

**LIETUVOS MOKSLŲ AKADEMIJA
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS
INSTITUTAS**

232600 Vilnius, Akademijos 4

**ЛИТОВСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ**

232600 Вильнюс, ул. Академийос 4

**LITHUANIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MATHEMATICS
AND INFORMATICS**

4 Akademijos St., Vilnius 232600

R. Januškevičius

**TIKIMYBINIŲ DĖSNIŲ CHARAKTERIZACIJŲ
STABILUMAS**

MONOGRAFIJA

Vilnius Mokslas 1991

R. Yanushkevichius

**STABILITY FOR CHARACTERIZATIONS OF
DISTRIBUTIONS**

Vilnius Mokslas Publishers 1991

Р. В. Янушкявичюс

УСТОЙЧИВОСТЬ
ХАРАКТЕРИЗАЦИЙ
ВЕРОЯТНОСТНЫХ
РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

МОНОГРАФИЯ

ВИЛЬНЮС МОКСЛАС 1991

УДК 519.224.3

Янушкявичюс Р.

Я65 Устойчивость характеристик вероятностных распределений = Tikimybinų dėsnų charakterizacijų stabilumas: Монография / Литов. АН. Ин-т математики и информатики. — Вильнюс: Мокслас, 1991. — 248 с.

Загл. также англ. — Рез.: лит., англ. — Библиогр.: с. 231—243 (235 назв.).

ISBN 5-420-00890-4

Монография посвящена исследованию устойчивости характеристических задач теории вероятностей и математической статистики. Особое внимание уделено новым взаимосвязям между поведением оценок устойчивости в характеристических задачах и своей основой монографии послужил используемый в ней математическими решениями интегральных уравнений типа свертки. Структурной основой монографии послужил используемый в ней математический аппарат. В приложении приводится обзор работ, которые классифицируются по основным направлениям устойчивости характеристик свойствами рассматриваемых статистик.

УДК 519.22

Рецензент доктор физ.-мат. наук, проф. В. М. Золотарев

Выпущено по заказу Института математики и информатики Литовской Академии Наук

Я 1602090000—086 В—91
М 854(08)—91

© Р. В. Янушкявичюс, 1991

ISBN 5-420-00890-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
Глава 1. ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ И ЭФФЕКТ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ	11
§ 1.1. Модель характеристики вероятностных распределений	11
§ 1.2. Эффект устойчивости характеристизационных задач ..	14
§ 1.3. Характеризационные задачи, приводящие к уравне- ниям свертки	22
§ 1.4. Необходимые сведения об уравнениях типа свертки	31
Глава 2. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СВЕРТ- КИ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧАМИ ХАРАКТЕРИЗА- ЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	36
§ 2.1. Уравнение Винера—Хопфа в задачах устойчивости характеризаций распределений	38
§ 2.2. Устойчивость характеристик экспоненциального закона	56
§ 2.3. Оценки устойчивости характеристик смеси рас- пределений	66
§ 2.4. Регрессионные модели	79
§ 2.5. Равнораспределенность линейных статистик	85
Глава 3. ПЕРЕХОД ОТ ОЦЕНОК БЛИЗОСТИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ОЦЕНКАМ В ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТРИКАХ	106
§ 3.1. Процедура растяжения	106
§ 3.2. Примеры применения процедуры растяжения	115
§ 3.3. Об интервале, в котором характеристическая функ- ция не имеет нулей	133
§ 3.4. Расширение интервала в регрессионной модели Е. Лукача	144
Глава 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАСПРЕДЕ- ЛЕНИЙ ЛИШЬ СТАТИСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВА- МИ ФОРМ	152
§ 4.1. Устойчивость характеристизационной теоремы П. Леви	152
§ 4.2. Устойчивость теоремы Д. Пойа	170
§ 4.3. Почти независимость выборочного среднего и выбо- рочной дисперсии	178
§ 4.4. Почти независимость суммы и разности	196
Приложение. ОБЗОР РАБОТ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕ- РИЗАЦИИ СВОЙСТВАМИ СТАТИСТИК	211
Литература	231
Именной указатель	244
Предметный указатель	246

CONTENTS

INTRODUCTION

Chapter 1. CHARACTERIZATION AND STABILITY OF STOCHASTIC MODELS	11
§ 1.1. The model for characterization of probability distributions	11
§ 1.2. Effect of stability	14
§ 1.3. Characterization problems leading to convolution equations	22
§ 1.4. Information on convolution type equations	31
Chapter 2. STABILITY FOR SOLUTIONS OF CONVOLUTION EQUATIONS CONNECTED WITH CHARACTERIZATION PROBLEMS	36
§ 2.1. The Wiener—Hopf equation in the problems of stability of distribution characterizations	38
§ 2.2. Stability of exponential law characterizations	56
§ 2.3. Stability estimations for mixture characterizations	66
§ 2.4. Regression models	79
§ 2.5. Almost identically distributed statistics	85
Chapter 3. TRANSITION FROM ESTIMATES OF PROXIMITY OF FUNCTIONAL EQUATIONS SOLUTIONS TO ESTIMATES IN PROBABILITY METRICS	106
§ 3.1. Procedure of expansion	106
§ 3.2. Examples of application	115
§ 3.3. On the interval in which the characteristic function does not vanish	133
§ 3.4. Procedure of expansion in E. Lukacs theorem	144
Chapter 4. STABILITY OF CHARACTERIZATIONS USING ONLY STATISTICAL PROPERTIES OF THE FORMS	152
§ 4.1. Stability of P. Lévy's characterization theorem	152
§ 4.2. Stability of G. Polya theorem	170
§ 4.3. Almost independence of sample mean and sample dispersion	178
§ 4.4. Almost independence of sum and difference	196
Appendix. A SURVEY OF PAPERS ON CHARACTERIZATION STABILITY	221
References	231
Name index	244
Subject index	246

ВВЕДЕНИЕ

Известна следующая задача об измерении длины некоторого физического объекта (например, длины стального стержня). Истинную длину обозначим через M , а результат измерения — через m . Тогда $X = M - m$ является погрешностью измерений. Что можно сказать о распределении F случайной величины X ? Для ответа на этот вопрос длину M будем измерять дважды: сначала измерим $M_1 < M$ и получим результат m_1 , а затем $M_2 = M - M_1$, получая результат m_2 . Таким образом мы представили M в виде $M_1 + M_2$ и получили результат измерения $m_1 + m_2$ для M . Погрешность измерения теперь представляется следующим образом:

$$M - m_1 - m_2 = (M_1 - m_1) + (M_2 - m_2) = X_1 + X_2.$$

В силу условий проведения эксперимента естественны следующие предположения:

- 1) X_1, X_2 — независимы;
- 2) X_1, X_2, X — равномерно распределены;
- 3) $X_1 + X_2$ принадлежит тому же типу распределений, что и X .

Утверждение 3) означает существование констант $a > 0$ и b таких, что $aX + b$ и $X_1 + X_2$ являются равномерно распределенными. Наконец, поскольку по своей природе X — величина малая, то предположение о конечности дисперсии $D > 0$ величины X вполне естественно. Отсюда в свою очередь следует, что EX конечна, поэтому, не умаляя общности рассуждений, можем предположить, что $EX = 0$.

Итак, в силу предположений 2) и 3)

$$aEX + b = E(aX + b) = E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 0,$$

а в силу 1)–3)

$$a^2 DX = D(aX + b) = D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2 = 2DX.$$

Следовательно, $b = 0$ и $a = \sqrt{2}$. Условие 3), таким образом, можно переформулировать так:

- 3*) X и $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ равномерно распределены.

Теперь уже на поставленный выше вопрос — что можно сказать о распределении случайной величины X ? — ответ найти легко. Действительно, еще в 1923 г. Д. Пойа [134] обнаружил, что при соблюдении условий 1), 2), 3*) X имеет нормальное распределение. Это была первая характеристическая теорема математической статистики.

Дальнейшее развитие характеристических задачи получили в работах Г. Крамера [107], Д. А. Райкова [59], Й. Марцинкевича [128], С. Н. Бернштейна [4], Е. Лукача [120], Т. Кавата, Х. Сакамото [114], А. А. Зингера [14], Ю. В. Линника [48, 49] и др.

Основные результаты по характеристическим задачам отражены в известной монографии А. М. Кагана, Ю. В. Линника и С. Р. Рао [30]. Ее выход в 1972 г. способствовал дальнейшему развитию этой проблематики. Появились новые монографии Я. Галамбоша и С. Коца [110], А. Матаи и Г. Педерзоли [130], Т. А. Азларова и Н. А. Володина [1], А. В. Какосьяна, Л. Б. Клебанова и И. А. Меламеда [113] и др. В 1975, 1981 гг. вышли в свет трехтомный и четырехтомный сборники трудов конференций по характеристическим проблемам, организованных Институтом передовых исследований НАТО [132, 152], сборник трудов [102] и др. В настоящее время задачи характеристики вероятностных распределений составляют значительный по разнообразию и объему накопленных фактов раздел теории вероятностей и математической статистики.

Однако проверка условий той или иной характеристической задачи на практике возможна лишь с некоторой степенью точности. Такая ситуация, например, наблюдается в тех случаях, когда рассматривается выборка конечного объема. Поэтому возникает следующий естественный и весьма актуальный вопрос. Предположим, что предпосылки теоремы выполнены не точно, а лишь приближенно. Можно ли утверждать, что заключение теоремы также приближенно выполнено? По терминологии, предложенной В. М. Золотаревым [25], это так называемая проблема „качественной“ устойчивости. Задача „количественной“ устойчивости состоит в установлении степени выполнимости заключений математических предложений при условии, что известна степень приближенности посылок. Соответствующие строгие математические определения приводятся в гл. 1.

Проблемы качественной и количественной устойчивости характеристических моделей привлекают внимание большо-

го числа математиков. Одними из первых в этой области являются работы Н. А. Сапогова [60, 61], О. В. Шалаевского [75], Л. Д. Мешалкина [131], Хоанг Хыу Ньы [73], В. М. Золотарева [23] и др. Появились первые сборники работ [56, 29]. Начиная с 1980 г., ежегодно выходят в свет труды семинара „Проблемы устойчивости стохастических моделей“ под редакцией В. М. Золотарева и В. В. Калашникова (Москва, ВНИИ системных исследований). Сборники работ этого семинара выпущены также в издательстве „Шпрингер“ (см. [149 – 151]).

Цель, которая ставится в настоящей работе, можно кратко охарактеризовать как попытку создания общего подхода к задачам устойчивости характеристизационных моделей. Поскольку, по нашему убеждению, задачи устойчивости математических моделей и, в частности, устойчивость моделей характеристизации распределений имеют в своей основе метрико-топологическую природу, то ставить эти задачи и решать их следует исходя из единых позиций, не использующих специфику конкретных задач.

На основе предлагаемого метода мы задались целью, во-первых, построить новые оценки устойчивости в конкретных характеристизационных задачах (теоремы 2.2.1, 2.2.3, 2.2.4, 2.3.1 и др.), во-вторых, улучшить ранее известные результаты устойчивости (см., например, теорему 2.2.2) и, наконец, единым методом получить известные оценки устойчивости в различных по статистическому смыслу и по предлагаемым ранее доказательствам характеристизационных задачах (теоремы 2.3.2, 2.4.1 и 2.5.1). Среди новых оценок устойчивости следует отметить принципиально новые оценки устойчивости характеристик смеси вероятностных распределений (см. § 2.3).

Предлагаемый в монографии метод исследования устойчивости характеристизационных теорем послужил основой для разбиения ее на главы. Суть этого метода состоит в следующем.

Во-первых, основное функциональное уравнение, возникающее в рассматриваемой модели устойчивости, сводим к определенному уравнению свертки (см. § 1.3).

Во-вторых, на основе теоремы 1.3.1 проверяем, обладают ли решения этого уравнения качественной устойчивостью, после чего можно переходить к количественным оценкам.

В-третьих, при помощи аналитических теорем 2.1.1 и 2.1.2 оцениваем решения уравнения свертки, имеющие вероятностный смысл.

Наконец, в-четвертых, на основе теоремы 3.1.1 осуществим „растяжение“ полученных оценок с узкого интервала на более широкий или выясним длину интервала, в котором характеристическая функция не обращается в нуль (см. § 3.3). Тем самым осуществляется переход от оценок близости решений функциональных уравнений к оценкам в вероятностных метриках.

В приведенном в конце книги Приложении дан обзор основных результатов по устойчивости характеристик вероятностных распределений с классификацией работ по статистическим свойствам рассматриваемых форм. С учетом этого обзора пополнен список литературы.

Сделаем несколько замечаний, касающихся изложения материала.

Главы монографии нумеруются арабскими цифрами. Параграфы внутри имеют двойную нумерацию (например, § 2.3 означает третий параграф второй главы). При нумерации формул, теорем, лемм и следствий первый индекс соответствует номеру главы, второй — номеру параграфа, а третий — порядковому номеру в соответствующем параграфе.

Термины „устойчивость задачи (или теоремы) характеристики“ и „устойчивость в задаче (теореме) характеристики“, используемые, например, соответственно В. М. Золотаревым [25] и А. А. Зингером, Л. Б. Клебановым [16], можно считать равнозначными, поскольку это не приводит к недоразумениям и довольно часто употребляются разными авторами в обоих вариантах.

Как известно, в случае простой метрики μ (см. [25, с. 418]) ее значения $\mu(X, Y)$ полностью определяются парой маргинальных распределений $\mathcal{Q}(X)$ и $\mathcal{Q}(Y)$. Поэтому там, где это сокращает запись, такие метрики могут рассматриваться не только на пространствах случайных величин (случайных векторов), а и на пространствах вероятностных распределений или характеристических функций.

Наконец, заметим, что от ограничений на малость ϵ в доказательствах теорем, лемм и следствий можно освободиться за счет увеличения величины C , присутствующей в соответствующих оценках устойчивости формулируемых утверждений.

В заключение выражаю искреннюю признательность и глубокую благодарность моим учителям и коллегам В. М. Золотареву и Л. Б. Клебанову.

ГЛАВА 1

ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ И ЭФФЕКТ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 1.1. Модель характеристики вероятностных распределений

Общая постановка проблемы устойчивости в задачах характеристики распределений и последующее ее решение начинается, разумеется, с общего описания самих задач характеристики. Эту часть общего исследования, следуя В. М. Золотареву [24, 25, 163], будем называть чистой задачей характеристики (коротко — чистая задача), а вторую часть — устойчивостью чистой задачи характеристики.

Проблемам характеристики вероятностных распределений в теории вероятностей и математической статистике отводится значительное место. Во Введении отмечалось, что имеется ряд монографий, посвященных специально этим вопросам. Это — объемистая книга А. М. Кагана, Ю. В. Линника и С. Р. Рао [30], монографии Я. Галамбоша и С. Копа [110], Т. А. Азларова и Н. А. Володина [1] и ряд других. Важные теоремы о характеристике распределений рассмотрены в книге Ю. В. Линника и И. В. Островского [52].

Если проанализировать структуру различных характеристик из числа собранных в перечисленных монографиях, то можно заметить, что большая часть из них построена по следующей схеме, предложенной В. М. Золотаревым [24, 25]. Пусть $(\mathcal{U}, d_{\mathcal{U}})$ и $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$ — некоторые измеримые метрические пространства, в которых в качестве σ -алгебр $\mathfrak{B}_{\mathcal{U}}$ и $\mathfrak{B}_{\mathcal{V}}$ выбираются системы борелевских множеств, порождаемых соответствующими метрическими расстояниями $d_{\mathcal{U}}$ и $d_{\mathcal{V}}$. На одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ определяются пространство $\mathcal{X} = \{X\}$ случайных величин со значениями из $(\mathcal{U}, d_{\mathcal{U}})$ и пространство $\mathcal{Y} = \{Y\}$ случайных величин со значениями из $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$.

Пусть задано отображение $\mathbf{F}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Характеризация распределений некоторого класса случайных величин $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$ осуществляется путем выделения некоторых свойств этих случайных величин и их образов, получаемых с помощью

отображения F . Это означает, что в пространстве $\mathcal{X}$ выделяется подмножество $\mathcal{A}$, а в пространстве $\mathcal{Y}$ — подмножество $\mathcal{B}$ такие, что

$$X \in \mathcal{A}, F X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow X \in \mathcal{C}. \quad (1.1.1)$$

Такой тип описания множества случайных величин $\mathcal{C}$ будем называть чистой задачей характеризации.

Если обозначить через $F^{-1}\mathcal{B}$ полный прообраз в $\mathcal{X}$ множества $\mathcal{B}$, то (1.1.1) можно записать также в виде равенства

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap F^{-1}\mathcal{B}.$$

Таким образом, каждая чистая задача определяется заданием трех элементов: $(F, \mathcal{A}, \mathcal{B})$. Приведем несколько конкретных примеров, которые помогут лучше понять эту модель.

1. Характеризационная теорема Д. Пойа [134]. Если X_1 и $aX_1 + bX_2$ равномерно распределены, причем X_1, X_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины с нулевым средним и конечным вторым моментом, то X_j имеет нормальное распределение.

Позднее эта теорема была обобщена (см. [30, теорема 13.7.2]) следующим образом.

Пусть $X_1, \dots, X_k, k \geq 2$, — невырожденные независимые равномерно распределенные случайные величины. Если статистики X_1 и $a_1X_1 + \dots + a_kX_k$ равномерно распределены и при этом

$$|a_j| < 1, \quad \sum_{j=1}^k a_j^2 = 1, \quad (1.1.2)$$

то X_j подчиняется нормальному закону.

Здесь $\mathcal{U} = \mathbf{R}^k, \mathcal{V} = \mathbf{R}^2$. Отображение F представляет собой матричное преобразование векторов из $\mathcal{U}$ в векторы из $\mathcal{V}$:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix},$$

подчиненное требованию (1.1.2). Далее, пусть $\mathcal{A}$ — множество k -мерных случайных вектор-столбцов с независимыми равномерно распределенными компонентами, а $\mathcal{B}$ — множество двумерных вектор-столбцов с равномерно распределенными компонентами. В определенной таким образом чистой задаче характеризуется множество $\mathcal{C}$ k -мерных вектор-столбцов с нормальными независимыми равномерно распределенными компонентами.

2. Характеризационная теорема Е. Лукача [124]. Пусть $X_1, \dots, X_k$, $k \geq 2$, — независимые равномерно распределенные симметричные случайные величины, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$. Пусть, кроме того,

$$S = S(\mathbf{X}) = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{j=1}^k \sum_{l \neq j}^k \{2X_j^3 X_l - 2X_j X_l^3 - 3X_j^2 X_l^2\} + \\ + \frac{4}{k} \sum_{j=1}^k X_j^2, \quad (1.1.3)$$

$$T = T(\mathbf{X}) = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{j=1}^k \sum_{l \neq j}^k \{X_j^4 X_l - 2X_j^2 X_l^3\} + \\ + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{2X_j^3 - X_j\}, \quad \Lambda = \Lambda(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^k X_j. \quad (1.1.4)$$

Если $EX_j^4 < \infty$, $|X_j|$ — невырождена, а статистика S и статистика T имеют постоянную регрессию на Λ , то X_j имеет равномерное распределение на $\{-1, 1\}$.

Здесь $\mathcal{U} = \mathbf{R}^k$, $\mathcal{V} = \mathbf{R}^3$. Отображение $\mathbf{F}$ представляет собой следующего вида отображение векторов $\mathbf{u}$ со значениями из $\mathcal{U}$ в векторы $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ из $\mathcal{V}$:

$$v_1 = S(\mathbf{u}), \quad v_2 = T(\mathbf{u}), \quad v_3 = \Lambda(\mathbf{u}).$$

В качестве множества $\mathcal{A}$ берется множество k -мерных случайных векторов $(X_1, \dots, X_k)$ с независимыми симметричными равномерно распределенными компонентами, причем $EX_j^4 < \infty$ и $|X_j|$ — невырождена. Третьим элементом чистой задачи выступает множество $\mathcal{B}$ трехмерных случайных векторов $\mathbf{Y}$, компоненты Y_1, Y_2, Y_3 которых подчинены дополнительному условию

$$E(Y_1 | Y_3) = E Y_1, \quad E(Y_2 | Y_3) = E Y_2.$$

Эта чистая задача связана с характеристикой множества $\mathcal{C}$, состоящего из k -мерных случайных векторов с независимыми компонентами, имеющими равномерное распределение на $(-1, 1)$. В связи с этим интересно отметить, что характеристику Лукача можно модифицировать так, чтобы компоненты случайных векторов из $\mathcal{C}$ имели произвольную симметричную функцию распределения G .

Теорема 1.1.1 (см. [68]). Пусть G — симметричное распределение, $Z_1, \dots, Z_k$ — независимые невырожденные равнораспределенные симметричные случайные величины, а $Z = (2G(Z_1) - 1, \dots, 2G(Z_k) - 1)$. Если статистики $S(Z)$ и $T(Z)$ имеют постоянную регрессию на $\Lambda(Z)$, причем $|2G(Z_1) - 1|$ — невырожденная случайная величина, то Z_j имеет распределение G .

Действительно, для доказательства этой теоремы достаточно определить $X_j = 2G(Z_j) - 1$ и применить характеризационную теорему Лукача. Согласно заключению этой теоремы, $X_j = U$, где U — случайная величина с равномерным распределением на $(-1, 1)$. Следовательно,

$$Y_j = G^{-1}((U + 1)/2),$$

т. е.

$$P(Y_j < x) = P((U + 1)/2 < G(x)) = G(x),$$

что и требовалось доказать.

3. Характеризация компонент вероятностных законов. Пусть $\mathcal{U} = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{V} = \mathbf{R}^1$, $F = (1 \ 1)$. Через $\mathcal{A}$ обозначим множество двумерных случайных вектор-столбцов с независимыми компонентами. Пусть $\mathcal{B}$ — класс случайных величин, разложения которых мы хотим исследовать (например, класс нормальных случайных величин, класс пуассоновских случайных величин, класс двухточечных случайных величин и т. п.). Нетрудно проверить, что множество $\mathcal{C}$ случайных векторов с независимыми компонентами, сумма которых принадлежит классу $\mathcal{B}$, полностью характеризуется набором $(F, \mathcal{A}, \mathcal{B})$.

§ 1.2. Эффект устойчивости характеризационных задач

В практических применениях теоретических исследований обычно нет полного совпадения предположений математической теории с наблюдаемой действительностью. Поэтому возникает естественный вопрос: если теоретические предпосылки соблюдаются не точно, а лишь приближенно, то можно ли утверждать, что заключения также приближенно выполнены? Эти вопросы порождают следующую проблему: установить степень выполнимости заключений математи-

ческих предложений в случае приближенного выполнения посылок. Теоремы, в которых рассматриваются такого рода задачи, называются теоремами устойчивости. Интересно отметить, что даже предельные теоремы можно представить как теоремы устойчивости (см. [204]).

На основе схемы (1.1.1) сформулируем сейчас общую проблему устойчивости модели чистой задачи характеризации, следуя при этом работе [25]. Для этого понадобится несколько дополнительных определений, являющихся, кроме последнего, перефразировкой хорошо известных понятий функционального анализа.

Пусть, как и прежде, $\mathcal{X} = \{X\}$ — пространство случайных величин со значениями из $(\mathcal{U}, d_{\mathcal{U}})$, а $\mathcal{Y} = \{Y\}$ — пространство случайных величин со значениями из $(\mathcal{V}, d_{\mathcal{V}})$. Предполагается, что в $\mathcal{X}$ задана метрика μ , а в $\mathcal{Y}$ — метрика ν .

Множество $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ называется μ -замкнутым, если для любой последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{X}'$ условие $\mu(X_n, X_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, где $X_0 \in \mathcal{X}$, влечет за собой утверждение $X_0 \in \mathcal{X}'$.

Отображение $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ называется (ν, μ) -непрерывным в точке $X_0 \in \mathcal{X}$, если $\nu(FX_n, FX_0) \rightarrow 0$ для любой последовательности $X_n \in \mathcal{X}$ такой, что $\mu(X_n, X_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Множество $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ называется μ -компактным, если из любой бесконечной последовательности $\{X_n\}, X_n \in \mathcal{X}'$, можно выделить подпоследовательность $\{X_{n'}\}$ и указать случайную величину $X_0 \in \mathcal{X}$ такую, что $\mu(X_{n'}, X_0) \rightarrow 0, n' \rightarrow \infty$.

Пусть, далее, в множестве распределений случайных величин $\{X\}$ из $\mathcal{X}$ задан некоторый функционал $\theta = \theta(X)$ со значениями из $[0, \infty]$. Множество $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ называется (θ, μ) -компактным, если для любой последовательности чисел $\infty = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots, \varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ разбиение множества $\mathcal{X}'$ на непересекающиеся множества $\mathcal{X}'_n = \{X: \varepsilon_n \leq \theta(X) < \varepsilon_{n-1}\}, n = 1, 2, \dots$, обладает тем свойством, что каждое множество представителей этих классов, т. е. $\{X_n: X_n \in \mathcal{X}'_n, X_n \notin \mathcal{X}'_m \text{ для } m \neq n\}$, является μ -компактным множеством.

В пространстве $\mathcal{X}$ определим следующие функционалы:

$$\varepsilon = \varepsilon(X) = \mu(X, \mathcal{A}) + \nu(FX, \mathcal{B}), \quad \delta = \delta(X) = \mu(X, \mathcal{C}),$$

где расстояние от $X \in \mathcal{X}$ до множества $\mathcal{A}$ определяется как обычно, т. е. $\mu(X, \mathcal{A}) = \inf \{\mu(X, X'): X' \in \mathcal{A}\}$.

Теперь мы подготовлены к постановке проблемы устойчивости чистых задач характеризации в ее общей форме и к формулировке критерия этой устойчивости.

Определение 1.2.1 (см. [25]). Чистая задача характеристики, заданная в пространствах $(\mathcal{X}, \mu)$ и $(\mathcal{Y}, \nu)$ своими элементами $(F, \mathcal{A}, \mathcal{B})$, называется (μ, ν) -устойчивой в пределах множества $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$, если для любой последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{X}'$ при $n \rightarrow \infty$

$$\varepsilon(X_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \delta(X_n) \rightarrow 0. \quad (1.2.1)$$

Проблема „качественной“ устойчивости состоит в отыскании условий, обеспечивающих выполнение свойства (1.2.1), в то время как задача „количественной“ устойчивости связана с построением оценок вида $\delta \leq \varphi(\varepsilon)$.

Теорема В. М. Золотарева [24, 25]. Предположим, что чистая задача характеристики в пространствах $(\mathcal{X}, \mu)$ и $(\mathcal{Y}, \nu)$ задается элементами $(F, \mathcal{A}, \mathcal{B})$. Эта задача будет (μ, ν) -устойчивой в пределах множества $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$, если выполнены следующие условия:

- 1) множество $\mathcal{A}$ является μ -замкнутым;
- 2) множество $\mathcal{B}$ является ν -замкнутым;
- 3) отображение $F(\nu, \mu)$ -непрерывно в каждой точке множества $\mathcal{A}$;
- 4) множество $\mathcal{X}'$ является (ε, μ) -компактным ($\varepsilon = \varepsilon(X)$ — функционал, определенный выше).

Рассмотрение конкретных задач показывает, что первые три условия легко проверяемы. Однако отказ в теореме Золотарева от четвертого условия является довольно сложной задачей (см. [26, 43]). Часто это условие заменяется более жестким условием μ -компактности. В некоторых задачах такое усиление предпосылок не отвечает существу дела, и вместо условия μ -компактности может быть использовано предположение, заключающееся в том, что „не вся масса утекает в бесконечность“. Далее этот вопрос рассматривается более подробно.

Законы распределения семейства $\mathcal{H}$ называются *равномерно сходящимися на бесконечности*, если величины

$$\kappa_X(T) = \mathbf{P}(|X| > T)$$

равномерно малы при $T \rightarrow \infty$ (см. [72]) или, иначе говоря, если существует функция $\kappa(T)$ такая, что $\kappa_X(T) \leq \kappa(T)$ при всех T и всех X с распределением из $\mathcal{H}$, причем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \kappa(T) = 0.$$

Впрочем, равностепенная непрерывность характеристических функций при $t=0$ (в доказательстве приводимой ниже теоремы 1.2.1 именно это условие фактически подвергается проверке) эквивалентна равномерной сходимости на бесконечности соответствующего класса вероятностных распределений.

При исследовании устойчивости в задачах характеризации распределений свойством независимости статистик условие равномерной сходимости на бесконечности может быть заменено следующим существенно более слабым условием „неутекания значительной массы в бесконечность“:

$$\sup \left\{ \int_{|u| > T} P(du) : P \in \mathcal{P} \right\} < 1/2,$$

где $\mathcal{P}$ — рассматриваемый класс вероятностных распределений.

В изучаемом круге задач удобно использовать аналогичное условие, но уже записанное в терминах характеристических функций (см. условие (1.2.3) ниже).

Перед тем, как сформулировать соответствующие теоремы, уточним смысл употребляемого нами термина компактности. Множество A топологического пространства (E, Π) называется *компактным*, если оно является компактным пространством в индуцированной топологии. Множество A называется *относительно компактным* (или *предкомпактным*) в (E, Π) , если его замыкание $\bar{A}$ компактно.

Через $C[a, b]$, как обычно, обозначается метрическое пространство всех непрерывных действительных функций, определенных на сегменте $[a, b]$, с равномерной метрикой ρ ,

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)|.$$

Теорема 1.2.1 (см. [43]). Пусть при $|t| \leq T$

$$f_\varepsilon(t) = \prod_{j=1}^k f_\varepsilon(a_j t) + r(t, \varepsilon), \quad (1.2.2)$$

где $f_\varepsilon(t)$ — характеристическая функция, а

$$\sup \{ |r(t, \varepsilon)| : t \in [-T, T] \} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

причем существуют i, j ($i \neq j$) такие, что $a_i a_j \neq 0$. Пусть, кроме того, $\{\varepsilon_n\}$ — произвольная монотонная последовательность такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Если

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{\varepsilon_n \downarrow 0} \min_{|t| \leq \delta} |f_{\varepsilon_n}(t)| > 0, \quad (1.2.3)$$

то множество $\{f_{\varepsilon_n}(t)\}$ относительно компактно (предкомпактно) в пространстве $C[-T, T]$.

Следствие 1.2.1. Если в условиях теоремы 1.2.1 $T = T(\varepsilon) \rightarrow \infty$, то $\{f_{\varepsilon_n}(t)\}$ относительно компактно в пространстве характеристических функций.

Справедливость следствия очевидна. Действительно, известно (см., например, [72, §19.3]), что если последовательность характеристических функций $\{f_{\varepsilon_n}(t)\}$ сходится для любого $t > 0$ к функции $\alpha(t)$, непрерывной при $t=0$, то $\alpha(t)$ — характеристическая функция. Это и означает, что множество $\{f_{\varepsilon_n}(t)\}$, удовлетворяющее условиям следствия, относительно компактно (предкомпактно) в пространстве характеристических функций. Таким образом, в классе возмущенных характеризационных задач, описываемых уравнением (1.2.2), условие 4) теоремы Золотарева можно заменить более простым и часто легко проверяемым условием (1.2.3).

На конкретном примере убедимся, что нарушение условия (1.2.3) может оказаться причиной некомпактности множества $\{f_{\varepsilon_n}(t)\}$ в пространстве $C[-T, T]$, а тем самым и в пространстве характеристических функций.

Действительно, нетрудно проверить, что характеристическая функция нормального закона с параметрами 0 и $1/\varepsilon$ является решением уравнения

$$f_{\varepsilon}(t) = \prod_{j=1}^p f_{\varepsilon}(\beta_j t) \prod_{j=p+1}^k f_{\varepsilon}(-\beta_j t), \quad (1.2.4)$$

которое появляется, например, в рассмотренной нами (§ 1.1, п. 1) задаче о равномерности одночлена и линейной статистики (в обобщенной теореме Пойа). Для такой последовательности нормальных характеристических функций имеем

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t=0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0, \end{cases}$$

т. е. предел не является непрерывной функцией. С другой стороны, хотя в рассматриваемом случае условие (1.2.2) и выполняется, тем не менее условие (1.2.3) нарушается, поскольку для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \min_{|t| \leq \delta} \exp(-t^2/(2\varepsilon)) = 0.$$

Доказательство теоремы 1.2.1. Множество характеристических функций $\{f_{\varepsilon_n}(t)\}$, удовлетворяющих соотношениям (1.2.2) и (1.2.3), обозначим через $\mathcal{F}$. Можно доказать, что $\mathcal{F}$ относительно компактно в $C[-T, T]$ тогда и только тогда, когда относительно компактно в $C[-T, T]$ множество характеристических функций $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G} = \{ |f_{\varepsilon_n}(t)|^2 : f_{\varepsilon_n}(t) \in \mathcal{F} \}.$$

Подставляя в (1.2.2) вместо t аргумент $-t$ и умножая полученное уравнение на (1.2.2), получаем

$$|f_{\varepsilon}(t)|^2 = \prod_{j=1}^k |f_{\varepsilon}(a_j t)|^2 + R(t, \varepsilon), \quad (1.2.5)$$

где

$$\sup \{ |R(t, \varepsilon)| : t \in [-T, T] \} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

т. е. получаем однотипное с (1.2.2) соотношение.

