa su dešimtainės skaičiavimo sistemos rezultatais. Skiriasi jų išraiška, reikšmė išlieka ta pati.

Pasirinkime skaičių $108A_{11}$ iš nagrinėtų intervalų. Pastebėkime, kad atitinkamų skaičių sustojimo laikas $\sigma(108A_{11}) = \sigma(1429) = 2$, visiško sustojimo laikas $\sigma(108A_{11})_{\infty} = \sigma(1429)_{\infty} = 25$ sutampa. Iteracijų aukščių $s(108A_{11}) = 167A_{11}$, $s(1429) = 2144$ išraiška skiriasi, tačiau skaitinė vertė išlieka ta pati.

4.4 $3n + 1$ uždavinys devynetaineje skaičiavimo sistemoje

Prisiminkime, kad devynetainėje skaičiavimo sistemoje skaičiui užrašyti naudojami skaitmenys nuo 0 iki 8, t.y. ją sudarantys skaitmenys neviršija skaičių sistemos pagrindo 9.

Išnagrinėkime modifikuotą Kolatso uždavinį „rankiniu būdu“ devynetainėje skaičių sistemoje skaičiams: $6_9, 41_9, 556_9, 3337_9, 24424_9$. Skaičiavimai pateikti 15-19 lentelėse 9 priede. Tada turime tokias sekas.

Skaičiui 6_9 :

$$6_9 \rightarrow 3_9 \rightarrow 5_9 \rightarrow 8_9 \rightarrow 4_9 \rightarrow 2_9 \rightarrow 1_9.$$

Skaičiui 41_9 :

$$41_9 \rightarrow 62_9 \rightarrow 31_9 \rightarrow 15_9 \rightarrow 7_9 \rightarrow 12_9 \rightarrow 18_9 \rightarrow 28_9 \rightarrow 14_9 \rightarrow 22_9 \rightarrow 11_9 \\ \rightarrow 5_9 \rightarrow 8_9 \rightarrow 4_9 \rightarrow 2_9 \rightarrow 1_9.$$

Skaičiai 556₉:

$$\begin{aligned} 556_9 &\rightarrow 273_9 \rightarrow 136_9 \rightarrow 63_9 \rightarrow 105_9 \rightarrow 47_9 \rightarrow 72_9 \rightarrow 118_9 \rightarrow 54_9 \rightarrow 82_9 \rightarrow 41_9 \\ &\rightarrow 62_9 \rightarrow 31_9 \rightarrow 15_9 \rightarrow 7_9 \rightarrow 12_9 \rightarrow 18_9 \rightarrow 28_9 \rightarrow 14_9 \rightarrow 22_9 \rightarrow 11_9 \rightarrow 5_9 \\ &\rightarrow 8_9 \rightarrow 4_9 \rightarrow 2_9 \rightarrow 1_9. \end{aligned}$$

Skaičiai 3337₉:

$$\begin{aligned} 3337_9 &\rightarrow 1618_9 \rightarrow 754_9 \rightarrow 372_9 \rightarrow 181_9 \rightarrow 85_9 \rightarrow 138_9 \rightarrow 64_9 \rightarrow 32_9 \\ &\rightarrow 48_9 \rightarrow 24_9 \rightarrow 12_9 \rightarrow 18_9 \rightarrow 28_9 \rightarrow 14_9 \rightarrow 22_9 \rightarrow 11_9 \rightarrow 5_9 \rightarrow 8_9 \\ &\rightarrow 4_9 \rightarrow 2_9 \rightarrow 1_9. \end{aligned}$$

Skaičiai 24424₉:

$$\begin{aligned} 24424_9 &\rightarrow 12212_9 \rightarrow 5551_9 \rightarrow 2725_9 \rightarrow 1357_9 \rightarrow 628_9 \rightarrow 314_9 \rightarrow 152_9 \rightarrow 71_9 \\ &\rightarrow 35_9 \rightarrow 17_9 \rightarrow 8_9 \rightarrow 4_9 \rightarrow 2_9 \rightarrow 1_9. \end{aligned}$$

Matome, kad visos sekos iteruoja į 1. Palyginus skaičių visiško sustojimo laikus gauname: $\sigma_\infty(6_9) = \sigma_\infty(6) = 6$, $\sigma_\infty(41_9) = \sigma_\infty(37) = 16$, $\sigma_\infty(556_9) = \sigma_\infty(456) = 25$, $\sigma_\infty(3337_9) = \sigma_\infty(2464) = 21$, $\sigma_\infty(16384_9) = \sigma_\infty(24424) = 14$.

Nagrinėjame skaičius iš intervalų $[13_9; 18_9]$, $[424_9; 431_9]$, $[1851_9; 1858_9]$ devynetais skaičiavimo sistemoje. Šie skaičiai atitinka $h = 10$ sistemos pagrindo nagrinėtus skaičius. Palyginkime 1 lentelės duomenis su 10 priedo 20 lentelės duomenimis, kurioje pateiktos minėtų intervalų skaičių iteracijos. Matome, kad visų skaičių sustojimo laikas $\sigma(n)$ ir visiško sustojimo laikas $\sigma(n)_\infty$ sutampa. Devynetais skaičiavimo sistemoje gauti iteracijų aukščiai $s(n)$ sutampa su dešimtainės sistemos rezultatais. Skiriasi skaitmenys, bet jų reikšmės yra vienodos.

4.5 $3n + 1$ uždavinys aštuonetais skaičiavimo sistemoje

Aštuonetais skaičiavimo sistemoje naudojami skaitmenys nuo 0 iki 7. Ją sudarantys skaitmenys neviršija skaičių sistemos pagrindo 8. Išnagrinėjame Kolatso uždavinį „rankiniu būdu“ aštuonetais skaičių sistemoje, naudojant modifikuotą uždavinį, kuris aprašytas (3) formulėje, skaičiams: 6_8 , 45_8 , 710_8 , 4640_8 , 40000_8 . Skaičiavimai pateikti 11 priede 21-25 lentelėse. Tada turime sekas.

Skaičiai 6₈:

$$6_8 \rightarrow 3_8 \rightarrow 5_8 \rightarrow 10_8 \rightarrow 4_8 \rightarrow 2_8 \rightarrow 1_8.$$

Skaičiai 45₈:

$$\begin{aligned} 45_8 &\rightarrow 70_8 \rightarrow 34_8 \rightarrow 16_8 \rightarrow 7_8 \rightarrow 13_8 \rightarrow 21_8 \rightarrow 32_8 \rightarrow 15_8 \rightarrow 24_8 \rightarrow 12_8 \\ &\rightarrow 5_8 \rightarrow 10_8 \rightarrow 4_8 \rightarrow 2_8 \rightarrow 1_8. \end{aligned}$$

Skaičiai 710₈:

$$\begin{aligned} 710_8 &\rightarrow 344_8 \rightarrow 162_8 \rightarrow 71_8 \rightarrow 126_8 \rightarrow 53_8 \rightarrow 101_8 \rightarrow 142_8 \rightarrow 61_8 \rightarrow 112_8 \\ &\rightarrow 45_8 70_8 \rightarrow 34_8 \rightarrow 16_8 \rightarrow 7_8 \rightarrow 13_8 \rightarrow 21_8 \rightarrow 32_8 \rightarrow 15_8 \rightarrow 24_8 \rightarrow 12_8 \\ &\rightarrow 5_8 \rightarrow 10_8 \rightarrow 4_8 \rightarrow 2_8 \rightarrow 1_8. \end{aligned}$$

Skaičiai 4640₈:

$$\begin{aligned} 4640_8 &\rightarrow 2320_8 \rightarrow 1150_8 \rightarrow 464_8 \rightarrow 232_8 \rightarrow 115_8 \rightarrow 164_8 \rightarrow 72_8 \rightarrow 35_8 \rightarrow 54_8 \\ &\rightarrow 26_8 \rightarrow 13_8 \rightarrow 21_8 \rightarrow 32_8 \rightarrow 15_8 \rightarrow 24_8 \rightarrow 12_8 \rightarrow 5_8 \rightarrow 10_8 \rightarrow 4_8 \\ &\rightarrow 2_8 \rightarrow 1_8. \end{aligned}$$

Skaičiai 40000₈:

$$\begin{aligned} 40000_8 &\rightarrow 20000_8 \rightarrow 10000_8 \rightarrow 4000_8 \rightarrow 2000_8 \rightarrow 1000_8 \rightarrow 400_8 \rightarrow 200_8 \rightarrow 100_8 \\ &\rightarrow 40_8 \rightarrow 20_8 \rightarrow 10_8 \rightarrow 4_8 \rightarrow 2_8 \rightarrow 1_8. \end{aligned}$$

Nagrinėtos sekos iteruoja į 1. Palyginus skaičių visiško sustojimo laikus, gauname, kad jie sutampa su dešimtainėje sistemoje analizuojamais skaičiais, t.y.

$$\sigma_\infty(6_8) = \sigma_\infty(6) = 6, \sigma_\infty(45_8) = \sigma_\infty(37) = 16, \sigma_\infty(710_8) = \sigma_\infty(456) = 25,$$

$$\sigma_\infty(4640_8) = \sigma_\infty(2464) = 21, \sigma_\infty(40000_8) = \sigma_\infty(16384) = 14.$$

Toliau nagrinėkime skaičius iš intervalų $[14_8; 21_8]$, $[532_8; 540_8]$, $[2617_8; 2626_8]$ aštuonetainėje skaičiavimo sistemoje. Šie skaičiai atitinka $h = 10$ sistemos pagrindo nagrinėtus skaičius. Dabar palyginkime 1 lentelės duomenis su 12 priede esančia 26 lentele, kurioje pateikti minėtų intervalų skaičių iteracijos. Matome, kad visų skaičių sustojimo laikas $\sigma(n)$, visiško sustojimo laikas $\sigma(n)_\infty$ sutampa. Aštuonetainėje sistemoje gauti iteracijų aukščiai $s(n)$ yra analogiškai dešimtainėje sistemoje gautiems iteracijų aukščių rezultatams. Pavyzdžiui imkime skaičių 535₈, šio skaičiaus sustojimo laikas, visiško sustojimo laikas ir iteracijos aukštis sutampa su analogišku skaičiumi esančiu dešimtainėje sistemoje, t.y. 349: $\sigma(535_8) = \sigma(349) = 2$, $\sigma(535_8)_\infty = \sigma(349)_\infty = 23$, $s(535_8) = 774_8 = s(349) = 524$.

4.6 $3n + 1$ uždavinys penketainėje skaičiavimo sistemoje

Penketainėje skaičiavimo sistemoje naudojami skaitmenys nuo 0 iki 4. Ją sudarantys skaitmenys neviršija skaičių sistemos pagrindo 5.

Išnagrinėkime Kolatso uždavinį „rankiniu būdu“ penketainėje skaičių sistemoje, naudojant modifikuotą uždavinį aprašytą (3) formule skaičiams: $11_5, 122_5, 3311_5, 34324_5, 1011014_5$. Skaičiavimai pateikti 13 priede 27-31 lentelėse. Tada turime sekas.