Согласно теореме Арцела, достаточно убедиться, что $\mathcal{G}$ равномерно непрерывно на интервале $[-T, T]$, т. е. что для каждого $\delta_1 > 0$ найдется $\delta_2 > 0$ такое, что

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \delta_1 \quad \text{для} \quad \forall t_1, t_2 \in [-T, T]$$

таких, что $|t_1 - t_2| \leq \delta_2$ и для всех $\varphi \in \mathcal{G}$.

Для действительных $g_{\varepsilon}(t)$ определим

$$\Omega(\delta, g_{\varepsilon}) = \min \{ g_{\varepsilon}(t) : |t| \leq \delta \}.$$

Так как для любой характеристической функции $f(t)$

$$|f(t) - f(t+h)|^2 \leq 2(1 - \operatorname{Re} f(h)), \quad (1.2.6)$$

то для любой $g_{\varepsilon} \in \mathcal{G}$ имеем

$$\begin{aligned} \max \{ |g_{\varepsilon}(t_1) - g_{\varepsilon}(t_2)|^2 : t_1, t_2 \in [-T, T], |t_1 - t_2| \leq \delta \} &\leq \\ &\leq 2(1 - \Omega(\delta, g_{\varepsilon})). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\Omega_0(\delta) = \limsup_{\varepsilon_n \downarrow 0} \Omega(\delta, g_{\varepsilon_n}), \quad g_{\varepsilon_n}(t) = |f_{\varepsilon_n}(t)|^2,$$

где последовательность $\{\varepsilon_n\}$ обусловлена предпосылками теоремы. Функция $\Omega_0(\delta)$ монотонна, поэтому существует предел

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \Omega_0(\delta) = \beta = \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{\varepsilon_n \downarrow 0} \min_{|t| \leq \delta} g_{\varepsilon_n}(t). \quad (1.2.7)$$

Для завершения доказательства теоремы необходимо показать, что $\beta = 1$. Согласно (1.2.5),

$$|f_{\varepsilon}(t)|^2 = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^k |f_{\varepsilon}(a_i a_j t)|^2 + R_1(t, \varepsilon),$$

где $|R_1(t, \varepsilon)|$ обладает тем же свойством, что и $|R(t, \varepsilon)|$. Отсюда получаем

$$|f_{\varepsilon}(t)|^2 \leq |f_{\varepsilon}(a_1 a_2 t)|^4 + |R_1(t, \varepsilon)|. \quad (1.2.8)$$

(Предполагается, что именно $a_1 a_2 \neq 0$, т. е. в условиях теоремы $i=1, j=2$.) Заметим, что для любых непрерывных на $[a, b]$ функций $h_1(t)$, $h_2(t)$ и $h_3(t)$, удовлетворяющих соотношению

$$|h_1(t)| \leq |h_2(t)| + |h_3(t)|, \quad t \in [a, b],$$

справедливо неравенство

$$\min_{t \in [a, b]} |h_1(t)| \leq \min_{t \in [a, b]} |h_2(t)| + \max_{t \in [a, b]} |h_3(t)|. \quad (1.2.9)$$

Действительно, пусть $|h_2(t_0)| = \min_{t \in [a, b]} |h_2(t)|$. Тогда

$$\begin{aligned} \min_{t \in [a, b]} |h_1(t)| &\leq \min_{t \in [a, b]} (|h_2(t)| + |h_3(t)|) \leq |h_2(t_0)| + \\ &+ |h_3(t_0)| \leq |h_2(t_0)| + \max_{t \in [a, b]} |h_3(t)|. \end{aligned}$$

Вспомнив определения $g_{\varepsilon_n}(t)$, $\Omega(\delta, g_{\varepsilon_n})$, $\Omega_0(\delta)$, в силу (1.2.8) и (1.2.9) имеем

$$\Omega_0(\delta) \leq \Omega_0^2(|a_1 a_2| \delta) + \limsup_{\varepsilon_n \downarrow 0} \max_{|t| \leq \delta} |R_1(t, \varepsilon_n)|. \quad (1.2.10)$$

Поскольку предел $\Omega_0(\delta)$ при $\delta \downarrow 0$ существует, то при $k \neq 0$, согласно определению (1.2.7),

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \Omega_0(k \delta) = \lim_{\delta \downarrow 0} \Omega_0(\delta) = \beta. \quad (1.2.11)$$

Соотношения (1.2.10) и (1.2.11) означают, что

$$\beta \leq \beta^2. \quad (1.2.12)$$

В силу (1.2.3) $\beta > 0$. Тогда (1.2.12) означает, что $1 \leq \beta$. С другой стороны, так как $g_{\varepsilon_{\beta}}(t)$ — характеристическая функция, то из определения (1.2.7) следует, что

$$\beta \leq 1.$$

Следовательно, $\beta = 1$.

Теорема доказана.

Далее нам потребуются метрики λ и λ_0 , поэтому напомним их определения. Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — случайные величины или случайные векторы. Тогда

$$\lambda_0(f_{\mathbf{X}}, f_{\mathbf{Y}}) = \lambda_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sup_t |f_{\mathbf{X}}(t) - f_{\mathbf{Y}}(t)|, \quad (1.2.13)$$

$$\begin{aligned} \lambda(f_{\mathbf{X}}, f_{\mathbf{Y}}) &= \lambda(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \\ &= \inf \{ \max(v(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t), t) : t > 0 \}, \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

где

$$f_{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{E} \exp(i(t, \mathbf{X})),$$

$$v(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t) = \frac{1}{2} \max \{ |f_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) - f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u})| : |\mathbf{u}| < 1/t \}.$$

Здесь, как обычно, через $(\cdot, \cdot)$ обозначается скалярное произведение, а $|\mathbf{u}| \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{u})$.

На основе полученных результатов в качестве примера сформулируем упрощенный критерий качественной устойчивости для рассмотренной в п. 1 § 1.1 обобщенной теоремы Пойа, используя λ -метрику. Заметим, что двусторонние оценки этой метрики через метрику Леви рассмотрены в работе В. М. Золотарева и В. В. Сенатова [28].

Пример 1.2.1. Пусть $X_{1, \varepsilon}, X_{2, \varepsilon}, \dots, X_{k, \varepsilon}$ — независимые равнораспределенные случайные величины, характеристические функции которых удовлетворяют соотношению (1.2.3). Если

$$\lambda(X_{1, \varepsilon}, L_{\varepsilon}) \leq \varepsilon, \quad (1.2.15)$$

где

$$L_{\varepsilon} = \sum_{j=1}^k a_j X_{j, \varepsilon}, \quad \sum_{j=1}^k a_j^2 = 1, \quad |a_j| < 1$$

при любом j , то существует нормальная случайная величина $N_{\sigma(\varepsilon)}$ такая, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lambda(X_{j, \varepsilon}, N_{\sigma(\varepsilon)}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Действительно, условие (1.2.15) означает, что

$$f_{\varepsilon}(t) = \prod_{j=1}^k f_{\varepsilon}(a_j t) + r^*(t, \varepsilon),$$

где $f_{\varepsilon}(t)$ — характеристическая функция случайной величины $X_{j, \varepsilon}$, а при $|t| \leq 1/\varepsilon$ справедлива оценка $|r^*(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon$. В силу следствия 1.2.1 и теоремы Золотарева заключаем, что характеристизационная теорема Пойа и ее обобщение (λ, ε) -устойчивы в пределах множества, описываемого условием (1.2.3).

§ 1.3. Характеризационные задачи, приводящие к уравнениям свертки

На примере характеризационной теоремы Пойа и ее обобщения в предыдущем параграфе мы убедились, что решение характеризационной задачи сводится к решению функционального уравнения определенного вида. Оказывается, что большинство этих уравнений и их возмущенные аналоги можно преобразовать в характеристические интегро-дифференциальные уравнения типа свертки с ядрами $\{k_{j1}\}$, $\{k_{j2}\}$ (см. [9, § 7.2]):

$$\sum_{j=0}^n \left\{ \gamma_j f^{(j)}(t) + \int_0^{\infty} f^{(j)}(t-s) dk_{j1}(s) + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^0 f^{(j)}(t-s) dk_{j2}(s) \right\} = r(t). \quad (1.3.1)$$

В настоящем параграфе поставлена цель в качестве примеров рассмотреть широкий диапазон характеризационных задач, приводящих к уравнениям типа свертки (1.3.1). Для экономии места будем рассматривать лишь один-два примера из каждого класса характеризационных задач.

Пример 1.3.1 (равнораспределенность линейных статистик). Первым исследованием вероятностных решений уравнения типа свертки в его общем виде является, по-видимому, докторская диссертация А. А. Зингера [15] (см. также [30, гл. 2]). В ней рассмотрено естественное обобщение теоремы Ю. В. Линника [49] (см. также [51]) о характеристизации нормального закона одинаковой распределенностью линейных статистик L_1 и L_2 ,

$$L_1 = \sum_{j=1}^n a_j X_j, \quad L_2 = \sum_{j=1}^n b_j X_j, \quad (1.3.2)$$

где $X_1, \dots, X_n$ — независимые равнораспределенные случайные величины. Возникающее при таком обобщении уравнение свертки выглядит так (см. [2, § 2.2]):

$$\int_0^{\infty} \chi(\tau + \alpha) d v_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \chi(\tau + \alpha) d v_2(\alpha), \quad \tau \geq 0, \quad (1.3.3)$$

где $\chi(\tau)$ — непрерывная ограниченная на $(0, \infty)$ функция, $\chi(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, $v_1(\alpha)$ и $v_2(\alpha)$ — неубывающие функции, удовлетворяющие при некотором $\delta > 0$ условию

$$\int_0^{\infty} \exp(\delta \alpha) d(v_1(\alpha) + v_2(\alpha)) < \infty.$$

Нетрудно убедиться, что в случае (1.3.2) функции χ и v_i в (1.3.3) приобретают следующий вид:

$$\chi(\tau) = -\ln |f(\exp(-\tau))|, \quad v_j(\alpha) = w_j(\exp(-\alpha)),$$

$$w_1(x) = \sum_{\{a_j > x\}} 1, \quad w_2(x) = \sum_{\{b_j > x\}} 1,$$

где $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины X_j .

Пример 1.3.2 (обобщенная теорема Д. Пойа). В предыдущем параграфе мы уже видели, что равнораспределенность X_j и $a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ в терминах характеристических функций означает, что

$$f(t) = f(a_1 t) \dots f(a_n t). \quad (1.3.4)$$

Поскольку $f(t)$ — характеристическая функция, то существует число $t' > 0$ такое, что $f(t) \neq 0$ при $|t| \leq t'$. Не умаляя общ-

ности рассуждений, предположим, что $t' = 1$. Логарифмируя (3.4) и обозначая $t = \exp(-\tau)$, при $\tau \geq 0$ получаем:

$$\ln f(e^{-\tau}) = \sum_{j=1}^n \ln f(e^{-(\tau+\alpha_j)}), \quad \alpha_j = -\ln \alpha_j$$

(для упрощения выкладок полагаем, что $\alpha_j > 0$ при $j = 1, \dots, n$). Определим теперь

$$\chi(\tau) = \ln f(e^{-\tau}),$$

$$k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq \alpha_1, \\ 1 & \text{при } \alpha_1 < x \leq \alpha_2, \\ \dots & \dots \\ n & \text{при } \alpha_n < x < \infty. \end{cases}$$

При определении $k(\varphi)$ предполагалось, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$; в противном случае видоизменения очевидны. Тогда

$$\chi(\tau) = \sum_{j=1}^n \chi(\tau + \alpha_j), \quad \tau \geq 0,$$

$$\chi(\tau) = \int_0^{\infty} \chi(\tau + \alpha) dk(\alpha), \quad \tau \geq 0, \quad (1.3.5)$$

т. е. имеет место (1.3.1).

Пример 1.3.3 (теорема Скитовича — Дармуа о независимости линейных статистик). Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины. Если линейные статистики $L_1 = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ и $L_2 = b_1 X_1 + \dots + b_n X_n$ независимы, то те случайные величины X_j , для которых $a_j b_j \neq 0$, нормальны. Дополнительно предположим, что $X_1, \dots, X_n$ — равномерно распределены.

Повторяя выкладки из [30, § 3.1], легко убедиться, что в этом случае

$$\varphi^{2m}(u) = \prod_{j=1}^m \varphi(\beta_j u),$$

где φ — некоторая характеристическая функция, а $m \leq n$. Следовательно, мы опять получаем уравнение свертки (1.3.5), однако с множителем $1/(2m)$ перед знаком интеграла.

Пример 1.3.4 (независимость выборочного среднего и выборочной дисперсии). Пусть дана повторная выборка

$X_1, \dots, X_k$. Известно (см., например, [30, теорема 4.2.1]), что для независимости выборочного среднего $\bar{X}$ и выборочной дисперсии S^2 ,

$$\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_j, \quad S^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X})^2, \quad k \geq 2,$$

необходима и достаточна нормальность повторной выборки. В этом случае получается следующее дифференциальное уравнение:

$$f''(t) f^{k-1}(t) - f'^2(t) f^{k-2}(t) + \sigma^2 f^k(t) = 0, \quad (1.3.6)$$

где σ^2 — некоторый параметр, а $f(t) = E \exp(itX_j - X_j^2)$. Путем замены

$$f(t) = \exp \left(\int_0^t \varphi(u) du \right)$$

это уравнение сводится к более простому: $\varphi' + \sigma^2 = 0$, т. е. опять к уравнению типа (1.3.1). Для экономии места мы опускаем вопросы, связанные с установлением зоны, в которой рассматриваемые функции не обращаются в нуль (см. § 3.3).

Пример 1.3.5 (допустимость выборочного среднего в классе несмещенных оценок). Необходимо отметить, что одно и то же функциональное уравнение может возникать в совершенно различных в смысле используемых статистических свойств характеристизационных теоремах. Так, например, допустимость выборочного среднего $\bar{X}$ в классе несмещенных оценок $\theta \in \mathbf{R}^1$ при квадратическом ущербе является характеристическим свойством нормального закона, и при этом основное уравнение совпадает с (1.3.6) (см. [30, § 9.3]). К рассмотрению устойчивости этого же уравнения приводит и задача о пространстве регрессии квадратичной статистики на линейную [121].

Пример 1.3.6 (характеризация Рамачандрана—Рао свойством постоянства регрессии одной линейной статистики на другую). Эта характеристика описывается регрессионным уравнением

$$E(a_1 X_1 + \dots + a_k X_k | b_1 X_1 + \dots + b_k X_k) = 0 \quad (1.3.7)$$

почти всюду при некотором $k \geq 2$. Как видно из работы [140], при определенных условиях возможен случай $k = \infty$.

После симметризации исходных случайных величин из (1.3.7) нетрудно получить, что

$$|f(t)|^2 = \prod_{j=1}^k |f(\beta_j t)|^{2\gamma_j}, \quad (1.3.8)$$

где $\beta_j \geq 0$, $\gamma_j \geq 0$.

Определяя

$$\chi(\tau) = 2 \ln |f(e^{-\tau})|, \quad \alpha_j = -\ln \beta_j$$

и логарифмируя (1.3.8), получаем

$$\chi(t) = \sum_{j=1}^k \gamma_j \chi(t + \alpha_j),$$

т. е. справедливо уравнение свертки типа (1.3.5).

Пример 1.3.7 (характеризация Россберга [25] свойства-ми порядковых статистик). Пусть $X_1, \dots, X_k$ — независимые неотрицательные равномерно распределенные случайные величины с распределением F , а $X_{j,k}$ — j -я порядковая статистика, т. е. $X_{1,k} \leq X_{2,k} \leq \dots \leq X_{k,k}$. Если для некоторого j статистики $X_{j+1,k} - X_{j,k}$ и $\min(Y_1, \dots, Y_{k-j})$ равномерно распределены, где $Y_1, \dots, Y_{k-j}$ — выборка объема $k-j$ с распределением F , то F является экспоненциальным распределением.

В самом деле, если через $\binom{k}{j}$ обозначить j -сочетание из k элементов, то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_{j+1,k} - X_{j,k} > x) = \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P}(X_{j+1,k} > x+y | X_{j,k} = y) d\mathbf{P}(X_{j,k} < y) = \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1-F(x+y)}{1-F(y)} \right)^{k-j} \binom{k}{j} (1-F(y))^{k-j} dF^j(y) = \\ &= \binom{k}{j} \int_0^\infty (1-F(x+y))^{k-j} dF^j(y). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}(X_{j+1,k} - X_{j,k} > x) = (1-F(x))^{k-j}. \quad (1.3.10)$$

Пусть $G(x)$ — функция, определяемая формулой

$$dG(x) = \binom{k}{j} e^{-\lambda(k-j)x} dF^j(x),$$

а также положим

$$H(x) = (1 - F(x))^{k-j} e^{\lambda(k-j)x}.$$

Тогда из (1.3.9) и (1.3.10) получаем следующее уравнение свертки:

$$H(x) = \int_0^\infty H(x+y) dG(y), \quad \forall x \geq 0.$$

Пример 1.3.8 (теорема Кришнаи [117] о характеристизации распределения Парето). Пусть X — неотрицательная случайная величина, а Z — случайная величина с плотностью

$$h(x) = \begin{cases} p x^{p-1} & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

причем $p > 0$, а X и Z — независимы. В [117] рассматривается характеристизация распределения Парето следующим свойством условных вероятностей:

$$P(XZ \geq y | XZ \geq x_0) = P(X \geq y), \quad \forall y \geq x_0, \quad (1.3.11)$$

где $x_0 \geq 0$ — некоторое число. Пусть

$$P(X \geq x) = U(x), \quad P(XZ \geq x) = V(x).$$

Тогда

$$V(y) = p \int_0^1 U(y/x) x^{p-1} dx.$$

Отсюда на основе (1.3.11) нетрудно убедиться, что при $x_0 = 0$

$$H(z) = \int_0^\infty H(u) q(z-u) du, \quad z \geq 0, \quad (1.3.12)$$

где $H(x) = U(\exp x)$, а

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ p \exp(px) & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Известно большое число характеристик экспоненциального распределения, приводящих к уравнению свертки типа (1.3.12). Довольно широкий круг этих характеристик будет подробно исследован на устойчивость в следующей главе. В заключение параграфа приведем две хорошо известные характеристики свойством типа отсутствия последствия, которые также можно свести к изучению решений уравнения (1.3.12).

Пример 1.3.9 (характеризация экспоненциального распределения свойством отсутствия последствия). Хорошо известно, что если предварительное использование устройства никак не влияет на остальное время его работы, то это устройство имеет экспоненциальное распределение времени безотказной работы. Говорят, что неотрицательная случайная величина X обладает свойством отсутствия последствия, если для всех $x \geq 0$ и $y \geq 0$ таких, что $P(X \geq y) > 0$,

$$P(X \geq x + y | X \geq y) = P(X \geq x). \quad (1.3.13)$$

Свойство отсутствия последствия (1.3.13) характеризует экспоненциальное распределение. Если $P(X=0) \neq 1$, то существует такое число $y_0 > 0$, что $P(X \geq y_0) > 0$. Но в этом случае из (1.3.13) следует, что $P(X \geq ny_0) > 0$ для любого натурального n и, следовательно, $P(X \geq y) > 0$ для любого действительного $y \geq 0$. Это означает, что (1.3.13) можно переписать следующим образом:

$$P(X \geq x + y) = P(X \geq x) P(X \geq y), \quad \forall x \geq 0, \forall y \geq 0. \quad (1.3.14)$$

Оказывается, что для характеристики экспоненциального закона свойством (1.3.14) достаточно, чтобы это свойство имело место лишь для двух несоизмеримых значений y (см. [129, 78]). В этом случае (1.3.14) сводится к уравнениям

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x + y_j), \quad j = 1, 2,$$

каждое из которых можно рассматривать как простейшее уравнение свертки.

Однако вернемся к уравнениям (1.3.13) и (1.3.14). Интегрируя по y , убеждаемся, что

$$\bar{F}(x) = \lambda \int_0^{\infty} \bar{F}(x + y) dy,$$

где

$$\bar{F}(x) = \mathbf{P}(X \geq x), \quad \lambda^{-1} = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx.$$

При этом нетрудно убедиться (см., например, [1, с. 8]), что $\lambda > 0$, т. е. что

$$\int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx = \mathbf{E}X < \infty.$$

Пример 1.3.10 (характеризация экспоненциального распределения свойством отсутствия последействия в среднем k -го порядка). Это свойство неотрицательной случайной величины с конечным моментом определяется так:

$$\mathbf{E}((X-x)^k | X > x) = \mathbf{E}X^k, \quad \forall x \geq 0.$$

Отсюда легко получить, что

$$\bar{F}(x) = \int_0^{\infty} \bar{F}(y) q(x-y) dy, \quad \forall x \geq 0,$$

где $\bar{F}(x) = \mathbf{P}(X \geq x)$, а

$$q(y) = \begin{cases} \mu k (-y)^k & \text{при } y \leq 0, \\ 0 & \text{при } y > 0, \end{cases}$$

$$\mu = 1/\mathbf{E}X^k.$$

Ссылки на статьи о характеристиках свойством отсутствия последействия в среднем приводятся в монографии [1, с. 90].

Таким образом, мы убедились, что решение большинства характеристических задач можно свести к рассмотрению уравнений типа свертки. Этим обуславливается целесообразность обобщения теоремы 1.2.1 на случай, когда основное функциональное уравнение представимо в виде уравнения свертки. Формулируемая ниже теорема представляет собой критерий качественной устойчивости для таких характеристических задач.

Предварительно заметим, что условие

$$|f(t)| \geq c \quad \text{при } |t| \leq 1, \quad (1.3.15)$$

где f — характеристическая функция, а c — некоторая фиксированная константа из интервала $(0, 1)$, не умаляет общности дальнейших утверждений. Действительно, пусть (1.3.15) не выполняется. Тогда

$$0 < s = \inf \{ |t| : |f(t)| = c \} < 1,$$

и вместо $f(t)$ в рассмотрение вводится характеристическая функция $f(st)$, для которой, очевидно,

$$\inf \{ |t| : |f(st)| = c \} = \frac{1}{s} \inf \{ s|t| : |f(st)| = c \} = 1.$$

Более подробно эта так называемая процедура масштабирования рассматривается в гл. 4.

Теорема 1.3.1. Пусть $\{f_\varepsilon(t)\}$ — характеристические функции, удовлетворяющие соотношению (1.3.15) для любого $\varepsilon > 0$. Пусть, кроме того, функция $g_\varepsilon(u) = \ln |f_\varepsilon(\exp(-u))|$ удовлетворяет уравнению

$$g_\varepsilon(u) = \int_0^\infty g_\varepsilon(x) dk(u-x) + R(u, \varepsilon), \quad \forall u \geq 0.$$

Здесь $\sup \{ |R(u, \varepsilon)| : u \geq 0 \} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а k — неубывающая функция такая, что $k(u) = 0$ при $u > 0$ и

$$1 \neq \int_{-\infty}^0 dk(u) < \infty.$$

Тогда множество $\{g_\varepsilon(u)\}$ относительно компактно в пространстве $C[0, \infty]$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.2.1.

Далее нам потребуются следующие обозначения. Через $\mathbf{R}^1$, как и прежде, обозначается множество всех действительных чисел. Пусть $X \subseteq \mathbf{R}^1$ — борелевское множество. Тогда $L_p(X)$, $p < \infty$, — пространство $\{\varphi\}$ всех измеримых функций на X таких, что $\int_X |\varphi(x)|^p dx < \infty$. Этот интеграл в степени

$1/p$ задает норму $\|\varphi\| = \|\varphi\|_p$ элемента φ . Через $L_\infty(X)$ обозначается пространство существенно ограниченных на X функций $\{\psi\}$ с нормой $\|\psi\|_\infty = \inf \{M : L(x : |\psi(x)| > M) = 0\}$, где L — мера Лебега (более подробно см. [72, с. 128]).

§ 1.4. Необходимые сведения об уравнениях типа свертки

Довольно давно известно, что теория интегральных преобразований Фурье позволяет указать достаточно простую процедуру решения уравнения свертки следующего вида:

$$\chi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\chi(s)ds = r(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.4.1)$$

где $k(t)$, $r(t)$ — заданные функции, а $\chi(t)$ — искомая функция (см. [47]). В самом деле, если функции $k(t)$ и $r(t)$ принадлежат классу $L_1(-\infty, \infty)$ и в том же классе ищется функция χ , то, применяя к обеим частям равенства (1.4.1) трансформацию Фурье, преобразуем его в алгебраическое соотношение

$$\chi(\lambda)(1 - K(\lambda)) = R(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (1.4.2)$$

Здесь через $\chi(\lambda)$, $K(\lambda)$, $R(\lambda)$ обозначаются соответственно преобразования Фурье функций $\chi(t)$, $k(t)$, $r(t)$ так, что, например,

$$K(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} k(t) dt.$$

Найдя $\chi(\lambda)$, мы затем путем обращения преобразования Фурье получим искомую функцию $\chi(t)$.

Поскольку преобразование Фурье функции из класса $L_1(-\infty, \infty)$ всегда непрерывно, то для разрешимости уравнения (1.4.1) в этом классе при любой функции $r \in L_1(-\infty, \infty)$, очевидно, необходимо, чтобы

$$1 - K(\lambda) \neq 0, \quad \forall \lambda \in (-\infty, \infty). \quad (1.4.3)$$

Это соотношение иногда называют *условием нормальности* (см. [9]). Оказывается, что условие нормальности (1.4.3) является также достаточным для того, чтобы уравнение (1.4.1) при любой правой части $r \in L_1(-\infty, \infty)$ имело решение $\chi \in L_1(-\infty, \infty)$. Этот просто формулируемый факт стал, однако, ясным лишь после того, как в 1932 г. Н. Винер (см. [154]) впервые установил, по выражению М. Г. Крейна [47], „тонкую теорему“, заключающуюся в следующем.

Теорема Н. Винера. Для функции $k \in L_1(-\infty, \infty)$ условие нормальности (1.4.3) является необходимым и достаточным условием существования функции $k_1 \in L_1(-\infty, \infty)$ такой, что

$$1 + K_1(\lambda) = 1/(1 - K(\lambda)), \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

т. е. при $-\infty < \lambda < \infty$

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} k_1(t) dt = \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} k(t) dt\right)^{-1}. \quad (1.4.4)$$

Эта теорема будет существенно использована в § 2.6.

Таким образом, при выполнении условия нормальности соотношение (1.4.2) равносильно соотношению

$$\chi(\lambda) = (1 + K_1(\lambda)) R(\lambda),$$

а последнее — тому, что

$$\chi(t) = r(t) + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s) r(s) ds. \quad (1.4.5)$$

Сложнее обстоит дело с уравнениями свертки на полуоси вида

$$\chi(t) - \int_0^{\infty} k(t-s) \chi(s) ds = r(t), \quad t \geq 0, \quad (1.4.6)$$

которые существенно используются в следующей главе.

Первоначально казалось, что в отличие от уравнения свертки (1.4.1) на всей оси получение явных аналитических формул для решений уравнения (1.4.6) принципиально невозможно (см. [47]). Однако еще в 1931 г. эта точка зрения была опровергнута Е. Хопфом и Н. Винером, которым удалось разработать теорию и технику аналитического решения одноднного уравнения свертки

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} k(t-s) \varphi(s) ds = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.4.7)$$

Позднее выяснилось, что в теории уравнений (1.4.6) и (1.4.7) особую роль играет целое число

$$\nu = -\text{ind}(1 - K(\lambda)) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \arg(1 - K(\lambda)),$$

называемое индексом этих уравнений.

Напомним, что если функция $M(\lambda)$ есть краевое значение аналитической, за исключением разве что конечного числа полюсов в верхней (нижней) полуплоскости, функции, то, согласно принципу аргумента, справедливо равенство

$$\operatorname{ind} M(\lambda) = \pm(N - P), \quad (1.4.8)$$

где N — число нулей, а P — число полюсов в соответствующей полуплоскости (кратные нули или полюсы считаются столько раз, какова их кратность).

В исследованиях Н. Винера и Е. Хопфа впервые была использована идея факторизации функции $\mathfrak{H}(z)$, аналитичной в полосе $|\operatorname{Im} z| < a$, т. е. идея о возможности ее представления в виде произведения $\mathfrak{H}_+(z) \mathfrak{H}_-(z)$, где $\mathfrak{H}_+(z)$ и $\mathfrak{H}_-(z)$ — некоторые функции, аналитические соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > -a$ и $\operatorname{Im} z < a$ и удовлетворяющие некоторым дополнительным требованиям.

Эта идея явилась решающей и для построения теории неоднородных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки (1.3.1), примеры которых рассматривались в предыдущем параграфе. Методом факторизаций решение уравнения (1.3.1) сводится к решению краевой задачи Римана — Гильберта (см. [9, § 7]), заключающейся в следующем. Пусть Γ — простой замкнутый контур, ограничивающий на комплексной плоскости область D_+ . Ее дополнение обозначается через D_- . Пусть $A(z)$ и $B(z)$ — две непрерывные функции, заданные на Γ . Следует отыскать две функции $\chi_+(z)$ и $\chi_-(z)$, аналитические внутри соответствующих областей и непрерывные, включая границу, такие, что при $z \in \Gamma$

$$A(z) \chi_+(z) = \chi_-(z) + B(z).$$

Теорема М. Г. Крейна [47]. Пусть $k(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ и выполняется условие нормальности (1.4.3). Для того чтобы однородное уравнение (1.4.7) имело нетривиальное решение в пространстве $L_p(0, \infty)$ ($1 \leq p \leq \infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\nu = -\operatorname{ind}(1 - K) > 0.$$

При выполнении этого условия уравнение (1.4.7) имеет ν линейно независимых решений.

При рассмотрении решений (1.4.6) и (1.4.7) в пространстве $L_\infty(0, \infty)$ очень полезной оказывается следующая лемма.

Лемма Р. Шмицу [144]. Пусть $G(x)$ — функция распределения с носителем из $[0, \infty)$ и при этом для некоторого $\delta > 0$

$$1 < \int_0^{\infty} e^{\delta x} dG(x) < \infty. \quad (1.4.9)$$

Пусть, кроме того, $H(x)$ — неотрицательная непрерывная справа функция, которая при некоторой константе $\lambda > 0$ для всех $x \geq x_0 > -\infty$ и всех $y \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$H(x+y) \leq e^{\lambda y} H(x). \quad (1.4.10)$$

Если при этом

$$H(x) \geq \int_0^{\infty} H(x+y) dG(y), \quad x \geq x_0, \quad (1.4.11)$$

то $H(x)$ ограничена.

Эта лемма и теорема Крейна потребуются в последующих главах.

Некоторые авторы (например, С.Р. Рао, К.С. Лау, Х.М. Гу [111, 118] и др.) вместо термина „уравнение свертки“ и „уравнение типа свертки“ используют понятие „интегральное уравнение Коши“. Как известно, уравнением Коши принято называть следующее функциональное уравнение:

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall (x, y) \in S \subseteq \mathbf{R}^2. \quad (1.4.12)$$

Полагая $S = [0, \frac{1}{2}\infty) \times [0, \infty)$ и интегрируя (1.4.12), получаем:

$$\int_0^{\infty} \{f(x+y)/f(y) - f(x)\} d\mu(y) = 0, \quad \forall x \geq 0, \quad (1.4.13)$$

где μ — положительная борелевская мера на $[0, \infty)$, а $f(y) \neq 0$ при $y \in \text{supp } \mu$. Очевидно, что при определенных условиях (1.4.13) является частным случаем уравнения

$$\int_0^{\infty} f(x+y) d\mu(y) = f(x), \quad \forall x \geq 0, \quad (1.4.14)$$

т. е. уравнения свертки, с которым мы встречались, например, в (1.3.5). Уравнение (1.4.14) в вышеупомянутых работах называют *интегральным уравнением Коши*.

В заключение отметим, что само уравнение Коши (1.4.12) также довольно часто встречается в характеристационных задачах математической статистики. Оно возникает, например, в характеристизации экспоненциального распределения свойством отсутствия последствия (пример 1.3.9, уравнение (1.3.14)), в характеристизации нормального закона свойством независимости суммы и разности исходных случайных величин, рассматриваемой в гл. 3, а также в некоторых других задачах.

ГЛАВА 2

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧАМИ ХАРАКТЕРИЗАЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Первыми работами по применению однородных уравнений свертки на полуоси в характеристизационных задачах математической статистики являются, по-видимому, работа А. А. Зингера [15] (см. также [30, гл. 2]) и работа Л. Б. Клебанова [34] (см. также [110, с. 33, с. 153]). Другое направление исследования уравнения свертки — родственное теореме Шоке—Дени [106] или основанное на ее использовании — можно проследить в работах [108, 118, 137, 141]. Сюда можно отнести и работу Р. Шимицу [143].

Из теоремы Шоке—Дени, в частности, следует, что если H — ограниченное неотрицательное решение уравнения свертки

$$H(x) = \int_0^{\infty} H(x+y) d\mu(y), \quad \forall x \geq 0, \quad (2.0.1)$$

а μ — вероятностная мера на $[0, \infty]$, то H — периодическая функция, периодом которой является каждое число z , $z \in \text{supp } \mu$. Естественно, если носитель меры μ не является решеткой, то H — константа.

Многие авторы стремились избавиться от условий на ограниченность функций H и μ — например, Р. Шимицу [144], Т. Брандхоф и Л. Давис [105], Б. Рамачандран [136]. Наиболее глубоко в этом направлении удалось продвинуться К. С. Лау и С. Р. Рао [118] (доказательство которых было упрощено Б. Рамачандраном [137]), а также С. Р. Рао и Д. Шанбхагу [141]. Сформулируем соответствующий результат более подробно.

Теорема Лау—Рао. Пусть H — неотрицательная локально интегрируемая (относительно меры Лебега L) функция на $[0, \infty)$, а μ — борелевская мера на $[0, \infty)$, причем $\mu(\{0\})=0$. Если имеет место уравнение (2.0.1), то либо $H=0$ L -почти всюду, либо $H(x)=p(x) \exp(z_0 x)$ для L -почти всех неотри-

цательных x , где $p(x) = p(x+y)$ для всех $x \geq 0$ и всех $y \in \text{supp } \mu$, а z_0 является действительным корнем уравнения

$$\int_0^{\infty} \exp(\lambda y) d\mu(y) = 1. \quad (2.0.2)$$

Решения неоднородных уравнений свертки на полупрямой и некоторые их применения для построения оценок устойчивости в характеристизационных задачах рассматривались Р. Шимицу [144] и Х. М. Гу, К. С. Лау [111].

Теорема Гу—Лау. Пусть H — неотрицательная локально интегрируемая (относительно меры Лебега L) функция на $[0, \infty)$, а μ — борелевская мера на $[0, \infty)$, $\mu(0) < 1$. Если

$$H(x)(1 - R(x)) = \int_0^{\infty} H(x+y) d\mu(y), \quad \forall x \geq 0, \quad (2.0.3)$$

$$|R(x)| \leq \varepsilon \exp(-\delta x) \quad (2.0.4)$$

для некоторого $\delta > 0$ и существует неположительный корень z_0 уравнения (2.0.2), то при $x \geq 0$

$$H(x) = p(x) \exp(z_0 x) (1 + K(x)),$$

где $p(x) = p(x+y)$ для всех $x \geq 0$ и всех $y \in \text{supp } \mu$, $|K(x)| \leq C \exp(-\delta x)$ при $x \geq x_0$,

$$C = 2(1 - \mu(0))^{-1} \left(1 - \int_0^{\infty} \exp((z_0 - \delta)x) d\mu(x)\right)^{-1},$$

а x_0 — некоторое неотрицательное число.

Здесь сразу возникают следующие две проблемы. Во-первых, в целом классе задач устойчивости (в которых основное функциональное уравнение записывается с использованием характеристических функций) особенно важно избавиться от условия на неотрицательность функции $H(x)$. Это объясняется тем, что тогда отпадает необходимость в проведении симметризации исходных случайных величин, приводящей к существенным потерям в оценках устойчивости (см. [74, с. 436]).

Во-вторых, если о $H(x)$ имеется некоторая дополнительная информация (например, что $H \in L_{\infty}(0, \infty)$), то крайне

нежелательным становится присутствие экспоненциального множителя в (2.0.4).

Далее будут найдены условия, при которых гарантируется решение обеих проблем. При этом нами используется метод, **принципиально отличающийся** от метода работ [106, 111, 118, 137, 144].

Существенно важным, на наш взгляд, является и то обстоятельство, что если мера μ — абсолютно непрерывна относительно меры Лебега L , то из теоремы Гу — Лау при выполнении некоторой предпосылки (см. § 2.3) вытекает, что индекс уравнения свертки (2.0.3) равен единице.

В этом свете оценки устойчивости характеристизационных теорем с индексом, превышающим 1, представляются **принципиально новыми**.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно уравнения свертки на всей оси. Решения этого уравнения изучались К. С. Лау и С. Р. Рао [119], Б. Рамачандраном и Б. Л. С. Пракаса Рао [139], Б. Рамачандраном [185, 186], Р. В. Янушквичюсом [94]. В работах Б. Л. С. Пракаса Рао, Б. Рамачандрана [135] и Б. Рамачандрана [138] рассмотрены применения этих уравнений в теории случайных процессов и в теории восстановления, а в работе автора [94] — применения к задачам устойчивости характеристик вероятностных распределений.

§ 2.1. Уравнение Винера—Хопфа в задачах устойчивости характеристик распределений

В пространстве $L_\infty(0, \infty)$ рассмотрим уравнение свертки

$$\int_0^\infty \chi(s) dk(t-s) = r(t), \quad 0 \leq t < \infty,$$

где $k(t)$ ($-\infty < t < \infty$) — функция ограниченной вариации без сингулярной компоненты (см. [10, гл. 5]). Иначе говоря, рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \chi(t-b_j) + \int_0^\infty \chi(s) q(t-s) ds = r(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1.1)$$

где $q(t)$ и $r(t)$ — заданные функции, $q \in L_1(-\infty, \infty)$, $|r(t)| \leq \varepsilon$ при $t \geq 0$, a_j, b_j — произвольные числа такие, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty, \quad b_j \leq 0 \quad (j=0, \pm 1, \dots),$$

а $\chi(t)$ ($0 \leq t < \infty$) — искомая функция.

Уравнение (2.1.1) представляет собой обобщение как интегрального уравнения Винера—Хопфа, так и его дискретного аналога. Если положить $a_j = 0$ ($j \neq 0$) и $b_0 = 0$, то уравнение (2.1.1) совпадает с интегральным уравнением Винера—Хопфа. Если $q(t) \equiv 0$ и $b_j = j$ ($j=0, \pm 1, \dots$), то относительно вектор-функции $\vec{\chi}(t) = (\chi_1(t), \dots, \chi_n(t), \dots)$, где $\chi_j(t) = \chi(t + j - 1)$ ($0 \leq t \leq 1$), уравнение (2.1.1) является дискретным уравнением Винера—Хопфа с матрицей $\|a_{j-k}\|_{j,k=1}^{\infty}$.

С уравнением (2.1.1) сопоставляется так называемый *сим-вол*

$$\mathcal{W}(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ib_j \lambda} + \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{i\lambda t} dt. \quad (2.1.2)$$

Символ $\mathcal{W}(\lambda)$ называется *невыврожденным*, если

$$\inf_{-\infty < \lambda < \infty} |\mathcal{W}(\lambda)| > 0.$$

Следуя [12], с каждым невыврожденным символом $\mathcal{W}(\lambda)$ сопоставим два числа ν_1 и ν_2 , определяемых равенством

$$\nu_1 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{i}{2l} (\text{Arg } a(\lambda))|_{-l}^l,$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\text{Arg} (1 + Q(\lambda)/a(\lambda)) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty},$$

где

$$a(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ib_j \lambda}, \quad Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{i\lambda t} dt,$$

и полагается, что $a(\lambda)$ на действительной оси не имеет нулей.

Предел ν_1 существует в силу известного свойства почти-периодических функций. Величина ν_2 означает изменение аргумента функции $1 + Q(\lambda)/a(\lambda)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах.

Величины ν_1 и ν_2 называются *индексами*.

Теорема 2.1.1 (см. [95]). Если $v_1 = v_2 = 0$ и символ $\mathcal{W}(\lambda)$ невырожден, то при указанных выше ограничениях на q , r , a_j , b_j уравнение (2.1.1) имеет в пространстве $L_\infty(0, \infty)$ единственное решение $\chi(t)$ такое, что

$$\sup_{t \geq 0} |\chi(t)| \leq C \sup_{t \geq 0} |r(t)| \leq C\varepsilon, \quad (2.1.3)$$

где величина C может зависеть лишь от $\{a_j\}$, $\{b_j\}$, $q(\cdot)$.

Сведение рассматриваемого уравнения свертки к уравнению свертки с нулевыми индексами достигается, например, за счет использования моментных условий, налагаемых априори на исходный класс случайных величин. Круг таких задач, как будет показано далее, довольно широк. Это теоремы о характеристизации (и, естественно, соответствующие теоремы устойчивости) свойствами равномерности линейных статистик, свойствами независимости статистик, регрессионные модели.

Однако уже рассмотрение характеристик экспоненциального закона свойствами типа отсутствия последствия, свойствами порядковых статистик и рекордов показало, что возникающие в некоторых вероятностных моделях уравнения не сводятся к уравнению свертки с нулевыми индексами. Например, в широком круге задач, рассмотренных Л. Б. Клебановым [34], возникает уравнение свертки (1.1) с $v_1 = 0$, $0 \neq v_2 < \infty$. Поэтому мы задались целью изучить также устойчивость решений интегрального уравнения Винера–Хопфа с ядром из $L_1(-\infty, \infty)$. Таковыми, как известно, являются уравнения

$$\chi_r(t) - \int_0^\infty \chi_r(s) q(t-s) ds = r(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.1.4)$$

$$\chi(t) - \int_0^\infty \chi(s) q(t-s) ds = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1.5)$$

К этому виду легко привести уравнение свертки (2.0.1), рассматриваемое в теоремах Лау–Рао и Гу–Лау, если дополнительно известно, что L -почти всюду на $[0, \infty)$

$$\frac{d\mu(y)}{dy} = g(y), \quad (*)$$

где L — мера Лебега. Действительно,

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^{\infty} H(x+y) d\mu(y) = \int_0^{\infty} H(x+y) g(y) dy = \\ &= \int_x^{\infty} H(u) g(u-x) du. \end{aligned}$$

Обозначив

$$q(v) = \begin{cases} g(-v) & \text{при } v \leq 0, \\ 0 & \text{при } v > 0, \end{cases}$$

получим однородное уравнение Винера—Хопфа (2.1.5).

Поскольку в таком случае

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(\lambda y) d\mu(y) &= \int_0^{\infty} \exp(\lambda y) g(y) dy = \\ &= \int_0^{\infty} \exp(\lambda u) q(-u) du, \end{aligned}$$

то уравнение (2.0.2) можно переписать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda u) q(-u) du = 1. \quad (2.1.6)$$

Теорема 2.1.2 (см. [95]). *Предположим, что χ_r — решение уравнения (2.1.4) в пространстве $L_{\infty}(0, \infty)$, причем $q \in L_1(-\infty, \infty)$, $|r(t)| \leq \varepsilon$ при $t \geq 0$ и символ этого уравнения невырожден, т. е.*

$$Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it\lambda) q(t) dt \neq 0, \quad \forall \lambda \in (-\infty, \infty). \quad (2.1.7)$$

Пусть уравнение (2.1.5) имеет хотя бы одно нетривиальное решение. Тогда в пространстве $L_{\infty}(0, \infty)$ существует решение χ_0 уравнения (2.1.5) такое, что

$$\sup_{t \geq 0} |\chi_r(t) - \chi_0(t)| \leq C\varepsilon,$$

где величина C может зависеть лишь от $q(\cdot)$.

Как уже отмечалось, в формулировках теорем 2.1.1 и 2.1.2 отсутствует условие неотрицательности функции $\chi(t)$.

Это означает, что в (2.1.1) и соответствующих теоремах можно полагать, что χ — комплекснозначная функция. В самом деле, в таком случае достаточно (2.1.1) записать отдельно для действительной части и отдельно — для мнимой.

В теореме 2.1.2 аппроксимация χ_r в пространстве $L_\infty(0, \infty)$ производится некоторой функцией $\chi_0 \in L_\infty(0, \infty)$. Вопрос, возможна ли такая аппроксимация в пространстве функций, имеющих вероятностный смысл, оставался открытым. Примеры таких функций рассмотрены в § 1.3. Так, в примере 1.3.1 такой является функция $\chi(\tau) = -\ln |f(\exp(-\tau))|$, где f — характеристическая функция, в примере 1.3.7 — это функция $H(x) = (1 - F(x))^{k-j} \exp(\lambda(k-j)x)$, в примерах 1.3.9 и 1.3.10 — функция $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, где F — вероятностное распределение, и т. д.

Первым этапом для решения этой важной проблемы аппроксимации в пространстве функций, имеющих вероятностный смысл, является следующая теорема.

Теорема 2.1.3. *Предположим, что χ_r — решение в пространстве $L_1(0, \infty)$ уравнения (2.1.4), причем $q \in L_1(-\infty, \infty)$ и выполняется условие нормальности (2.1.7). Пусть хотя бы одно решение соответствующего однородного уравнения (2.1.5) является функцией вида $A \exp(-Bt)$, $A \neq 0$, $B > 0$ *).*

Если для некоторого $\omega \geq 2$ $|r^{(\omega)}(t)| \leq M \forall t \geq 0$, причем $r, r' \in L_1(0, \infty)$ и $|r(t)| \leq \varepsilon \forall t \geq 0$, то существуют такие величины (возможно, комплексные) $\{z_j\}$ и $\{\gamma_{jl}\}$, что

$$\chi_r(t) = \gamma_{00} e^{-Bt} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m_j} \gamma_{jl} t^{l-1} e^{z_j t} + r_0(t),$$

где $|r_0(t)| \leq C \varepsilon^{1-1/\omega}$, а C зависит лишь от $M, \|q\|, \omega$ и B .

Величины $z_1, \dots, z_n$ являются корнями уравнения

$$V^-(iz) = A \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty e^{-tz - Bs} q(t-s) ds dt = 0, \quad (2.1.8)$$

а m_j — кратность корня z_j . Замечание о том, что $\{\gamma_{jl}\}$ не зависят от t , полагается очевидным. Теперь легко сделать вывод о справедливости следующего утверждения.

) Это эквивалентно условию (2.1.6) при $\lambda = -B$, если исходное уравнение (2.1.5) рассматривать в форме (2.0.1) при дополнительном требовании ().

Следствие 2.1.1. Если в условиях теоремы 2.1.3 все корни $z_1, \dots, z_x$ уравнения (2.1.8) действительны и не являются кратными, то существуют $\gamma_0, \dots, \gamma_x$ такие, что

$$\left| \chi_r(t) - \sum_{j=0}^x \gamma_j \exp(z_j t) \right| \leq C \varepsilon^{1-1/\omega}, \quad (2.1.9)$$

где $z_0 = -B$, $B > 0$.

Доказательство теоремы 2.1.3 может быть получено из теоремы 2.1.2 с использованием довольно тонких результатов из § 18 монографии В. В. Напалкова „Уравнения свертки в многомерных пространствах“ (Москва, „Наука“, 1982). Ниже, для полноты изложения, приведем свое доказательство теоремы 2.1.3 методом факторизации.

Можно ли улучшить оценку (2.1.9)? Ответ положителен, если имеются дополнительные условия на ядро рассматриваемого уравнения свертки.

Теорема 2.1.4. Пусть выполнены предпосылки теоремы 2.1.2. Пусть, далее, q и q' — непрерывны и суммируемы, причем $q(u) = 0$ при $u \geq 0$, $q(-\infty) = 0$, а корни $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ уравнения (2.1.6) с индексом ν действительны и не являются кратными. Тогда существуют константы $c_1, \dots, c_\nu$ такие, что

$$\sup_{t \geq 0} \left| \chi_r(t) - \sum_{j=1}^{\nu} c_j \exp(\lambda_j t) \right| \leq C \varepsilon,$$

где C может зависеть лишь от $q(\cdot)$.

На конкретных примерах убедимся, что в большинстве случаев требование существования решения однородного уравнения (2.1.5) вида $A \exp(-Bt)$, присутствующее в теореме 2.1.3 и ее следствии, не является ограничительным. Начнем с примера 1.3.1. Здесь это уравнение описывает класс нормальных случайных величин с характеристической функцией $\Phi(t) = \exp(-\sigma^2 t^2/2)$. Но в таком случае при $t \geq 0$

$$\chi(\tau) = -\ln |\Phi(\exp(-\tau))| = \sigma^2 \exp(-2\tau)/2$$

и, следовательно, $A = \sigma^2/2$, $B = 2$. Аналогичное положение и при характеристизации экспоненциального распределения, хотя в этом случае при составлении уравнения используются

не характеристические функции, а функции распределения, и т. д.

Рассмотрим теперь некоторые примеры характеризационных задач и их устойчивости, в которых основное функциональное уравнение можно свести к уравнению свертки (2.1.1).

Пример 2.1.1 (задача устойчивости теоремы Пойа). Пусть X_1, X_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины, $EX_1=0$, $EX_1^2=1$, $E|X_1|^3 \leq M$. Пусть, кроме того, статистики $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ и $X_1(\lambda, \varepsilon)$ -равномерно распределены, т. е.

$$\lambda(L_1, L_2) \leq \varepsilon$$

(определение метрики λ дается в § 1.2). В этом случае легко убедиться, что при $|t| \leq 1/\varepsilon$

$$f(t) = f^2(t/\sqrt{2}) + r(t), \quad |r(t)| \leq \varepsilon,$$

где f — характеристическая функция X_1 . За счет моментных условий имеем:

$$|f(t)|^2 \geq 1 - t^2.$$

Отсюда следует, что при $|t| \leq 1$

$$\ln f(t) = 2 \ln f(t/\sqrt{2}) + r_1(t), \quad [(2.1.10)]$$

$$|r_1(t)| = |\ln(1 + r(t)/f^2(t/\sqrt{2}))| \leq 4\varepsilon.$$

Поскольку $f(t) = f(-t)$, то вместо интервала $-1 \leq t \leq 1$ достаточно рассмотреть интервал $0 \leq t \leq 1$. Обозначив

$$\varphi(t) = t^{-2-\delta} (\ln f(t) + t^2/2), \quad (2.1.11)$$

уравнение (2.1.10) перепишем так:

$$\varphi(t) = 2^{-\delta/2} \varphi(t/\sqrt{2}) + r_2(t),$$

$$r_2(t) = r_1(t) t^{-2-\delta}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Пусть $t = e^{-\tau}$, $\psi(\tau) = \varphi(e^{-\tau})$, $\alpha_0 = \frac{1}{2} \ln 2$. За счет моментных ограничений и определения (2.1.11) легко убедиться, что

$$\psi \in L_\infty(0, \infty),$$

при этом для $\tau \geq 0$

$$\psi(\tau) = 2^{-\delta/2} \psi(\tau + \alpha_0) + r_2(e^{-\tau}). \quad (2.1.12)$$

Итак, мы получили уравнение Винера—Хопфа (2.1.1), в котором $q \equiv 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2^{-\delta/2}$, $b_1 = -\alpha_0$, а остальные a_i , b_j — нули. Коэффициент $2^{-\delta/2}$ ($\delta > 0$) в (2.1.12) необходим для невырожденности символа этого уравнения.

Пример 2.1.2 (характеризация распределения Парето свойством постоянства условного математического ожидания). Эта характеристика родственна соответствующей теореме в работе К. С. Лау, С.Р. Рао [118] (с исправлением ошибок в [141]). Поскольку она, как будет показано, по сути дела сводится к теореме Клебанова (см. § 2.2), то мы не будем отдельно обсуждать все условия, при которых эта характеристика имеет место.

Итак, пусть X — неотрицательная случайная величина с распределением F такая, что

$$E \{ h(X/a) | X \geq a \} = c, \quad \forall a \geq 1, \quad (2.1.13)$$

где c — некоторая константа, а h — действительная функция на $[1, \infty)$, причем $h(\infty) < \infty$, $h(1) \neq c$. Если $P(X \geq a) = \bar{F}(a) > 0$, то (2.1.13) означает, что

$$-\int_a^{\infty} h(x/a) d\bar{F}(x) = c\bar{F}(a), \quad a \geq 1.$$

Интегрируем по частям, учитывая, что $h(\infty) < \infty$:

$$\int_1^{\infty} \bar{F}(au) h'(u) du = (c - h(1)) \bar{F}(a) \quad (2.1.14)$$

при $a \geq 1$ и $\bar{F}(a) > 0$. Если же существует a_0 такое, что $\bar{F}(a_0) = 0$, то (2.1.14) обращается в тривиальное тождество. Следовательно, $\forall b \in [0, \infty)$

$$\int_0^{\infty} G(x+b) h'(e^x) e^x dx = (c - h(1)) G(b), \quad (2.1.15)$$

где $G(x) = \bar{F}(e^x)$.

Пусть

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ h'(e^{-x}) e^{-x} / (c - h(1)) & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда (2.1.15) можно переписать так:

$$G(b) - \int_0^{\infty} G(y) q(b-y) dy = 0, \quad \forall b \geq 0,$$

т. е. мы получили уравнение свертки (2.1.1).

Пример 2.1.3 (характеризационная теорема М. Фиша). Пусть X_1, X_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения F , а $X_{1,2}, X_{2,2}$ — соответствующие порядковые статистики. Пусть $EX_1 < \infty$, c — некоторая константа. Согласно теореме 3.4.5 из [110],

$$E(X_{2,2} - X_{1,2} | X_{1,2} = y) = c \quad (2.1.16)$$

F -почти всюду (т. е. почти всюду относительно F) тогда и только тогда, когда F — экспоненциальное распределение. Рассмотрим функциональное уравнение, возникающее при этой характеристизации.

Согласно (2.1.16),

$$E(X_{2,2} - X_{1,2} | X_{1,2} = y) = \int_y^{\infty} x dF^*(x) - y = c$$

для F -почти всех y из области $0 < F(y) < 1$, где

$$F^*(x) = \frac{F(x) - F(y)}{1 - F(y)} \quad \text{при } x \geq y.$$

Следовательно, в этой области

$$\int_y^{\infty} x dF(x) = (c + y)(1 - F(y)). \quad (2.1.17)$$

Заметим, что если, во-первых, для некоторого y_0 $F(y_0) = 1$, то (2.1.17) выполняется очевидным образом. Во-вторых, путем соответствующего сдвига легко достигнуть того, чтобы

$$\inf \{x : F(x) > 0\} = 0.$$

В-третьих, в [110] на основе (2.1.17) доказано, что $F(x)$ строго монотонна в области $0 < F(x) < 1$. Из этих трех замечаний с учетом того, что F — непрерывна, заключаем, что урав-

нение (2.1.17) верно для всех $y \geq 0$. Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_y^{\infty} (1 - F(x)) dx = c(1 - F(y)), \quad \forall y \geq 0. \quad (2.1.18)$$

Пусть λ — некоторый фиксированный параметр,

$$H(x) = (1 - F(x)) \exp(\lambda x),$$

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ c^{-2} \exp \lambda x & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

В таком случае (2.1.18) можно переписать так:

$$H(x) = \int_0^{\infty} H(x) q(x-u) du, \quad \forall x \geq 0, \quad (2.1.19)$$

т. е. мы опять получили уравнение свертки (2.1.1).

Отметим, что уравнение (2.1.19) представляет собой частный случай уравнения свертки, возникающего в теореме Т. Фергюсона [109], устойчивость которой исследуется в следующем параграфе.

В заключение вкратце рассмотрим доказательства приведенных выше теорем. Теорема 2.1.1 сформулирована на основе статьи И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана [12] (см. также [13]). Согласно этой работе, для того чтобы оператор W , действующий в пространстве $\bar{L}_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) по формуле

$$(W\chi)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \chi(t-b_j) + \int_0^{\infty} \chi(s) q(t-s) ds,$$

при $\nu_1 = \nu_2 = 0$ был обратим в этом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы его символ $\mathcal{W}(\lambda)$ был невырожденным. Таким образом,

$$\|\chi\| = \|W^{-1}r\| \leq \|W^{-1}\| \|r\|.$$

Отсюда следует оценка (2.1.3).

Теорема 2.1.2 почти непосредственно вытекает из результатов М. Г. Крейна [47, с. 8, теоремы II, III]. В самом деле, рассмотрим в пространстве $L_{\infty}(0, \infty)$ оператор T , определенный формулой

$$(T\chi)(t) = \chi(t) - \int_0^{\infty} \chi(s) q(t-s) ds.$$

Согласно вышеупомянутым результатам М. Г. Крейна, из (2.1.7) и существования хотя бы одного нетривиального решения (2.1.5) вытекает, что оператор T отображает $L_\infty(0, \infty)$ на все пространство $L_\infty(0, \infty)$. Положим

$$E = \text{Ker } T.$$

Тогда оператор $\hat{T}$, индуцированный оператором T в фактор-пространстве $L_\infty(0, \infty)/E$, обратим. Элементы фактор-пространства $L_\infty(0, \infty)/E$ будем обозначать через $[f]$, $f \in L_\infty(0, \infty)$. Рассмотрим уравнение, индуцированное уравнением (2.1.4) в $L_\infty(0, \infty)/E$:

$$\hat{T}[\chi_r] = [r]. \quad (2.1.20)$$

Тогда для любого $[r]$ имеем:

$$[\chi_r] = \hat{T}^{-1}[r].$$

Поскольку

$$\| [f] \| = \inf_{f_0 \in E} \| f - f_0 \|,$$

то из (2.1.20) получаем:

$$\| [\chi_r] \| \leq \| \hat{T}^{-1} \| \| [r] \| \leq \| T^{-1} \| \| r \| \leq \| \hat{T}^{-1} \| \varepsilon.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Порядок доказательства следующих двух теорем мы сочли целесообразным изменить.

Доказательство теоремы 2.1.4. Согласно заключению теоремы 2.1.2 и определению q ,

$$\chi_0(t) = \int_t^\infty \chi_0(s) q(t-s) ds, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1.21)$$

Поскольку q и q' — непрерывны и суммируемы, то $\chi_0(t)$ — дифференцируема. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \chi_0(s) q'(t-s) ds &= -\chi_0(s) q(t-s) \Big|_{s=t}^\infty + \\ &+ \int_t^\infty \chi_0'(s) q(t-s) ds, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\chi'_0(t) = \int_t^{\infty} \chi'_0(s) q(t-s) ds.$$

Следовательно, χ'_0 также является решением (2.1.21), а поэтому дифференцируема. Таким образом (как и в работе Л.Б. Клебанова [34]), мы получили, что $\chi_0(t)$ обладает производными любого порядка и $\chi_0^{(n)}$, $n=1, 2, \dots$, — решения уравнения (2.1.21). Согласно теореме М. Г. Крейна (см. § 1.4), число линейно независимых решений этого уравнения равно

$$\nu = -\text{ind}(1 - Q(t)) > 0.$$

Это означает, что функции $\chi_0(t)$, $\chi'_0(t)$, ..., $\chi_0^{(\nu)}(t)$, являющиеся решением уравнения (2.1.21), зависимы. Следовательно, $\chi_0(t)$ удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка ν :

$$\sum_{j=0}^{\nu} a_j \chi_0^{(j)}(t) = 0. \quad (2.1.22)$$

В дальнейшем полезно следующее замечание. Если существует действительное λ_* такое, что

$$1 = \int_0^{\infty} \exp(\lambda_* y) q(-y) dy,$$

то нетрудно убедиться, что $\exp(\lambda_* y)$ является решением уравнения свертки (2.1.21) и, следовательно, решением дифференциального уравнения (2.1.22). Но тогда λ_* является корнем характеристического уравнения

$$\sum_{j=0}^{\nu} a_j \lambda^j = 0.$$

В силу условий теоремы таких корней есть ν , причем они действительны и различны.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.1.3. Введем в рассмотрение следующие односторонние функции:

$$r_+(t) = \begin{cases} r(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \chi_+(t) = \begin{cases} \chi_r(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Уравнение (2.1.4) можно доопределить на всю ось следующим образом:

$$\begin{aligned}\chi_+(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_+(s) q(t-s) ds = \\ = \chi_-(t) + r_+(t), \quad -\infty < t < \infty,\end{aligned}\quad (2.1.23)$$

где через $\chi_-(t)$ обозначена следующая функция:

$$\chi_-(t) = \begin{cases} - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_+(s) q(t-s) ds & \text{при } t < 0, \\ 0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}\quad (2.1.24)$$

Пусть $R^+(x)$ — преобразование Фурье функции $r_+(t)$, т. е.

$$R^+(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r_+(t) e^{itx} dt = \int_0^{\infty} r_+(t) e^{itx} dt.$$

Аналогично через $F^+(x)$, $F^-(x)$ и $Q(x)$ обозначим преобразования Фурье функций $\chi_+(t)$, $\chi_-(t)$ и $q(t)$ соответственно. В уравнении (2.1.23) переходя к интегралам Фурье и учитывая, что выполнено условие нормальности $Q(x) \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^1$, получаем краевые условия для задачи Римана — Гильберта (см. § 1.4):

$$F^+(x) = \frac{F^-(x)}{1 - Q(x)} + H(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^1, \quad (2.1.25)$$

где

$$H(x) = R^+(x) / (1 - Q(x)).$$

Согласно условиям теоремы, существует частное решение $v(t) = A \exp(-Bt)$, $t \geq 0$, однородного уравнения (2.1.5). Определим

$$v_+(t) = \begin{cases} A \exp(-Bt) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}\quad (2.1.26)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}V^+(x) &= \int_0^{\infty} v_+(t) e^{itx} dt = \\ &= -A \int_0^{\infty} e^{itx - Bt} dt = -\frac{A}{B - ix}.\end{aligned}\quad (2.1.27)$$

Теперь по аналогии с (2.1.24) определим $v_-(t)$:

$$v_-(t) = \begin{cases} - \int_{-\infty}^{\infty} q(t-s) v_+(s) ds, & t \leq 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (2.1.28)$$

Убедимся, что $v_- \in L_1(-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |v_-(t)| dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |q(t-s)| |v_+(s)| ds dt = \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |q(t-s)| \exp(-Bs) ds dt = \\ &= A \int_0^{\infty} \exp(-Bs) \int_{-\infty}^{\infty} |q(t-s)| dt ds = A \|q\|_1 / B. \end{aligned}$$

Подведем итог. Функции $v_+(t)$ и $v_-(t)$, определяемые соотношениями (2.1.26) и (2.1.28), являются частным решением соответствующего (2.1.23) однородного уравнения

$$v_+(t) - \int_{-\infty}^{\infty} v_+(s) q(t-s) ds = v_-(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}^1. \quad (2.1.29)$$

Следовательно,

$$V^+(x) = V^-(x) / (1 - Q(x)), \quad (2.1.30)$$

где

$$V^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v_-(t) e^{itx} dt = \int_{-\infty}^0 v_-(t) e^{itx} dt.$$

Поскольку интегралы Фурье правой и левой односторонних абсолютно интегрируемых функций есть краевые значения функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, то $V^+(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, а $V^-(z)$ — в нижней. При этом в силу (2.1.30) уравнение (2.1.25) можно переписать так:

$$F^+(x) / V^+(x) = F^-(x) / V^-(x) + G(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^1, \quad (2.1.31)$$

где

$$G(x) = H(x) / V^+(x).$$

Согласно теореме Н. Винера (см. § 1.4), для функции $q \in L_1(-\infty, \infty)$ соотношение $Q(x) \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}^1$ является необходимым и достаточным условием существования функции $q \in L_1(-\infty, \infty)$ такой, что $\forall x \in \mathbb{R}^1$

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) q_1(t) dt = \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) q(t) dt\right)^{-1},$$

т. е. $1 + Q_1(x) = (1 - Q(x))^{-1}$.

Таким образом,

$$H(x) = R^+(x) + Q_1(x) R^+(x),$$

а в силу формулы (2.1.27)

$$\begin{aligned} G(x) &= H(x)/V^+(x) = \\ &= -A^{-1}((B - ix)R^+(x) + (B - ix)Q_1(x)R^+(x)), \\ AG(x) &= -BR^+(x) - BQ_1(x)R^+(x) + ixR^+(x) + \\ &\quad + ixQ_1(x)R^+(x). \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

Поскольку по определению $r_+(-\infty) = 0$, а согласно условиям теоремы $r \in L_1(0, \infty)$, т. е. $r_+(\infty) = 0$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dr_+(t) &= -ix \int_{-\infty}^{\infty} r_+(t) e^{itx} dt = \\ &= -ixR^+(x). \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

Учитывая (2.1.32), отсюда делаем вывод, что $G(x)$ является преобразованием Фурье некоторой функции $g(t)$. В силу формулы свертки и однозначности соответствия между оригиналом и его преобразованием Фурье на основе (2.1.32) и (2.1.33) заключаем, что

$$Ag(t) = -Br_+(t) - Bq_1 * r_+(t) - r'_+(t) - q_1 * r'_+(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Здесь символом $*$ обозначена операция свертки, а $r'_+(0)$ — производная в нуле справа. При этом заметим, что относительно r'_+ в дальнейшем потребуются лишь формула (2.1.38),

в которой r'_+ присутствует только в виде свертки, и полагается, что

$$\begin{aligned} r'_+ * v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t-u) dr_+(u) = v(t) r(0+) + \\ &+ \int_{0+}^{\infty} v(t-u) r'(u) du. \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

Положим

$$G^+(x) = \int_0^{\infty} g_+(t) e^{itx} dt, \quad G^-(x) = \int_{-\infty}^0 g_-(t) e^{itx} dt,$$

где

$$\begin{aligned} g_+ &= -\frac{B}{A} r_+ - \frac{B}{A} (q_1 * r_+)_+ - \\ &- \frac{1}{A} r'_+ - \frac{1}{A} (q_1 * r'_+)_+, \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

$$g_- = \frac{B}{A} (q_1 * r_+)_- + \frac{1}{A} (q_1 * r'_+)_-.$$

В этих формулах индекс $+$ для функции $m(t)$ означает, что $m_+(t) = m(t)$ при $t \geq 0$ и $m_+(t) = 0$ при $t < 0$. Аналогично, $m_-(t) = m(t)$ при $t < 0$ и $m_-(t) = 0$ при $t \geq 0$.