Skaičiui 11_5 :

$$11_5 \rightarrow 3_5 \rightarrow 10_5 \rightarrow 13_5 \rightarrow 4_5 \rightarrow 2_5 \rightarrow 1_5.$$

Skaičiui 122_5 :

$$\begin{aligned} 122_5 &\rightarrow 211_5 \rightarrow 103_5 \rightarrow 24_5 \rightarrow 12_5 \rightarrow 21_5 \rightarrow 32_5 \rightarrow 101_5 \rightarrow 23_5 \rightarrow 40_5 \rightarrow 20_5 \\ &\rightarrow 10_5 \rightarrow 13_5 \rightarrow 4_5 \rightarrow 2_5 \rightarrow 1_5. \end{aligned}$$

Skaičiui 3311_5 :

$$\begin{aligned} 3311_5 &\rightarrow 1403_5 \rightarrow 424_5 \rightarrow 212_5 \rightarrow 321_5 \rightarrow 133_5 \rightarrow 230_5 \rightarrow 343_5 \rightarrow 144_5 \rightarrow 244_5 \\ &\rightarrow 122_5 \rightarrow 211_5 \rightarrow 103_5 \rightarrow 24_5 \rightarrow 12_5 \rightarrow 21_5 \rightarrow 32_5 \rightarrow 101_5 \rightarrow 23_5 \rightarrow 40_5 \\ &\rightarrow 20_5 \rightarrow 10_5 \rightarrow 13_5 \rightarrow 4_5 \rightarrow 2_5 \rightarrow 1_5. \end{aligned}$$

Skaičiui 34324_5 :

$$\begin{aligned} 34324_5 &\rightarrow 14412_5 \rightarrow 4431_5 \rightarrow 2213_5 \rightarrow 1104_5 \rightarrow 302_5 \rightarrow 431_5 \rightarrow 213_5 \rightarrow 104_5 \\ &\rightarrow 134_5 \rightarrow 42_5 \rightarrow 21_5 \rightarrow 32_5 \rightarrow 101_5 \rightarrow 23_5 \rightarrow 40_5 \rightarrow 20_5 \rightarrow 10_5 \rightarrow 13_5 \\ &\rightarrow 4_5 \rightarrow 2_5 \rightarrow 1_5. \end{aligned}$$

Skaičiui 1011014_5 :

$$\begin{aligned} 1011014_5 &\rightarrow 230232_5 \rightarrow 112341_5 \rightarrow 31143_5 \rightarrow 13044_5 \rightarrow 4022_5 \rightarrow 2011_5 \\ &\rightarrow 1003_5 \rightarrow 224_5 \rightarrow 112_5 \rightarrow 31_5 \rightarrow 13_5 \rightarrow 4_5 \rightarrow 2_5 \rightarrow 1_5. \end{aligned}$$

Matome, kad nagrinėtos sekos iteruoja į 1.

Toliau nagrinėkime skaičius iš intervalų $[22_5; 32_5]$, $[2341_5; 2402_5]$, $[21143_5; 21210_5]$ penketainėje skaičiavimo sistemoje. Šie skaičiai atitinka $h = 10$ sistemos pagrindo nagrinėtus skaičius. Palyginkime 1 lentelės iteracinę lentelę su 14 priede

esančia 32 lentelę, kurioje aprašyti prieš tai minėtų skaičių intervalų iteracijų duomenys. Matome, kad visų skaičių sustojimo laikas $\sigma(n)$, visiško sustojimo laikas $\sigma(n)_\infty$ sutampa. Penketainėje sistemoje gauti iteracijų aukščiai $s(n)$ yra analogiški dešimtainėje sistemoje gautiems iteracijų aukščių rezultatams.

4.7 $3n + 1$ uždavinys dvejetainėje skaičiavimo sistemoje

Dvejetainėje skaičiavimo sistemoje naudojami skaitmenys 0 ir 1. Ją sudarantys skaitmenys neviršija skaičių sistemos pagrindo 2. Dvejetainėje skaičiavimo sistemoje visi lyginiai skaičiai baigiasi nuliu, o nelyginiai – vienetu.

Modifikuoto Kolatso uždavinio sąlygos viršija dvejetainę sistemą, todėl ją konvertuojame ir gauname tokią išraišką:

$$T(n) = \begin{cases} \frac{11_2 n + 1_2}{10_2}, & n \text{ yra nelyginis,} \\ \frac{n}{10_2}, & n \text{ yra lyginis.} \end{cases} \quad (5)$$

Išnagrinėkime Kolatso uždavinį „rankiniu būdu“ dvejetainėje skaičių sistemoje, naudojant modifikuotą uždavinį skaičiams: $110_2, 100101_2, 11001000_2, 100110100000_2, 1000000000000000_2$. Skaičiavimai pateikti 15 priede 33-37 lentelėse. Tada turime sekas.

Skaičiui 110_2 :

$$110_2 \rightarrow 11_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1000_2 \rightarrow 100_2 \rightarrow 10_2 \rightarrow 1_2.$$

Skaičiui 100101_2 :

$$\begin{aligned} 100101_2 &\rightarrow 111000_2 \rightarrow 11100_2 \rightarrow 1110_2 \rightarrow 111_2 \rightarrow 1011_2 \rightarrow 10001_2 \rightarrow 11010_2 \\ &\rightarrow 1101_2 \rightarrow 10100_2 \rightarrow 1010_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1000_2 \rightarrow 100_2 \rightarrow 10_2 \rightarrow 1_2. \end{aligned}$$

Skaičiui 111001000_2 :

$$\begin{aligned} 111001000_2 &\rightarrow 11100100_2 \rightarrow 1110010_2 \rightarrow 111001_2 \rightarrow 1010110_2 \rightarrow 101011_2 \\ &\rightarrow 1000001_2 \rightarrow 1100010_2 \rightarrow 110001_2 \rightarrow 1001010_2 \rightarrow 100101_2 \\ &\rightarrow 111000_2 \rightarrow 11100_2 \rightarrow 1110_2 \rightarrow 111_2 \rightarrow 1011_2 \rightarrow 10001_2 \rightarrow 11010_2 \\ &\rightarrow 1101_2 \rightarrow 10100_2 \rightarrow 1010_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1000_2 \rightarrow 100_2 \rightarrow 10_2 \rightarrow 1_2. \end{aligned}$$

Skaičiai 100110100000_2 :

$$\begin{aligned}
100110100000_2 &\rightarrow 10011010000_2 \rightarrow 1001101000_2 \rightarrow 100110100_2 \rightarrow 10011010_2 \\
&\rightarrow 1001101_2 \rightarrow 1110100_2 \rightarrow 111010_2 \rightarrow 11101_2 \rightarrow 101100_2 \\
&\rightarrow 10110_2 \rightarrow 1011_2 \rightarrow 10001_2 \rightarrow 11010_2 \rightarrow 1101_2 \rightarrow 10100_2 \\
&\rightarrow 1010_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1000_2 \rightarrow 100_2 \rightarrow 10_2 \rightarrow 1_2.
\end{aligned}$$

Skaičiai 1000000000000000_2 :

$$\begin{aligned}
1000000000000000_2 &\rightarrow 100000000000000_2 \rightarrow 10000000000000_2 \rightarrow 1000000000000_2 \\
&\rightarrow 100000000000_2 \rightarrow 10000000000_2 \rightarrow 1000000000_2 \rightarrow 100000000_2 \\
&\rightarrow 1000000_2 \rightarrow 100000_2 \rightarrow 10000_2 \rightarrow 1000_2 \rightarrow 100_2 \rightarrow 10_2 \\
&\rightarrow 1_2.
\end{aligned}$$

Nagrinėtos sekos iteruoja į 1. Palyginus skaičių visiško sustojimo laikus visuose nagrinėtuose skaičiavimo sistemose gauname, kad jie sutampa:

$$\begin{aligned}
\sigma_\infty(110_2) &= \sigma_\infty(11_5) = \sigma_\infty(6_8) = \sigma_\infty(6_9) = \sigma_\infty(6_{11}) = \sigma_\infty(6_{13}) = \sigma_\infty(6) = 6, \\
\sigma_\infty(100101_2) &= \sigma_\infty(122_5) = \sigma_\infty(45_8) = \sigma_\infty(41_9) = \sigma_\infty(34_{11}) = \sigma_\infty(2B_{13}) = \\
&= \sigma_\infty(37) = 16, \\
\sigma_\infty(111001000_2) &= \sigma_\infty(3311_5) = \sigma_\infty(710_8) = \sigma_\infty(556_9) = \sigma_\infty(385_{11}) = \\
&= \sigma_\infty(291_{13}) = \sigma_\infty(456) = 25, \\
\sigma_\infty(100110100000_2) &= \sigma_\infty(34324_5) = \sigma_\infty(4640_8) = \sigma_\infty(3337_9) = \sigma_\infty(1940_{11}) = \\
&= \sigma_\infty(1177_{13}) = \sigma_\infty(2464) = 21, \\
\sigma_\infty(1000000000000000_2) &= \sigma_\infty(1011014_5) = \sigma_\infty(40000_8) = \sigma_\infty(24424_9) = \\
&= \sigma_\infty(11345_{11}) = \sigma_\infty(675C_{13}) = \sigma_\infty(16384) = 14.
\end{aligned}$$

Išnagrinėję skaičius iš intervalų $[1100_2; 10001_2]$, $[101011010_2; 101100000_2]$, $[10110001111_2; 10110010110_2]$ dvejetainėje skaičiavimo sistemoje, kurie atitinka $h = 10$ sistemos pagrindo nagrinėtus skaičius. Duomenys pateikti 16 priede 38 lentelėje. Matome, kad visų skaičių sustojimo laikas $\sigma(n)$, visiško sustojimo laikas $\sigma(n)_\infty$ sutampa. Iteracijų aukščiai $s(n)$ taip pat yra analogiškai dešimtainėje sistemoje gautiems iteracijų aukščių rezultatams.

Pavyzdžiui pasirinkime analogiškus skaičius iš prieš tai minėtų intervalų $n = 32_5, n = 21_8, n = 18_9, n = 10001_2, n = 16_{11}, n = 14_{13}$. Šių skaičių sustojimo laikas

ir visiško sustojimo laikas sutampa $\sigma(n) = 2, \sigma(n)_\infty = 9$. Pakeiskime visų skaičių pagrindą į $h = 10$. Tada gauname tokias išraiškas:

Penketainė:	Aštuonetainė:	Devynetainė:	Dvejetainė:	Vienuoliktainė:	Tryliktainė:
$3 \cdot 5 = 15,$	$2 \cdot 8 = 16,$	$1 \cdot 9 = 9,$	$1 \cdot 2 = 2,$	$1 \cdot 11 = 11,$	$1 \cdot 13 = 13,$
$15 + 2 = 17.$	$16 + 1 = 17.$	$9 + 8 = 17.$	$2 + 0 = 2,$	$11 + 6 = 17.$	$13 + 4 = 17.$
			$2 \cdot 2 = 4,$		
			$4 + 0 = 4,$		
			$4 \cdot 2 = 8,$		
			$8 + 0 = 8,$		
			$8 \cdot 2 = 16,$		
			$16 + 1 = 17.$		

Skaičių užrašymas skirtingose skaičiavimo sistemose nors ir skiriasi, tačiau jų dydis išlieka tas pats. Pakeiskime išvardintų skaičiavimo sistemų iteracijų aukščių pagrindą į $h = 10$, kai $s(32_5) = 101_5, s(21_8) = 32_8, s(18_9) = 28_9, s(10001_2) = 11010_2, s(16_{11}) = 24_{11}, s(14_{13}) = 20_{13}$. Dešimtainėje sistemoje skaičiaus 17 iteracijos aukštis lygus $s(17) = 26$.

Penketainė:	Aštuonetainė:	Devynetainė:	Dvejetainė:	Vienuoliktainė:	Tryliktainė:
$1 \cdot 5 = 5,$	$3 \cdot 8 = 24,$	$2 \cdot 9 = 18,$	$1 \cdot 2 = 2,$	$2 \cdot 11 = 22,$	$2 \cdot 13 = 26,$
$5 + 0 = 5,$	$24 + 2 = 26.$	$18 + 8 = 26.$	$2 + 1 = 3,$	$22 + 4 = 26.$	$26 + 0 = 26.$
$5 \cdot 5 = 25,$			$3 \cdot 2 = 6,$		
$25 + 1 = 26.$			$6 + 0 = 6,$		
			$6 \cdot 2 = 12,$		
			$12 + 1 = 13,$		
			$13 \cdot 2 = 26,$		
			$26 + 0 = 26.$		

Iš gautų rezultatų matome, kad iteracijų aukščiai sutampa. Skiriasi nagrinėjamų skaičių skaitmenys atitinkamai pagal analizuojamą sistemą, bet jų reikšmės yra vienodos.

Analizės metu pastebėjome, kad dalybos požymiai skiriasi skaičiavimo sistemoje. Nelyginį pagrindą turinčiose skaičiavimo sistemose ($h = 5, h = 9, h = 11, h = 13$) negalima dalinti pusiau iš pažiūros lyginių skaičių, t.y. 10, 30, 50 ir t.t. Tačiau iš

gautų rezultatų galime spręsti, kad Kolatso uždavinio elgsena skirtingose skaičiavimo sistemose yra vienoda, skiriasi skaičių ir jų iteracijų išraiškos.

5 KOLATSO UŽDAVINIO ANALOGAS DVEJETAINĖJE SKAIČIAVIMO SISTEMOJE

Jau išsiaiškinome, kad Kolatso uždavinio elgsena įvairiose skaičiavimo sistemoose sutampa. Kyla klausimas: ar yra jo analogas kitoje skaičiavimo sistemoje. Iš dalies atsakyti į šį klausimą padės dar viena Kolatso uždavinio modifikacija, kurią pateikė J. M. De Koninck ir A. Mercier [5]. Sakykime, kad

$$T_*(n) = \begin{cases} \frac{n}{2^\beta}, & \text{kai } n = 2^\beta \cdot r, \beta \geq 1 \text{ ir } r \text{ yra nelyginis,} \\ 3n + 1, & \text{kai } n \text{ yra nelyginis.} \end{cases} \quad (6)$$

Tada kiekvienam $n \in \mathbb{Z}^+$ egzistuoja $k \in \mathbb{Z}^+$, toks, kad $T_*^{(k)}(n) = 1$; čia $T_*^{(k)}(n)$ – apibrėžtos funkcijos iteracija.

Kad būtų aiškiau pateiksime pavyzdį. Pasirenkame skaičių 21. Kadangi 21 – nelyginis, dauginame iš 3, pridedame 1 ir gauname 64. Skaičius 64 yra lyginis, taigi remiantis uždavinio analogo pirma sąlyga, šį skaičių galima užrašyti taip $n = 2^6 \cdot 1$, čia $\beta = 6$ ir $r = 1$. Šią išraišką daliname iš 2^β , kaip prieš tai minėjome $\beta = 6$ ir gauname, kad kita iteracija yra lygi 1.

$$21 \rightarrow 64 \rightarrow 1.$$

Nagrinėkime dvejetainę sistemą ir jos skaičius, sudarytus tik iš vienetų. Kolatso uždavinio analogo sąlygos viršija dvejetainės sistemos pagrindą. Todėl jas konvertavus gauname tokią išraišką:

$$T_*(n) = \begin{cases} \frac{n}{10_2^\beta}, & \text{kai } n = 10_2^\beta \cdot r, \beta \geq 1 \text{ ir } r \text{ yra nelyginis,} \\ 11_2n + 1_2, & \text{kai } n \text{ yra nelyginis.} \end{cases} \quad (7)$$

Prisiminkime, kad dvejetainėje skaičiavimo sistemoje nelyginiai skaičiai baigiasi skaitmeniu 1.

Nagrinėkime skaičius $11_2, 111_2, 1111_2, 11111_2, 111111_2, 1111111_2, 11111111_2, 111111111_2, 1111111111_2$. Kadangi jie yra nelyginiai, tai iš (7) formulės sujungę abu Kolatso analogo sąlygos veiksmus gauname naują funkciją, kuri padės sumažinti iteracijų kiekį:

$$F_*(n) = \frac{k}{10_2^\beta}, \quad \text{čia } k = 11_2n + 1_2 = 10_2^\beta \cdot r, \quad \beta \geq 1 \text{ ir } r \text{ yra nelyginis.} \quad (8)$$

Parodysime, kad funkcija $F_*(n)$ yra funkcijos $T_*(n)$ analogas.

Irodymas. Sakysime, kad F_* ir T_* yra nagrinėjamo skaičiaus n iteracijų aibės, tada $F_*(n) \subseteq T_*(n)$.

Tarkime a – nelyginė skaičiaus n iteracija dvejetainėje skaičiavimo sistemoje, kuri $a \in F_*$. Remiantis prieš tai nurodytomis $F_*(n)$ uždavinio sąlygomis, gauname $\frac{11_2 \cdot n + 1_2}{10_2^\beta} = a$, pagal dalybos apibrėžimą $11_2 \cdot n + 1_2 = a \cdot 10_2^\beta$. Iš čia išvedame, kad $11_2 \cdot n + 1_2$, o tai yra funkcijos $T_*(n)$ sąlygos veiksmas, kai nagrinėjamas skaičius yra nelyginis. Vadinasi, pritaikę kitą $T_*(n)$ uždavinio sąlygos veiksmą, gauname $\frac{a \cdot 10_2^\beta}{10_2^\beta} = a$. Taigi skaičius $a \in T_*$. Tad galime teigti, kad $F_*(n) \subseteq T_*(n)$. $\square$

Tada gauname tokias iteracines sekas. Skaičiavimai pateikti 17 priede 39-47 lentelėse.

Skaičiui 11_2 :

$$11_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1_2.$$

Skaičiui 111_2 :

$$111_2 \rightarrow 1011_2 \rightarrow 10001_2 \rightarrow 1101_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1_2.$$

Skaičiui 1111_2 :

$$1111_2 \rightarrow 10111_2 \rightarrow 100011_2 \rightarrow 110101_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1_2.$$

Skaičiui 11111_2 :

$$\begin{aligned} 11111_2 &\rightarrow 101111_2 \rightarrow 1000111_2 \rightarrow 1101011_2 \rightarrow 10100001_2 \rightarrow 1111001_2 \\ &\rightarrow 1011011_2 \rightarrow 10001001_2 \rightarrow 1100111_2 \rightarrow 10011011_2 \rightarrow 11101001_2 \\ &\rightarrow 10101111_2 \rightarrow 100000111_2 \rightarrow 110001011_2 \rightarrow 1001010001_2 \\ &\rightarrow 110111101_2 \rightarrow 10100111_2 \rightarrow 11111011_2 \rightarrow 101111001_2 \rightarrow 100011011_2 \\ &\rightarrow 110101001_2 \rightarrow 100111111_2 \rightarrow 111011111_2 \rightarrow 1011001111_2 \\ &\rightarrow 10000110111_2 \rightarrow 11001010011_2 \rightarrow 100101111101_2 \rightarrow 1110001111_2 \\ &\rightarrow 10101010111_2 \rightarrow 100000000011_2 \rightarrow 110000000101_2 \rightarrow 1001000001_2 \\ &\rightarrow 110110001_2 \rightarrow 101000101_2 \rightarrow 111101_2 \rightarrow 10111_2 \rightarrow 100011_2 \\ &\rightarrow 110101_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1_2. \end{aligned}$$

Skaičiui 111111_2 :

$$111111_2 \rightarrow 1011111_2 \rightarrow 10001111_2 \rightarrow 11010111_2 \rightarrow 101000011_2 \rightarrow 111100101_2$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow 1011011_2 \rightarrow 10001001_2 \rightarrow 1100111_2 \rightarrow 10011011_2 \rightarrow 11101001_2 \\
&\rightarrow 10101111_2 \rightarrow 100000111_2 \rightarrow 110001011_2 \rightarrow 1001010001_2 \\
&\rightarrow 110111101_2 \rightarrow 10100111_2 \rightarrow 11111011_2 \rightarrow 101111001_2 \\
&\rightarrow 100011011_2 \rightarrow 110101001_2 \rightarrow 100111111_2 \rightarrow 111011111_2 \\
&\rightarrow 1011001111_2 \rightarrow 10000110111_2 \rightarrow 11001010011_2 \rightarrow 100101111101_2 \\
&\rightarrow 1110001111_2 \rightarrow 10101010111_2 \rightarrow 100000000011_2 \rightarrow 110000000101_2 \\
&\rightarrow 1001000001_2 \rightarrow 110110001_2 \rightarrow 101000101_2 \rightarrow 111101_2 \rightarrow 10111_2 \\
&\rightarrow 100011_2 \rightarrow 110101_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1_2.
\end{aligned}$$

Skaičiui 1111111_2 :

$$\begin{aligned}
1111111_2 &\rightarrow 10111111_2 \rightarrow 100011111_2 \rightarrow 110101111_2 \rightarrow 1010000111_2 \\
&\rightarrow 1111001011_2 \rightarrow 10110110001_2 \rightarrow 10001000101_2 \rightarrow 11001101_2 \\
&\rightarrow 1001101_2 \rightarrow 11101_2 \rightarrow 1011_2 \rightarrow 10001_2 \rightarrow 1101_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1_2.
\end{aligned}$$

Skaičiui 11111111_2 :

$$\begin{aligned}
11111111_2 &\rightarrow 101111111_2 \rightarrow 1000111111_2 \rightarrow 1101011111_2 \rightarrow 10100001111_2 \\
&\rightarrow 11110010111_2 \rightarrow 101101100011_2 \rightarrow 1000100010101_2 \rightarrow 11001101_2 \\
&\rightarrow 1001101_2 \rightarrow 11101_2 \rightarrow 1011_2 \rightarrow 10001_2 \rightarrow 1101_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1_2.
\end{aligned}$$

Skaičiui 111111111_2 :

$$\begin{aligned}
111111111_2 &\rightarrow 1011111111_2 \rightarrow 10001111111_2 \rightarrow 11010111111_2 \rightarrow 101000011111_2 \\
&\rightarrow 111100101111_2 \rightarrow 1011011000111_2 \rightarrow 10001000101011_2 \\
&\rightarrow 11001101000001_2 \rightarrow 1001101110001_2 \rightarrow 1110011010101_2 \\
&\rightarrow 10101101_2 \rightarrow 1000001_2 \rightarrow 110001_2 \rightarrow 100101_2 \rightarrow 111_2 \rightarrow 1011_2 \\
&\rightarrow 10001_2 \rightarrow 1101_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1_2.
\end{aligned}$$

Skaičiui 1111111111_2 :

$$\begin{aligned}
1111111111_2 &\rightarrow 10111111111_2 \rightarrow 100011111111_2 \rightarrow 110101111111_2 \\
&\rightarrow 1010000111111_2 \rightarrow 1111001011111_2 \rightarrow 10110110001111_2 \\
&\rightarrow 100010001010111_2 \rightarrow 110011010000011_2 \rightarrow 100110111000101_2 \\
&\rightarrow 1110011010101_2 \rightarrow 10101101_2 \rightarrow 1000001_2 \\
&\rightarrow 110001_2 \rightarrow 100101_2 \rightarrow 111_2 \rightarrow 1011_2 \rightarrow 10001_2 \\
&\rightarrow 1101_2 \rightarrow 101_2 \rightarrow 1_2.
\end{aligned}$$

Iš gautų rezultatų matome, kad sekos įteruoja į 1. Gautą naują funkciją $F_*(n)$, kuri aprašyta (8) formule, galime vadinti Kolatso uždavinio analogu nelyginiams skaičiams. Be to, atkreipus dėmesį į pirmąsias sekų iteracijas, galime išvelgti tarp jų panašumų.

$$11_2 \rightarrow 101_2 \dots$$

$$111_2 \rightarrow 1011_2 \rightarrow 10001_2 \rightarrow \dots$$

$$1111_2 \rightarrow 10111_2 \rightarrow 100011_2 \dots$$

$$11111_2 \rightarrow 101111_2 \rightarrow 1000111_2 \rightarrow 1101011_2 \rightarrow 10100001_2 \rightarrow 1111001_2 \dots$$

$$111111_2 \rightarrow 1011111_2 \rightarrow 10001111_2 \rightarrow 11010111_2 \rightarrow 101000011_2$$

$$\rightarrow 111100101_2 \dots$$

$$1111111_2 \rightarrow 10111111_2 \rightarrow 100011111_2 \rightarrow 110101111_2$$

$$\rightarrow 1010000111_2 \rightarrow 1111001011_2 \dots$$

$$11111111_2 \rightarrow 101111111_2 \rightarrow 1000111111_2 \rightarrow 1101011111_2 \rightarrow 10100001111_2$$

$$\rightarrow 11110010111_2 \dots$$

$$111111111_2 \rightarrow 1011111111_2 \rightarrow 10001111111_2 \rightarrow 11010111111_2$$

$$\rightarrow 101000011111_2 \rightarrow 111100101111_2 \dots$$

$$1111111111_2 \rightarrow 10111111111_2 \rightarrow 100011111111_2 \rightarrow 110101111111_2$$

$$\rightarrow 1010000111111_2 \rightarrow 1111001011111_2 \dots$$

Remdamiesi šiais rezultatais sukursime algoritmą, kuris padės nuspėti, kokios bus pirmosios 5 iteracijos neatliekant Kolatso uždavinio veiksmų.

Pažymėkime n – nagrinėjamą nelyginį skaičių sudarytą iš vienetų. Iš skaičiaus n atimame nurodytą skaitmenų kiekį. Taip pat sakykime, kad $s \neq r \neq k \neq d \neq g \neq 0$. Tada

$$1. 10s, s = n - 1;$$

$$2. 1000r, r = n - 2;$$

$$3. 11010k, k = n - 3;$$

$$4. 1010000d, d = n - 4;$$

$$5. 11110010g, g = n - 5;$$

Tarkime norime surasti pirmąją iteraciją. Surandame kintamojo s reikšmę, t.y. iš nagrinėjamo skaičiaus n atimamas vienas skaitmuo. Tada gautą reikšmę prirašome prie nurodytų skaitmenų (šiuo atveju 10) ir gauname pirmąją iteraciją. Analogiškai randamos kitos keturios iteracijos.