Легко убедиться, что

$$G^+(x) - G^-(x) = G(x)$$

и из формулы (2.1.31) для любого $x \in \mathbb{R}^1$ имеем:

$$F^+(x)/V^+(x) - G^+(x) = F^-(x)/V^-(x) - G^-(x). \quad (2.1.36)$$

Далее будем опираться на обобщенную теорему Лиувилля (см., например, [9, с. 29–30]). Согласно этой теореме, если функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, за исключением разве что конечного числа точек $z_0 = \infty$, z_k^* ($k=1, \dots, n$), где они могут иметь полюсы с главными частями

$$D_0(z) = c_1^0 z + \dots + c_{m_0}^0 z^{m_0},$$

$$D_k(z - z_k^*) = c_1^k / (z - z_k^*) + \dots + c_{m_k}^k / (z - z_k^*)^{m_k}$$

и совпадают на действительной оси, то они представляют единую во всей плоскости рациональную функцию

$$P(z) = c + D_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k(z - z_k^*),$$

где c — произвольная константа. Полюсы z_k^* могут лежать как в полуплоскостях, так и на действительной оси.

Обозначим через N_+ и $\bar{N}_0$ числа нулей функции V^+ соответственно в верхней полуплоскости и на прямой $(-\infty, \infty)$, а через N_- — число нулей функции V^- в нижней полуплоскости. В силу (2.1.30) на основании свойств индекса (см. [9, §3]) получаем

$$N_+ + N_0 + N_- = \text{ind} (1 - Q(x))^{-1} = -\text{ind} (1 - Q(x)) = \nu.$$

Согласно теореме Римана — Лебега ([69], теорема 1), из условия $q \in \bar{L}_1(-\infty, \infty)$ следует соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0.$$

Это означает, что $\nu < \infty$, т. е. что $\bar{N}_- < \infty$. Далее, $F^\pm, V^\pm, G^\pm$ — это односторонние преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций, которые, как уже отмечалось, имеют аналитические продолжения соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости. Заметим, наконец, что $V^-(z)$ аналитична и ограничена в нижней полуплоскости, включая бесконечность. Учитывая это, а также (2.1.27) и (2.1.36), применяем обобщенную теорему Лиувилля к функциям

$$F_1(z) = (iz - B)F^+(z)/A - G^+(z), \quad F_2(z) = F^-(z)/V^-(z) - G^-(z).$$

Таким образом, $\forall x \in \mathbb{R}^1$

$$F^+(x) = P(x)V^+(x) + G^+(x)V^+(x). \quad (2.1.37)$$

Опять воспользовавшись теоремой Римана — Лебега относительно функций $F^+(x)$ и $G^+(x)$, на основе соотношения $F_1(x) = P(x)$ заключаем, что

$$D_0(x) \equiv 0.$$

Для завершения доказательства теоремы нам, таким образом, осталось оценить функцию

$$r_0(t) = g_+ * v_+(t),$$

преобразование Фурье которой $G^+(x) V^+(x)$ присутствует в формуле (2.1.37).

Из (2.1.35) следует, что

$$r_0(t) = g_+ * v_+(t) = -Br_+ * v_+(t)/A - B(q_1 * r_+)_+ * v_+(t)/A - \\ - r'_+ * v_+(t)/A - (q_1 * r'_+)_+ * v_+(t)/A. \quad (2.1.38)$$

Согласно определению (2.1.26),

$$|(q_1 * r_+)_+ * v_+(t)| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |q_1(t-u)| |r_+(u)| du \right) * |v_+(t)| = \\ = A \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |q_1(t-u-y)| |r_+(u)| e^{-By} du dy \leq \varepsilon AI/B,$$

где через I обозначена норма $\|q_1\| = \|q_1\|_1$. С учетом (2.1.34) аналогично получаем, что

$$|(q_1 * r'_+)_+ * v_+(t)| \leq \left(\varepsilon + \sup_{t \geq 0} |r'_+(t)| \right) AI/B,$$

$$|r_+ * v_+(t)| \leq \varepsilon A/B,$$

$$|r'_+ * v_+(t)| \leq \left(\varepsilon + \sup_{t \geq 0} |r'_+(t)| \right) A/B.$$

Таким образом, $\forall t \in \mathbb{R}^1$

$$|r_0(t)| \leq \varepsilon(1 + 1/B)(1 + I) + \\ + (1 + I) \sup_{t \geq 0} |r'_+(t)|/B. \quad (2.1.39)$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно воспользоваться теоремой А. Горного и А. Картана (см. [54, с. 217]), которая формулируется следующим образом. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая n раз функция на $[0, \infty)$ и

$$M_k = \sup_{x \geq 0} |f^{(k)}(x)|, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Тогда

$$M_k \leq (8en/k)^k M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}, \quad 1 \leq k < n.$$

Отсюда и из (2.1.39) имеем

$$|r_0(t)| \leq \varepsilon(1 + 1/B)(1 + I) + \varepsilon^{1-1/\omega} 8e\omega M^{1/\omega}(1 + I)/B,$$

что и следовало доказать.

§ 2.2. Устойчивость характеристик экспоненциального закона

1. Условие отсутствия последствия в среднем. Пусть ξ — неотрицательная невырожденная случайная величина с функцией распределения $F(x)$, а $h(u)$, $u \geq 0$, — некоторая вещественная измеримая функция, для которой

$$\mathbf{E} |h(\xi)| < \infty, \quad \mathbf{E} h(\xi) \neq h(0). \quad (2.2.1)$$

Нас будет интересовать, для каких распределений $F(x)$ соотношение

$$\mathbf{E} \{h(\xi - y) | \xi \geq y\} = \mathbf{E} h(\xi) \quad (2.2.2)$$

справедливо при всех $y \geq 0$.

Теорема Л. Б. Клебанава [34]. Пусть функция $h(z)$, $z \geq 0$, — абсолютно непрерывна, а для некоторого $\sigma_0 \geq 0$ функция

$$g(u) = \begin{cases} h'(u) \exp(-\sigma_0 u) & \text{при } u \geq 0, \\ 0 & \text{при } u < 0 \end{cases}$$

принадлежит $\bar{L}_1$ и

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (1 - F(u)) \exp(\sigma_0 u) = 0. \quad (2.2.3)$$

Положим

$$\beta = 1 / (\mathbf{E} h(\xi) - h(0)), \quad Q(t) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(-u) \exp(itu) du$$

и допустим, что $\forall t \in \mathbf{R}^1$

$$Q(t) \neq 1, \quad v = -\text{ind}(1 - Q(t)) = 1.$$

Соотношение $F(x) = 1 - c \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$, $0 \leq c \leq 1$, справедливо тогда и только тогда, когда выполняется (2.2.2).

Здесь и далее c и C означают положительные константы. Мы опускаем нумерацию констант там, где это несущественно.

Понятие индекса довольно подробно рассмотрено в § 1.4. Отметим, что в рассматриваемой характеристизации условие на индекс $v=1$ эквивалентно существованию константы B такой, что

$$\int_0^{\infty} \exp(-Bs) g(s-z) ds \neq 0 \quad \text{при } \text{Im } z < 0.$$

Пусть теперь условие отсутствия последействия в среднем (2.2.2) выполнено лишь приближенно в следующем смысле:

$$\mathbf{E} \{ h(\xi - y) | \xi \geq y \} - \mathbf{E} h(\xi) = r(y), \quad (2.2.4)$$

$$|r(y)| \leq \varepsilon \quad \text{при } y \geq 0.$$

Что в таком случае можно сказать о распределении ξ ?

Теорема 2.2.1 (см. [95]). Пусть выполнены условия теоремы Клебанава. Если $|r(y)| \leq \varepsilon$ при $y \geq 0$ и $\mathbf{E} h(\xi) = \alpha$, то существуют величины C и λ , зависящие лишь от $g(\cdot)$ и α , такие, что

$$|\bar{F}(x) - c \exp(-\lambda x)| \leq C \varepsilon \exp(-\sigma_0 x), \quad x \geq 0,$$

для некоторой неотрицательной константы c (здесь $\bar{F} = 1 - F$).

Доказательство. Если $F(y) \neq 1$, то, согласно (2.2.4),

$$\left(\int_y^\infty h(u-y) dF(u) \right) / (1 - F(y)) - \alpha = r(y).$$

Интегрируя по частям, из

$$-\int_y^\infty h(u-y) d\bar{F}(u) = \alpha \bar{F}(y) + r(y) \bar{F}(y)$$

получаем

$$\bar{F}(y) = \beta \int_y^\infty h'(x-y) \bar{F}(x) dx + \beta r(y) \bar{F}(y). \quad (2.2.5)$$

Если для некоторого y_0 $F(y_0) = 1$, то $\bar{F}(y) = 0$ при $y \geq y_0$ и, следовательно, (2.2.5) выполняется для всех $y \geq 0$. Обозначив

$$k(u) = \beta g(-u), \quad f(y) = \exp(\sigma_0 y) \bar{F}(y),$$

из (2.2.5) получим

$$f(y) = \int_0^\infty k(y-x) f(x) dx + \beta r(y) f(y), \quad y \geq 0. \quad (2.2.6)$$

В силу (2.2.3) $f \in L_\infty(0, \infty)$. Очевидно, выполнены и остальные предпосылки теоремы 2.1.2. Поскольку индекс уравнения (2.2.6) равен единице, то множество решений соответствующее

щего (2.2.6) однородного уравнения имеет базис, состоящий из единственного элемента — экспоненциальной функции. Следовательно, χ_0 в (2.1.7) имеет вероятностный смысл и при $y \geq 0$

$$|f(y) - c \exp(\sigma_0 y - \lambda y)| \leq C \varepsilon,$$

что и следовало доказать.

2. Свойства порядковых статистик. Пусть $X_1, \dots, X_k$ — независимые неотрицательные равнораспределенные случайные величины с распределением F , а $X_{j,k}$ — j -я порядковая статистика, т. е.

$$X_{1,k} \leq X_{2,k} \leq \dots \leq X_{k,k}.$$

Теорема Т. Фергюсона [109]. Пусть F — непрерывное распределение с конечным первым моментом. Если для некоторого j ($1 \leq j < k$) условное математическое ожидание $X_{j+1,k} - X_{j,k}$ при данном $X_{j,k} = x$ постоянно F -почти всюду, то F — экспоненциальный закон.

Устойчивость этой теоремы впервые была исследована Р. Шимицу [144], однако при следующем условии на остаточный член в уравнении (2.1.4):

$$|r(t)| \leq \varepsilon e^{-\Delta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.2.7)$$

где Δ — некоторая фиксированная положительная константа. Мы задались целью отказаться от экспоненциального множителя в (2.2.7).

Теорема 2.2.2 (см. [95]). Пусть F — непрерывная и строго монотонная в области $0 < F(x) < 1$ функция распределения с конечным первым моментом. Если для некоторого $1 \leq j < k$ существует положительная константа γ такая, что при F -почти всех $x \geq 0$

$$|E(X_{j+1,k} - X_{j,k} | X_{j,k} = x) - \gamma| = |r(x)| \leq \varepsilon, \quad (2.2.8)$$

то при всех $x \geq 0$

$$|1 - F(x) - \exp(-\lambda_* x)| \leq C \varepsilon^{1/(k-j)} \exp(-\lambda^* x), \quad (2.2.9)$$

где λ_* , λ^* и C зависят лишь от γ и $k-j$.

Доказательство. Поскольку F — непрерывна, то

$$E(X_{j+1, k} | X_{j, k} = x) = - \int_x^\infty y \, d_y \left(\frac{1-F(y)}{1-F(x)} \right)^{k-j}$$

F -почти всюду в области $0 < F(x) < 1$. Отсюда, согласно (2.2.8),

$$\begin{aligned} & - \int_x^\infty y \, d_y \left(\frac{1-F(y)}{1-F(x)} \right)^{k-j} - x = \gamma + r(x), \\ & - \int_x^\infty y \, d(1-F(y))^{k-j} = (x + \gamma)(1-F(x))^{k-j} + \\ & \quad + r(x)(1-F(x))^{k-j} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

F -почти всюду в области $\{x: 0 < F(x) < 1\}$. Наша ближайшая цель — доказать, что уравнение (2.2.10) верно для всех $x \geq 0$. Поскольку (2.2.10) верно для F -почти всех x из области $\{x: 0 < F(x) < 1\}$, а F — непрерывна и строго монотонна, то оно верно и для всех x таких, что $0 < F(x) < 1$. С помощью сдвига исходной выборки нетрудно достигнуть выполнения условия $\inf \{x: F(x) > 0\} = 0$. Далее, если для некоторого x_0 $F(x_0) = 1$, то, очевидно, (2.2.10) обращается в тривиальное тождество при $x \geq x_0$. Таким образом, (2.2.10) выполняется для всех $x \geq 0$.

Покажем теперь, что

$$\begin{aligned} & - \int_x^\infty y \, d(1-F(y))^{k-j} = \\ & = \int_x^\infty (1-F(y))^{k-j} \, dy + x(1-F(x))^{k-j}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

В самом деле, если $A > x$, то, интегрируя по частям, имеем:

$$\begin{aligned} \int_x^A y \, d(1-F(y))^{k-j} &= A(1-F(A))^{k-j} - x(1-F(x))^{k-j} - \\ & - \int_x^A (1-F(y))^{k-j} \, dy. \end{aligned}$$

Поскольку при $A \rightarrow \infty$

$$A(1-F(A))^{k-j} \leq A(1-F(A)) \leq \int_A^\infty y dF(y) \rightarrow 0,$$

то отсюда следует (2.2.11). Из (2.2.10) и (2.2.11) получаем, что при $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1-F(x+y))^{k-j} dy &= \gamma(1-F(x))^{k-j} + \\ &+ r(x)(1-F(x))^{k-j}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Подчеркнем, что условия непрерывности и строгой монотонности функции F , а также условие существования первого момента требовались лишь для получения уравнения свертки (2.2.12) для всех $x \geq 0$.

Фиксируем некоторое малое положительное число δ_0 . Из (2.2.12), очевидно, следует, что при малых $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\infty (1-F(x+y))^{k-j} dy \leq (\gamma + \delta_0)(1-F(x))^{k-j}.$$

Умножая обе стороны неравенства на $\exp(x/(\gamma + \delta_0))$ и обозначая

$$H(x) = (1-F(x))^{k-j} \exp(x/(\gamma + \delta_0)),$$

при $x \geq 0$ имеем:

$$\int_0^\infty H(x+y) \exp(-y/(\gamma + \delta_0)) dy \leq (\gamma + \delta_0) H(x). \quad (2.2.13)$$

Теперь воспользуемся леммой Р. Шимицу (см. § 1.4). С этой целью определим экспоненциальное распределение формулой

$$dG(y) = (\gamma + \delta_0)^{-1} \exp(-y/(\gamma + \delta_0)) dy.$$

В этом случае (2.2.13) можно переписать так:

$$H(x) \geq \int_0^\infty H(x+y) dG(y),$$

т. е. условие (1.4.11) имеет место при $x \geq 0$. Легко проверить, что условие (1.4.9) выполняется для любого фиксированного

$\delta \in (0, 1/(\gamma + \delta_0))$. Убедимся, наконец, что условие (1.4.10) леммы Р. Шмицу также имеет место. В самом деле,

$$\begin{aligned} (1 - F(x+y))^{k-j} \exp((x+y)/(\gamma + \delta_0)) &\leq \\ &\leq (1 - F(x))^{k-j} \exp(x/(\gamma + \delta_0)) \exp(y/(\gamma + \delta_0)), \end{aligned}$$

т. е. при $x \geq 0, y \geq 0$

$$H(x+y) \leq \exp(y/(\gamma + \delta_0)) H(x),$$

что и следовало доказать. Таким образом,

$$H \in L_\infty(0, \infty).$$

Обозначим $\lambda = 1/(\gamma + \delta_0)$,

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ \gamma^{-1} \exp(\lambda x) & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Тогда (2.12) можно переписать так:

$$H(x) = \int_0^\infty H(u) q(x-u) du - \gamma^{-1} r(x) H(x). \quad (2.2.14)$$

Поскольку $q \in L_1(-\infty, \infty)$ и

$$Q(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} q(x) dx = \gamma^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-itx} dx = \frac{1}{(\lambda + it)\gamma} \neq 1$$

при любом $t \in (-\infty, \infty)$, то выполнены все условия теоремы 2.1.2. Поэтому из (2.2.14) следует, что

$$|H(x) - H_0(x)| \leq C\varepsilon,$$

где H_0 — решение соответствующего (2.2.14) однородного уравнения, а C зависит лишь от γ и δ_0 . Согласно формуле (1.4.8),

$$\nu = -\text{ind}(1 - Q(t)) = -(0 - 1) = 1.$$

Следовательно, множество решений соответствующего (2.2.14) однородного уравнения имеет базис, состоящий из единственной — экспоненциальной — функции.

Таким образом, за счет удачного выбора ядра $q(x)$ в уравнении (2.2.14) упрощена до минимума проблема выделения решений, имеющих вероятностный смысл. В дальнейшем везде, где это возможно, будем следовать этой схеме.

Поскольку решение рассматривается в классе непрерывных функций и предполагается, что

$$\inf \{x : F(x) > 0\} = 0,$$

то $H_0(x) = \exp(-\lambda_0 x)$ при $x \geq 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} H(x) &= \exp(-\lambda_0 x) + r_1(x), \\ (1 - F(x))^{k-j} &= \exp(-(\lambda_0 + \lambda)x) + \\ &+ r_1(x) \exp(-\lambda x), \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

где $|r_1(x)| \leq C\varepsilon$. Полагая

$$\begin{aligned} f(y) &= y^{1/(k-j)}, \quad y = a + b, \quad a = \exp\{-(\lambda + \lambda_0)x\}, \\ b &= r_1(x) \exp(-\lambda x), \end{aligned}$$

из разложения

$$f(y) = f(a) + bf'(a + \theta b), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= \exp\{-(\lambda + \lambda_0)x/(k-j)\} + \\ &+ \frac{r_1(x) \exp(-\lambda x)}{(k-j) \{ \exp(-(\lambda + \lambda_0)x) + \theta r_1(x) \exp(-\lambda x) \}^{1-1/(k-j)}}. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Нетрудно убедиться, что при $x \leq x_*$,

$$x_* = \frac{1}{\lambda + \lambda_0} \ln \frac{k-j}{C+1} + \frac{1}{\lambda + \lambda_0} \ln 1/\varepsilon,$$

из (2.2.16) следует, что

$$\begin{aligned} |1 - F(x) - \exp\{-(\lambda + \lambda_0)x/(k-j)\}| &\leq \\ &\leq C\varepsilon^{1/(k-j)} \exp(-\lambda x/(k-j)). \end{aligned}$$

При $x \geq x_0$ требуемая оценка (2.2.9) получается непосредственно из (2.2.15). Теорема доказана.

3. Рекорды. Напомним определение рекордной случайной величины. Пусть $\{X_k, k \geq 1\}$ — последовательность независимых равномерно распределенных случайных величин. Пусть $Y_k = \max(X_1, \dots, X_k)$. X_j является рекордом последовательности $\{X_k\}$, если $Y_j > Y_{j-1}$, причем по определению X_1 — рекордная величина.

Рассмотрим теперь устойчивость характеристики экспоненциального закона свойством рекордности. А именно, построим оценку устойчивости в одной из теорем Р. Гупта [112].

Теорема 2.2.3 (см. [95]). Пусть $R_1, R_2, \dots$ — рекордные величины неотрицательной случайной выборки с непрерывной функцией распределения F и конечным первым моментом. Пусть, кроме того, F — строго монотонна в области $0 < F(x) < 1$, и для некоторого фиксированного j существует положительная константа γ такая, что при F -почти всех $x \geq 0$

$$|r(x)| = |E(R_{j+1} - R_j | R_j = x) - \gamma| \leq \varepsilon. \quad (2.2.17)$$

Тогда

$$|\bar{F}(x) - \exp(-\lambda_0 x)| \leq C\varepsilon \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0,$$

где $\lambda = 1/\gamma - \delta > 0$, δ — фиксированная положительная константа, а C, λ_0 — некоторые величины, зависящие лишь от γ и δ .

Доказательство. Из непрерывности F и существования первого момента в силу (2.2.17) следует, что при $0 < F(x) < 1$ F -почти всюду

$$r(x) + \gamma = \int_0^{\infty} \bar{F}(u+x)/\bar{F}(x) du, \quad \bar{F} = 1 - F. \quad (2.2.18)$$

Поскольку (2.2.18) верно для F -почти всех x из области $\{x : 0 < F(x) < 1\}$, а F — непрерывна и строго монотонна, то оно верно и для всех x таких, что $0 < F(x) < 1$. Следовательно, в области $\{x : 0 < F(x) < 1\}$

$$\int_0^{\infty} \bar{F}(u+x) du = r(x) \bar{F}(x) + \gamma \bar{F}(x). \quad (2.2.19)$$

Аналогично предыдущим доказательствам предполагаем, что $\inf \{x : F(x) > 0\} = 0$ и убеждаемся, что уравнение (2.2.19) справедливо на всей полуоси $[0, \infty)$.

Как и при доказательстве теоремы 2.2.2, подчеркнем, что условия непрерывности и строгой монотонности функции F , а также условие существования первого момента требовались лишь для получения уравнения свертки (2.2.19) для всех $x \geq 0$. Теперь остается заметить, что (2.2.19) является частным случаем уравнения (2.2.12) при $k-j=1$.

Теорема доказана.

4. Устойчивость характеристики распределения Парето.

В настоящем пункте рассматривается устойчивость характеристики [133] распределения Парето условием типа отсутствия последствия в мультипликативной форме.

Теорема 2.2.4. Пусть некоторая невырожденная случайная величина $\bar{X} \geq 1$ удовлетворяет условию

$$|P(X \geq xy | X \geq x) - P(X \geq y)| \leq \varepsilon \quad (2.2.20)$$

при $x \geq 1, y \geq 1$. Тогда существуют положительное решение γ_0 неравенства

$$\gamma < M(\gamma) = 1 / \int_0^{\infty} P(\ln X \geq y) e^{-\gamma y} dy \quad (2.2.21)$$

и конечные положительные величины λ и C такие, что

$$|P(X \geq x) - x^{-\lambda}| \leq C\varepsilon \text{ при } x \geq 1, \quad (2.2.22)$$

причем λ и C могут зависеть лишь от γ_0 .

Доказательство. Обозначив $Y = \ln X$, из (2.2.20) получаем

$$P(Y \geq u + v) = P(Y \geq u) P(Y \geq v) + h(u, v), \quad (2.2.23)$$

$$|h(u, v)| \leq \varepsilon, \quad u \geq 0, v \geq 0.$$

Следуя [1, с. 8], нетрудно доказать, что

$$\int_0^{\infty} P(Y \geq y) dy < \infty,$$

и поэтому $M(0) > 0$. Определим $J(x) = x$. Поскольку $J(0) = 0$, то в силу непрерывности M и J существует $\gamma_0 > 0$ такая, что $J(\gamma_0) < M(\gamma_0)$, т. е. при $\gamma = \gamma_0$ верно соотношение (2.2.21). После умножения (2.2.23) на $\exp(-\gamma_0 v)$ и интегрирования по v получаем, что при $u \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P(Y \geq u + v) e^{-\gamma_0 v} dv &= \int_0^{\infty} P(Y \geq v) e^{-\gamma_0 v} dv P(Y \geq u) + \\ &+ \int_0^{\infty} h(u, v) e^{-\gamma_0 v} dv. \end{aligned}$$

Таким образом, при $u \geq 0$

$$\int_0^{\infty} G(v) q(u-v) dv = G(u) + \gamma_1 \int_0^{\infty} h(u, v) e^{-\gamma_0 v} dv, \quad (2.2.24)$$

где $G(u) = P(Y \geq u)$,

$$\gamma_1 = 1 / \int_0^{\infty} G(v) e^{-\gamma_0 v} dv = M(\gamma_0),$$

$$q(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u > 0, \\ \gamma_1 \exp \gamma_0 u & \text{при } u \leq 0. \end{cases}$$

При этом в силу невырожденности Y справедливо неравенство

$$\gamma_1 < \infty.$$

Далее,

$$\gamma_1 \int_0^{\infty} |h(u, v)| e^{-\gamma_0 v} dv \leq \varepsilon \gamma_1 / \gamma_0,$$

$$q \in L_1(-\infty, \infty),$$

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} q(x) dx = \gamma_1 \int_0^{\infty} e^{-itx} e^{-\gamma_0 x} dx = \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + it}.$$

Поскольку в силу (2.2.21) $\gamma < M(\gamma_0)$, то

$$Q(t) \neq 1 \quad \text{при } t \in (-\infty, \infty).$$

Согласно формуле (1.48),

$$v = -\text{ind}(1 - Q(t)) = -(0 - 1) = 1.$$

Следовательно, множество решений соответствующего (2.2.24) однородного уравнения имеет базис, состоящий из единственной — экспоненциальной — функции. Из (2.2.23) при $h \equiv 0$ следует, что у этой экспоненциальной функции скачок в начальной точке отсутствует. Применением теоремы 2.1.2 завершается доказательство оценки (2.2.22).

В заключение заметим, что решение уравнения (2.2.23) другим методом — путем сведения к дифференциальному уравнению — рассматривалось в монографии [1] при исследовании устойчивости характеристики экспоненциального распределения свойством отсутствия последдействия.

§ 2.3. Оценки устойчивости характеристик смеси распределений

Убедимся теперь, что из теоремы Гу—Лау (см. введение к гл. 2), а также из теоремы Лау—Рао при абсолютной непрерывности μ относительно L и некотором ограничении на корень $\lambda = z_0$ уравнения

$$\int_0^{\infty} \exp(\lambda y) d\mu(y) = 1 \quad (2.3.1)$$

индекс рассматриваемого в этих теоремах уравнения свертки

$$H_1(x)(1 - R(x)) = \int_0^{\infty} H(x+y) d\mu(y), \quad \forall x \geq 0, \quad (2.3.2)$$

равен 1. Точнее, докажем, что при условии единственности корня z_0 в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ уравнения (2.3.1) индекс уравнения свертки (2.3.2) с учетом соотношения

$$\frac{d\mu(y)}{dy} = q(y) \quad L\text{-почти всюду на } [0, \infty) \quad (2.3.3)$$

равен 1. В конце параграфа приводятся конкретные примеры характеристизационных задач, обладающих этим свойством единственности.

Итак, пусть имеют место соотношения (2.3.2) и (2.3.3). С целью упрощения обозначений будем полагать $R(x) \equiv 0$, т. е. рассмотрим соответствующее (2.3.2) однородное уравнение

$$H(x) = \int_0^{\infty} H(x+y) q(y) dy, \quad \forall x \geq 0. \quad (2.3.4)$$

Очевидно,

$$H(x) = \int_x^{\infty} H(s) q(s-x) ds = \int_0^{\infty} H(s) g(x-s) ds, \quad (2.3.5)$$

где, по определению,

$$g(s) = \begin{cases} 0, & s > 0, \\ q(-s), & s \leq 0. \end{cases}$$

Аналогично соотношение (2.3.1) с учетом новых обозначений перепишем так:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(z_0 y) d\mu(y) &= \int_0^{\infty} \exp(z_0 y) q(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^0 \exp(-z_0 x) q(-x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z_0 x) g(x) dx = G_L(z_0) = 1. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Здесь $G_L(z)$ — двустороннее преобразование Лапласа функции $g(x)$.

Нетрудно убедиться, что в интервале $(-\infty, 0]$ функция $G_L(z)$ монотонно возрастает, поскольку $g(x)$ — неотрицательна. Следовательно, при условии $\mu([0, \infty)) > 1$ уравнение

$$G_L(z) = 1 \quad \{ (2.3.7) \}$$

на левой полуоси $(-\infty, 0)$ имеет единственное решение.

Пусть это свойство $G_L(z)$ сохраняет и в левой полуплоскости, т. е. (2.3.7) имеет единственный корень в области $\operatorname{Re} z < 0$. Поэтому если $G_F(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, — преобразование Фурье функции $g(x)$, то

$$\begin{aligned} G_F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(isx) g(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix \operatorname{Re} s - x \operatorname{Im} s) g(x) dx = G_L(\operatorname{Im} s - i \operatorname{Re} s) \end{aligned}$$

имеет единственный корень в нижней полуплоскости $\{s : \operatorname{Im} s < 0\}$. Следовательно,

$$1 - G_F(s) \neq 0$$

при $\operatorname{Im} s < 0$ и $s \neq iz_0$. Поскольку $\operatorname{Re} z_0 < 0$, то, согласно формуле (1.4.8),

$$\operatorname{ind} (1 - G_F(t)) = -1$$

при условии аналитичности $G_F(s)$ в нижней полуплоскости. Таким образом, индекс уравнения (2.3.5), а тем самым и уравнений (2.3.4), (2.3.2) с учетом (2.3.3), равен 1.

Следует отметить, что известные в настоящее время оценки устойчивости посвящены именно этому случаю. Поэтому возникает естественная задача: исследовать устойчивость характеристик, которые можно свести к уравнению Винера — Хопфа (2.3.4) с индексом, превышающим 1.

Такого рода характеристики впервые, по-видимому, рассмотрены в работе Л. Б. Клебанова [34]. Соответствующий результат устойчивости, следуя работе автора [97], на основе теоремы 2.1.2 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.3.1. Пусть ξ — невырожденная неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Если

$$h(x) = Mx^4 - Nx^2 + D, \quad M > 0, \quad N > \sqrt{24M}, \quad (2.3.8)$$

$E|h(\xi)| < \infty$ и при этом $\forall y \geq 0$

$$|r(y)| = |E(h(\xi - y) | \xi \geq y) - Eh(\xi)| \leq \varepsilon, \quad (2.3.9)$$

$$(1 - F(x)) \exp(\sigma x) \leq \text{const} \quad (2.3.10)$$

для некоторого $\sigma > 0$, то существует константа c такая, что для любого $x \geq 0$

$$|1 - F(x) - c \exp(\lambda_1 x) - (1 - c) \exp(\lambda_2 x)| \leq C\varepsilon \exp(-\sigma x),$$

где $\lambda_{1,2} = -N \pm \sqrt{N^2 - 24M}$, а величина C может зависеть лишь от $h(\cdot)$, σ и $Eh(\xi)$.

Возникает еще один естественный вопрос: а нельзя ли, несколько видоизменив функцию h , отказаться от условия (2.3.10)? Оказывается, можно, если потребовать, чтобы в формуле (2.3.8) N было бы неположительным.

В связи с этим необходимо подчеркнуть, что неравенство $N \leq 0$ по существу меняет задачу. В таком случае h становится неотрицательным и индекс рассматриваемого уравнения равен 1.

Теорема 2.3.2 (см. [97]). Пусть ξ — невырожденная неотрицательная случайная величина с распределением $F(x)$. Если $h(x) = Mx^4 - Nx^2 + D$, $M > 0$, $N \leq 0$, $E|h(\xi)| < \infty$ и при этом для любого $y \geq 0$ выполняется соотношение (2.3.9), то для любого $x \geq 0$

$$|1 - F(x) - \exp(-\lambda x)| \leq C \exp(-\sigma x), \quad (2.3.11)$$

где положительные величины λ и C могут зависеть лишь от M и N , а

$$\sigma = \left\{ (-N\beta + (N^2\beta^2 + 48M\beta)^{1/2}/2) \right\}^{1/2}, \\ \beta = 1/(Eh(\xi) - h(0)).$$

Доказательство теоремы 2.3.1. Согласно (2.3.9), при $y \geq 0$ и $F(y) < 1$

$$\left(\int_y^\infty h(u-y) dF(u) \right) / (1 - F(y)) - \alpha = r(y),$$

где $\alpha = Eh(\xi)$.

Отсюда при $y \geq 0$ в обозначении $\bar{F} = 1 - F$ имеем:

$$- \int_y^\infty h(u-y) dF(u) = \alpha \bar{F}(y) + r(y) \bar{F}(y). \quad (2.3.12)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_y^\infty h(u-y) d\bar{F}(u) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \bar{F}(A) h(A) - \bar{F}(y) h(0) - \\ &\quad - \int_y^\infty \bar{F}(u) h'(u-y) du, \\ \bar{F}(A) |h(A)| &\leq \int_A^\infty |h(x)| dF(x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $M > 0$ и $A \rightarrow \infty$, то из (2.3.12) в обозначении $\beta = 1/(\alpha - h(0))$ получаем, что

$$\bar{F}(y) = \beta \int_y^\infty \bar{F}(u) h'(u-y) du - \beta r(y) \bar{F}(y) \quad (2.3.13)$$

при $y \geq 0$. Обозначим

$$H(u) = \exp(\sigma u) \bar{F}(u), \quad k(u) = \begin{cases} \beta \exp(\sigma u) h'(-u), & u \leq 0, \\ 0, & u > 0, \end{cases}$$

где σ определяется соотношением (2.3.10). Из (2.3.13) следует, что при $y \geq 0$

$$H(y) = \int_0^{\infty} H(u) k(y-u) du - \beta r(y) H(y). \quad (2.3.14)$$

Очевидно,

$$H \in L_{\infty}(0, \infty), \quad k \in L_1(-\infty, \infty). \quad (2.3.15)$$

Убедимся, что символ уравнения свертки (2.3.14) — функция $1-K(t)$ — невырожден, т. е.

$$1-K(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1. \quad (2.3.16)$$

Здесь $K(t)$ — преобразование Фурье ядра $k(t)$. Действительно,

$$\begin{aligned} 1-K(t) &= 1 - \frac{24 M \beta}{(it+\sigma)^4} + \frac{24 N \beta}{(it+\sigma)^2} = \\ &= \frac{(\sigma+it)^4 + (\sigma+it) 2 N \beta - 24 M \beta}{(\sigma+it)^4}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Обозначим $(\sigma+it)^2 = y$. Тогда соотношение $1-K(t)=0$ означало бы, что

$$y^2 + 2 N \beta y - 24 M \beta = 0. \quad (2.3.18)$$

Если (2.3.10) верно для некоторого положительного σ , то оно верно и для $\sigma_n < \sigma$. На основании предположения о малости σ из (2.3.17), (2.3.18) заключаем о справедливости (2.3.16).

Теперь воспользуемся теоремой 2.1.2. Согласно этой теореме, существует решение H_0 соответствующего (2.3.13) однородного уравнения такое, что'

$$|H(x) - H_0(x)| \leq C \varepsilon, \quad \forall x \geq 0, \quad (2.3.19)$$

где C зависит лишь от M и N .

Согласно [34, 67], $H_0(x)$ имеет следующий вид (при $x \geq 0$):

$$H_0(x) = (C_1 e^{v_1 x} + C_2 e^{v_2 x} + C_3 e^{v_3 x} + C_4 e^{v_4 x}) e^{\sigma x},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — константы, а

$$v_{1,2} = \pm (N + \sqrt{N^2 - 24M}),$$

$$v_{3,4} = \pm (N - \sqrt{N^2 - 24M}).$$

Поскольку $v_1 > 0, v_3 > 0, v_1 \neq v_3$ и при этом, согласно теореме 2.1.2, $H_0 \in L_\infty(0, \infty)$, то

$$C_1 = C_3 = 0.$$

С другой стороны, $\bar{F}(0) = 1$, поэтому $H(0) = 1$ и

$$|1 - C_2 - C_4| \leq C\varepsilon.$$

Отсюда и из (2.3.19) получаем утверждение теоремы 2.3.1.

Доказательство теоремы 2.3.2. Мы уже видели, что в условиях теоремы справедливо уравнение (2.3.14), т. е. при $y \geq 0$

$$H(y) = \int_0^\infty H(u) k(y-u) du - \beta r(y) H(y).$$

Проблема, однако, заключается в таком выборе параметра $\sigma > 0$, чтобы имели место соотношения (2.3.15):

$$H \in L_\infty(0, \infty), k \in L_1(-\infty, \infty). \quad (2.3.20)$$

Для доказательства первого из этих соотношений воспользуемся леммой Р. Шимицу (см. § 1.4). Пусть

$$G(x) = \beta/2 \int_0^\infty \exp(-\sigma u) h'(u) du, \quad x \geq 0.$$

Поскольку, согласно условиям теоремы, $h' \geq 0$, то $G(x)$ — функция распределения, если только

$$\beta/2 \int_0^\infty \exp(-\sigma u) (4Mu^3 - 2Nu) du = 1. \quad (2.3.21)$$

Очевидно, для всех $x \geq 0, y \geq 0$

$$\begin{aligned} H(x+y) &= \exp(\sigma x + \sigma y) \bar{F}(x+y) \leq \\ &\leq \exp(\sigma x) \exp(\sigma y) \bar{F}(x) = \exp(\sigma y) H(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta \exp(\sigma y) \int_y^{\infty} \bar{F}(u) h'(u-y) du = \\ & = \beta \int_0^{\infty} H(x+y) \exp(-\sigma x) h'(x) dx = 2 \int_0^{\infty} H(x+y) dG(x). \end{aligned}$$

В силу (2.3.13)

$$H(y) + \beta r(y) H(y) = 2 \int_0^{\infty} H(x+y) dG(x).$$

Таким образом, при $\varepsilon \leq 1/\beta$

$$\int_0^{\infty} H(x+y) dG(x) \leq H(y), \quad \forall y \geq 0,$$

и в силу леммы Р. Шимицу $H(x)$ ограничена.

Справедливость второго из соотношений (2.3.20) очевидна в силу определения функций h и k .

Согласно работе М. Г. Крейна [47], число линейно независимых решений соответствующего (2.3.14) однородного уравнения конечно и равно

$$\kappa = -\text{ind}(1 - K(t));$$

где, как обычно, $K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) k(x) dx$. Займемся подсчетом этого числа.

Сначала на основе (2.3.21) определим число σ :

$$\begin{aligned} 2M\beta \int_0^{\infty} u^3 \exp(-\sigma u) du - N\beta \int_0^{\infty} u \exp(-\sigma u) du &= 1, \\ \sigma^4 + N\beta\sigma^2 - 12M\beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Поскольку, согласно определению, $\sigma > 0$, $M > 0$, $N \leq 0$, $\beta > 0$, то из (2.3.22) получаем, что

$$\sigma = \{(-N\beta + \sqrt{N^2\beta^2 + 48M\beta})/2\}^{1/2}. \quad (2.3.23)$$

С целью подсчета числа κ воспользуемся формулой (1.4.8). Для этого сначала необходимо подсчитать нули и полюсы функции $1 - K(z)$, z — комплекснозначная переменная.

$$\begin{aligned} 1 - K(z) &= 1 - \beta \int_{-\infty}^0 \exp(izu + \sigma u) h'(-u) du = \\ &= \frac{(iz + \sigma)^4 + (iz + \sigma)^2 2N\beta - 24M\beta}{(iz + \sigma)^4}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место уравнение (2.3.18) с $y = (iz + \sigma)^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= -N\beta \pm \sqrt{N^2\beta^2 + 24M\beta}, \\ z_{1,2} &= (\sigma \pm \sqrt{y_1})i, \quad z_{3,4} = \pm \sqrt{|y_2|} + \sigma i. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что $\sigma^2 < \nu_1$. Поэтому $\operatorname{Im} z_2 < 0$. Поскольку z_1, z_3, z_4 находятся в верхней полуплоскости, а $1 - K(z)$ в этой полуплоскости аналитична, за исключением четырехкратного полюса $z = \sigma i$, то, согласно (1.4.8),

$$\operatorname{ind}(1 - K(t)) = 3 - 4 = -1,$$

т. е. $\kappa = 1$. Теперь на основе (2.3.16) и теоремы 2.1.2 получаем (2.3.11). Теорема доказана.

Итак, соотношение $N \leq 0$ существенно меняет теорему 2.3.1. Нельзя ли в ее условиях уменьшить степень полинома $h(x)$ с четырех до двух? Ответ оказался положительным. С целью экономии места ограничимся рассмотрением лишь самой характеристики.

Теорема 2.3.3. Пусть неотрицательная случайная величина ξ такова, что $0 < \sigma^2 = E\xi^2 < \infty$. Пусть, кроме того,

$$h(x) = K(x - M)(x - N),$$

где K — произвольная отрицательная константа, а числа M и N удовлетворяют соотношениям $M + N \geq 8$,

$$(M + N)(1 - 1/\mu) < \sigma^2/\mu < M + N; \quad (2.3.24)$$

здесь $\mu = E\xi > 0$. Если

$$E\{h(\xi - y) | \xi \geq y\} = 0, \quad \forall y \in [0, \infty), \quad (2.3.25)$$

то существуют положительные ω_1 и ω_2 , $\omega_1 \neq \omega_2$, такие, что при $x \geq 0$

$$F(x) = P(\xi < x) = 1 - \gamma e^{-\omega_1 x} - (1 - \gamma) e^{-\omega_2 x},$$

где γ — некоторая константа.

Доказательство. По аналогии с выводом формулы (2.3.13) нетрудно убедиться, что в силу (2.3.25) при $y \geq 0$

$$\int_y^\infty h'(u-y) \bar{F}(u) du = \beta_0 \bar{F}(y),$$

где $\beta_0 = \alpha - h(0) = Eh(\xi) - KMN$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2K \int_y^\infty u \bar{F}(u) du - K(2y + M + N) \int_y^\infty \bar{F}(u) du = \\ = \beta_0 \bar{F}(y), \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Из этого уравнения и условия $\bar{F}(y) = 1, \forall y \leq 0$, видно, что функция $\bar{F}(y)$ обладает производными любого порядка на всей действительной оси.

Дифференцируем (2.3.26):

$$-2K \int_y^\infty \bar{F}(u) du + K(M+N) \bar{F}(y) = \beta_0 \bar{F}'(y), \quad y \geq 0.$$

Отсюда легко убедиться, что на всей действительной оси

$$\beta_0 \bar{F}''(y) - K(M+N) \bar{F}'(y) - 2K \bar{F}(y) = 0. \quad (2.3.27)$$

Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид

$$\beta_0 u^2 - K(M+N)u - 2K = 0. \quad (2.3.28)$$

В силу (2.3.24) $\sigma^2/\mu < M+N$, поэтому

$$\beta_0 = K\sigma^2 - K(M+N)\mu > 0.$$

С другой стороны, опять в силу (2.3.24)

$$K^2(M+N)^2 + 8\beta_0 K > 0,$$

поэтому корни уравнения (2.3.28)

$$u_{1,2} = (K(M+N) \pm \sqrt{K^2(M+N)^2 + 8\beta_0 K}) / (2\beta_0)$$

различны и отрицательны. Следовательно, общее решение уравнения (2.3.27) имеет вид

$$\bar{F}(y) = C_1 e^{u_1 y} + C_2 e^{u_2 y},$$

где C_1, C_2 — константы. Поскольку $\bar{F}(0) = 1$, то $C_1 + C_2 = 1$, т. е.

$$\bar{F}(x) = \gamma e^{u_1 x} + (1 - \gamma) e^{u_2 x}.$$

Теорема доказана.

Далее рассмотрим в качестве примеров характеристизационные задачи, в которых требование единственности отрицательного корня уравнения (2.3.6) и требование единственности корня уравнения (2.3.7) в левой полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ эквивалентны.

Пример 2.3.1 (Р. Гупта [112]). Пусть $\{R_j\}$ — рекордные величины неотрицательной случайной выборки с непрерывной функцией распределения F и конечным r -м моментом. Если для некоторого j и некоторого $r \geq 1$ существует положительная константа γ такая, что

$$E \{ (R_{j+1} - R_j)^r | R_j = x \} = \gamma \quad (2.3.29)$$

для F -почти всех $x \geq 0$, то F — экспоненциальное распределение.

Согласно [112], в силу непрерывности F и условия на моменты из (2.3.29) следует, что при $0 < F(x) < 1$ F -почти всюду

$$\gamma = \int_0^\infty r u^{r-1} \bar{F}(u+x) / \bar{F}(x) du, \quad \bar{F} = 1 - F. \quad (2.3.30)$$

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае $\bar{F}$ — строго монотонна (см. [110], с. 60–61). Это означает, что (2.3.30) верно для всех x из области $0 < F(x) < 1$ и, следовательно,

$$\bar{F}(x) = r/\gamma \int_0^\infty u^{r-1} \bar{F}(u+x) du. \quad (2.3.31)$$

В свою очередь отсюда получаем (см. также доказательство теоремы 2.2.2), что (2.3.31) справедливо для всех $x \geq 0$.

Обозначим

$$H(u) = \bar{F}(u) \exp(\lambda u),$$

где λ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \lambda^r \gamma / r! < 1. \quad (2.3.32)$$

Тогда (2.3.31) можно переписать так:

$$H(x) = \int_0^\infty H(u+x) q(u) du, \quad \forall x \geq 0,$$

где $q(u) = r\gamma^{-1}u^{r-1} \exp(-\lambda u)$ при $u \geq 0$

Согласно (2.3.6),

$$r/\gamma \int_0^\infty \exp(z_0 y) y^{r-1} \exp(-\lambda y) dy = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{r!}{\gamma(\lambda - z_0)^r} = 1. \quad (2.3.33)$$

Соотношения (2.3.32) и (2.3.33), в частности, означают, что $z_0 < 0$, т. е. (2.3.6) в $\mathbb{R}^1$ имеет единственный отрицательный корень.

Убедимся, что этим же свойством единственности обладает решение уравнения (2.3.7) в области $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$. Действительно,

$$\begin{aligned} G_L(z) &= \int_{-\infty}^\infty \exp(-zx) g(x) dx = \int_{-\infty}^0 \exp(-zx) q(-x) dx = \\ &= \int_0^\infty \exp(zx) q(x) dx = r/\gamma \int_0^\infty \exp(zx - \lambda x) x^{r-1} dx = \frac{r!}{\gamma(\lambda - z)^r}, \end{aligned}$$

и при $r=1$ единственность очевидна.

Рассмотрим еще три случая, т. е. $r=2, 3, 4$.

При $r=2$ получаем следующее уравнение:

$$1 - G_L(z) = 1 - 2! / (\gamma(\lambda - z)^2) = 0. \quad (2.3.34)$$

Следовательно,

$$z_{1,2} = \lambda \pm \sqrt{2/\gamma}.$$

Отсюда видно, что поскольку в силу (2.3.32) $\lambda < \sqrt{2/\gamma}$, то в области $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ (2.3.34) имеет единственный корень $z_2 = \lambda - \sqrt{2/\gamma}$.

При $r=3$ имеем:

$$1 - G_L(z) = 1 - 3! / (\gamma(\lambda - z)^3) = 0, \quad (2.3.35)$$

$$(\lambda - z)^3 = 3! / \gamma.$$

Как и прежде, через $\sqrt[3]{A}$ обозначен арифметический корень числа A . Тогда

$$z_1 = \lambda - \sqrt[3]{6/\gamma},$$

$$z_2 = \lambda + \sqrt[3]{6/\gamma} \sqrt{3/2} - i/2,$$

$$z_3 = \lambda + \sqrt[3]{6/\gamma} \sqrt{3/2} + i/2,$$

т. е. в области $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ уравнение (2.3.35) имеет единственный корень.

При $r=4$ получаем:

$$1 - G_L(z) = 1 - 4! / (\gamma(\lambda - z)^4) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются следующие числа:

$$z_1 = \lambda + \sqrt[4]{24/\gamma}, \quad z_2 = \lambda - \sqrt[4]{24/\gamma},$$

$$z_3 = \lambda + i \sqrt[4]{24/\gamma}, \quad z_4 = \lambda - i \sqrt[4]{24/\gamma}.$$

Опять убеждаемся, что рассматриваемое уравнение в области $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ имеет единственный корень, а именно, число z_2 . Из-за громоздкости выкладок мы не будем рассматривать случаи $r \geq 5$.

Пример 2.3.2 — это теорема Фергюсона из § 2.2. Поскольку в этом случае F — непрерывна, то

$$E(X_{j+1, k} | X_{j, k} = x) = - \int_x^\infty y \, d_y (\bar{F}(y) / \bar{F}(x))^{k-j}$$

F -почти всюду в области $0 < F(x) < 1$. Следовательно

$$- \int_x^\infty y \, d \bar{F}^{k-j}(y) = (x + \gamma) \bar{F}^{k-j}(x) \quad (2.3.36)$$

F -почти всюду в области $0 < F(x) < 1$. Повторяя рассуждения, приведенные при рассмотрении предыдущего примера, нетрудно убедиться, что уравнение (2.3.36) верно для всех $x \geq 0$. В (2.3.36), интегрируя по частям, получаем, что при всех $x \geq 0$

$$\bar{F}^{k-j}(x) = \gamma^{-1} \int_0^{\infty} F^{k-j}(x+y) dy.$$

Таким образом, мы получили аналог уравнения (2.3.31) при $r=1$.

Пример 2.3.3. Пусть при $y \geq 0$

$$\mathbf{E} \{ h(\xi - y) \mid \xi \geq y \} = \mathbf{E} h(\xi), \quad (2.3.37)$$

а ξ — невырожденная неотрицательная случайная величина,

$$h(x) = Ax^2 + Bx + D, \quad A > 0, \quad B \geq 0,$$

причем $\mathbf{E} |h(\xi)| < \infty$. Тогда ξ имеет экспоненциальное распределение.

Заметим, что теоремы такого типа рассматривались в работах [34, 67].

Согласно (2.3.37), при $y \geq 0$

$$\int_y^{\infty} h(u-y) dF(u) = \alpha (1 - F(y)), \quad (2.3.38)$$

где F — распределение ξ , а $\alpha = \mathbf{E} h(\xi)$.

Поскольку

$$\bar{F}(T) h(T) \leq \int_T^{\infty} |h(x)| dF(x) \rightarrow 0$$

при $T \rightarrow \infty$, то из (2.3.38) в обозначении $\beta = 1/(\alpha - h(0))$ получаем, что

$$\bar{F}(y) = \beta \int_y^{\infty} \bar{F}(u) h'(u-y) du, \quad \forall y \geq 0.$$

Обозначив

$$H(u) = \exp(\sigma u) \bar{F}(u), \quad g(u) = \begin{cases} \beta \exp(\sigma u) h'(-u), & u \leq 0, \\ 0, & u > 0, \end{cases}$$

величину $\sigma > 0$ определим на основе уравнения

$$\beta/2 \int_0^{\infty} \exp(-\sigma u) (2Au + B) du = 1.$$

Аналогично доказательству теоремы 2.3.2 убеждаемся, что имеют место соотношения (2.3.20). Пусть, как обычно,

$$G_F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) g(x) dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 - G_F(z) &= 1 - \beta \int_{-\infty}^0 \exp(izu) \exp(\sigma u) h'(-u) du = \\ &= \frac{(iz + \sigma)^2 - B\beta(iz + \sigma) - 2A\beta}{(iz + \sigma)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда легко убедиться, что в верхней и нижней полуплоскостях уравнение $1 - G_F(z) = 0$ имеет лишь по единственному корню.

Следовательно, уравнение (2.3.7) обладает единственным решением в области $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$. Легко убедиться, что этим же свойством единственности обладает (2.3.6) в интервале $(-\infty, 0)$.

В заключение отметим, что ранее оценки типа (2.3.11) строились Р. Шимицу [146, 147] и доказывались другим методом.

§ 2.4. Регрессионные модели

Пусть μ — некоторое расстояние, определенное на пространстве случайных величин.

Определение 2.4.1. Случайная величина X имеет (μ, ε) -постоянную регрессию на случайную величину Y , если

$$\mu(E(X|Y), EX) \leq \varepsilon.$$

В качестве расстояния μ выберем следующую характеристику:

$$\mu(Z_1, Z_2) = E|Z_1 - Z_2|. \quad (2.4.1)$$

Поскольку для любых натуральных $1 \leq K_1 \leq K_2$ справедливо

$$(E | Z |^{K_1})^{1/K_1} \leq (E | Z |^{K_2})^{1/K_2},$$

то, очевидно,

$$\mu \leq \mu_1 \leq \mu_2,$$

где

$$\mu_1(Z_1, Z_2) = (E | Z_1 - Z_2 |^2)^{1/2},$$

$$\mu_2(Z_1, Z_2) = \inf \{ d : P(|Z_1 - Z_2| \leq d) = 1 \}.$$

Расстояние μ_1 использовалось, например, А. М. Каганом (см. [30, § 9.3]), автором [87, 89], а μ_2 — Е. Лукачем (см., например, [125]).

Подчеркнем еще раз, что среди перечисленных условий почти постоянства регрессии условие (μ, ε) -постоянной регрессии при выборе μ по формуле (2.4.1) является наименее ограничивающим.

Далее для упрощения обозначений вместо термина (μ, ε) -постоянная регрессия будем использовать термин ε -регрессия.

Теорема 2.4.1 (см. [95]). Пусть X_1, X_2 — независимые равнораспределенные случайные величины, $EX_j = 0$, $EX_j^2 = \sigma^2$, $E|X_j|^{2+\delta} \leq M < \infty$ для некоторого $\delta > 0$. Если статистика $L_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2$ имеет ε -регрессию на $L_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2$, причем $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$, $|b_2/b_1| < 1$, то существует величина C , зависящая лишь от M и $\{a_j, b_j\}$, такая, что

$$\sup_x |F(x) - \Phi(x)| \leq C / \sqrt{\ln 1/\varepsilon},$$

где $F(x) = P(X_j < x)$, а $\Phi(x)$ — нормальное распределение с параметрами 0 и σ .

Доказательство. Обозначив $r(t) = EL_1 \exp(itL_2)$, из условия ε -регрессии L_1 на L_2 получаем, что

$$\begin{aligned} |r(t)| &= |E\{E(L_1 \exp(itL_2) | L_2) - \exp(itL_2) E L_2\}| = \\ &= |E\{\exp(itL_2)(E(L_1 | L_2) - E L_2)\}| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, если $f(t) = E \exp(itX_j)$, то при $t \in (-\infty, \infty)$

$$a_1 f'(b_1 t) f(b_2 t) + a_2 f(b_1 t) f'(b_2 t) = i r(t). \quad (2.4.2)$$

Положим

$$q = q(\varepsilon) = \min \{ \sqrt{\ln 1/\varepsilon},$$

$$\sup \{ \tau : |f(t)| \geq \varepsilon^\omega \text{ при } |t| \leq \tau \} \}, \quad (2.4.3)$$

где константа $\omega > 0$ определяется ниже. Учитывая, что $|b_1| > |b_2|$, при $|t| \leq q$ имеем:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{a_2}{a_1} \frac{f'(b_2 t/b_1)}{f(b_2 t/b_1)} = \frac{ir(t/b_1)}{a_1 f(t) f(b_2 t/b_1)}.$$

Интегрируя это соотношение, получаем:

$$\ln f(t) = \alpha^2 \ln f(t/\alpha) + r_*(t), \quad |t| \leq q, \quad (2.4.4)$$

$$r_*(t) = \frac{i}{a_1} \int_0^t \frac{r(u/b_1) du}{f(u) f(u/\alpha)}, \quad (2.4.5)$$

$$\alpha = b_1/b_2 = -a_2/a_1, \quad |\alpha| > 1. \quad (2.4.6)$$

Поскольку $f(t) = \bar{f}(-t)$, то вместо интервала $-q \leq t \leq q$ достаточно рассмотреть интервал $0 \leq t \leq q$. Далее предполагается, что α — положительное число. Случай отрицательного α рассматривается аналогично. Обозначив

$$\varphi(t) = t^{-2-\delta_0} (\ln f(tq) + \sigma^2 t^2 q^2/2),$$

где δ_0 — произвольная константа из $(0, \delta)$, уравнение (2.4.4) при $0 \leq t \leq 1$ перепишем так:

$$\varphi(t) = \alpha^{-\delta_0} \varphi(t/\alpha) + r_*(tq) t^{-2-\delta_0}.$$

Пусть

$$t = \exp(-\tau), \quad \psi(\tau) = \varphi(\exp(-\tau)), \quad \alpha_0 = \ln \alpha.$$

Тогда

$$\psi(\tau) = \alpha^{-\delta_0} \psi(\tau + \alpha_0) + r^*(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (2.4.7)$$

$$r^*(\tau) = r_*(\exp(-\tau)q) \exp(2\tau + \delta_0 \tau). \quad (2.4.8)$$

Символом уравнения (2.4.7), согласно определению (2.1.2), является функция

$$\mathcal{W}(\lambda) = 1 - \alpha^{-\delta_0} \exp(-i\alpha_0 \lambda).$$

В силу (2.4.6) этот символ невырожден. Из принятых моментных ограничений и выбора $\delta_0 < \delta$ имеем $\psi \in L_\infty(0, \infty)$. Далее воспользуемся теоремой 2.1.1. Поскольку в рассматриваемом случае $\nu_2 = 0$ и

$$0 \leq \text{Arg}(1 - \alpha^{-\delta_0} \exp(-i\alpha_0 \lambda)) \leq 2\pi,$$

т. е. и $\nu_1 = 0$, то

$$|\psi(\tau)| \leq C \sup_{\tau \geq 0} |r^*(\tau)|. \quad (2.4.9)$$

Согласно (2.4.4), при малых $t > 0$

$$|r_*(t)| \leq M t^{2+\delta}.$$

Отсюда с учетом (2.4.5) и (2.4.8) имеем

$$|r^*(\tau)| \leq C \varepsilon^{\delta_*}, \quad \tau \geq 0,$$

где C зависит лишь от M и a_1 , а

$$\delta_* = (1 - 2\omega)(\delta - \delta_0)/(1 + 2\delta).$$

Объединяя эту оценку и (2.4.9), при $0 \leq t \leq 1$ получаем:

$$|\ln f(tq) + \sigma^2 t^2 q^2/2| \leq C \varepsilon^{\delta_*} t^{2+\delta_0}.$$

Таким образом, при $0 \leq t \leq q$

$$\begin{aligned} |f(t) - \exp(-\sigma^2 t^2/2)| &= \exp(-\sigma^2 t^2/2) |\ln f(t) + \\ &+ \sigma^2 t^2/2| \max \left(1, \exp \left(\operatorname{Re} (\ln f(t) + \sigma^2 t^2/2) \right) \right) \leq \\ &\leq C \varepsilon^{\delta_*} t^{2+\delta_0}. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Теперь необходимо осуществить переход от оценки близости решений (2.4.10) исходных уравнений к оценкам в равномерной метрике ρ . С этой целью построим оценку снизу для величины $q(\varepsilon)$, а затем воспользуемся известной леммой Эссеена об оценке близости распределений по близости их характеристических функций.

Согласно (2.4.10), при $0 \leq t \leq q$

$$|f(t)| \geq Q(\varepsilon, t), \quad (2.4.11)$$

где

$$Q(\varepsilon, t) = \exp\{-\sigma^2 t^2/2\} - C \varepsilon^{\delta_*} t^{2+\delta_0}.$$

Пусть

$$q(\varepsilon) = \sup \{ \tau : |f(t)| \geq \varepsilon^\omega \text{ при } |t| \leq \tau \}.$$

Выберем λ так, чтобы при $0 \leq t \leq q_1 = \sqrt{\lambda \ln 1/\varepsilon}$

$$Q(\varepsilon, t) \geq \varepsilon^\omega. \quad (2.4.12)$$

В таком случае, очевидно, $q \geq q_1$. Из оценки (2.4.11) заключаем, что для выполнения (2.4.12) достаточно рассмотреть следующее неравенство:

$$\sigma^2 \lambda/2 < \min \{ \omega, \delta_* \} = \min \{ \omega, (1 - 2\omega)(\delta - \delta_0)/(1 + \delta) \}.$$

Положив $\omega = (\delta - \delta_0)/(1 - \delta - 2\delta_0)$, нетрудно убедиться, что (2.4.12) выполняется для любого λ из интервала $(0, 2\omega/\sigma^2)$. Следовательно,

$$q \geq q_1 = \sigma^{-1} \sqrt{\omega \ln 1/\varepsilon}.$$

Поскольку

$$\int_{-q}^q |t|^{-1} |f(t) - \exp\{-\sigma^2 t^2/2\}| dt \leq C \varepsilon^{\delta_*} q^{2+\alpha_0},$$

то, воспользовавшись леммой Эссеена, получаем утверждение теоремы. Рассмотрение случая $q(\varepsilon) = 1/\ln 1/\varepsilon$ (см. формулу (2.4.3)) очевидно.

Теорема доказана.

В условиях приводимой ниже теоремы Лукача [125] в явном виде требуется существование лишь первых двух моментов, а в нашей теореме 2.4.1 — моментов порядка $2 + \delta$, $\delta > 0$. Правда, порядок оценки устойчивости в теореме 2.4.1 лучше, чем в [125]. Возникает вопрос — по существу ли момент порядка $2 + \delta$ в методе доказательства теоремы 2.4.1? Ответ положителен. Более того, оказывается, что в доказательстве Е. Лукача [125] в действительности по существу используется довольно жесткое определение (μ_2, ε) -постоянной регрессии, которое в рассматриваемом случае влечет за собой существование в нуле третьей производной характеристической функции исследуемых случайных величин. Требование существования (μ_2, ε) -постоянной регрессии нежелательно также по той причине, что, как показано в работе автора [87], в некоторых регрессионных моделях оно влечет за собой существование всех моментов у рассматриваемых случайных величин.

Остановимся на этом вопросе более подробно.

Начнем с формулировки основного результата статьи [125].

Теорема Е. Лукача [125]. Пусть X_1, X_2 — независимые равнораспределенные случайные величины,

$$E X_j = 0, E X_j^2 = \sigma^2 < \infty.$$

Если $L_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2$ имеет (μ_2, ε) -постоянную регрессию на $L_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2$, причем $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$, $|b_2/b_1| < 1$, то су-

существует нормальная случайная величина N такая, что при малых $\varepsilon > 0$ в метрике Леви Λ

$$\Lambda(X_j, N) \leq c_1 (\ln 1/\varepsilon)^{-1/11}, \quad (2.4.13)$$

где c_1 — некоторая величина, не зависящая от $\varepsilon > 0$.

В действительности отказавшись в доказательстве этой теоремы от симметризации случайных величин и более аккуратно применяя процедуру растяжения, точнее, более аккуратно оценивая снизу величину

$$q(\varepsilon) = \sup \{ \tau : |f(t)| > \varepsilon^\omega \text{ при } |t| \leq \tau \},$$

оценку (2.4.13) можно существенно улучшить. А именно, при малых $\varepsilon > 0$ ее можно заменить неравенством

$$\rho(X_j, N_{0, \sigma}) \leq c_2 \sigma^{-1} (\ln 1/\varepsilon)^{-1/2}, \quad (2.4.14)$$

где c_2 — абсолютная константа, ρ — равномерная (на всей оси) метрика, а $N_{0, \sigma}$ — нормальная случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Заметим, что всегда $\Lambda \leq \rho$.

С целью ответа на поставленный выше вопрос вкратце обратимся к доказательству, предлагаемому в [125]. Здесь существенно используется то обстоятельство, что при обозначении $k(t) = \mathbf{E} R \exp(itL_2)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |k'(t)| &= |i \mathbf{E} (RL_2 \exp itL_2)| = |i \mathbf{E} RL_2 - \nu t \mathbf{E} RL_2^2| = \\ &= |\nu| |t| |\mathbf{E} RL_2^2|, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

где $|\nu| \leq 1$, $R = \mathbf{E}(L_1 | L_2)$.

Более подробно рассмотрим член $\mathbf{E} RL_2^2$, присутствующий в (2.4.15):

$$\mathbf{E} RL_2^2 = \mathbf{E}(\mathbf{E}(L_1 | L_2) L_2^2) = \mathbf{E} L_1 L_2^2 = (a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2) \mathbf{E} X_1^3.$$

Следовательно, без условия на ограниченность R почти всюду-оценка (2.4.15) имеет смысл только при существовании третьего момента.

Проиллюстрируем еще раз жесткость определения (μ_2, ε) -постоянной регрессии, используемого Е. Лукачем, следующим образом. В принятых теоремой Лукача условиях и в тех же обозначениях [125]

$$R = \mathbf{E}(L_1 | L_2), \quad k(t) = \mathbf{E} R \exp(itL_2)$$

легко убедиться, что

$$a_1 f'(b_1 t) f(b_2 t) + a_2 f(b_1 t) f'(b_2 t) = i k(t). \quad (2.4.16)$$

Заметим, что

$$|k'(0)| \leq \varepsilon \mathbf{E} |L_2| \leq \varepsilon (|b_1| + |b_2|) \mathbf{E} |X_1|,$$

$$|k''(0)| \leq \varepsilon \mathbf{E} L_2^2 = \varepsilon (b_1^2 + b_2^2) \mathbf{E} X_1^2.$$

Продифференцировав (2.4.16) два раза по t , из существования конечной второй производной $k''(0)$ получаем, что существует конечная третья производная $f'''(0)$, что и отмечалось выше.

§ 2.5. Равнораспределенность линейных статистик

Большинство рассмотренных ранее задач удавалось свести либо к уравнению свертки с нулевым индексом, либо к уравнению свертки с индексом, равным единице. Это упрощало проблему выделения подмножества решений, имеющих вероятностный смысл, из множества всех решений однородного уравнения свертки. Как мы уже видели в § 2.3, такое сведение возможно не во всех случаях. Интересными примерами могут послужить также характеризационные теоремы Ю. В. Линника ([49], теорема II) и А. А. Зингера, Р. В. Янушкявичюса ([19], теорема 1), изучению устойчивости которых и посвящен настоящий параграф.