Patikrinkime algoritmo veikimą. Pasirenkame skaičius 111111111111_2 , 1111111111111111_2 , 11111111111111111111_2 . Pirmasis skaičius yra sudarytas iš vienuolikos skaitmenų, antrasis – penkiolikos skaitmenų, o trečiasis – iš dvidešimt trijų skaitmenų. Pritaikius algoritmą skaičiams gauname tokias pirmąsias penkias iteracijas.

Nagrinėkime pirmąjį skaičių, kai $n = 1111111111_2$. Šis skaičius sudarytas iš vienuolikos skaitmenų. Pirmą iteraciją gausime suradę kintamojo s reikšmę. Iš nagrinėjamo skaičiaus atimamas 1 skaitmuo ir kintamasis s yra lygus $s = 111111111_2$. Ši reikšmė yra prirašoma prie nurodytų skaitmenų, šiuo atveju 10. Tad pirmoji iteracija yra lygi 101111111111_2 . Norint rasti antrą iteraciją, randame kintamojo r reikšmę. Iš nagrinėjamo skaičiaus atimame 2 skaitmenis ir gauname, kad $r = 11111111_2$. Šią reikšmę prirašome prie nurodytų skaitmenų, t.y. 1000. Antroji iteracija yra lygi 1000111111111_2 . Ieškant trečios iteracijos, reikia iš nagrinėjamo skaičiaus atimti 3 skaitmenis ir kintamasis k įgauna tokią reikšmę 11111111_2 , kurią prirašome prie nurodytų skaitmenų. Trečioji iteracija yra lygi 1101011111111_2 . Ieškant sekančios iteracijos, iš skaičiaus n atimame 4 skaitmenis, gauta kintamojo d reikšmė yra lygi 1111111_2 . Ją prirašome prie nurodytų skaitmenų, šiuo atveju 1010000. Gauta ketvirta iteracija yra lygi 10100001111111_2 . Ir norint surasti penktą iteraciją, reikia iš nagrinėjamo skaičiaus atimame 5 skaitmenis ir ieškomo kintamojo reikšmė yra $g = 111111_2$, kurią prirašome prie nurodytų skaitmenų. Penktoji iteracija yra 11110010111111_2 .

$$\begin{aligned} 11111111111_2 &\rightarrow 101111111111_2 \rightarrow 1000111111111_2 \rightarrow 1101011111111_2 \\ &\rightarrow 10100001111111_2 \rightarrow 11110010111111_2 \dots \end{aligned}$$

Patikrinkime ar gautos iteracijos yra teisingos naudodami modifikuotą Kolatso uždavinio versiją, apibrėžtą (3) formule.

$$\begin{array}{l}
1) \quad \frac{111111111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101111111111_2 \\
2) \quad \frac{101111111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100011111111_2 \\
3) \quad \frac{100011111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110101111111_2 \\
4) \quad \frac{110101111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10100001111111_2 \\
5) \quad \frac{10100001111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11110010111111_2
\end{array}$$

Pirmojo nagrinėjamo skaičiaus penkios iteracijos, kurios buvo gautos taikant algoritmą, sutampa su penkiomis iteracijomis, kurios buvo gautos naudojant modifikuotą Kolatso uždavinį. Tikriname kitus skaičius sudarytus iš vienetų. Tada gauname tokias iteracijas.

Skaičiai 111111111111_2

$$\begin{aligned}
111111111111_2 &\rightarrow 10111111111111_2 \rightarrow 1000111111111111_2 \\
&\rightarrow 1101011111111111_2 \rightarrow 101000011111111111_2 \\
&\rightarrow 111100101111111111_2 \dots
\end{aligned}$$

Tikriname ar iteracijos yra teisingos.

$$\begin{array}{l}
1) \quad \frac{11111111111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1011111111111111_2 \\
2) \quad \frac{1011111111111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100011111111111111_2 \\
3) \quad \frac{1000111111111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110101111111111111_2 \\
4) \quad \frac{1101011111111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10100001111111111111_2 \\
5) \quad \frac{10100001111111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11110010111111111111_2
\end{array}$$

Skaičiai 11111111111111111111_2

$$\begin{aligned}
11111111111111111111_2 &\rightarrow 1011111111111111111111_2 \\
&\rightarrow 100011111111111111111111_2 \\
&\rightarrow 110101111111111111111111_2 \\
&\rightarrow 10100001111111111111111111_2 \\
&\rightarrow 11110010111111111111111111_2 \dots
\end{aligned}$$

Tikriname ar iteracijos yra teisingos.

[illegible]

Iš gautų rezultatų matome, kad iteracijos sutampa. Todėl naudojant šį algoritmą, galime surasti penkias pirmąsias iteracijas neatliekant Kolatso uždavinio aritmetinių veiksmų.

Šis algoritmas galioja tik dvejetainėje skaičiavimo sistemoje. Prieš tai išsiaiškinome, jog iteracijų elgesys sprendžiant Kolatso uždavinį ((1) ir (3) formulės) sutampa visose nagrinėtose skaičiavimo sistemose. Tačiau tai yra Kolatso uždavinio analogas dvejetainėje sistemoje. Taikant algoritmą dešimtainėje skaičiavimo sistemoje pasiekti tų pačių rezultatų nepavyko, nes jis remiasi skaičiaus skaitmenų išsidėstymu ir panašumu tarp jų, o ne skaičių skaitine verte.

IŠVADOS

1. Kolatso uždavinio elgesys skirtingose skaičiavimo sistemose yra vienodas, skiriasi nagrinėjamų skaičių ir jų sekų iteracijų reprezentacijos.
2. Neheilstono sekos iteracijų kiekiai abiejose uždavinio versijose sutampa.
3. Skaičiaus 2^s iteracijų seka nėra heilstono seka, reikšmės tolygiai mažėja.
4. Neheilstono sekos visiško sustojimo laikas yra lygus skaičiaus 2^s laipsnio rodikliui, t.y.

$$\sigma(2^s)_\infty = s.$$

5. Funkcija $F_*(n)$ yra Kolatso uždavinio analogas, skirtas tik nelyginiams skaičiams.

$$F_*(n) = \frac{k}{10_2^\beta}, \quad \text{čia} \quad k = 11_2 n + 1_2 = 10_2^\beta \cdot r, \quad \beta \geq 1 \quad \text{ir } r \text{ yra nelyginis.}$$

6. Algoritmas, kuris padeda surasti penkias pirmąsias iteracijas nenaudojant Kolatso uždavinio aritmetinių veiksmų, galioja tik dvejetainėje skaičiavimo sistemoje.

Literatūra

- [1] APPLGATE, D., LAGARIAS, J. C. (1995). Density Bounds for the $3x + 1$ Problem 1. Tree-Search Method. *Mathematics of Computation*, Vol. 64, 411–426.
- [2] BULOTA, K., SURVILA, P. (1977). Algebra ir skaičių teorija, II dalis. Vilnius: Mokslas.
- [3] CHAMBERLAND, M. (2003). Una actualizachion del problema $3x+1$ [An Update on the $3x + 1$ Problem]. (*Catalan*) *Butlletí Societat Catalana de Matemàtiques*, Vol. 18, 19–45.
- [4] CONWAY, J. H. (1972). Unpredictable Iterations. Proc. 1972 Number Theory Conference. University Colorado, Boulder, Co. 49–52.
- [5] DE KONINCK, J. M., MERCIER, A. (2007). 1001 Problems in Classical Number Theory. Providence: American Mathematical Society.
- [6] DIANOPOULOS, C. T. (2012). The Collatz Conjecture Proof. *Academia*, [interaktyvus]. [žiūrėta 2015 sausio 28 d.] Prieiga per internetą: https://www.academia.edu/1595051/COLLATZ_CONJECTURE_PROOF.
- [7] EVERETT, J. C. (1977). Iteration of the Number – Theoretic $f(2n) = n, f(2n+1) = 3n + 2$. *Advance in Mathematics*, Vol. 25, 42–45.
- [8] FOMINAS, S. (1988). Skaičiavimo sistemas. Vilnius: Mokslas.
- [9] FREYDENBERGER, D. D. (2012). Inclusion of Pattern Languages and Related Problems. Berlin: Logos Verlag Berlin.
- [10] LAGARIAS, J. C. (1985). The $3x + 1$ problem and its generalization. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 92, 3–23.
- [11] Mathematical mysteries: Hailstone sequences. (2014). *Plus Magazine*, [interaktyvus]. [žiūrėta 2015 sausio 14 d.] Prieiga per internetą: <http://plus.maths.org/content/mathematical-mysteries-hailstone-sequences>.
- [12] SILVA, T. O. E. (2010). Empirical Verification of the $3x + 1$ and Related Conjectures. The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem (J. Lagarias, ed.), AMS, Providence, RI, 189–207.

- [13] SINISALO, M. K. (2003). On The Minimal Cycle Lengths Of The Collatz Sequence. Preprint, University of Oulu, Finland. [žiūrėta 2015 sausio 14 d.] Prieiga per internetą: http://www.probleme-syracuse.fr/cargo/Sinisalo_collatz.pdf.
- [14] SZPIRO, G. G. (2006). The Secret Life of Numbers: 50 Easy Pieces on How Mathematicians Work and Think. Washington: National Academies Press.
- [15] TERRAS, R. (1976). A Stopping Time Problem on the Positive Integers. *Acta Arithmetica*, Vol. 30, 241–252.
- [16] The Syracuse problem. (2009). *Mathematical Garden*, [interaktyvus]. [žiūrėta 2015 vasario 6 d.] Prieiga per internetą: <https://mathematicalgarden.wordpress.com/2009/01/04/the-syracuse-problem/>.
- [17] THWAITES, B. (1985). My Conjecture. *Bull. Inst. Math. Appl.*, Vol. 21, 35–41.
- [18] WEISSTEIN, E. W. (2003). CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, 2nd edition. Oxfordshire: Chapman and Hall/ CRC.

SANTRAUKA

Bakalauro baigiamajame darbe analizuojamas Kolatso uždavinys ($3n+1$ problema) ir jo išsprendžiamumas tryliktainėje, vienuoliktainėje, dešimtainėje, devyntainėje, aštuonetainėje, penketainėje, dvejetainėje skaičiavimo sistemose. Kadangi iki šiol nėra šio uždavinio sprendimo visiems natūraliesiems skaičiams, analizei pasirinkti skaičiai iš intervalo, kuriame dešimtainėje sistemoje problemos išsprendžiamumas yra jau patikrintas, t.y. nuo 1 iki $20 \times 2^{28} \approx 5.7646 \times 10^{18}$. Pakeitus nagrinėjimų skaičių skaičiavimo sistemos pagrindą bei naudojant įvairias Kolatso uždavinio modifikacijas, skaičiuojamos iteracijos. Sukurti du programiniai kodai. Vienas iš jų skirtas iteracijų aukščio, sustojimo laiko ir visiško sustojimo laiko radimui. Antrasis yra taikomas iteracijų analizei dvejetainėje skaičiavimo sistemoje, taip pat tikrinant sukurto algoritmo iteracijų bei skaičiavimo nustatymui teisingumą.

SUMMARY

In Bachelor Work, the solvability of Collatz conjecture (or $3n + 1$ problem) in thirteenth, eleventh, decimal, octal and other numeral systems is analyzed. Since, for every natural numbers, there is no general solution of this problem, we choose for analysis the decimal numbers, which belongs to already tested interval from 1 until $20 \times 2^{28} \approx 5.7646 \times 10^{18}$. Several modifications of Collatz conjecture are applied for the numbers, for which the basis of numeral system is changed. Two programme codes are created. One of them, for the investigation of the height, the stopping time and final stopping time of iterations, is used. For the test of correctness of the created algorithm for the binary number's iterations, second programming code is applied.

ŽYMĖJIMAI IR KAI KURIOS SĄVOKOS

Iteracija – matematinės operacijos pakartotinis panaudojimas, laipsniškai artėjant prie ieškomo rezultato.

Heilstono seka – seka, kurios reikšmės didėja ir mažėja netolygiai.

Visiško sustojimo laikas – atliktų veiksmų skaičius, kai n iteruoja iki 1, žymime $\sigma(n)_\infty$.

Sustojimo laikas – tai atliktų aritmetinių veiksmų skaičius, kai pasiekta iteracija yra mažesnė už pasirinktą skaičių n , žymime $\sigma(n)$.

Iteracijos aukštis – skaičiaus n didžiausia pasiekta iteracija, žymime $s(n)$.

Skaičiavimo sistemos pagrindu (žym. h) vadiname skirtingų vartojamų skaitmenų kiekį. Skaičiaus n skaičiavimo sistemos pagrindą žymime $n_{(h)}$.

Algoritmas – tai tam tikra veiksmų seka, kurią reikia atlikti norint pasiekti tam tikrą rezultatą.

PRIEDAI

```
>> [k, seka] = Kolatso(27)
k =
    111
seka =
Columns 1 through 11
    27    51    41    124    62    31    94    47    142    71    214
Columns 12 through 22
    107    322    161    484    242    121    364    182    51    274    137
Columns 23 through 33
    412    206    103    310    155    466    233    700    350    175    526
Columns 34 through 44
    263    790    395    1186    593    1730    890    445    1335    668    334
Columns 45 through 55
    167    502    251    754    377    1132    566    283    850    425    1276
Columns 56 through 66
    633    319    358    479    1438    719    2158    1079    3233    1619    4358
Columns 67 through 77
    2429    7288    3644    10222    5111    27344    13672    41022    20511    61544    30772
Columns 78 through 88
    9282    4641    2300    1154    577    1732    866    433    1803    900    325
Columns 89 through 99
    975    488    244    122    61    134    62    46    23    76    25
Columns 100 through 110
    105    53    160    80    40    20    10    5    15    8    4
Columns 111 through 112
    2    1
```

9 pav.: Tiesioginis Kolatso uždavinys skaičiui 27.

```
>> [k, seka] = Terras(27)
k =
    70

seka =
Columns 1 through 11
    27    41    62    31    47    71    107    161    242    121    182
Columns 12 through 22
    91    137    206    103    155    233    350    175    263    395    593
Columns 23 through 33
   890    445    668    334    167    251    377    566    283    425    638
Columns 34 through 44
   319    479    719    1079    1619    2429    3644    1822    911    1367    2051
Columns 45 through 55
  3077   4616   2308   1154    577    866    433    650    325    488    244
Columns 56 through 66
   122    61    92    46    23    35    53    80    40    20    10
Columns 67 through 71
     5     8     4     2     1
```

10 pav.: Programinio kodo Terro rezultatas skaičiui 27.

```

function [k, g, seka, sek] = Terrasmax(n)

seka(1) = n; % pradinio skaičiaus vieta sekoje.
sek(1)=n; % pradinio skaičiaus vieta sekoje.
i = 2; % kito skaičiaus vieta sekoje.

while seka(i-1) ~= 1
    if mod(seka(i-1), 2) == 0
        seka(i) = seka(i-1)/2;
    else
        seka(i) = (3*seka(i-1) + 1)/2;
    end
    i = i+1;
    M = max(seka); % nustato sekos didžiausią reikšmę.
end
i = 2;
while sek(i-1) > (n-1) % ciklas kartojamas kol gauta iteracija yra mažesnė už nagrinėjamą skaičių.
    if mod(sek(i-1), 2) == 0
        sek(i) = sek(i-1)/2;
    else
        sek(i) = (3*sek(i-1) + 1)/2;
    end
    i = i+1;
end
k = (length(seka)-1);
g = (length(sek)-1); %iteracijų kiekis kai randama mažesnė iteraciją.
disp('Didz_reiksme: ');
disp(M);

```

11 pav.: Modifikuoto Kolatso uždavinio programinis kodas skirtas iteracijų aukščių, sustojimo laikų bei visiško sustojimo laikų radimui.

2 lentelė: Iteracijų $T^{(k)}(n)$ elgsena dešimtainėje sistemoje.

n	$\sigma(n)$	$\sigma_{\infty}(n)$	s(n)	n	$\sigma(n)$	$\sigma_{\infty}(n)$	$s(n)$
97	2	75	4616	7082	1	78	7082
98	1	18	98	7083	5	40	15938
99	4	18	224	7084	1	40	7084
100	1	18	10	7085	2	40	10628
101	2	18	158	7086	1	40	11960
102	1	18	116	7087	8	40	35882
103	42	46	4616	7088	1	40	7088
1120	1	15	1120	7089	2	40	10634
1121	2	31	2132	7090	1	40	7090
1122	1	31	1122	7091	4	40	15956
1123	4	31	2528	7092	1	40	7092
1124	1	31	1124	7093	2	40	10640
1125	2	31	1688	7094	1	40	13472
1126	1	31	1126	7095	5	40	23948
1127	20	88	10844	7096	1	40	7096
3201	2	107	8666	7097	2	40	11978
3202	1	42	3202	7098	1	40	7098
3203	4	42	7208	7099	7	40	17972
3204	1	42	3204	7100	1	59	22760
3205	2	42	4808	7101	2	59	22760
3206	1	42	3608	7102	1	59	26972
3207	7	34	10826	7103	16	93	91034

3 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 6_{13} .

1) $\frac{6_{13}}{2_{13}} = 3_{13}$	2) $\frac{3_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 5_{13}$	3) $\frac{5_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 8_{13}$	4) $\frac{8_{13}}{2_{13}} = 4_{13}$
5) $\frac{4_{13}}{2_{13}} = 2_{13}$	6) $\frac{2_{13}}{2_{13}} = 1_{13}$		

4 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui $2B_{13}$.

1) $\frac{2B_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 44_{13}$	2) $\frac{44_{13}}{2_{13}} = 22_{13}$	3) $\frac{22_{13}}{2_{13}} = 11_{13}$
4) $\frac{11_{13}}{2_{13}} = 7_{13}$	5) $\frac{7_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = B_{13}$	6) $\frac{B_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 14_{13}$
7) $\frac{14_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 20_{13}$	8) $\frac{20_{13}}{2_{13}} = 10_{13}$	9) $\frac{10_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 17_{13}$
10) $\frac{17_{13}}{2_{13}} = A_{13}$	11) $\frac{A_{13}}{2_{13}} = 5_{13}$	12) $\frac{5_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 8_{13}$
13) $\frac{8_{13}}{2_{13}} = 4_{13}$	15) $\frac{4_{13}}{2_{13}} = 2_{13}$	16) $\frac{2_{13}}{2_{13}} = 1_{13}$

5 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 291_{13} .

1) $\frac{291_{13}}{2_{13}} = 147_{13}$	2) $\frac{147_{13}}{2_{13}} = 8A_{13}$	3) $\frac{8A_{13}}{2_{13}} = 45_{13}$
4) $\frac{45_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 6B_{13}$	5) $\frac{6B_{13}}{2_{13}} = 34_{13}$	6) $\frac{34_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 50_{13}$
7) $\frac{50_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 77_{13}$	8) $\frac{77_{13}}{2_{13}} = 3A_{13}$	9) $\frac{3A_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 59_{13}$
10) $\frac{59_{13}}{2_{13}} = 2B_{13}$	11) $\frac{2B_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 44_{13}$	12) $\frac{44_{13}}{2_{13}} = 22_{13}$
13) $\frac{22_{13}}{2_{13}} = 11_{13}$	14) $\frac{11_{13}}{2_{13}} = 7_{13}$	15) $\frac{7_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = B_{13}$
16) $\frac{B_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 14_{13}$	17) $\frac{14_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 20_{13}$	18) $\frac{20_{13}}{2_{13}} = 10_{13}$
19) $\frac{10_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 17_{13}$	20) $\frac{17_{13}}{2_{13}} = A_{13}$	21) $\frac{A_{13}}{2_{13}} = 5_{13}$
22) $\frac{5_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 8_{13}$	23) $\frac{8_{13}}{2_{13}} = 4_{13}$	24) $\frac{4_{13}}{2_{13}} = 2_{13}$
25) $\frac{2_{13}}{2_{13}} = 1_{13}$		

6 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 1177_{13} .

1) $\frac{1177_{13}}{2_{13}} = 73A_{13}$	2) $\frac{73A_{13}}{2_{13}} = 385_{13}$	3) $\frac{385_{13}}{2_{13}} = 1A9_{13}$
4) $\frac{1A9_{13}}{2_{13}} = BB_{13}$	5) $\frac{BB_{13}}{2_{13}} = 5C_{13}$	6) $\frac{5C_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 8C_{13}$
7) $\frac{8C_{13}}{2_{13}} = 46_{13}$	8) $\frac{46_{13}}{2_{13}} = 23_{13}$	9) $\frac{23_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 35_{13}$
10) $\frac{35_{13}}{2_{13}} = 19_{13}$	11) $\frac{19_{13}}{2_{13}} = B_{13}$	12) $\frac{B_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 14_{13}$
13) $\frac{14_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 20_{13}$	14) $\frac{20_{13}}{2_{13}} = 10_{13}$	15) $\frac{10_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 17_{13}$
16) $\frac{17_{13}}{2_{13}} = A_{13}$	17) $\frac{A_{13}}{2_{13}} = 5_{13}$	18) $\frac{5_{13} \cdot 3_{13} + 1_{13}}{2_{13}} = 8_{13}$
19) $\frac{8_{13}}{2_{13}} = 4_{13}$	20) $\frac{4_{13}}{2_{13}} = 2_{13}$	21) $\frac{2_{13}}{2_{13}} = 1_{13}$

7 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui $75C4_{13}$.

1) $\frac{75C4_{13}}{2_{13}} = 3962_{13}$	2) $\frac{3962_{13}}{2_{13}} = 1B31_{13}$	3) $\frac{1B31_{13}}{2_{13}} = C17_{13}$
4) $\frac{C17_{13}}{2_{13}} = 60A_{13}$	5) $\frac{60A_{13}}{2_{13}} = 305_{13}$	6) $\frac{305_{13}}{2_{13}} = 169_{13}$
7) $\frac{169_{13}}{2_{13}} = 9B_{13}$	8) $\frac{9B_{13}}{2_{13}} = 4C_{13}$	9) $\frac{4C_{13}}{2_{13}} = 26_{13}$
10) $\frac{26_{13}}{2_{13}} = 13_{13}$	11) $\frac{13_{13}}{2_{13}} = 8_{13}$	12) $\frac{8_{13}}{2_{13}} = 4_{13}$
13) $\frac{4_{13}}{2_{13}} = 2_{13}$	14) $\frac{2_{13}}{2_{13}} = 1_{13}$	

8 lentelė: Iteracijos $T^{(k)}(n)$ tryliktainėje sistemoje.

n	$\sigma(n)$	$\sigma_{\infty}(n)$	$s(n)$
C_{13}	1	7	C_{13}
10_{13}	2	7	17_{13}
11_{13}	1	12	20_{13}
12_{13}	7	12	62_{13}
13_{13}	1	4	13_{13}
14_{13}	2	9	20_{13}
208_{13}	1	23	208_{13}
209_{13}	10	80	2141_{13}
$20A_{13}$	1	23	$20A_{13}$
$20B_{13}$	2	23	301_{13}
$20C_{13}$	1	53	2141_{13}
210_{13}	8	53	2141_{13}
211_{13}	1	15	211_{13}
856_{13}	7	44	3386_{13}
857_{13}	1	25	857_{13}
858_{13}	2	20	$C86_{13}$
859_{13}	1	20	$A91_{13}$
$85A_{13}$	4	20	1601_{13}
$85B_{13}$	1	25	$85B_{13}$
$85C_{13}$	2	25	$C8C_{13}$
860_{13}	1	20	$96B_{13}$

9 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 6_{11} .

1) $\frac{6_{11}}{2_{11}} = 3_{11}$	2) $\frac{3_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 5_{11}$	3) $\frac{5_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 8_{11}$	4) $\frac{8_{11}}{2_{11}} = 4_{11}$
5) $\frac{4_{11}}{2_{11}} = 2_{11}$	6) $\frac{2_{11}}{2_{11}} = 1_{11}$		

10 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 34_{11} .