Отбор решений, имеющих вероятностный смысл, в этих характеризационных теоремах осуществляется на основе теоремы И. Марцинкевича. Эта теорема утверждает, что функция

$$\varphi_0(t) = \exp^* Q(t), \quad \text{где} \quad Q(t) = \sum_{k=1}^n a_k t^k - \text{полином,}$$

является характеристической функцией некоторого вероятностного распределения F только тогда, когда F — нормальное (возможно, вырожденное) распределение. Иначе говоря, когда

$$a_1 = -\bar{a}_1, \quad a_2 = \bar{a}_2 \leq 0, \quad a_3 = \dots = a_n = 0.$$

При исследовании устойчивости таких характеризационных задач возникает вопрос и об устойчивости самой теоремы

И. Марцинкевича. А именно, что можно сказать о коэффициентах полинома $Q(t)$, если функция $\varphi_0(t)$ близка в некотором смысле к характеристической функции? Эта проблема была поставлена Н. А. Сапоговым [63, 64] следующим образом:

зom: пусть $Q(t) = \sum_{k=1}^n a_k t^k$ — полином с комплексными коэффициентами, $\varphi(t; F)$ — характеристическая функция некоторого распределения F и

$$|\exp Q(t) - \varphi(t; F)| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad |t| \leq T.$$

Считая ε и T^{-1} достаточно малыми, требуется оценить отклонение полинома $Q(t)$ от полинома второй степени $iat - \gamma t^2$; $a \in \mathbb{R}^1$, $\gamma \geq 0$.

В работе [64] для полинома $Q(t)$ специального вида получена оценка старшего коэффициента a_n и описана процедура, реализованная затем в статье А. А. Зингера и Р. В. Янушкявичюса [19], позволяющая индуктивно оценивать последующие коэффициенты. В работе Л. Б. Голинского [11] рассмотрен важный частный случай, в котором

$$T = (\ln 1/\varepsilon)^\beta, \quad \beta > 0,$$

где β — фиксированное число.

Теорема Л. Б. Голинского [11]. Пусть $Q(t) = \sum_{k=1}^n a_k t^k$ — комплексный полином, нормированный условиями $\operatorname{Im} a_1 = 0$, $\operatorname{Re} a_2 = -1/2$, а $\varphi(t; F)$ — характеристическая функция некоторого распределения F и

$$|\exp Q(t) - \varphi(t; F)| \leq \varepsilon < 1, \quad |t| \leq T = (\ln 1/\varepsilon)^\beta,$$

$\beta > 0$ — фиксированное число. Тогда справедливы оценки

$$\max \{ |a_j| : j \neq 2, |\operatorname{Im} a_2| \} \leq C (\ln 1/\varepsilon)^{-\gamma},$$

где величина C зависит лишь от n и β , а

$$\gamma = 2^{-n} \min(\beta, 1/(2n)).$$

Переходим к построению оценок устойчивости характеристик нормального закона свойствами равномерности линейных статистик, о которых говорилось в начале параграфа.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — невырожденные независимые равно-
распределенные случайные величины и

$$L_1 = \sum_{j=1}^n a_j X_j, \quad L_2 = \sum_{j=1}^n b_j X_j$$

— пара вещественных линейных статистик. Исключим из рассмотрения тривиальный случай $\{|a_1|, \dots, |a_n|\} = \{|b_1|, \dots, |b_n|\}$.

Следуя работе А. А. Зингера и Р. В. Янушкявичюса [19], число μ_0 определим по коэффициентам статистик L_1 и L_2 с помощью следующего алгоритма. Обозначим

$$\Xi = \max \{|a_j|, |b_j|; j=1, 2, \dots, n\},$$

$$s' = \sum_{j: |a_j| = \Xi} 1, \quad s'' = \sum_{j: |b_j| = \Xi} 1.$$

Если $s' \neq s''$, то полагаем

$$\mu_0 = \inf \left\{ \mu : |s' - s''| \geq \sum_{j: |a_j| < \Xi} (|a_j|/\Xi)^\mu + \sum_{j: |b_j| < \Xi} (|b_j|/\Xi)^\mu \right\}.$$

Если же $s' = s''$, то процесс повторяется для коэффициентов, удовлетворяющих условию $|a_j| < \Xi$, $|b_j| < \Xi$, и т. д.

Легко заметить, что $\mu_0 < \infty$.

Если μ_0 — натуральное число, то в качестве m возьмем произвольное число, большее μ_0 . Если же μ_0 не является натуральным, то положим $m = [\mu_0] + 1$ (здесь и далее через $[\cdot]$ обозначается целая часть числа). Теперь определим $\delta = m - \mu_0$. Кроме того, полагается, что $\mu_0 \geq 2$. Справедлива следующая характеристизационная теорема (см. [19]).

Если $E|X_j|^m < \infty$, то из равнораспределенности L_1 и L_2 следует, что X_j — нормально распределены.

Перед формулировкой соответствующего результата устойчивости напомним, что определение λ -метрики приведено в § 1.2.1

Теорема 2.5.1 (см. [19, 95]). Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые равнораспределенные случайные величины. Если L_1 и L_2 (λ, ε) -равнораспределены, т. е. $\lambda(L_1, L_2) \leq \varepsilon$ и $E|X_j|^m \leq M < \infty$, причем все коэффициенты $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$ неотрицательны,

то существует нормальная случайная величина N такая, что

$$\lambda(X_j, N) \leq C (\ln 1/\varepsilon)^{-\kappa}, \quad (2.5.1)$$

где $\kappa = 1/([\mu_0]([\mu_0] + 1)2^{[\mu_0]})$, а C зависит лишь от M и n .

Доказательство. Из условия $\lambda(L_1, L_2) \leq \varepsilon$ следует, что

$$\prod_{j=1}^n f(a_j u) = \prod_{j=1}^n f(b_j u) + r_1(u), \quad (2.5.2)$$

где $f(u) = E \exp(iuX_j)$, $|r_1(u)| \leq \varepsilon$ при $|u| \leq 1/\varepsilon$.

Поскольку $f(u) = \bar{f}(-u)$, то достаточно рассматривать лишь неотрицательные значения u . Нетрудно убедиться (см. [19]), что предположение $s' = 1$, $s'' = 0$ (и, следовательно, предположение $a_1 = \Xi$) не умаляет общности рассуждений. Величину $q = q(\varepsilon)$ определим так:

$$q(\varepsilon) = \min \{ 1/\varepsilon, \sup \{ \tau : |f(u)| \geq \varepsilon^\omega \text{ при } |u| \leq \tau \} \},$$

где константа ω будет определена ниже. Обозначив

$$\varphi(t) = \ln f(tq), \quad \alpha_j = a_j/a_1, \quad \beta_j = b_j/a_1,$$

из (2.5.2) при $t \in [0, 1]$ получаем

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^n (\varphi(\beta_j t) - \varphi(\alpha_j t)) + r_2(t), \quad (2.5.3)$$

$$|r_2(t)| = \left| \ln \left(1 + \frac{r_1(tq/a_1)}{n} \right) \right| \leq 2\varepsilon^{1-n\omega} \prod_{j=1}^n f(\beta_j tq) \quad (2.5.4)$$

при малых $\varepsilon > 0$ и $a_1 \geq 1$. Если же $0 < a_1 < 1$, то вместо области $0 \leq t \leq 1$ следует рассматривать более узкий интервал $[0, a_1]$, что, очевидно, лишь усложняет обозначения.

Отображение $\mathfrak{H} : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{L}$ — пространство комплекснозначных функций $\{\psi\}$, определим так:

$$\mathfrak{H} \psi(t) = \sum_{j=1}^n (\psi(\beta_j t) - \psi(\alpha_j t)).$$

На основе соотношения (2.5.3) заключаем, что

$$\varphi(t) = \mathfrak{H} \varphi(t) + r_2(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.5.5)$$

Далее будет полезен следующий оператор $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{L}$. Обозначим

$$\mathfrak{G}_1 \varphi(t) = \varphi(t) - 2\varphi(t/2),$$

$$\mathfrak{G}_2 \varphi(t) = \varphi(t) - 4\varphi(t/2),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\mathfrak{G}_p \varphi(t) = \varphi(t) - 2^p \varphi(t/2)$$

и положим

$$\mathfrak{G} \varphi = \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \dots \mathfrak{G}_p \varphi$$

(т. е. $\mathfrak{G}$ является произведением операторов $\mathfrak{G}_j$). Из определения следует, что $\mathfrak{G}$ аннулирует полиномы, степень которых не превышает p и которые при $t=0$ обращаются в нуль, т. е. если $P_p(0)$, то

$$\mathfrak{G} P_p(t) = 0.$$

На основе (2.5.5) заключаем, что

$$\mathfrak{G} \varphi(t) = \mathfrak{G} \mathfrak{H} \varphi(t) + \mathfrak{G} r_2(t), \quad t \in [0, 1].$$

Легко заметить, что операторы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ перестановочны, поэтому

$$\chi(t) = \mathfrak{H} \chi(t) + r_3(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.5.6)$$

где

$$\chi(t) = \mathfrak{G} \varphi(t), \quad r_3(t) = \mathfrak{G} r_2(t).$$

Из условия существования абсолютного момента порядка m и конструкции оператора $\mathfrak{G}$ нетрудно убедиться, что при малых $t > 0$

$$|r_3(t)| \leq C_1 t^m = C_1 t^{\mu_0 + \delta}, \quad (2.5.7)$$

где C_1 — величина, зависящая лишь от M . Таким образом, рассмотрение уравнения (2.5.5) сведено к рассмотрению уравнения (2.5.6) при дополнительном условии (2.5.7).

Если положить

$$\gamma = \mu_0 + \delta/2, \quad \chi(t) = t^\gamma \hat{\psi}(t), \quad t = \exp(-\tau),$$

$$\psi(\tau) = \hat{\psi}(\exp(-\tau)),$$

то (2.5.6) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(\tau) + \sum_{j=2}^n \alpha_j \psi(\tau - \alpha_j^*) - \\ - \sum_{j=1}^n \beta_j \psi(\tau - \beta_j^*) = r_4(\tau), \quad 0 \leq \tau < \infty, \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

где $\alpha_j^* = \ln \alpha_j$, $\beta_j^* = \ln \beta_j$,

$$r_4(\tau) = r_3(\exp(-\tau)) / \exp(-\gamma\tau).$$

Далее, согласно определению чисел μ_0 и γ ,

$$1 > \sum_{j=2}^n \alpha_j \gamma + \sum_{j=1}^n \beta_j \gamma, \quad (2.5.9)$$

поэтому нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \inf_{-\infty < x < \infty} |\mathcal{W}(x)| &= \\ &= \inf_{-\infty < x < \infty} \left| 1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \gamma e^{i\alpha_j^* x} - \sum_{j=1}^n \beta_j \gamma e^{i\beta_j^* x} \right| > 0. \end{aligned}$$

Это означает, что символ уравнения (2.5.8) невырожден. Так как в силу (2.5.9)

$$0 \leq \operatorname{Arg} \left(1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \gamma e^{i\alpha_j^* x} - \sum_{j=1}^n \beta_j \gamma e^{i\beta_j^* x} \right) \leq 2\pi,$$

то, очевидно, $v_1 = v_2 = 0$. Сведением рассматриваемой задачи к уравнению свертки (2.5.8) с нулевыми индексами завершается первый этап применения нашего метода, описанного во Введении. Теперь убедимся, что к этому уравнению применима теорема 2.1.1.

Поскольку $\chi(t) = \mathfrak{G}\varphi(t)$ и существует абсолютный момент порядка m , то $\chi(t) = o(|t|^\gamma)$. Отсюда и следует, что $\hat{\psi}(t) = t^{-\gamma}\varphi(t)$, а поэтому и $\psi(\tau)$ ограничены при $\tau \geq 0$.

Осталось оценить $|r_4(\tau)|$. Поскольку при малых $t > 0$ справедливо соотношение (2.5.7), то

$$|r_3(t) t^{-\gamma}| \leq \min(C_1 t^{\delta/2}, 2\varepsilon^{1-n\omega} t^{-\mu_0 - \delta/2}) \leq C_1 \varepsilon^{\delta_0},$$

$$\delta_0 = (1 - n\omega) \delta / (2(\mu_0 + \delta)),$$

т. е. при $\tau \geq 0$

$$|r_4(\tau)| \leq C_1 \varepsilon^{\delta_0}.$$

Согласно оценке (2.2.3) из теоремы 2.1.1 и (2.5.8),

$$|\psi(\tau)| \leq C_2 \varepsilon^{\delta_0}, \quad \tau \geq 0,$$

где $C_2 = CC_1$. Так как $\psi(\tau) = \hat{\psi}(\exp(-\tau))$, $\chi(t) = t^\gamma \hat{\psi}(t)$, $t = \exp(-\tau)$, то

$$|\chi(t)| \leq C_2 \varepsilon^{\delta_0} t^\gamma \quad \text{при } t \in [0, 1]. \quad (2.5.10)$$

Теперь осуществим переход от χ к φ , $\varphi = \mathfrak{G}^{-1}\chi$. С этой целью обозначим

$$\varphi_1(t) = \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}_3 \dots \mathfrak{G}_p \varphi(t), \quad \mathfrak{G}_1 \varphi_1(t) = R_1(t).$$

Согласно (2.5.10),

$$|R_1(t)| \leq C_2 \varepsilon^{\delta_0} t^\gamma, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.5.11)$$

Вводя новое обозначение

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t)/t, \quad R_2(t) = R_1(t)/t,$$

соотношение

$$\mathfrak{G}_1 \varphi_1(t) = \varphi_1(t) - 2\varphi_1(t/2) = R_1(t) \quad (2.5.12)$$

можно переписать так:

$$\psi_1(t) - \psi_1(t/2) = R_2(t).$$

Отсюда имеем, что

$$\psi_1(t) = \psi_1(t/2^{n+1}) + \sum_{j=0}^n R_2(t/2^j). \quad (2.5.13)$$

В силу (2.5.11)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} R_2(t/2^j) &\leq C_2 \varepsilon^{\delta_0} t^{\gamma-1} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(1-\gamma)} = \\ &= C_2 \varepsilon^{\delta_0} t^{\gamma-1} / (1 - 2^{1-\gamma}). \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Так как

$$\lim_{y \rightarrow 0} \psi_1(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(y)}{y} = \varphi'_1(0),$$

то, учитывая (2.5.13) и (2.5.14), заключаем, что

$$\varphi_1(t) = H_1 t + R_3(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.5.15)$$

где, как и в оценке (2.5.11),

$$|R_3(t)| \leq C_3 \varepsilon^{\delta_0} t^\gamma, \quad C_3 = C_2 / (1 - 2^{1-\gamma}),$$

$$H_1 = \varphi'_1(0).$$

Аналогично введенным выше обозначениям положим

$$\varphi_2(t) = \mathfrak{G}_3 \dots \mathfrak{G}_p \varphi(t).$$

В силу (2.5.15) имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_2 \varphi_2(t) - H_1 t &= R_3(t), \\ \mathfrak{G}_2(\varphi_2(t) + H_1 t) &= R_3(t). \end{aligned}$$

По определению $\mathfrak{G}_2$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_2 \varphi_2^*(t) &= \varphi_2^*(t) - 4 \varphi_2^*(t/2) = R_3(t), \\ \varphi_2^*(t) &= \varphi_2(t) + H_1 t. \end{aligned}$$

Это соотношение аналогично уже рассмотренному соотношению (2.5.12). Дальнейшие итерации очевидны, поэтому не будем их рассматривать. Более того, нет необходимости в таком итерационном процессе — к нему мы обратились лишь с целью иллюстрации нижеследующего. Действительно, из существования абсолютного момента порядка m следует, что

$$\varphi(t) = P_p^*(t) + w(t), \quad (2.5.16)$$

где P_p^* — полином степени не выше $p = [\mu_0]$.

Оператор $\mathfrak{G}$, как уже отмечалось, полиномы степени не выше p переводит в нуль, поэтому

$$\mathfrak{G} \varphi(t) = \mathfrak{G} w(t) = R_1(t). \quad (2.5.17)$$

Операторы $\{\mathfrak{G}_j\}$ перестановочны и, опираясь на (2.5.17) и определение $\mathfrak{G}_j$, легко доказать, что

$$\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_{j-1} \mathfrak{G}_{j+1} \dots \mathfrak{G}_p w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{ij} R_1(t/2^i),$$

т. е. что

$$\mathfrak{G}_j^{-1} R_j(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{ij} R_1(t/2^i).$$

Отсюда получаем следующую формулу обращения:

$$w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i R_1(t/2^i), \quad (2.5.18)$$

где коэффициенты K_i задаются формулой

$$K_i = \sum_{l_1 + \dots + l_p = i} 2^{l_1 + 2l_2 + \dots + pl_p}.$$

Для K_i имеет место простая оценка:

$$K_i \leq 2^{pi} \sum_{l_1 + \dots + l_p = i} = 2^{pi} \binom{p+i-1}{i}, \quad (2.5.19)$$

где, как обычно, через $\binom{p+i-1}{i}$ обозначено i -сочетание из $p+i-1$ элементов.

Теперь уже можно непосредственно оценить $w(t)$, используя ряд (2.5.18), оценки (2.5.11) и (2.5.19), а также формулу

$$(1-s)^{-p} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p+i-1}{i} s^i$$

из [46, с. 569]. Таким образом, при $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |w(t)| &\leq C_2 \varepsilon^{\delta_0} t^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} |K_i| 2^{-\gamma i} \leq \\ &\leq C_2 \varepsilon^{\delta_0} t^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} 2^{pi-\gamma i} \binom{p+i-1}{i} = C_2 (1-2^{p-\gamma})^{-p} t^\gamma \varepsilon^{\delta_0}. \end{aligned}$$

Отсюда на основе (2.5.16) заключаем, что при $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - P_p^*(t)| &\leq C_4 \varepsilon^{\delta_0}, \\ C_4 &= C_2 / (1 - 2^{p-\gamma})^p. \end{aligned}$$

Согласно нашим обозначениям, $t = u/q$, и поэтому при $u \in [0, q]$

$$|\varphi(u) - P_p(u)| \leq C_4 \varepsilon^{\delta_0}, \quad (2.5.20)$$

где $P_p(u)$ — некоторый полином степени не выше p . Так как

$$|\exp z - 1| \leq |z| \max(1, \exp \operatorname{Re} z),$$

то при $u \in [0, q]$

$$\begin{aligned} &|f(u) - \exp\{P_p(u)\}| = \\ &= |\exp\{P_p(u)\}| |\varphi(u) - P_p(u)| \max\left(1, \exp \operatorname{Re}(\varphi(u) - P_p(u))\right). \end{aligned}$$

Заметим, что согласно (2.5.20)

$$\begin{aligned} \exp \{ \operatorname{Re} (\varphi(u) - P_p(u)) \} &\leq \exp \{ |\varphi(u) - P_p(u)| \} \leq \sqrt[p]{e}, \\ |\exp \{ P_p(u) \}| &\leq \sqrt[p]{e} \quad |\exp \varphi(u)| = \sqrt[p]{e} \quad |f(u)| \leq \sqrt[p]{e}, \end{aligned}$$

поэтому при $u \in [0, q]$

$$|f(u) - \exp P_p(u)| \leq C_4 e^{\delta_0}. \quad (2.5.21)$$

На заключительном этапе осуществим переход от оценки близости решений (2.5.21) исходных уравнений к оценке близости решений, имеющих вероятностный смысл, тем самым реализуя переход к оценке в вероятностной метрике λ .

Начнем с построения оценки снизу для $q = q(\varepsilon)$. Если H_* — максимальное по модулю значение действительной части коэффициентов полинома $P_p(u)$, то, учитывая (2.5.20) и результаты [33], можно считать, что H_* зависит лишь от M . Положив $H^* = pH_*$ и обозначив

$$Q(u) = \exp(-H^* u^p) - C_4 e^{\delta_0},$$

при $u \in [1, q]$ из (2.5.21) имеем:

$$|f(u)| \geq Q(u). \quad (2.5.22)$$

Рассмотрение случая $u \in [0, 1]$ аналогично и не представляет затруднений, поэтому предположим, что (2.5.22) выполняется для всех u из интервала $[0, q]$.

Если показать, что для некоторого $q_* = q_*(\varepsilon)$

$$Q(u) \geq \varepsilon^\omega \quad \text{при} \quad 0 \leq u \leq q_*, \quad (2.5.23)$$

то в случае $q(\varepsilon) < 1/\varepsilon$, очевидно,

$$q(\varepsilon) = \sup \{ \tau : |f(t)| \geq \varepsilon^\omega \quad \text{при} \quad |t| \leq \tau \} \geq q_*(\varepsilon). \quad (2.5.24)$$

Наша дальнейшая задача — найти такую положительную константу θ , чтобы

$$q_*(\varepsilon) = (\theta \ln 1/\varepsilon)^{1/p}. \quad (2.5.25)$$

Из определения $Q(u)$ и (2.5.23) заключаем, что в этом случае θ должна удовлетворять неравенству

$$\exp(-H^* \theta \ln 1/\varepsilon) - C_4 e^{\delta_0} \geq \varepsilon^\omega,$$

т. е.

$$e^{H^* \theta} - C_4 e^{\delta_0} \geq \varepsilon^\omega.$$

Для того чтобы выполнялось это соотношение, достаточно рассмотреть следующее неравенство:

$$H^* \theta < \min \{ \omega, \delta_0 \}.$$

Наконец, величину ω определим как решение уравнения

$$(1 - n \omega) \delta / (2 (\mu_0 + \delta)) = \omega.$$

Таким образом, мы доказали (2.5.24) при определении (2.5.25). Рассмотрение случая $q(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$ тривиально.

Резюмируем доказанное. В области

$$|u| \leq (\theta \ln 1/\varepsilon)^{1/p} \quad (2.5.26)$$

справедлива оценка (2.5.21), где $P_p(u)$ — полином степени не выше p , $P_p(0) = 0$. Пусть

$$P_p(u) = \sum_{j=1}^p d_j u^j.$$

Согласно (2.5.15), $H_1 = \varphi'_1(0)$, и путем соответствующего сдвига исходной выборки можно достигнуть того, чтобы $H_1 = 0$, т. е. чтобы

$$d_1 = 0.$$

За счет соответствующей нормировки можно брать

$$\operatorname{Re} d_2 = -1/2.$$

Согласно теореме Голинского,

$$\max \{ |\operatorname{Im} d_2|, |d_3|, \dots, |d_p| \} \leq C_5 (\ln 1/\varepsilon)^g, \quad (2.5.27)$$

где C_5 — некоторая константа, а

$$g = 1/(p 2^p).$$

Путем сужения области (2.5.26) до

$$|u| \leq (\theta \ln 1/\varepsilon)^{x/p}$$

на основе (2.5.20) и (2.5.27) находим, что

$$x = pg/(p+1).$$

Отсюда получаем (2.5.1).

□ Теорема доказана.

Следствие 2.5.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1. Если первые $[\mu_0]$ моментов рассматриваемых случайных величин совпадают с соответствующими моментами некоторой нормальной случайной величины N , то оценку (2.5.1) можно улучшить следующим образом:

$$\lambda(X_j, N) \leq C/\sqrt{\ln 1/\varepsilon}.$$

Доказательство следствия представляет собой упрощенное доказательство теоремы 2.5.1, поскольку в силу моментных ограничений нет нужды вводить операторы $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$, а также использовать оценку устойчивости теоремы Марцинкевича. Подробно это доказательство рассмотрено в работе автора [95].

Переходим к изучению устойчивости характеристики нормального закона свойством равномерности линейных статистик в условиях теоремы Линника ([49], теорема II). Пусть, как и прежде, $X_1, \dots, X_n$ — невырожденные независимые равномерно распределенные случайные величины и

$$L_1 = \sum_{j=1}^n a_j X_j, \quad L_2 = \sum_{j=1}^n a_{n+j} X_j$$

— пара вещественных линейных статистик. Введем целую функцию комплексного переменного

$$\sigma(z) = |a_1|^z + \dots + |a_n|^z - |a_{n+1}|^z - \dots - |a_{2n}|^z$$

и предположим, что $\sigma(z) \neq 0$. Обозначим

$$\sigma = \sup \{ \operatorname{Re} \xi : \sigma(\xi) = 0 \}$$

и определим целое k из соотношений

$$2k - 2 \leq \sigma < 2k. \quad (2.5.28)$$

Теорема Ю. В. Линника [49, 51]. Если случайная величина X_j имеет $2k$ -й момент, где k определяется на основе (2.5.28), а L_1 и L_2 — равномерно распределены, то X_j — нормальная случайная величина.

В процессе исследования устойчивости этой теоремы потребуется одна метрическая лемма (см. [41]).

Пусть λ_t — метрика в пространстве случайных величин, определяемая следующим образом:

$$\lambda_t(X, Y) = \inf \{ \max(v_j(X, Y; t), t) : t > 0 \},$$

где

$$v_j(X, Y; t) = \max \{ |f_X^{(j)}(u) - f_Y^{(j)}(u)| : |u| \leq t^{-1/j} \},$$

а $f_X(t)$, $f_Y(t)$ — характеристические функции случайных величин X и Y соответственно. Отметим, что метрики такого типа рассматривались В. М. Золотаревым [25]. Наша цель — установить связь между λ и λ_j ($j=1, 2$).

Лемма 2.5.1. *Если $E |X|^j \leq M_j$, $E |Y|^j \leq M_j$, то существуют константы C_6 и C_7 такие, что при $j=3, 4, \dots$*

$$\lambda_1(X, Y) \leq C_6 \lambda^{1-1/j}(X, Y) \max(1, M_j^{1/j}), \quad (2.5.29)$$

$$\lambda_2(X, Y) \leq C_7 \lambda^{1-2/j}(X, Y) \max(1, M_j^{2/j}). \quad (2.5.30)$$

Доказательство леммы основано на использовании теоремы А. Картана и А. Горного о неравенствах между максимумами модулей производных на конечном отрезке (см., например, [54]) и ввиду простоты здесь не приводится.

Теорема 2.5.2 (см. [22]). *Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые равнораспределенные симметричные случайные величины. Если L_1 и $L_2(\lambda, \varepsilon)$ — равнораспределены, т. е. $\lambda(L_1, L_2) \leq \varepsilon$ и $E X_j^{2k} \leq M < \infty$, где $k > 1$, k определяется на основе (2.5.28), то существует некоторая нормальная случайная величина N такая, что*

$$\lambda(X_j, N) \leq C(\ln 1/\varepsilon)^{-\gamma}, \quad (2.5.31)$$

где $\gamma = 2^{-2k+1}/((2k-1)(2k-2))$, а C зависит лишь от M и n .

Заметим, что $k > 1$. Действительно, если $k=1$, то из условий $E |X_j|^2 \leq M < \infty$, $E X_j = 0$ (которое верно в силу симметричности рассматриваемых случайных величин) и равенства $E L_1^2 = E L_2^2$ следует, что

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 = \sum_{j=1}^n a_{n+j}^2,$$

т. е. что $\sigma \geq 2$. Последнее неравенство противоречит условию (2.5.28) при $k=1$.

Следствие 2.5.2. *Если в теореме 2.5.2 условие симметричности случайных величин заменить соотношением $E X_j^2 \geq \sigma > 0$, то существует нормальная случайная величина N_* такая, что*

$$\lambda(X_j, N) \leq c(\ln \ln 1/\varepsilon)^{-1/2},$$

где c зависит лишь от M , n , γ и σ .

Доказательство теоремы 2.5.2. Обозначим $f(t) = E \exp(itX)$. Из условий теоремы следует, что при $|t| \leq 1/\varepsilon$

$$\prod_{j=1}^n f(a_j t) = \prod_{j=1}^n f(a_{n+j} t) + r(t), \quad |r(t)| \leq \varepsilon. \quad (2.5.32)$$

Определим $q = q(\varepsilon)$ следующим образом:

$$q(\varepsilon) = \min \left\{ \varepsilon^{-\beta}, \sup \left\{ \tau : |f(t)| \geq \varepsilon^{\omega_0} \text{ при } |t| \leq \tau \right\} \right\},$$

где β, ω_0 — некоторые положительные постоянные, значения которых фиксируются далее, $\omega_0 < 1/n$.

Обозначая $\varphi(t) = \ln f(t)$, из (2.5.32) получаем при $|t| \leq q$ и $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$:

$$\sum_{j=1}^n \varphi(a_j t) = \sum_{j=1}^n \varphi(a_{n+j} t) + R^*(t). \quad (2.5.33)$$

Здесь $\varepsilon_0 = 2^{1/(n\omega_0)}$, а при $|t| \leq q$

$$|R^*(t)| = \left| \ln \left(1 + r(t) / \prod_{j=1}^n f(a_{n+j} t) \right) \right| \leq 2\varepsilon^{1-n\omega_0}.$$

Следуя доказательству теоремы 2.5.1, обозначим:

$$\mathfrak{G}_1 \varphi(t) = \varphi(t) - 2\varphi(t/2),$$

$$\mathfrak{G}_2 \varphi(t) = \varphi(t) - 4\varphi(t/2),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mathfrak{G}_{2k-2} \varphi(t) = \varphi(t) - 2^{2k-2} \varphi(t/2)$$

и положим

$$\mathfrak{F} \varphi = \mathfrak{G}_{2k-2} \mathfrak{G}_{2k-3} \dots \mathfrak{G}_1 \varphi, \quad (2.5.34)$$

т. е. $\mathfrak{F}$ является произведением операторов $\mathfrak{G}_j$. Легко заметить, что $\mathfrak{F}$ аннулирует полиномы, степень которых не превышает $2k-2$ и которые при $t=0$ обращаются в нуль, т. е. если $P_j(0) = 0$, то

$$\mathfrak{F}_j P_j \equiv 0 \quad \text{при } j = 1, \dots, 2k-2. \quad (2.5.35)$$

В силу симметричности рассматриваемых случайных величин

$$\varphi(t) = \operatorname{Re} \varphi(t) = \operatorname{Re} \varphi(-t) = \varphi(-t), \quad (2.5.36)$$

поэтому достаточно исследовать область $0 \leq t \leq q$ и, не умаляя общности рассуждений, можно положить $a_j \geq 0$. Учитывая (2.5.35), (2.5.36) и разложение $\ln f(t)$ по семинвариантам случайных величин $\bar{X}_j$, имеем, что

$$|\mathfrak{F} \varphi(t)| \leq C_8 t^{2k} \quad (2.5.37)$$

при $0 \leq t \leq m^*$, где m^* зависит лишь от k , а через $C_8, C_9, \dots$ мы обозначаем положительные величины, не зависящие от ε . Заметим также, что в силу (2.5.36) вместо (2.5.34) достаточно рассматривать

$$\mathfrak{F} \varphi = \mathfrak{G}_{2k-2} \mathfrak{G}_{2k-4} \dots \mathfrak{G}_2 \varphi.$$

Заметив, что операторы $\mathfrak{F}$ и Σ перестановочны, из (2.5.33) заключаем, что при $0 \leq t \leq q$

$$\sum_{j=1}^n \mathfrak{F} \varphi(a_j, t) = \sum_{j=1}^n \mathfrak{F}_1^1 \varphi_1(a_{n+j}, t) + R(t), \quad (2.5.38)$$

где

$$|R(t)| = |\mathfrak{F} R^*(t)| \leq C_9' \varepsilon^{1-n\omega_0}, \quad (2.5.39)$$

причем в силу (2.5.37)

$$|R(t)| \leq C_{10} t^{2k}, \quad 0 \leq t \leq m^*. \quad (2.5.40)$$

Таким образом, уравнение (2.5.33) сводится к уравнению (2.5.38) при дополнительном условии (2.5.40).

Пусть δ_* — некоторое малое число, причем $\sigma - 2k < -2k\delta_*$. Возводя (2.5.39) в степень δ_* , а (2.5.40) — в $1 - \delta_*$, получаем, что при $0 \leq t \leq m^*$

$$|R(t)| \leq C_{11} \varepsilon^{\omega_1} t^{2k - \delta_1}, \quad (2.5.41)$$

где $\omega_1 = (1 - n\omega_0)\delta_*$, а $\delta_1 = 2k\delta_*$.

Обозначим

$$\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j a_j' \varphi'(a_j, t) = R_1(t), \quad \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j (a_j')^2 \varphi''(a_j, t) = R_2(t),$$

где $a_j' = \bar{K}_j a_j$, $\bar{K}_j$ — некоторая постоянная, определяемая оператором $\mathfrak{F}$, $a_j' \varphi'(a_j, t) = (\mathfrak{F} \varphi)'(a_j, t)$, а $\varepsilon_j = 1$ при $j=1, \dots, n$ и $\varepsilon_j = -1$ при $j=n+1, \dots, 2n$.