1) $\frac{34_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 51_{11}$	2) $\frac{51_{11}}{2_{11}} = 26_{11}$	3) $\frac{26_{11}}{2_{11}} = 13_{11}$
4) $\frac{13_{11}}{2_{11}} = 7_{11}$	5) $\frac{7_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 10_{11}$	6) $\frac{10_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 16_{11}$
7) $\frac{16_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 24_{11}$	8) $\frac{24_{11}}{2_{11}} = 12_{11}$	9) $\frac{12_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 19_{11}$
10) $\frac{19_{11}}{2_{11}} = A_{11}$	11) $\frac{A_{11}}{2_{11}} = 5_{11}$	12) $\frac{5_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 8_{11}$
13) $\frac{8_{11}}{2_{11}} = 4_{11}$	15) $\frac{4_{11}}{2_{11}} = 2_{11}$	16) $\frac{2_{11}}{2_{11}} = 1_{11}$

11 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 385_{11} .

1) $\frac{385_{11}}{2_{11}} = 198_{11}$	2) $\frac{198_{11}}{2_{11}} = A4_{11}$	3) $\frac{A4_{11}}{2_{11}} = 52_{11}$
4) $\frac{52_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 79_{11}$	5) $\frac{79_{11}}{2_{11}} = 3A_{11}$	6) $\frac{3A_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 5A_{11}$
7) $\frac{5A_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 8A_{11}$	8) $\frac{8A_{11}}{2_{11}} = 45_{11}$	9) $\frac{45_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 68_{11}$
10) $\frac{68_{11}}{2_{11}} = 34_{11}$	11) $\frac{34_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 51_{11}$	12) $\frac{51_{11}}{2_{11}} = 26_{11}$
13) $\frac{26_{11}}{2_{11}} = 13_{11}$	14) $\frac{13_{11}}{2_{11}} = 7_{11}$	15) $\frac{7_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 10_{11}$
16) $\frac{10_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 16_{11}$	17) $\frac{16_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 24_{11}$	18) $\frac{24_{11}}{2_{11}} = 12_{11}$
19) $\frac{12_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 19_{11}$	20) $\frac{19_{11}}{2_{11}} = A_{11}$	21) $\frac{A_{11}}{2_{11}} = 5_{11}$
22) $\frac{5_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 8_{11}$	23) $\frac{8_{11}}{2_{11}} = 4_{11}$	24) $\frac{4_{11}}{2_{11}} = 2_{11}$
25) $\frac{2_{11}}{2_{11}} = 1_{11}$		

12 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 1940_{11} .

1) $\frac{1940_{11}}{2_{11}} = A20_{11}$	2) $\frac{A20_{11}}{2_{11}} = 510_{11}$	3) $\frac{510_{11}}{2_{11}} = 260_{11}$
4) $\frac{260_{11}}{2_{11}} = 130_{11}$	5) $\frac{130_{11}}{2_{11}} = 70_{11}$	6) $\frac{70_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = A6_{11}$
7) $\frac{A6_{11}}{2_{11}} = 53_{11}$	8) $\frac{53_{11}}{2_{11}} = 27_{11}$	9) $\frac{27_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 40_{11}$
10) $\frac{40_{11}}{2_{11}} = 20_{11}$	11) $\frac{20_{11}}{2_{11}} = 10_{11}$	12) $\frac{10_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 16_{11}$
13) $\frac{16_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 24_{11}$	14) $\frac{24_{11}}{2_{11}} = 12_{11}$	15) $\frac{12_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 19_{11}$
16) $\frac{19_{11}}{2_{11}} = A_{11}$	17) $\frac{A_{11}}{2_{11}} = 5_{11}$	18) $\frac{5_{11} \cdot 3_{11} + 1_{11}}{2_{11}} = 8_{11}$
19) $\frac{8_{11}}{2_{11}} = 4_{11}$	20) $\frac{4_{11}}{2_{11}} = 2_{11}$	21) $\frac{2_{11}}{2_{11}} = 1_{11}$

13 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 11345_{11} .

1) $\frac{11345_{11}}{2_{11}} = 6178_{11}$	2) $\frac{6178_{11}}{2_{11}} = 3094_{11}$	3) $\frac{3094_{11}}{2_{11}} = 15A2_{11}$
4) $\frac{15A2_{11}}{2_{11}} = 851_{11}$	5) $\frac{851_{11}}{2_{11}} = 426_{11}$	6) $\frac{426_{11}}{2_{11}} = 213_{11}$
7) $\frac{213_{11}}{2_{11}} = 107_{11}$	8) $\frac{107_{11}}{2_{11}} = 59_{11}$	9) $\frac{59_{11}}{2_{11}} = 2A_{11}$
10) $\frac{2A_{11}}{2_{11}} = 15_{11}$	11) $\frac{15_{11}}{2_{11}} = 8_{11}$	12) $\frac{8_{11}}{2_{11}} = 4_{11}$
13) $\frac{4_{11}}{2_{11}} = 2_{11}$	14) $\frac{2_{11}}{2_{11}} = 1_{11}$	

14 lentelė: Iteracijos $T^{(k)}(n)$ vienuoliktainėje sistemoje.

n	$\sigma(n)$	$\sigma_{\infty}(n)$	$s(n)$
11_{11}	1	7	11_{11}
12_{11}	2	7	19_{11}
13_{11}	1	12	24_{11}
14_{11}	7	12	73_{11}
15_{11}	1	4	15_{11}
16_{11}	2	9	24_{11}
295_{11}	1	23	295_{11}
296_{11}	10	80	3517_{11}
297_{11}	1	23	297_{11}
298_{11}	2	23	422_{11}
299_{11}	1	53	3517_{11}
$29A_{11}$	8	53	3517_{11}
$2A0_{11}$	1	15	$2A0_{11}$
1084_{11}	7	44	5463_{11}
1085_{11}	1	25	1085_{11}
1086_{11}	2	20	1674_{11}
1087_{11}	1	20	$13A4_{11}$
1088_{11}	4	20	2460_{11}
1089_{11}	1	25	1086_{11}
$108A_{11}$	2	25	$167A_{11}$
1090_{11}	1	20	1234_{11}

15 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 6_9 .

1) $\frac{6_9}{2_9} = 3_9$	2) $\frac{3_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 5_9$	3) $\frac{5_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 8_9$	4) $\frac{8_9}{2_9} = 4_9$
5) $\frac{4_9}{2_9} = 2_9$	6) $\frac{2_9}{2_9} = 1_9$		

16 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 41_9 .

1) $\frac{41_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 62_9$	2) $\frac{62_9}{2_9} = 31_9$	3) $\frac{31_9}{2_9} = 15_9$	4) $\frac{15_9}{2_9} = 7_9$
5) $\frac{7_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 12_9$	6) $\frac{12_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 18_9$	7) $\frac{18_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 28_9$	8) $\frac{28_9}{2_9} = 14_9$
9) $\frac{14_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 22_9$	10) $\frac{22_9}{2_9} = 11_9$	11) $\frac{11_9}{2_9} = 5_9$	12) $\frac{5_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 8_9$
13) $\frac{8_9}{2_9} = 4_9$	15) $\frac{4_9}{2_9} = 2_9$	16) $\frac{2_9}{2_9} = 1_9$	

17 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 556_9 .

1) $\frac{556_9}{2_9} = 273_9$	2) $\frac{273_9}{2_9} = 136_9$	3) $\frac{136_9}{2_9} = 63_9$
4) $\frac{63_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 105_9$	5) $\frac{105_9}{2_9} = 47_9$	6) $\frac{47_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 72_9$
7) $\frac{72_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 118_9$	8) $\frac{118_9}{2_9} = 54_9$	9) $\frac{54_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 82_9$
10) $\frac{82_9}{2_9} = 41_9$	11) $\frac{41_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 62_9$	12) $\frac{62_9}{2_9} = 31_9$
13) $\frac{31_9}{2_9} = 15_9$	14) $\frac{15_9}{2_9} = 7_9$	15) $\frac{7_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 12_9$
16) $\frac{12_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 18_9$	17) $\frac{18_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 28_9$	18) $\frac{28_9}{2_9} = 14_9$
19) $\frac{14_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 22_9$	20) $\frac{22_9}{2_9} = 11_9$	21) $\frac{11_9}{2_9} = 5_9$
22) $\frac{5_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 8_9$	23) $\frac{8_9}{2_9} = 4_9$	24) $\frac{4_9}{2_9} = 2_9$
25) $\frac{2_9}{2_9} = 1_9$		

18 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 3337_9 .

1) $\frac{3337_9}{2_9} = 1618_9$	2) $\frac{1618_9}{2_9} = 754_9$	3) $\frac{754_9}{2_9} = 372_9$
4) $\frac{372_9}{2_9} = 181_9$	5) $\frac{181_9}{2_9} = 85_9$	6) $\frac{85_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 138_9$
7) $\frac{138_9}{2_9} = 64_9$	8) $\frac{64_9}{2_9} = 32_9$	9) $\frac{32_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 48_9$
10) $\frac{48_9}{2_9} = 24_9$	11) $\frac{24_9}{2_9} = 12_9$	12) $\frac{12_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 18_9$
13) $\frac{18_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 28_9$	14) $\frac{28_9}{2_9} = 14_9$	15) $\frac{14_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 22_9$
16) $\frac{22_9}{2_9} = 11_9$	17) $\frac{11_9}{2_9} = 5_9$	18) $\frac{5_9 \cdot 3_9 + 1_9}{2_9} = 8_9$
19) $\frac{8_9}{2_9} = 4_9$	20) $\frac{4_9}{2_9} = 2_9$	21) $\frac{2_9}{2_9} = 1_9$

19 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 24424₉.

1) $\frac{24424_9}{2_9} = 12212_9$	2) $\frac{12212_9}{2_9} = 5551_9$	3) $\frac{5551_9}{2_9} = 2725_9$	4) $\frac{2725_9}{2_9} = 1357_9$
5) $\frac{1357_9}{2_9} = 628_9$	6) $\frac{628_9}{2_9} = 314_9$	7) $\frac{314_9}{2_9} = 152_9$	8) $\frac{152_9}{2_9} = 71_9$
9) $\frac{71_9}{2_9} = 35_9$	10) $\frac{35_9}{2_9} = 17_9$	11) $\frac{17_9}{2_9} = 8_9$	12) $\frac{8_9}{2_9} = 4_9$
13) $\frac{4_9}{2_9} = 2_9$	14) $\frac{2_9}{2_9} = 1_9$		

20 lentelė: Iteracijos $T^{(k)}(n)$ devynetaisioje sistemoje.

n	$\sigma(n)$	$\sigma_\infty(n)$	$s(n)$
13_9	1	7	13_9
14_9	2	7	22_9
15_9	1	12	28_9
16_9	7	12	88_9
17_9	1	4	17_9
18_9	2	9	28_9
424_9	1	23	424_9
425_9	10	80	6288_9
426_9	1	23	426_9
427_9	2	23	624_9
428_9	1	53	6288_9
430_9	8	53	6288_9
431_9	1	15	431_9
1851_9	7	44	10788_9
1852_9	1	25	1852_9
1853_9	2	20	2835_9
1854_9	1	20	2428_9
1855_9	4	20	4358_9
1856_9	1	25	1856_9
1857_9	2	25	2842_9
1858_9	1	20	2178_9

21 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 6_8 .

1) $\frac{6_8}{2_8} = 3_8$	2) $\frac{3_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 5_8$	3) $\frac{5_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 10_8$	4) $\frac{10_8}{2_8} = 4_8$
5) $\frac{4_8}{2_8} = 2_8$	6) $\frac{2_8}{2_8} = 1_8$		

22 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 45_8 .

1) $\frac{45_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 70_8$	2) $\frac{70_8}{2_8} = 34_8$	3) $\frac{34_8}{2_8} = 16_8$
4) $\frac{16_8}{2_8} = 7_8$	5) $\frac{7_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 13_8$	6) $\frac{13_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 21_8$
7) $\frac{21_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 32_8$	8) $\frac{32_8}{2_8} = 15_8$	9) $\frac{15_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 24_8$
10) $\frac{24_8}{2_8} = 12_8$	11) $\frac{12_8}{2_8} = 5_8$	12) $\frac{5_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 10_8$
13) $\frac{10_8}{2_8} = 4_8$	15) $\frac{4_8}{2_8} = 2_8$	16) $\frac{2_8}{2_8} = 1_8$

23 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 710_8 .

1) $\frac{710_8}{2_8} = 344_8$	2) $\frac{344_8}{2_8} = 162_8$	3) $\frac{162_8}{2_8} = 71_8$
4) $\frac{71_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 126_8$	5) $\frac{126_8}{2_8} = 53_8$	6) $\frac{53_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 101_8$
7) $\frac{101_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 142_8$	8) $\frac{142_8}{2_8} = 61_8$	9) $\frac{61_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 112_8$
10) $\frac{112_8}{2_8} = 45_8$	11) $\frac{45_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 70_8$	12) $\frac{70_8}{2_8} = 34_8$
13) $\frac{34_8}{2_8} = 16_8$	14) $\frac{16_8}{2_8} = 7_8$	15) $\frac{7_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 13_8$
16) $\frac{13_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 21_8$	17) $\frac{21_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 32_8$	18) $\frac{32_8}{2_8} = 15_8$
19) $\frac{15_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 24_8$	20) $\frac{24_8}{2_8} = 12_8$	21) $\frac{12_8}{2_8} = 5_8$
22) $\frac{5_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 10_8$	23) $\frac{8_8}{2_8} = 4_8$	24) $\frac{4_8}{2_8} = 2_8$
25) $\frac{2_8}{2_8} = 1_8$		

24 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 4640_8 .

1) $\frac{4640_8}{2_8} = 2320_8$	2) $\frac{2320_8}{2_8} = 1150_8$	3) $\frac{1150_8}{2_8} = 464_8$
4) $\frac{464_8}{2_8} = 232_8$	5) $\frac{232_8}{2_8} = 115_8$	6) $\frac{115_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 164_8$
7) $\frac{164_8}{2_8} = 72_8$	8) $\frac{72_8}{2_8} = 35_8$	9) $\frac{35_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 54_8$
10) $\frac{54_8}{2_8} = 26_8$	11) $\frac{26_8}{2_8} = 13_8$	12) $\frac{13_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 21_8$
13) $\frac{21_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 32_8$	14) $\frac{32_8}{2_8} = 15_8$	15) $\frac{15_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 24_8$
16) $\frac{24_8}{2_8} = 12_8$	17) $\frac{12_8}{2_8} = 5_8$	18) $\frac{5_8 \cdot 3_8 + 1_8}{2_8} = 10_8$
19) $\frac{10_8}{2_8} = 4_8$	20) $\frac{4_8}{2_8} = 2_8$	21) $\frac{2_8}{2_8} = 1_8$

25 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 40000_8 .

1) $\frac{40000_8}{2_8} = 20000_8$	2) $\frac{20000_8}{2_8} = 10000_8$	3) $\frac{10000_8}{2_8} = 4000_8$
4) $\frac{4000_8}{2_8} = 2000_8$	5) $\frac{2000_8}{2_8} = 1000_8$	6) $\frac{1000_8}{2_8} = 400_8$
7) $\frac{400_8}{2_8} = 200_8$	8) $\frac{200_8}{2_8} = 100_8$	9) $\frac{100_8}{2_8} = 40_8$
10) $\frac{40_8}{2_8} = 20_8$	11) $\frac{20_8}{2_8} = 10_8$	12) $\frac{10_8}{2_8} = 4_8$
13) $\frac{4_8}{2_8} = 2_8$	14) $\frac{2_8}{2_8} = 1_8$	

26 lentelė: Iteracijos $T^{(k)}(n)$ aštuonetainėje sistemoje.

n	$\sigma(n)$	$\sigma_\infty(n)$	$s(n)$
14_8	1	7	14_8
15_8	2	7	24_8
16_8	1	12	32_8
17_8	7	12	120_8
20_8	1	4	20_8
21_8	2	9	32_8
532_8	1	23	532_8
533_8	10	80	11010_8
534_8	1	23	534_8
535_8	2	23	774_8
536_8	1	53	11010_8
537_8	8	53	11010_8
540_8	1	15	540_8
2617_8	7	44	16050_8
2620_8	1	25	2620_8
2621_8	2	20	4132_8
2622_8	1	20	2428_8
2623_8	4	20	3420_8
2624_8	1	25	1856_8
2625_8	2	25	2624_8
2626_8	1	20	3112_8

27 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 11_5 .

1) $\frac{11_5}{2_5} = 3_5$	2) $\frac{3_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 10_5$	3) $\frac{10_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 13_5$	4) $\frac{13_5}{2_5} = 4_5$
5) $\frac{4_5}{2_5} = 2_5$	6) $\frac{2_5}{2_5} = 1_5$		

28 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 122_5 .

1) $\frac{122_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 211_5$	2) $\frac{211_5}{2_5} = 103_5$	3) $\frac{103_5}{2_5} = 24_5$
4) $\frac{24_5}{2_5} = 12_5$	5) $\frac{12_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 21_5$	6) $\frac{21_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 32_5$
7) $\frac{32_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 101_5$	8) $\frac{101_5}{2_5} = 23_5$	9) $\frac{23_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 40_5$
10) $\frac{40_5}{2_5} = 20_5$	11) $\frac{20_5}{2_5} = 10_5$	12) $\frac{10_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 13_5$
13) $\frac{13_5}{2_5} = 4_5$	15) $\frac{4_5}{2_5} = 2_5$	16) $\frac{2_5}{2_5} = 1_5$

29 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 3311_5 .

1) $\frac{3311_5}{2_5} = 1403_5$	2) $\frac{1403_5}{2_5} = 424_5$	3) $\frac{424_5}{2_5} = 212_5$
4) $\frac{212_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 321_5$	5) $\frac{321_5}{2_5} = 133_5$	6) $\frac{133_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 230_5$
7) $\frac{230_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 343_5$	8) $\frac{343_5}{2_5} = 144_5$	9) $\frac{144_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 244_5$
10) $\frac{244_5}{2_5} = 122_5$	11) $\frac{122_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 211_5$	12) $\frac{211_5}{2_5} = 103_5$
13) $\frac{103_5}{2_5} = 24_5$	14) $\frac{24_5}{2_5} = 12_5$	15) $\frac{12_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 21_5$
16) $\frac{21_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 32_5$	17) $\frac{32_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 101_5$	18) $\frac{101_5}{2_5} = 23_5$
19) $\frac{23_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 40_5$	20) $\frac{40_5}{2_5} = 20_5$	21) $\frac{20_5}{2_5} = 10_5$
22) $\frac{10_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 13_5$	23) $\frac{13_5}{2_5} = 4_5$	24) $\frac{4_5}{2_5} = 2_5$
25) $\frac{2_5}{2_5} = 1_5$		

30 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 34324_5 .

1) $\frac{34324_5}{2_5} = 11412_5$	2) $\frac{11412_5}{2_5} = 4431_5$	3) $\frac{4431_5}{2_5} = 2213_5$
4) $\frac{2213_5}{2_5} = 1104_5$	5) $\frac{1104_5}{2_5} = 302_5$	6) $\frac{302_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 431_5$
7) $\frac{431_5}{2_5} = 213_5$	8) $\frac{213_5}{2_5} = 104_5$	9) $\frac{104_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 134_5$
10) $\frac{134_5}{2_5} = 42_5$	11) $\frac{42_5}{2_5} = 21_5$	12) $\frac{21_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 32_5$
13) $\frac{32_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 101_5$	14) $\frac{101_5}{2_5} = 23_5$	15) $\frac{23_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 40_5$
16) $\frac{40_5}{2_5} = 20_5$	17) $\frac{20_5}{2_5} = 10_5$	18) $\frac{10_5 \cdot 3_5 + 1_5}{2_5} = 13_5$
19) $\frac{13_5}{2_5} = 4_5$	20) $\frac{4_5}{2_5} = 2_5$	21) $\frac{2_5}{2_5} = 1_5$

31 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 1011014_5 .

1) $\frac{1011014_5}{2_5} = 230232_5$	2) $\frac{230232_5}{2_5} = 112341_5$	3) $\frac{112341_5}{2_5} = 31143_5$
4) $\frac{33143_5}{2_5} = 13044_5$	5) $\frac{13044_5}{2_5} = 4022_5$	6) $\frac{4022_5}{2_5} = 2011_5$
7) $\frac{2011_5}{2_5} = 1003_5$	8) $\frac{1003_5}{2_5} = 224_5$	9) $\frac{224_5}{2_5} = 112_5$
10) $\frac{112_5}{2_5} = 31_5$	11) $\frac{31_5}{2_5} = 13_5$	12) $\frac{13_5}{2_5} = 4_5$
13) $\frac{4_5}{2_5} = 2_5$	14) $\frac{2_5}{2_5} = 1_5$	

32 lentelė: Iteracijos $T^{(k)}(n)$ penketainėje sistemoje.

n	$\sigma(n)$	$\sigma_\infty(n)$	$s(n)$
22_5	1	7	22_5
23_5	2	7	40_5
24_5	1	12	101_5
30_5	7	12	301_5
31_5	1	4	31_5
32_5	2	9	101_5
2341_5	1	23	2341_5
2342_5	10	80	121431_5
2343_5	1	23	2343_5
2344_5	2	23	4044_5
2400_5	1	53	121431_5
2401_5	8	53	121431_5
2402_5	1	15	2402_5
21143_5	7	44	212313_5
21144_5	1	25	21144_5
21200_5	2	20	32023_5
21201_5	1	20	24213_5
21202_5	4	20	100322_5
21203_5	1	25	21203_5
21204_5	2	25	32034_5
21210_5	1	20	22420_5

33 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 110_2 .

1) $\frac{110_2}{10_2} = 11_2$	2) $\frac{11_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101_2$	3) $\frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1000_2$
4) $\frac{1000_2}{10_2} = 100_2$	5) $\frac{100_2}{10_2} = 10_2$	6) $\frac{10_2}{10_2} = 1_2$

34 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 100101_2 .

1) $\frac{100101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 111000_2$	2) $\frac{111000_2}{10_2} = 11100_2$	3) $\frac{11100_2}{10_2} = 1110_2$
4) $\frac{1110_2}{10_2} = 111_2$	5) $\frac{111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1011_2$	6) $\frac{1011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001_2$
7) $\frac{10001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11010_2$	8) $\frac{11010_2}{10_2} = 1101_2$	9) $\frac{1101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10100_2$
10) $\frac{10100_2}{10_2} = 1010_2$	11) $\frac{1010_2}{10_2} = 101_2$	12) $\frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1000_2$
13) $\frac{1000_2}{10_2} = 100_2$	15) $\frac{100_2}{10_2} = 10_2$	
16) $\frac{10_2}{10_2} = 1_2$		

35 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 111001000_2 .

1) $\frac{111001000_2}{10_2} = 11100100_2$	2) $\frac{11100100_2}{10_2} = 1110010_2$
3) $\frac{1110010_2}{10_2} = 111001_2$	4) $\frac{111001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1010110_2$
5) $\frac{1010110_2}{10_2} = 101011_2$	6) $\frac{101011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1000001_2$
7) $\frac{1000001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1100010_2$	8) $\frac{1100010_2}{10_2} = 110001_2$
9) $\frac{110001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1001010_2$	10) $\frac{1001010_2}{10_2} = 100101_2$
11) $\frac{100101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 111000_2$	12) $\frac{111000_2}{10_2} = 11100_2$
13) $\frac{11100_2}{10_2} = 1110_2$	14) $\frac{1110_2}{10_2} = 111_2$
15) $\frac{111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1011_2$	16) $\frac{1011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001_2$
17) $\frac{10001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11010_2$	18) $\frac{11010_2}{10_2} = 1101_2$
19) $\frac{1101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10100_2$	20) $\frac{10100_2}{10_2} = 1010_2$
21) $\frac{1010_2}{10_2} = 101_2$	22) $\frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1000_2$
23) $\frac{1000_2}{10_2} = 100_2$	24) $\frac{100_2}{10_2} = 10_2$
25) $\frac{10_2}{10_2} = 1_2$	

36 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 100110100000_2 .