Докажем, что при $0 \leq t \leq m^*$

$$|R_1(t)| \leq C_{12} \varepsilon^{\omega_1} t^{2k-1-\delta_1}, \quad |R_2(t)| \leq C_{13} \varepsilon^{\omega_1} t^{2k-2-\delta_1}. \quad (2.5.42)$$

Действительно, обозначив $\varphi_X(t) = \ln f_X(t)$, согласно (2.5.32) находим при $|t| \leq 1/\varepsilon$:

$$f'_{L_1}(t) = \varphi'_{L_1}(t) \exp \varphi_{L_1}(t) = \varphi'_{L_1}(t) \left(\prod_{j=1}^n f(a_{n+j}t) + r(t) \right),$$

$$f'_{L_1}(t) - \varphi'_{L_1}(t) = (\varphi'_{L_1}(t) - \varphi'_{L_1}(t)) \prod_{j=1}^n f(a_{n+j}t) + r(t) \varphi'_{L_1}(t).$$

А так как

$$|\varphi'_{L_1}(t)| = |f'_{L_1}(t)/f_{L_1}(t)| \leq m_1 \varepsilon^{-n\omega_0}, \quad m_1 = E |L_1|,$$

то в силу леммы 2.5.1*) при $|t| \leq q(\varepsilon)$

$$|\varphi'_{L_1}(t) - \varphi'_{L_1}(t)| \leq C_{14} \varepsilon^{1-\frac{1}{2}(2k-1)-n\omega_0} M^{\frac{1}{2}(2k-1)} + m_1 \varepsilon^{1-2n\omega_0}. \quad (2.5.43)$$

Следует отметить, что постоянная ω_0 , присутствующая в определении $q(\varepsilon)$, выбирается так, чтобы

$$1 - 1/(2k) - n\omega_0 > 0, \quad 1 - 2n\omega_0 > 0.$$

Пусть θ_1 — минимальное из этих двух чисел. (2.5.43) означает, что

$$\left| \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j a_j \varphi'(a_j t) \right| \leq \max \left(C_{14} M^{1/(2k)}, m_1 \right) \varepsilon^{\theta_1}. \quad (2.5.44)$$

Так как оператор дифференцирования и оператор $\mathfrak{F}$ перестановочны, то в силу (2.5.44) и формулы Тейлора для $\varphi'(t)$ легко установить, что при $0 \leq t \leq m^*$

$$|R_1(t)| \leq C_{15} \varepsilon^{\theta_1}, \quad |R_1(t)| \leq C_{16} t^{2k-1}.$$

Отсюда, в свою очередь, возводя первое неравенство в степень $\delta_1/(2k-1)$, а второе — в $1-\delta_1/(2k-1)$, имеем, что при $0 \leq t \leq m^*$ справедливо первое из неравенств (2.5.42). Второе неравенство доказывается совершенно аналогично.

При рассмотрении уравнения $\Sigma \varphi = 0$ важную роль играет определенная выше функция $\sigma(z) = \sigma_\Sigma(z)$. А так как уравне-

*) Лишь для краткости записи мы полагаем $M_j \geq 1$.

ние (2.5.33), т. е. уравнение $\Sigma\varphi = R^*$ мы свели к уравнению (2.5.38), т. е. к уравнению $\Sigma_1\varphi = \bar{K}$, где $\Sigma_1 = \Sigma\tilde{K}$. то в нашем доказательстве важная роль отводится $\sigma_1(z) = \sigma_{\Sigma_1}(z)$. Вторым сказанное: подобно тому как уравнению (2.5.33) отвечает функция $\sigma(z)$, уравнению (2.5.38) соответствует функция

$$\sigma_1(z) = \sigma(z) \prod_{j=1}^{k-1} (1 - 2^{2j-z}).$$

Поскольку все нули $H_j(z) = 1 - 2^{2j-z}$ в комплексной плоскости располагаются на прямой $\operatorname{Re} z = 2j$, а k удовлетворяет условию $2k-2 \leq \sigma$, то, очевидно,

$$\sigma_1 = \sup \{ \operatorname{Re} \xi : \sigma_1(\xi) = 0 \} = \sigma.$$

Перепишем теперь основные соотношения в аддитивной форме и применим преобразование Лапласа. При этом необходимо подчеркнуть, что в дальнейшем мы будем иметь дело уже с уравнением (2.5.38), а не с (2.5.33). Положив $t > 0$ (случай $t < 0$ вполне аналогичен), обозначим при $x > 0$

$$w(x) = \varphi(qe^{-x}) e^{(2k-2+\delta_1)x}, \quad \sigma - 2k + 2 < \delta_2 < 2 - \delta_1.$$

Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} w''(x) &= \varphi''(q \exp(-x)) q^2 \exp((2k + \delta_2 - 4)x) - \\ &- \varphi'(q \exp(-x)) q(4k + 2\delta_2 - 3) \exp((2k + \delta_2 - 3)x) + \\ &+ \varphi(q \exp(-x)) (2k - 2 + \delta_2) \exp((2k - 2 + \delta_2)x). \end{aligned} \quad (2.5.45)$$

Обозначив

$$\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j e^{-(2k+\delta_1-2)\alpha_j} w''(x + \alpha_j) = S(x), \quad (2.5.46)$$

где $\alpha_j = \ln 1/a'_j$, $qe^{-x} = t$, с учетом (2.5.41) и (2.5.42) при $x > A$, где $A = -\ln m^* + \ln q$, получим оценку

$$|S(x)| \leq C_{17} e^{-(2-\delta_1-\delta_1)x} \varepsilon \omega_1 q^{2k}. \quad (2.5.47)$$

Справедливость оценки (2.5.47) в интервале $[0, A]$ очевидна в силу (2.5.39) и аналогичных ей оценок для $|R_1(t)|$ и $|R_2(t)|$, действительных при $|t| \leq q$.

Применим к (2.5.46) преобразование Лапласа. Обозначим при комплексном z

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(z) &= \int_0^{\infty} \exp(-zx) w''(x) dx, \quad \Re(z) = \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-zx) S(x) dx, \quad (2.5.48)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_0(z) &= \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j \exp(-(2k-2+\delta_2)\alpha_j) \times \\ &\times \int_0^{\alpha_j} \exp(-zx) w''(x) dx.\end{aligned}$$

Здесь мы предполагаем, что $\alpha_j \geq 0$ при $j=1, 2, \dots, n$. Так как это предположение эквивалентно условию $0 \leq \alpha'_j \leq 1$, то, очевидно, оно не умаляет общности рассуждений.

В силу (2.5.45) убеждаемся, что при $x \rightarrow \infty$

$$w''(x) = O\left(\exp(-(2-\delta_2)x)\right) \quad (2.5.49)$$

и, следовательно, интегралы в (2.5.48) конечны в полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > -2 + \delta_2, \quad (2.5.50)$$

а тем самым в этой полуплоскости аналитичны функции $\mathcal{U}(z)$ и $\mathfrak{F}(z)$. Аналитичность этих функций существенно используется при применении формулы обращения преобразования Лапласа к соотношению (2.5.51).

Таким образом, из (2.5.46) в области (2.5.50) получаем:

$$\sigma_1(2k-2+\delta_2-z)\mathcal{U}(z) = \mathfrak{F}_0(z) + \mathfrak{R}(z). \quad (2.5.51)$$

При этом отметим, что $\mathfrak{F}_0(z)$ — целая функция.

Согласно (2.5.47), при $\operatorname{Re} z > -(2-\delta_2-\delta_1)$

$$|\mathfrak{R}(z)| \leq C_{17} \varepsilon^{\omega_1} q^{2k} / (\operatorname{Re} z + 2 - \delta_2 - \delta_1). \quad (2.5.52)$$

Теперь, как отмечалось, к соотношению (2.5.51) применим формулу обращения преобразования Лапласа (см. [30], с. 72, формула (2.2.18)). Отметим, что в обозначениях [30] мы вы-

бираем $\Lambda=0$ и полагаем, что абсцисса x' вертикальной прямой интегрирования удовлетворяет условию $-(2-\delta_2) < x' < 0$, а последнее возможно в силу аналитичности $\mathcal{U}(z)$ и $\mathcal{R}(z)$ в полуплоскости (2.5.50). Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} (v-\tau) w''(v) dv &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x'-i\infty}^{x'+i\infty} e^{\tau z} \frac{\mathfrak{F}_0(z)}{z^2 \sigma_1(2k-2+\delta_2-z)} dz + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{x'-i\infty}^{x'+i\infty} e^{\tau z} \frac{\mathfrak{R}(z)}{z^2 \sigma_1(2k-2+\delta_2-z)} dz. \end{aligned} \quad (2.5.53)$$

Здесь необходимо заметить, что согласно равенству $\sigma_1 = \sigma$ все нули $\sigma_1(z)$ располагаются в вертикальной полосе левее прямой $\operatorname{Re} z = \sigma$. Поэтому все нули $\sigma_1(2k+\delta_2-z)$ располагаются в полосе правее прямой

$$\operatorname{Re} z = 2k-2+\delta_2-\sigma.$$

А так как согласно ограничению на моменты в определении функции $w(x)$ можно выбрать $\sigma < 2k-2+\delta_2$, то нули $\sigma_1(2k-2+\delta_2-z)$ располагаются в вертикальной полосе правой полуплоскости, и тем самым знаменатель в (2.5.53) не обращается в нуль.

Далее, поскольку $\mathfrak{F}_0(z)$ — целая функция, а $\sigma_1(2k-2+\delta_2-z)$ аналитична в области интегрирования, то в правой стороне (2.5.53) первое слагаемое — тождественный нуль, и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} (v-\tau) w''(v) dv &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x'-i\infty}^{x'+i\infty} e^{\tau z} \frac{\mathfrak{R}(z) dz}{z^2 \sigma_1(2k-2+\delta_2-z)}. \end{aligned} \quad (2.5.54)$$

Обозначим правую часть (2.5.54) через $r^*(\tau)$. В силу (2.5.52) и ограниченности $(\exp)\tau z$ на вертикальной прямой, ограниченности функции $\sigma_1^{-1}(2k-2+\delta_2-z)$ из-за выбора $x' < 0$ и абсолютной интегрируемости z^{-2} получаем следующую оценку:

$$|r^*(\tau)| \leq C_{18} e^{\omega_1} q^{2k}. \quad (2.5.55)$$

Заметив, что

$$\int_{\tau}^{\infty} (v - \tau) w''(v) dv = \int_{\tau}^{\infty} \int_{\tau}^v w''(v) du dv = \int_{\tau}^{\infty} \int_v^{\infty} w''(u) du dv,$$

из (2.5.49) и (2.5.55) нетрудно получить, что при $\tau > 0$

$$|w(\tau)| \leq C_{19} \varepsilon^{\omega_1} q^{2k}. \quad (2.5.56)$$

Согласно определению функции w , из (2.5.56) имеем, что при $0 \leq t \leq q(\varepsilon)$

$$|\varphi(t)| \leq C_{19} \varepsilon^{\omega_1} q^{2-\delta_1} t^{2k-2+\delta_1}. \quad (2.5.57)$$

Переходим к завершению доказательства теоремы. Так как, согласно определению оператора $\mathfrak{F}$, (2.5.57) верна „с точностью до полинома степени не выше $2k-2$ “, то

$$|\varphi(t) - P_{2k-2}(t)| \leq C_{20} \varepsilon^{\omega_1}, \quad (2.5.58)$$

где $0 < \omega_2 < \omega_1$, $0 \leq t \leq q(\varepsilon)$.

Оценка

$$q(\varepsilon) \geq C_{21} (\ln 1/\varepsilon)^{1/(2k-2)} \quad (2.5.59)$$

доказывается так же, как и оценка (2.5.24) при определении (2.5.25) в доказательстве теоремы 2.5.1. Из (2.5.58), (2.5.59) на основе теоремы Голинского и элементарного неравенства

$$|\exp z - 1| \leq |z| \max(1, \exp \operatorname{Re} z)$$

получаем оценку (2.5.31).

Теорема доказана.

Доказательство следствия 2.5.2. Проведем симметризацию рассматриваемых случайных величин $\{X_j\}$. Заменяя в (2.5.32) t на $-t$ и перемножив полученное уравнение и уравнение (2.5.32), заключаем, что при $|t| \leq 1/\varepsilon$

$$\prod_{j=1}^n |f(a_j t)|^2 = \prod_{j=1}^n |f(a_{n+j} t)|^2 + r_0(t), \quad |r_0(t)| \leq 3\varepsilon.$$

Теперь можно воспользоваться теоремой 2.5.2. Нетрудно убедиться, что в силу проведенной симметризации и соотношения (2.5.58) верна оценка

$$\lambda(X_j - X, N) \leq C (\ln 1/\varepsilon)^{-\gamma}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5.60)$$

при условии, что $EN=0$, где X — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$, причем $X, X_1, \dots, X_n$ — независимы.

В дополнение к своей работе [74] Г. П. Чистяков сообщил автору следующий результат об устойчивости теоремы Крамера в λ -метрике.

Пусть $\Phi_{a, \sigma}$ — распределение нормальной случайной величины $N_{a, \sigma}$ с параметрами $a \in \mathbb{R}^1$ и $\sigma \in (0, \infty)$. Обозначим

$$\Phi_j(x) = \Phi_{0,1}((x - b_j)/\sigma_j), \quad b_j = \int_{|x| \leq \sigma M} x \, dF_j(x),$$

$$\sigma_j^2 = \int_{|x| \leq \sigma M} x^2 \, dF_j(x) - b_j^2, \quad M = 1 + \sqrt{\ln 1/\varepsilon}, \quad j = 1, 2.$$

Здесь F_1, F_2 — функции распределения некоторых независимых случайных величин Z_1, Z_2 соответственно. Если при этом известно, что

$$\lambda(Z_1 + Z_2, N_{0, \sigma}) \leq \varepsilon,$$

причем $\text{med } Z_1 = 0$, $\sigma_j \geq C_1 > 0$ ($j = 1, 2$), C_1 — абсолютная константа, то

$$\lambda(Z_j, N_j) \leq C_2 (\ln 1/\varepsilon)^{-1/2}, \quad (2.5.61)$$

где C_2 — абсолютная константа, а

$$P(N_j < x) = \Phi_j(x), \quad j = 1, 2.$$

Теперь вернемся к оценке (2.5.60). Если медиана случайной величины $\tilde{X}_j$ не равна нулю, т. е. $\text{med } X_j \neq 0$, то вместо X_j, X следует рассматривать $X_j - \text{med } X_j, X + \text{med } X_j$. Воспользовавшись (2.5.61), получаем утверждение следствия 2.5.2.

ГЛАВА 3

ПЕРЕХОД ОТ ОЦЕНОК БЛИЗОСТИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ОЦЕНКАМ В ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТРИКАХ

§ 3.1. Процедура растяжения

Пусть $F(x)$ — заданная функция распределения в $\mathbb{R}^1$, обладающая конечными моментами всех порядков и восстанавливаемая по ним единственным образом. Характеристическую функцию распределения $F(x)$ обозначим через $f(t)$. Пусть, кроме того, $G(x)$ — некоторое вероятностное распределение с характеристической функцией $g(t)$. Известно, что если $f(t)$ и $g(t)$ совпадают в некоторой окрестности точки $t=0$, то функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ совпадают.

Допустим теперь, что вместо совпадения характеристических функций $f(t)$ и $g(t)$ имеет место неравенство

$$|f(t) - g(t)| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in [-T_0, T_0], \quad (3.1.1)$$

где T_0 — некоторое фиксированное число. Что можно сказать о близости распределений F и G ?

Эта проблема впервые изучалась Н. А. Сапоговым [65, 66], которым был подробно исследован случай нормальной функции распределения $F(x)$. В работе Л. Б. Клебанова и С. Т. Мкртчяна [36] получены результаты о близости F и G , когда характеристическая функция $f(t)$ является целой функцией t , а также некоторые оценки для общего случая функции распределения F , удовлетворяющей условию Карлемана единственности решения проблемы моментов. В дальнейшем нам потребуется следующий результат.

Теорема Клебанова—Мкртчяна [36]. Пусть X — случайная величина с носителем, сосредоточенным на интервале (a, b) , причем выполняется соотношение (3.1.1), где $f(t) = \mathbb{E} \exp(itX)$, $g(t) = \mathbb{E} \exp(itY)$. Тогда существует величина $\varepsilon_0 > 0$, зависящая лишь от T_0, a, b , и $C > 0$, зависящая лишь от a и b , для которых при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\lambda(X, Y) \leq C (\ln \ln 1/\varepsilon) / \ln 1/\varepsilon. \quad (3.1.2)$$

Определение λ -метрики напомним в § 1.2 (формула (1.2.14)).

Если же о $f(t)$ известно лишь, что она аналитична при $|t| \leq R$, то, как показано в статье А. В. Какосьяна и Л. Б. Клебанова [32], из (3.1.1) следует существование величин $\varepsilon_* > 0$ и $c > 0$, зависящих лишь от f и T_0 , таких, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ справедливо неравенство

$$\lambda(X, Y) \leq c / \ln \ln 1/\varepsilon. \quad (3.1.3)$$

Здесь, как и прежде, $f(t) = \mathbf{E} \exp itX$, $g(t) = \mathbf{E} \exp itY$.

Возникает естественный вопрос: какая требуется дополнительная информация о случайных величинах X и Y , чтобы порядок оценки устойчивости в (3.1.3) был степенной? В качестве таких дополнительных условий на случайную величину X потребуем, чтобы ее характеристическая функция $f(t)$ удовлетворяла условиям теоремы 1.2.1, точнее, чтобы

$$f(t) = \prod_{j=1}^k f(b_j t) + r(t), \quad |r(t)| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad |t| \leq T, \quad (3.1.4)$$

где T — некоторая произвольная величина, а

$$\sum_{j=1}^k b_j^2 = 1, \quad b^* = \max \{|b_j| : j = 1, 2, \dots, k\} < 1. \quad (3.1.5)$$

Именно эта дополнительная информация лежит в основе так называемого *метода итераций* (или метода *многократных преобразований*), развитого в работах Л. Д. Мешалкина [131] и Р. В. Янушкявичюса, О. Л. Янушкявичене [98]. Этим методом доказывается теорема 3.1.1, которую в свою очередь можно назвать *процедурой растяжения* или *расширения* оценки устойчивости с узкого интервала на более широкий. Проблему растяжения мы еще обсудим после формулировки самой теоремы, а теперь, следуя [98], вкратце рассмотрим суть метода итераций.

Пусть дано соотношение $\theta_i = \mathfrak{F}(\theta_{i-1})$, $i = 1, \dots, N$, и известна лишь оценка величины θ_0 . На основе этого соотношения требуется найти оценки неизвестных величин $\theta_1, \dots, \theta_N$. Очевидно, возможно следующее представление θ_j через θ_0 :

$$\theta_j = \mathfrak{F}(\theta_{j-1}) = \dots = \mathfrak{F}(\mathfrak{F} \dots (\mathfrak{F}(\theta_0))) = \mathfrak{F}^{*(j)}(\theta_0). \quad (3.1.6)$$

Следует отметить, что от удачного подбора процедуры $\mathfrak{F}$ зависит многое. Проиллюстрируем сказанное на примере

построения оценки устойчивости в характеристизационной теореме Пойа (см. § 1.1, п. 1). Пусть X_1, X_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины,

$$\mathbb{E} X_j = 0, \quad \mathbb{E} X_j^2 = 1, \quad \mathbb{E} |X_j|^3 \leq M < \infty.$$

Предположим, что статистики X_1 и $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ (λ, ε)-равнораспределены. Это означает, что при $|t| \leq 1/\varepsilon$

$$f(t) = f^2(t/\sqrt{2}) + r(t), \quad |r(t)| \leq \varepsilon, \quad (3.1.7)$$

где f — характеристическая функция случайной величины X_j . На основе соотношения (3.1.7) легко доказать, что при $|t| \leq 1/\varepsilon$

$$\begin{aligned} f(t) = f^{2^n}(t/2^{n/2}) + \sum_{m=1}^n \sum_{j=0}^{2^{m-1}-1} f^{2^{m-1}-(j+1)}(t/2^{(m-1)/2}) \times \\ \times f^{2j}(t/2^{m/2}) r(t/2^{(m-1)/2}). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

В самом деле, для этого достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} & f^{2^{m-1}}(t/2^{(m-1)/2}) - f^{2^m}(t/2^{m/2}) = \\ &= \sum_{j=0}^{2^{m-1}-1} \{ f^{2^{m-1}-j}(t/2^{(m-1)/2}) f^{2j}(t/2^{m/2}) - \\ & - f^{2^{m-1}-(j+1)}(t/2^{(m-1)/2}) f^{2(j+1)}(t/2^{m/2}) \} = \\ &= \sum_{j=0}^{2^{m-1}-1} f^{2^{m-1}-(j+1)}(t/2^{(m-1)/2}) f^{2j}(t/2^{m/2}) (f(t/2^{(m-1)/2}) - \\ & - f^2(t/2^{m/2})) = \\ &= \sum_{j=0}^{2^{m-1}-1} f^{2^{m-1}-(j+1)}(t/2^{(m-1)/2}) f^{2j}(t/2^{m/2}) r(t/2^{(m-1)/2}). \end{aligned}$$

Согласно известной лемме Эссеена ([57], § 5.2, лемма 1)

$$|f^{2^n}(t/2^{n/2}) - \exp(-t^2/2)| \leq 16M2^{-n/2} |t|^3 \exp(-t^2/3)$$

при $|t| \leq 2^{n/2}/(4M)$. Отсюда, учитывая (3.1.8) и оценку $|r(t)| \leq \varepsilon$ при $|t| \leq 1/\varepsilon$, имеем, что при $|t| \leq \min \{1/\varepsilon, 2^{n/2}/(4M)\}$

$$|f(t) - \exp(-t^2/2)| \leq C2^{-n/2} + 2^n \varepsilon, \quad (3.1.9)$$

где $C \leq 48\sqrt{3} M \exp(-3/2)$. Положим

$$n = \left\lceil \frac{2}{3} \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1,$$

из (3.1.9) заключаем, что при $|t| \leq \varepsilon^{-1/3}/(4M)$

$$|f(t) - \exp(-t^2/2)| \leq (C+2)\varepsilon^{1/3}.$$

Следовательно,

$$\lambda(X_j, N_{0,1}) \leq \max(4M, C+2)\varepsilon^{1/3}, \quad (3.1.10)$$

где $N_{0,1}$ — стандартная нормальная случайная величина, а $j=1,2$. Однако вместо (3.1.8) можно выбрать и другой алгоритм. Например,

$$\begin{aligned} f(t) &= f^{2^n}(t/2^{n/2}) + \\ &+ \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^{2^m-1} \binom{2^m}{j} f^{2^j}(t/2^{(m+1)/2}) r^{2^m-j}(t/2^{m/2}). \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Действительно, в силу (3.1.7)

$$f^2(t/\sqrt{2}) = f^{2 \cdot 2^1}(t/2) + \sum_{j=0}^{2^1-1} \binom{2^1}{j} f^{2^j}(t/2) r^{2^1-j}(t/\sqrt{2}).$$

Подставляя это выражение в (3.1.7), имеем:

$$f(t) = f^{2 \cdot 2^1}(t/2) + \sum_{m=0}^1 \sum_{j=0}^{2^m-1} \binom{2^m}{j} f^{2^j}(t/2^{(m+1)/2}) r^{2^m-j}(t/2^{m/2}).$$

Теперь на основе (3.1.7) преобразуем $f^{2 \cdot 2^1}(t/2)$ и т. д., тем самым получая (3.1.11).

Обработка (3.1.11) по аналогии с (3.1.8) здесь не проходит, ибо число слагаемых в (3.1.11) уже порядка 2^{2^n} . В обозначениях (3.1.6) это означает, что надо либо иначе подбирать θ_0 (и тем самым сокращать число шагов j), либо более подробно и точно рассматривать оценку $\mathfrak{F}(\theta_{j-1})$, либо $\mathfrak{F}$ заменить каким-либо другим правилом.

Вернемся к поставленному в начале параграфа вопросу: какая требуется дополнительная информация о случайных величинах X и Y , чтобы порядок оценки устойчивости в (3.1.3) был степенной? Кроме (3.1.4) и (3.1.5) потребуем также, чтобы случайная величина Y была нормальной.

В формуле (3.1.1) обозначение или оценивание малых возмущений через ε принято исторически. Однако в нашем случае это может привести к некоторой путанице. Поэтому в дальнейшем при использовании (3.1.1) вместо величины ε будем употреблять величину Δ .

Теорема 3.1.1 (см. [98]). Пусть $f(t) = E \exp(itX)$,

$$\Delta = \max_{|t| \leq 1} |f(t) - \exp(-\sigma^2 t^2/2)| \leq A \sigma^{4 \log_{1/b^*} k}.$$

Если при $T \geq 1/\varepsilon$ выполнены соотношения (3.1.4) и (3.1.5), то существует нормальная случайная величина N_0, σ с нулевым средним и дисперсией σ^2 такая, что

$$\lambda(X, N_0, \sigma) \leq C_0 (\sigma^{-\log_{1/b^*} k} + 1) \max\{\Delta, \varepsilon\}, \quad (3.1.12)$$

причем C_0 зависит лишь от $b_1, \dots, b_k, k$ и A .

При помощи процедуры масштабирования (см. § 3.2 и особенно гл. 4) обычно удается установить, что $0 < A_1 \leq \sigma \leq A_2$. В таком случае теорема 3.1.1, в частности, означает, что если при рассмотрении устойчивости характеристизационной задачи возникает уравнение (3.1.4), то „порча“ порядка оценки устойчивости может произойти лишь в интервале $[-1, 1]$. В дальнейшем неоднократно будем пользоваться этим обстоятельством.

Следствие 3.1.1 (см. [92]). Если выполнены требования теоремы 3.1.1, причем T — произвольная величина, то существует величина C_* , зависящая лишь от $k, b_1, \dots, b_k$, такая, что

$$\int_1^T t^{-1} |f(t) - \exp(iat - \sigma^2 t^2/2)| dt \leq C (\sigma^{-\log_{1/b^*} k} + 1) \max\{\Delta, \varepsilon\}. \quad (3.1.13)$$

Следствие 3.1.2 (см. [98]). Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1, причем $T = \infty$. Тогда в (3.1.12) метрику λ можно заменить метрикой λ_0 ,

$$\lambda_0(X, Y) = \sup_t |E \exp itX - E \exp itY|. \quad (3.1.14)$$

Следствие 3.1.3. Пусть

$$\Delta_a = \max_{|t| \leq 1} |f(t) - \exp(iat - \sigma^2 t^2/2)| \leq A \sigma^{4 \log_{1/b} k}.$$

Если при $|t| \leq T$ (T — конечная величина или ∞) выполняются соотношения (3.1.4) и (3.1.5), причем

$$\sum_{j=1}^k b_j = 1, \quad (3.1.15)$$

то существует величина C_1 , зависящая лишь от $A, k, b_1, \dots, b_k$, такая, что

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq T} |f(t) - \exp(iat - \sigma^2 t^2/2)| &\leq \\ &\leq C_1 (\sigma^{-\log_{1/b} k} + 1) \max(\Delta_a, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Переходим к рассмотрению доказательств сформулированных утверждений.

Доказательство теоремы 3.1.1. Обозначим

$$h(t) = f(t) - \exp(-\sigma^2 t^2/2).$$

Согласно (3.1.4),

$$\begin{aligned} h(t) + \exp(-\sigma^2 t^2/2) &= r(t) + \\ &+ \prod_{j=1}^k (h(b_j t) + \exp(-\sigma^2 b_j^2 t^2/2)), \end{aligned}$$

а отсюда

$$\begin{aligned} h(t) &= \prod_{j=1}^k h(b_j t) + \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k h(b_l t) \exp(-b_j^2 \sigma^2 t^2/2) + \dots + \\ &+ \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k \exp(-b_l^2 \sigma^2 t^2/2) h(b_j t) + r(t). \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Пусть

$$H_m(t) = \max \{ |h(B_1^{(m)}(t))|, \dots, |h(B_{\varepsilon^m}^{(m)}(t))| \}, \quad (3.1.18)$$

где множество $\{B_j^{(m)}: j=1, \dots, k^m\}$ совпадает с множеством термов в полиномиальном представлении суммы $(b_1 + \dots + b_k)^m$. Из (3.1.17) получаем, что

$$|h(B^{(m-1)}t)| \leq \left\{ \max_{1 \leq j \leq k} |h(b_j B_j^{(m-1)}t)| \right\}^k + \dots + \\ + k \exp\left(-(1-b^{*2})b_*^{2(m-1)}\sigma^2 t^2/2\right) \max_{1 \leq j \leq k} \{|h(b_j B_j^{(m-1)}t)|\} + \varepsilon,$$

где

$$b_* = \min\{|b_j|: |b_j| > 0, j=1, 2, \dots, k\}.$$

Обозначая $1-b^{*2}=b$, получаем

$$H_{m-1}(t) \leq H_m^k(t) + \dots + \\ + k \exp(-bb_*^{2(m-1)}\sigma^2 t^2/2) H_m(t) + \varepsilon. \quad (3.1.19)$$

Фиксируем произвольное число t_0 , $t_0 \geq 1$. Предположив, что при $|t| \leq t_0$

$$H_0^2(t) \leq \Delta, \quad (3.1.20)$$

докажем, что это неравенство справедливо и при $|t| \leq \min(1/\varepsilon, t_0/b^*)$. А так как $b^* < 1$, то это в свою очередь будет означать, что (3.1.20) верно для любого действительного t из интервала $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$.

Пусть c_* — произвольная положительная фиксированная постоянная. Заметим, что

$$\Delta = \Delta(\varepsilon) \leq c_* \quad \text{при} \quad \varepsilon \downarrow 0. \quad (3.1.21)$$

В самом деле, если для некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon'\}$ последовательности $\{\varepsilon\}$ $\Delta(\varepsilon') > c_*$, то в этом случае утверждение теоремы получается тривиальным образом за счет надлежащего выбора постоянной C_0 .

Положим

$$d = 1 + [\log_{1/b^*} t_0].$$

Тогда при $|t| \leq \min(1/\varepsilon, t_0/b^*)$

$$|B_j^{(d+1)}t| < 1, \quad j=1, 2, \dots, k^{d+1}. \quad (3.1.22)$$

Кроме того, заметим, что если (3.1.20) справедливо при $|t| \leq t_0$, то тем более для любого натурального m $H_m^2(t) \leq \Delta$ при $|t| \leq t_0$ и, следовательно, согласно (3.1.19),

$$H_{m-1}(t) \leq k \exp(-bb_*^{2(m-1)}\sigma^2 t^2/2) H_m(t) + C_2 \Delta, \quad (3.1.23)$$

где C_2 зависит лишь от k . Здесь и далее с целью сокращения записи полагается, что $\varepsilon \leq \Delta$, $t_0/b^* \leq 1/\varepsilon$. В силу (3.1.23) при $|t| \leq t_0/b_{\max}$ имеем:

$$\begin{aligned} H_0(t) &\leq k \exp(-b \sigma^2 t^2/2) H_1(t) + C_2 \Delta \leq \\ &\leq k^2 \exp(-b \sigma^2 t^2/2 - b b_*^2 \sigma^2 t^2/2) H_2(t) + \\ &+ C_2 (k \exp(-b \sigma^2 t^2/2) + 1) \Delta \leq \dots \leq \\ &\leq k^{d+1} \exp(-b^2 \sigma^2 t^2/2 - \dots - b b_*^{2d} \sigma^2 t^2/2) H_{d+1} + \\ &+ C_2 \left(\sum_{j=1}^d k^j \exp(-b \sigma^2 t^2/2 - \dots - b b_*^{2(j-1)} \sigma^2 t^2/2) + 1 \right) \Delta \leq \\ &\leq k^{d+1} \exp(-b \sigma^2 t^2/2) H_{d+1} + C_2 k^{d+1} \exp(-b \sigma^2 t^2/2) \Delta + C_2 \Delta. \end{aligned}$$

Вспомнив определение $\tilde{d}$, легко убедиться, что

$$k^{d+1} \exp(-b \sigma^2 t^2/2) \leq k^2 t_0^{\log_{1/b^*} k} \exp(-b \sigma^2 t_0^2/2)$$

при $t_0 \leq |t| \leq t_0/b^*$. Обозначим

$$G(t) = k^2 |t|^{\log_{1/b^*} k} \exp(-b \sigma^2 t^2/2).$$

Поскольку функция $G(t)$ — четная, то нетрудно убедиться, что она достигает максимума в точках t^* и $-t^*$,

$$t^* = \sigma^{-1} \sqrt{(\log_{1/b^*} k)/b}.$$

Таким образом, при $t_0 \leq |t| \leq t_0/b^*$

$$H_0(t) \leq C_3 \sigma^D (H_{d+1} + C_2 \Delta) + C_2 \Delta, \quad (3.1.24)$$

где

$$C_3 = ((\log_{1/b^*} k)/b)^{k/2} k^{2+1/(2 \ln b^*)},$$

$$D = -\log_{1/b^*} k.$$

Так как согласно условиям теоремы

$$\Delta \leq A \sigma^{-4D},$$

то нетрудно убедиться, что при

$$\Delta \leq \min \{ (2C_2)^{-2}, (2C_3)^{-4} A^4 (1 + C_2)^{-4} \} \quad (3.1.25)$$

справедлива оценка

$$C_3 \sigma^D (1 + C_2) \Delta + C_2 \Delta \leq \Delta^{1/2}. \quad (3.1.26)$$

Поскольку C_2 и C_3 зависят лишь от k , b^* и b , то выполнение (3.1.25) достигается за счет соответствующего выбора c_* в (3.1.21). Из (3.1.24) и (3.1.26) получаем, что

$$H_0^2(t) \leq \Delta \quad \text{при} \quad t_0 \leq |t| \leq t_0/b^*. \quad (3.1.27)$$

Исходя из этого и учитывая, что C_2 , C_3 не зависят от произвольно выбранного числа $t_0 \geq 1$, на основе (3.1.24) заключаем, что

$$H_0(t) \leq C_3 \sigma^D (1 + C_2) \Delta + C_2 \Delta$$

при $|t| \leq 1/\varepsilon$.