1) $\frac{100110100000_2}{10_2} = 10011010000_2$	2) $\frac{10011010000_2}{10_2} = 1001101000_2$
3) $\frac{1001101000_2}{10_2} = 100110100_2$	4) $\frac{100110100_2}{10_2} = 10011010_2$
5) $\frac{10011010_2}{10_2} = 1001101_2$	6) $\frac{1001101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1110100_2$
7) $\frac{1110100_2}{10_2} = 111010_2$	8) $\frac{111010_2}{10_2} = 11101_2$
9) $\frac{11101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101100_2$	10) $\frac{101100_2}{10_2} = 10110_2$
11) $\frac{10110_2}{10_2} = 1011_2$	12) $\frac{1011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001_2$
13) $\frac{10001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11010_2$	14) $\frac{11010_2}{10_2} = 1101_2$
15) $\frac{1101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10100_2$	16) $\frac{10100_2}{10_2} = 1010_2$
17) $\frac{1010_2}{10_2} = 101_2$	18) $\frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1000_2$
19) $\frac{1000_2}{10_2} = 100_2$	20) $\frac{100_2}{10_2} = 10_2$
21) $\frac{10_2}{10_2} = 1_2$	

37 lentelė: Modifikuoto uždavinio pritaikymas skaičiui 1000000000000000_2 .

1) $\frac{1000000000000000_2}{10_2} = 100000000000000_2$	2) $\frac{100000000000000_2}{10_2} = 10000000000000_2$
3) $\frac{10000000000000_2}{10_2} = 1000000000000_2$	4) $\frac{1000000000000_2}{10_2} = 100000000000_2$
5) $\frac{10000000000_2}{10_2} = 1000000000_2$	6) $\frac{1000000000_2}{10_2} = 100000000_2$
7) $\frac{100000000_2}{10_2} = 10000000_2$	8) $\frac{10000000_2}{10_2} = 1000000_2$
9) $\frac{1000000_2}{10_2} = 100000_2$	10) $\frac{100000_2}{10_2} = 10000_2$
11) $\frac{10000_2}{10_2} = 1000_2$	12) $\frac{1000_2}{10_2} = 100_2$
13) $\frac{100_2}{10_2} = 10_2$	14) $\frac{10_2}{10_2} = 1_2$

38 lentelė: Iteracijos $T^{(k)}(n)$ dvejetainėje sistemoje.

n	$\sigma(n)$	$\sigma_{\infty}(n)$	$s(n)$
1100_2	1	7	1100_2
1101_2	2	7	10100_2
1110_2	1	12	11010_2
1111_2	7	12	1001100_2
10000_2	1	4	10000_2
10001_2	2	9	11010_2
101011010_2	1	23	101011010_2
101011011_2	10	80	1001000001000_2
101011100_2	1	23	101011100_2
101011101_2	2	23	1000001100_2
101011110_2	1	53	1001000001000_2
101011111_2	8	53	1001000001000_2
101100000_2	1	15	101100000_2
10110001111_2	7	44	1110000101000_2
10110010000_2	1	25	10110010000_2
10110010001_2	2	20	100001011010_2
10110010010_2	1	20	11100010000_2
10110010011_2	4	20	110010001100_2
10110010100_2	1	25	10110010100_2
10110010101_2	2	25	100001100000_2
10110010110_2	1	20	11001001010_2

39 lentelė: Kolatso uždavinio analogo pritaikymas skaičiui 11_2 .

$$1) \quad \frac{11_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101_2 \quad \Bigg| \quad 2) \quad \frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 1_2 \quad \Bigg|$$

40 lentelė: Kolatso uždavinio analogo pritaikymas skaičiui 111_2 .

$$\begin{array}{|l} 1) \quad \frac{111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1011_2 \\ 4) \quad \frac{1101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 101_2 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{|l} 2) \quad \frac{1011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001_2 \\ 5) \quad \frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 1_2 \end{array} \quad \Bigg| \quad 3) \quad \frac{10001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 1101_2$$

41 lentelė: Kolatso uždavinio analogo pritaikymas skaičiui 1111_2 .

$$\begin{array}{|l} 1) \quad \frac{1111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10111_2 \\ 3) \quad \frac{100011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110101_2 \\ 5) \quad \frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 1_2 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{|l} 2) \quad \frac{10111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100011_2 \\ 4) \quad \frac{110101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{510}} = 101_2 \end{array}$$

42 lentelė: Kolatso uždavinio analogo pritaikymas skaičiui 11111_2 .

$$\begin{array}{|l} 1) \quad \frac{11111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101111_2 \\ 2) \quad \frac{101111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1000111_2 \\ 3) \quad \frac{1000111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1101011_2 \\ 4) \quad \frac{1101011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10100001_2 \\ 5) \quad \frac{10100001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 1111001_2 \\ 6) \quad \frac{1111001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 1011011_2 \\ 7) \quad \frac{1011011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001001_2 \\ 8) \quad \frac{10001001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 1100111_2 \\ 9) \quad \frac{1100111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10011011_2 \\ 10) \quad \frac{10011011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1101001_2 \\ 11) \quad \frac{11101001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 10101111_2 \\ 12) \quad \frac{10101111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100000111_2 \\ 13) \quad \frac{100000111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110001011_2 \\ 14) \quad \frac{110001011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1001010001_2 \\ 15) \quad \frac{1001010001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 110111101_2 \\ 16) \quad \frac{110111101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 10100111_2 \end{array}$$

17)	$\frac{10100111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11111011_2$
18)	$\frac{11111011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101111001_2$
19)	$\frac{10111001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 100011011_2$
20)	$\frac{100011011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110101001_2$
21)	$\frac{110101001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 100111111_2$
22)	$\frac{100111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 111011111_2$
23)	$\frac{111011111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1011001111_2$
24)	$\frac{1011001111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10000110111_2$
25)	$\frac{10000110111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11001010011_2$
26)	$\frac{11001010011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100101111101_2$
27)	$\frac{100101111101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 1110001111_2$
28)	$\frac{1110001111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10101010111_2$
29)	$\frac{10101010111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100000000011_2$
30)	$\frac{100000000011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110000000101_2$
31)	$\frac{110000000101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 1001000001_2$
32)	$\frac{1001000001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 110110001_2$
33)	$\frac{110110001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 101000101_2$
34)	$\frac{101000101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 111101_2$
35)	$\frac{111101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 10111_2$
36)	$\frac{10111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100011_2$
37)	$\frac{100011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110101_2$
38)	$\frac{110101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{510}} = 101_2$
39)	$\frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 1_2$

43 lentelė: Kolatso uždavinių analogo pritaikymas skaičiui 111111₂.

1)	$\frac{111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1011111_2$
2)	$\frac{1011111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001111_2$
3)	$\frac{10001111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11010111_2$
4)	$\frac{11010111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101000011_2$
5)	$\frac{101000011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 111100101_2$
6)	$\frac{111100101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 1011011_2$

7)	$\frac{1011011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001001_2$
8)	$\frac{10001001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 1100111_2$
9)	$\frac{1100111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10011011_2$
10)	$\frac{10011011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1101001_2$
11)	$\frac{11101001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 10101111_2$
12)	$\frac{10101111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100000111_2$
13)	$\frac{100000111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110001011_2$
14)	$\frac{110001011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1001010001_2$
15)	$\frac{1001010001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 110111101_2$
16)	$\frac{110111101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 10100111_2$
17)	$\frac{10100111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11111011_2$
18)	$\frac{11111011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101111001_2$
19)	$\frac{101111001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 100011011_2$
20)	$\frac{100011011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110101001_2$
21)	$\frac{110101001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 100111111_2$
22)	$\frac{100111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 111011111_2$
23)	$\frac{111011111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1011001111_2$
24)	$\frac{1011001111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10000110111_2$
25)	$\frac{10000110111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11001010011_2$
26)	$\frac{11001010011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100101111101_2$
27)	$\frac{100101111101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 1110001111_2$
28)	$\frac{1110001111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10101010111_2$
29)	$\frac{10101010111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100000000011_2$
30)	$\frac{100000000011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110000000101_2$
31)	$\frac{110000000101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 1001000001_2$
32)	$\frac{1001000001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 110110001_2$
33)	$\frac{110110001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 101000101_2$
34)	$\frac{101000101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 111101_2$
35)	$\frac{111101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 10111_2$
36)	$\frac{10111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100011_2$
37)	$\frac{100011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110101_2$

38)	$\frac{110101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{5 \cdot 10}} = 101_2$
39)	$\frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{4 \cdot 10}} = 1_2$

44 lentelė: Kolatso uždavinio analogo pritaikymas skaičiui 1111111₂.

1) $\frac{1111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10111111_2$	2) $\frac{10111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100011111_2$
3) $\frac{100011111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110101111_2$	4) $\frac{110101111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1010000111_2$
5) $\frac{1010000111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1111001011_2$	6) $\frac{1111001011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10110110001_2$
7) $\frac{10110110001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{2 \cdot 10}} = 10001000101_2$	8) $\frac{10001000101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{4 \cdot 10}} = 11001101_2$
9) $\frac{11001101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{3 \cdot 10}} = 1001101_2$	10) $\frac{1001101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{3 \cdot 10}} = 11101_2$
11) $\frac{11101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{3 \cdot 10}} = 1011_2$	12) $\frac{1011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001_2$
13) $\frac{10001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{2 \cdot 10}} = 1101_2$	14) $\frac{1101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{3 \cdot 10}} = 101_2$
15) $\frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{4 \cdot 10}} = 1_2$	

45 lentelė: Kolatso uždavinio analogo pritaikymas skaičiui 11111111₂.

1)	$\frac{11111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101111111_2$
2)	$\frac{101111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1000111111_2$
3)	$\frac{1000111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1101011111_2$
4)	$\frac{1101011111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10100001111_2$
5)	$\frac{10100001111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11110010111_2$
6)	$\frac{11110010111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101101100011_2$
7)	$\frac{101101100011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{2 \cdot 10}} = 1000100010101_2$
8)	$\frac{1000100010101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{6 \cdot 10}} = 11001101_2$
9)	$\frac{11001101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{3 \cdot 10}} = 1001101_2$
10)	$\frac{1001101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{3 \cdot 10}} = 11101_2$
11)	$\frac{11101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{3 \cdot 10}} = 1011_2$
12)	$\frac{1011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001_2$
13)	$\frac{10001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{2 \cdot 10}} = 1101_2$
14)	$\frac{1101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{3 \cdot 10}} = 101_2$
15)	$\frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{4 \cdot 10}} = 1_2$

46 lentelė: Kolatso uždavinio analogo pritaikymas skaičiui 11111111₂.

1)	$\frac{11111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101111111_2$
2)	$\frac{101111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001111111_2$
3)	$\frac{10001111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11010111111_2$
4)	$\frac{11010111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 101000011111_2$
5)	$\frac{101000011111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 111100101111_2$
6)	$\frac{111100101111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1011011000111_2$
7)	$\frac{1011011000111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001000101011_2$
8)	$\frac{10001000101011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 11001101000001_2$
9)	$\frac{11001101000001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{10}} = 10011001110001_2$
10)	$\frac{10011001110001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 1110011010101_2$
11)	$\frac{1110011010101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{710}} = 10101101_2$
12)	$\frac{10101101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 1000001_2$
13)	$\frac{1000001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 110001_2$
14)	$\frac{110001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 100101_2$
15)	$\frac{100101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 111_2$
16)	$\frac{111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1011_2$
17)	$\frac{1011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001_2$
18)	$\frac{10001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 1101_2$
19)	$\frac{1101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 101_2$
20)	$\frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 1_2$

47 lentelė: Kolatso uždavinio analogo pritaikymas skaičiui 1111111111₂.

1)	$\frac{1111111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10111111111_2$
2)	$\frac{10111111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100011111111_2$
3)	$\frac{100011111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110101111111_2$
4)	$\frac{110101111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1010000111111_2$
5)	$\frac{1010000111111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1111001011111_2$
6)	$\frac{1111001011111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10110110001111_2$
7)	$\frac{10110110001111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 100010001010111_2$
8)	$\frac{100010001010111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 110011010000011_2$

$$9) \quad \frac{110011010000011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1001100111000101_2$$

$$10) \quad \frac{1001100111000101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 1110011010101_2$$

$$11) \quad \frac{11100111010101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{710}} = 10101101_2$$

$$12) \quad \frac{10101101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 1000001_2$$

$$13) \quad \frac{1000001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 110001_2$$

$$14) \quad \frac{110001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 100101_2$$

$$15) \quad \frac{100101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 111_2$$

$$16) \quad \frac{111_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 1011_2$$

$$17) \quad \frac{1011_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2} = 10001_2$$

$$18) \quad \frac{10001_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{210}} = 1101_2$$

$$19) \quad \frac{1101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{310}} = 101_2$$

$$20) \quad \frac{101_2 \cdot 11_2 + 1_2}{10_2^{410}} = 1_2$$