Теорема доказана.

Доказательство следствия 3.1.1 не представляет затруднений. Действительно, обозначив

$$t_j = (b^*)^{-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

нетрудно убедиться, что

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} |h(t)/t| dt \leq \max_{t_{j-1} \leq t \leq t_j} |h(t)| (1 - b^*)/b^*. \quad (3.1.28)$$

Переходя к рассмотрению суммы интегралов (3.1.28) с целью получения оценки такого же порядка, как и (3.1.12), достаточно аккуратно повторить неравенства при доказательстве формулы (3.1.24). Выкладки нами опускаются. Заметим, что для частного случая эти выкладки приводятся в работе [131].

Доказательство следствия 3.1.2 очевидно.

Для доказательства следствия 3.1.3 достаточно убедиться в справедливости следующего утверждения. Если функция $f(t) = \mathbb{E} \exp itX$ удовлетворяет уравнению (3.1.4), то при условии (3.1.15) функция $f_a(t) = \mathbb{E} \exp(it(X-a))$ для любого действительного a удовлетворяет аналогичному уравнению

$$f_a(t) = \prod_{j=1}^k f_a(b_j t) + r(t) \exp(-iat). \quad (3.1.29)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^k f_a(b_j, t) &= \prod_{j=1}^k f(b_j, t) \exp(-ib_j at) = \\ &= \prod_{j=1}^k f(b_j t) \exp\left(-iat \sum_{j=1}^k b_j\right) = \prod_{j=1}^k f(b_j t) \exp(-iat) = \\ &= f(t) \exp(-iat) - r(t) \exp(-iat) = f_a(t) - r(t) \exp(-iat), \end{aligned}$$

т. е. (3.1.29) действительно имеет место. Теперь на основе соответствующего сдвига и теоремы 3.1.1 получаем (3.1.16).

В заключение отметим, что следствие 3.1.3 будет нами существенно использовано при построении оценки устойчивости характеристической теоремы С. Н. Бернштейна (см. § 2.6). Согласно (2.6.18), в этой характеристизации возникает уравнение

$$f(t) = f^3(t/2) f(-t/2).$$

Коэффициенты

$$b_1 = b_2 = b_3 = 1/2, \quad b_4 = -1/2,$$

очевидно, удовлетворяют как соотношениям (3.1.5), так и условию (3.1.15).

§ 3.2. Примеры применения процедуры растяжения

В настоящем параграфе исследуем оценки устойчивости в метриках типа λ лишь в двух характеристизационных теоремах — в обобщенной теореме Поля (см. § 1.1, п. 1, а также пример 1.2.1) и теореме Бернштейна (см. § 2.6). При этом необходимо отметить, что процедура растяжения (т. е. теорема 3.1.1 и ее следствия) также существенно используется в следующей главе, которая посвящена исследованию устойчивости характеристизационных теорем без моментных ограничений.

Уже при первом взгляде на оценки (3.1.12), (3.1.13) и (3.1.16) нетрудно определить, что при исследовании устойчивости с использованием процедуры растяжения основной задачей является оценка по ε величины Δ (или Δ_a), построением которой мы сейчас и займемся.

1°. Оценка устойчивости в обобщенной теореме Д. Пойа.

Идея применимости предельных теорем в характеристизационных задачах математической статистики уже давно привлекала внимание специалистов. Она фактически была реализована в работе самого Д. Пойа [134] в 1923 г. Другим ярким примером может послужить работа Ю. В. Прохорова и М. Фиша [58] о распространении теоремы Пойа на случайные элементы в гильбертовом пространстве, а также теорема 5.4.2 из монографии [30].

При переходе к рассмотрению устойчивости характеристизационных теорем положение во многих случаях усложняется, причем очень часто усложняется существенно. Использование предельных теорем для построения оценок устойчивости проводилось И. С. Шигановым [76], Р. В. Янушкявичюсом, О. Л. Янушкявичене [98, 160], Р. В. Янушкявичюсом [89].

Теорема 3.2.1 (см. [89]). Пусть $X, X_1, \dots, X_k$ — независимые равномерно распределенные случайные величины и пусть для некоторого $r \in (2, 3]$

$$E(X - L) = 0, \quad E(X^2 - L^2) = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^r d(P(X < x) - P(L < x)) \leq M < \infty, \quad (3.2.2)$$

причем

$$L = \sum_{j=1}^k b_j X_j, \quad \sum_{j=1}^k b_j^2 = 1,$$

$$b = \max \{ |b_j| : j = 1, 2, \dots, k \} < 1.$$

Если статистики X и L (λ, ϵ) -равномерно распределены, т. е. $\lambda(X, L) \leq \epsilon$, то существует нормальная случайная величина N такая, что

$$\lambda(X, N) \leq C_1 \epsilon^\alpha, \quad (3.2.3)$$

где C_1 зависит лишь от M, k и b , а

$$\alpha = \ln \beta_r / (\ln(\beta_r k^{-1})), \quad \beta_r = \sum_{j=1}^k |b_j|^r.$$

Доказательство. Из (3.2.1), (3.2.2) и соотношений (5)–(15) работы Р. Шимицу [145] следует, что

$$\mathbf{E} X = 0, \quad \mathbf{E} X^2 = \sigma^2 < \infty, \quad (3.2.4)$$

$$|f(t) - \exp(-\sigma^2 t^2/2)| \leq MK |t|^{2+\delta},$$

где $\delta = r - 2$, $f(t) = \mathbf{E} \exp(itX)$,

$$K = 2^{1-\delta} / ((1+\delta)(2+\delta)(1-b)).$$

Обозначим

$$m = \min \{ (2KM e)^{-1/r}, \sqrt{2}/\sigma \}.$$

Записав

$$f(t/\sqrt{n}) = \exp(-\sigma^2 t^2/(2n)) + \Theta M |t|^{2+\delta}/n^{(2+\delta)/2},$$

где $|\Theta| \leq 1$, и убедившись, что при $|t| \leq m\sqrt{n}$

$$(|\Theta| MK |t|^{2+\delta}/n^{(2+\delta)/2} \exp(\sigma^2 t^2/(2n))) \leq 1/2,$$

согласно известной формуле $|\ln(1+x)| \leq 2|x|$ при $|x| \leq 1/2$ получим:

$$\ln f(t/\sqrt{n}) = -\sigma^2 t^2/(2n) + \ln(1 + \exp(\sigma^2 t^2/(2n))) \times$$

$$\times \Theta MK |t|^{2+\delta}/n^{1+\delta/2},$$

$$\ln(1 + \exp(\sigma^2 t^2/(2n))) \Theta MK |t|^{2+\delta}/n^{1+\delta/2} \leq$$

$$\leq 2e MK |t|^{2+\delta}/n^{1+\delta/2}.$$

Отсюда следует, что

$$|\ln f(t/\sqrt{n}) + \sigma^2 t^2/2n| \leq 2e KM |t|^{2+\delta} n^{-(2+\delta)/2} \quad (3.2.5)$$

при $|t| \leq m\sqrt{n}$.

С целью упрощения выкладок далее полагается $\sigma = 1$. Это предположение не умаляет общности рассуждений, поскольку в противном случае следовало бы провести процедуру масштабирования, которая рассматривается в п. 2° и постоянно используется в гл. 4.

Если X и Y — независимые равномерно распределенные случайные величины, а $F(x)$ — распределение разности $X - Y$, то в силу (3.2.4)

$$\begin{aligned} 1 - |f(t)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) dF(x) = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} dF(x) \leq \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = t^2. \end{aligned}$$

Следовательно, при $|t| < 1$ выполняется соотношение

$$\ln f(t) = \sum_{j=1}^k \ln f(b_j t) + R_1(t), \quad (3.2.6)$$

где

$$R_1(t) = \ln \left(1 + r(t) / \prod_{j=1}^k f(b_j t) \right), \quad |r(t)| \leq \varepsilon. \quad (3.2.7)$$

Обозначив

$$\psi(t) = \frac{2}{t^2} \ln f(t), \quad R_2(t) = 2R_1(t)/t^2,$$

согласно (3.2.6) имеем:

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^k b_j^2 \psi(b_j t) + R_2(t). \quad (3.2.8)$$

Следовательно,

$$\psi(b_j t) = \sum_{i=1}^k b_i^2 \psi(b_j b_i t) + R_2(b_j t),$$

а поэтому, в силу (3.2.8),

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sum_{j=1}^k b_j^2 \left(\sum_{i=1}^k b_i^2 \psi(b_j b_i t) \right) + \sum_{j=1}^k b_j^2 R_2(b_j t) + R_2(t), \\ \psi(t) &= \sum_{j_1=1}^k \sum_{j_2=1}^k b_{j_1}^2 b_{j_2}^2 \psi(b_{j_1} b_{j_2} t) + \sum_{j_1=1}^k b_{j_1}^2 R_2(b_{j_1} t) + R_2(t). \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру, убеждаемся, что при $|t| < 1$

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \sum_{j_1=1}^k \sum_{j_2=1}^k \dots \sum_{j_s=1}^k b_{j_1}^2 b_{j_2}^2 \dots b_{j_s}^2 \psi(b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_s} t) + \\ & + \sum_{l=2}^s \left(\sum_{j_1=1}^k \dots \sum_{j_{l-1}=1}^k b_{j_1}^2 \dots b_{j_{l-1}}^2 R_2(b_{j_1} \dots b_{j_{l-1}} t) \right) + \\ & + R_2(t). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Поскольку

$$\sum_{j_1=1}^k \dots \sum_{j_s=1}^k b_{j_1}^2 \dots b_{j_s}^2 = (b_1^2 + \dots + b_k^2)^s = 1,$$

то в (3.2.9) вместо ψ можно подставить $\psi + 1$. При оценке первого слагаемого в правой части (3.2.9) заметим, что, согласно условиям теоремы, для всех j $|b_j| < 1$. Положив $|b_j| > 0$ и обозначив $n_s = n(i_1, \dots, i_s) = b_{i_1}^{-2} \dots b_{i_s}^{-2}$, из (3.2.5) получим:

$$\begin{aligned} |\psi(b_{j_1} \dots b_{j_s} t) + 1| &= 2t^{-2} |n_s \ln f(t/n_s^{1/2}) + t^2/2| \leq \\ &\leq C_2 M |t|^8 n_s^{-8/2}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Так как $n_s^{-8/2} = |b_{i_1}|^8 \dots |b_{i_s}|^8$, то из (3.2.10) следует, что при $|t| < 1$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j_1=1}^k \dots \sum_{j_s=1}^k b_{j_1}^2 \dots b_{j_s}^2 (\psi(b_{j_1} \dots b_{j_s} t) + 1) \right| &\leq \\ &\leq C_2 M |t|^8 \sum_{j_1=1}^k \dots \sum_{j_s=1}^k b_{j_1}^2 \dots b_{j_s}^2 n_s^{-8/2} = \\ &= C_2 M |t|^8 \left(\sum_{j=1}^k |b_j|^8 \right)^s. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Переходим к оценке второго и третьего слагаемых в правой части (3.2.9). Поскольку, как уже было доказано, $|f(t)|^2 \geq 1 - t^2$, то

$$|R_1(t)| \leq 2 \frac{|r(t)|}{k} \leq \frac{2\varepsilon}{(1-b)^{k/2}} \prod_{j=1}^k |f(b_j t)|$$

при $|t| < 1$. Отсюда, согласно определению $R_2(t)$, имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=2}^s \left(\sum_{j_1=1}^k \dots \sum_{j_{l-1}=1}^k b_{j_1}^2 \dots b_{j_{l-1}}^2 |R_2(b_{j_1} \dots b_{j_{l-1}} t)| \right) + |R_2(t)| \leq \\ & \leq \frac{2}{t^2} \sum_{l=2}^s \left(\sum_{j_1=1}^k \dots \sum_{j_{l-1}=1}^k |R_1(b_{j_1} \dots b_{j_{l-1}} t)| \right) + \frac{2}{t^2} |R_1(t)| \leq \\ & \leq \frac{4\varepsilon}{(1-b)^{k/2} t^2} \sum_{l=1}^s k^{l-1} \leq \frac{\varepsilon}{t^2} C_3 k^s. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Учитывая (3.2.9)–(3.2.12), получаем, что при $|t| < 1$

$$|\psi(t) + 1| \leq C_2 M |t|^8 \beta_r^s + C_3 \varepsilon t^{-2} k^s. \quad (3.2.13)$$

Так как $\beta_2 = 4$, то, очевидно, при $r > 2$

$$\beta_r < 1.$$

Имея в виду это замечание, произведем балансировку в (3.2.13). Подставляя в (3.2.13) $s = [\kappa \ln 1/\varepsilon]$, при $|t| < 1$ имеем:

$$|\psi(t) + 1| \leq C_2 M |t|^8 \beta_r^{-1} \varepsilon^{\kappa \ln(1/\beta_r)} + C_3 t^{-2} \varepsilon^{1 - \kappa \ln k}.$$

Положив здесь $\kappa = 1/\ln(k/\beta_r)$, заключаем, что при $|t| < 1$

$$|\psi(t) + 1| \leq (C_2 M |t|^8 \beta_r^{-1} + C_3 t^{-2}) \varepsilon^\alpha,$$

$$\alpha = \ln \beta_r / (\ln \beta_r k^{-1}).$$

Воспользовавшись неравенством

$$|f(t) - \exp(-t^2/2)| \leq t^2 |\psi(t) + 1|,$$

при $|t| < 1$ получаем:

$$|f(t) - \exp(-t^2/2)| \leq (C_2 M |t|^8 / \beta_r + C_3) \varepsilon^\alpha.$$

Таким образом, мы завершили оценивание величины Δ , определенной в условиях теоремы 3.1.1. Воспользовавшись оценкой (3.1.12), получаем (3.2.3).

Теорема доказана.

При исследовании устойчивости характеристики нормального закона свойством равномерности линейных статистик $L_1 = a_1 X_1 + \dots + a_k X_k$ и $L_2 = b_1 X_1 + \dots + b_k X_k$ (теорема 2.5.1) мы видели, что порядок оценки устойчивости — логарифмический. Возникает следующий интересный вопрос. Нельзя ли существенно улучшить этот порядок, если о статистиках L_1 и L_2 дополнительно известно, что коэффициенты хотя бы в одной из них равны? Оказывается — можно, причем доказательство проводится подобным образом, как и только что рассмотренная теорема 3.2.1. Это важное обстоятельство позволяет опустить доказательство теоремы 3.2.2 (см. [160]).

Перед ее формулировкой через $\delta_{x,y}$ обозначим символ Кронекера, т. е. $\delta_{x,y} = 1$ при $x = y$ и $\delta_{x,y} = 0$ при $x \neq y$, а через $N_{0,1}$ — стандартную нормальную случайную величину.

Теорема 3.2.2. Пусть $X, X_1, \dots, X_k$ — независимые равномерно распределенные случайные величины и пусть $E |X|^r \leq M_r$, при $r > 2$, $EX^j = EN_{0,1}^j$ при $j = 1, 2, \dots, [r] - \delta_{r,[r]}$. Если статистики $L_1 = (X_1 + \dots + X_k) / \sqrt{k_0}$ и $L_2 = b_1 X_1 + \dots + b_k X_k$ (λ, ε) — равномерно распределены, т. е.

$$\lambda(L_1, L_2) \leq \varepsilon,$$

причем

$$\sum_{j=1}^k b_j^2 = 1, \quad 0 < |b_j| / \sqrt{k_0} < 1, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

то существуют положительные величины w и C_4 , зависящие лишь от $b_1, \dots, b_k, k, k_0, M_r$, такие, что

$$\lambda(X, N_{0,1}) \leq C_4 \varepsilon^w.$$

В [160] приводятся следующие оценки для w :

$$(a) \text{ сверху: } w \leq w_1 = \min(\alpha, 1/k_0),$$

$$\alpha = (\ln(\beta_r k_0^{r/2-1})) / \ln(\beta_r k_0^{r/2} k^{-1}),$$

$$\beta_r = \sum_{j=1}^k |b_j|^r;$$

(б) снизу:

$$w \geq \gamma_{M*}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_* &= \min \{ M, \min \{ j : \gamma_j = \gamma_{j+1} \} \}, \\ \gamma_0 &= \alpha, \quad \gamma_1 = \min \{ \alpha, \gamma'_1, 1/k_0, \beta(2 - 1/k_0)/(2k_0) \}, \\ \gamma_j &= \min \{ \gamma_{j-1}, \gamma'_j \}, \quad j = 2, 3, \dots, \\ \beta &= 2(1 - \alpha)/(k + \delta_*), \\ \gamma'_j &= \min \left\{ i \gamma_{j-1}/k_0 + \left(1 - \sum_{l=0}^{i-1} b_l^{*2} \right) \beta / (2(b^{*2} k_0)^{j-1}) : \right. \\ &\quad \left. : i = 1, 2, \dots, k \right\}, \end{aligned}$$

$$M = \min \{ l : l - \text{натуральное}, (b^* \sqrt{k_0})^{-l} \sqrt{\beta} > b_* \sqrt{2/k_0} \},$$

$$b^* = b_0^* = \max \{ |b_j| : j = 1, 2, \dots, k \},$$

$$b_l^* = \max \{ |b_j| : |b_j| < b_{l-1}^*, \quad j = 1, \dots, k \},$$

$$b_* = \min \{ |b_j| : |b_j| > 0, \quad j = 1, \dots, k \}$$

и, наконец, δ_* — произвольная константа из интервала $(0, 1]$.

2°. Оценка устойчивости в теореме С. Н. Бернштейна. Пусть X_1, X_2 — независимые случайные величины. Известна следующая характеристизационная теорема С. Н. Бернштейна: если $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ — независимы, то X_1, X_2 — нормальны. Оценка устойчивости этой характеристики рассматривалась в работах Хоанг Хыу Ныи [73], Л. Д. Мешалкина [131], Ю. Р. Габовича [5, 6], Л. Б. Клебанова и Р. В. Янушкявичюса [42, 44, 45], Р. В. Янушкявичюса [92]. Далее будем следовать работе [44].

Определение 3.2.1. Случайные величины X и Y называются (λ, ϵ) -независимыми, если

$$\lambda(f_{(X,Y)}, f_X f_Y) \leq \epsilon. \quad (3.2.14)$$

Здесь используются обозначения, принятые в формуле (1.2.14).

Заметим, что для любой характеристической функции $f_{X_j}(t) = E \exp(itX_j)$ и любого числа $p \in (0, 1)$ существует по-

ложительное (зависящее, вообще говоря, от f_{X_j} и p , конечное или бесконечное) s_j такое, что

$$s_j = \inf \{ |t| : |f_{X_j}(t)| = p \}. \quad (3.2.15)$$

Если же $|f_{X_j}(t)| > p$ при $t \in (-\infty, \infty)$, то полагается $s_j = \infty$.

Теорема 3.2.3 (см. [44]). *Если X_1, X_2 — независимые случайные величины, а $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ (λ, ε)-независимые линейные статистики, то*

$$\inf_{N_j \in \mathfrak{N}} \lambda(X_j, N_j) \leq C\varepsilon, \quad j = 1, 2, \quad (3.2.16)$$

где C — некоторая абсолютная константа, а $\mathfrak{N}$ — класс всех нормальных случайных величин. Порядок по ε в (3.2.16) неулучшаем.

Оказывается, можно указать явный вид распределения нормальной случайной величины N_j , удовлетворяющей (3.2.16). Точнее, можно указать такую нормальную случайную величину N_{σ_j} и постоянную C_6 , для которых в условиях теоремы

$$\lambda(X_j, N_{\sigma_j}) \leq C_6 \varepsilon. \quad (3.2.17)$$

А именно, в качестве N_{σ_j} достаточно взять нормальную случайную величину с дисперсией

$$\sigma_j^2 = -2 \ln |f_{X_j}(s)| s^{-2},$$

если $s = \min(s_1, s_2) < 1/\varepsilon$, где s_j определяется согласно (3.2.15) при $p = 1/2$; если же $s \geq 1/\varepsilon$, то

$$\sigma_j^2 = -2\varepsilon^2 \ln |f_{X_j}(1/\varepsilon)|.$$

При установлении (3.2.17) использовалось определение (3.2.15), но лишь при одном фиксированном $p = 1/2$. В случае произвольного $p \in (0, 1)$ (3.2.17) можно уточнить. А именно,

$$\lambda(X_j, N_{\sigma_j}) \leq C_6 \varepsilon p^{-4} \max(1, -\ln^{-1} p), \quad (3.2.18)$$

где C_6 — абсолютная константа.

Перед доказательством теоремы рассмотрим один вспомогательный результат.

Лемма 3.2.1. Пусть X_1, X_2 — независимые случайные величины и

$$|f_{X_1+X_2}(t_1)f_{X_1-X_2}(t_2)-f_{(X_1+X_2, X_1-X_2)}(t_1, t_2)| \leq \varepsilon \quad (3.2.19)$$

при $t_1^2 + t_2^2 \leq T^2$. Пусть, кроме того, существует постоянная $p \in (0, 1)$ такая, что при $j=1, 2$

$$|f_{X_j}(t)| \geq p \quad \text{при} \quad |t| \leq T_2. \quad (3.2.20)$$

Тогда существует абсолютная константа C_7 такая, что при $|t| \leq T = \min(T_1, T_2)$, $j=1, 2$,

$$|f_{X_j}(t) - \exp\{t^2 T^{-2} \ln |f_{X_j}(T)| + iB^{(j)} t\}| \leq C_7 \varepsilon p^{-4},$$

$$B^{(j)} = 2T^{-1} \arg f_{X_j}(T/2),$$

т. е. с точностью до сдвига

$$|f_{X_j}(t) - \exp\{t^2 T^{-2} \ln |f_{X_j}(T)|\}| \leq C_7 \varepsilon p^{-4}.$$

Доказательство леммы. Согласно (3.2.19),

$$\begin{aligned} & f_{X_1}(t_1+t_2)f_{X_2}(t_1-t_2) = \\ & = f_{X_1}(t_1)f_{X_2}(t_1)f_{X_1}(t_2)f_{X_2}(-t_2) + r(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$|r(t_1, t_2)| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad t_1^2 + t_2^2 \leq T^2.$$

Обозначим

$$\psi_1(t) = \ln f_{X_1}(t), \quad \psi_2(t) = \ln f_{X_2}(t),$$

$$\psi_3(t) = -\psi_1(t) - \psi_2(t), \quad \psi_4(t) = -\psi_1(t) - \psi_2(-t).$$

В силу (3.2.20) и (3.2.21) при $t_1^2 + t_2^2 \leq T^2$ имеем

$$\psi_1(t_1+t_2) + \psi_2(t_1-t_2) + \psi_3(t_1) + \psi_4(t_2) = R(t_1, t_2), \quad (3.2.22)$$

где

$$R(t_1, t_2) = \ln \left(1 + r(t_1, t_2) / (f_{X_1}(t_1)f_{X_2}(t_2)f_{X_1}(t_1)f_{X_2}(-t_2)) \right),$$

$$|R(t_1, t_2)| \leq C_8 \varepsilon, \quad C_8 = 2p^{-4}.$$

При анализе уравнения (2.22) будем использовать методы, развитые Ю. В. Линником в [50, § 6.4] и в работах Н. А. Сапогова [62], Л. Б. Клебанова и И. А. Меламеда [35].

В (3.2.22) сделаем замену переменной — вместо t_1 подставим $t_1 + t$ так, чтобы $(t_1 + t)^2 \leq T^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1 + t_2 + t) + \psi_2(t_1 - t_2 + t) + \psi_3(t_1 + t) + \psi_4(t_2) = \\ = R(t_1 + t, t_2). \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Из (3.2.23), вычитая (3.2.22), получаем:

$$\varphi_{1,t}(t_1 + t_2) + \varphi_{2,t}(t_1 - t_2) + \varphi_{3,t}(t_1) = R_1(t_1 + t, t_2), \quad (3.2.24)$$

где $\varphi_{j,t}(z) = \psi_j(z + t) - \psi_j(z)$, а

$$|R_1(t_1 + t, t_2)| \leq 2C_8 \varepsilon, \quad (t_1 + t)^2 + t_2^2 \leq T^2.$$

Введем еще одно обозначение:

$$\varphi_{j,t}^*(z) = \varphi_{j,t}(z) - \varphi_{j,t}(\bar{0}), \quad j = 1, 2, 3.$$

Очевидно, $\varphi_{j,t}^*(0) = 0$. Положив в (3.2.24) $t_1 = t_2 = 0$ и вычтя полученное соотношение из (3.2.24), придем к выражению

$$\varphi_{1,t}^*(t_1 + t_2) + \varphi_{2,t}^*(t_1 - t_2) + \varphi_{3,t}^*(t_1) = R_2(t_1 + t, t_2), \quad (3.2.25)$$

$$|R_2(t_1 + t, t_2)| \leq 4C_8 \varepsilon, \quad (t_1 + t)^2 + t_2^2 \leq T^2.$$

Положим в (3.2.25) сначала $t_1 = 0$, а затем $t_1 = t_2$. Так как $\varphi_{j,t}^*(0) = 0$, то

$$\varphi_{2,t}^*(z) = -\varphi_{1,t}^*(-z) + R_2(t, -z), \quad (3.2.26)$$

$$\varphi_{3,t}^*(z) = -\varphi_{1,t}^*(2z) + R_2(z + t, z). \quad (3.2.27)$$

Следовательно, обозначая

$$t_2 - t_1 = x, \quad 2t_1 = y, \quad \varphi_{1,t}^*(z) = g_t(z),$$

путем подстановки (3.2.26) и (3.2.27) в (3.2.25) получаем

$$\begin{aligned} g_t(x + y) - g_t(x) - g_t(y) = R_2(y/2 + t, x + y/2) - \\ - R_2(t, -x) - R_2(y/2 + t, y/2) = R_3(x, y, t), \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

причем в области

$$(y/2 + t)^2 + (y/2 + x)^2 \leq T^2 \quad (3.2.29)$$

справедлива оценка

$$|R_3(x, y, t)| \leq 12C_4 \varepsilon. \quad 78$$

Таким образом, исследование исходного функционального уравнения (3.2.22) свелось к рассмотрению возмущенного уравнения Коши (3.2.28).

Интегрируя обе части (3.2.28), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \int_0^x g_t(u+y) du - \int_0^x g_t(u) du = \\ = xg_t(y) + \int_0^x R_3(z, y, t) dz. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Это соотношение удобно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_0^{x+y} g_t(z) dz - \int_0^y g_t(z) dz = \\ = \int_0^x g_t(z) dz + xg_t(y) + \int_0^x R_3(z, y, t) dz. \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Рассматривая левую часть (3.2.31) как функцию верхнего предела, видим, что она в области (3.2.29) почти всюду дифференцируема по y , поэтому

$$g_t(x+y) - g_t(y) = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ xg_t(y) + \int_0^x R_3(z, y, t) dz \right\}.$$

В силу (3.2.28) отсюда получаем

$$\begin{aligned} g_t(x) + R_3(x, y, t) = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ xg_t(y) + \int_0^x R_3(z, y, t) dz \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Интегрируем (3.2.32) по y :

$$\begin{aligned} yg_t(x) + \int_0^y R_3(x, z, t) dz = xg_t(y) + \\ + \int_0^x R_3(z, y, t) dz - \int_0^x R_3(z, 0, t) dz. \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

С учетом (3.2.28) и условия $g_t(0)=0$ имеем:

$$\int_0^x R_3(z, 0, t) dz \equiv 0.$$

Поэтому (3.2.33) можно переписать так:

$$\begin{aligned} yg_t(x) + \int_0^y R_3(x, z, t) dz = \\ = xg_t(y) + \int_0^x R_3(z, y, t) dz. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Полагая $y=y_0=T$, в области

$$(T/2+t)^2 + (T/2+x)^2 \leq T^2 \quad (3.2.35)$$

получаем

$$\begin{aligned} g_t(x) = \frac{g_t(y_0)}{y_0} x + \frac{1}{y_0} \int_0^x R_3(z, y_0, t) dz - \\ - \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} R_3(x, z, t) dz. \end{aligned}$$

Так как в области (3.2.35) при $t = -T/2$ $x \in [-3T/2, T/2]$, то

$$g_t(x) = A_t x + R_4(x, t), \quad (3.2.36)$$

$$A_t = g_t(y_0)/y_0, \quad |R_4(x, t)| \leq C_9 \varepsilon = 30C_8 \varepsilon.$$

Поскольку, согласно нашим обозначениям,

$$\begin{aligned} g_t(x) &= \varphi_{1,t}^*(x) = \varphi_{1,t}(x) - \varphi_{1,t}(0) = \\ &= \psi_1(x+t) - \psi_1(x) - \psi_1(t) + \psi_1(0) \end{aligned}$$

и $\psi_1(0)=0$, то отсюда и из (3.2.36) получаем, что

$$\psi_1(x+t) - \psi_1(x) - \psi_1(t) = A_t x + R_4(x, t). \quad (3.2.37)$$

Левая часть (3.2.37) симметрична относительно t и x , поэтому

$$A_t x = A_x t + R_4(t, x) - R_4(x, t).$$

Фиксируя $x = -x_0 = T$, имеем

$$A_t = A_* t + R_5(t), \quad (-\sqrt{3}-1)T/2 \leq t \leq (\sqrt{3}-1)T/2,$$

$$A_* = A_{x_0}/x_0, \quad R_5(t) = (R_4(t, x_0) - R_4(x_0, t))/x_0.$$

Таким образом, (3.2.37) можно переписать так:

$$\psi_1(x+t) - \psi_1(x) - \psi_1(t) = A_* tx + xR_5(t) + R_4(x, t). \quad (3.2.38)$$

Обозначив $R_6(x, t) = xR_5(t) + R_4(x, t)$, легко убедиться, что в области

$$-T \leq x \leq 0, \quad (-\sqrt{3}-1)T/2 \leq t \leq (\sqrt{3}-1)T/2 \quad (3.2.39)$$

справедлива оценка

$$|R_6(x, t)| \leq 7C_5 \varepsilon.$$

Заметим, что уравнение (3.2.38) аналогично уравнению (3.2.28). Интегрируя его по x , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^x \psi_1(u+t) du - \int_0^x \psi_1(u) du &= \\ &= x\psi_1(t) + A_* tx^2/2 + \int_0^x R_6(u, t) du. \end{aligned}$$

Поскольку по аналогии с (3.2.30) левая часть этого уравнения почти всюду дифференцируема по t , то

$$\begin{aligned} \psi_1(x+t) - \psi_1(t) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ x\psi_1(t) + A_* tx^2/2 + \int_0^x R_6(u, t) du \right\}. \end{aligned}$$

В силу (3.2.38) отсюда получаем

$$\begin{aligned} \psi_1(x) + A_* tx + R_6(x, t) &= \\ &= A_* x^2/2 + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ x\psi_1(t) + \int_0^x R_6(u, t) du \right\}. \quad (3.2.40) \end{aligned}$$

Выражение (3.2.40) интегрируем по t :

$$\begin{aligned} t\psi_1(x) + A_* t^2 x/2 + \int_0^t R_6(x, u) du &= \\ &= A_* tx^2/2 + x\psi_1(t) + \int_0^x R_6(u, t) du - \int_0^x R_6(u, 0) du. \end{aligned}$$

Согласно (3.2.38), при $t=0$ $R_6(x, 0) \equiv 0$. Таким образом, в области (3.2.39)

$$\psi_1(x) = A_* x^2/2 + (\psi_1(t)/t - A_* t/2)x + R_7(x, t),$$

$$R_7(x, t) = \frac{1}{t} \int_0^x R_6(u, t) du - \frac{1}{t} \int_0^t R_6(x, u) du.$$

Полагая $t=t_0 = -T/2$, имеем

$$\psi_1(x) = Ax^2 + Bx + R_7(x, t_0), \quad (3.2.41)$$

$$A = A_*/2, \quad B = \psi_1(t_0)/t_0 - A_* t_0/2,$$

$$|R_7(x, t_0)| \leq 3C_5 \varepsilon \quad \text{при} \quad -T \leq x \leq 0.$$

Убедимся, что разложение (3.2.41) верно и при $0 \leq x \leq T$. Действительно, согласно принятым обозначениям

$$\begin{aligned} A &= A_*/2 = A_{x_0}/(2x_0) = g_{x_0}(y_0)/(2x_0 y_0) = \\ &= \varphi_{1, x_0}(y_0)/(2x_0 y_0) = (\varphi_{1, x_0}(y_0) - \varphi_{1, x_0}(0))/(2x_0 y_0) = \\ &= (\psi_1(x_0 + y_0) - \psi_1(y_0) - \psi_1(x_0))/(2x_0 y_0). \end{aligned}$$

При $y_0 = T$, $x_0 = -T$, т. е. в случае $-T \leq x \leq 0$ имеем:

$$\begin{aligned} A &= (-\psi_1(T) - \psi_1(-T))/(2x_0 y_0) = \\ &= (-2 \ln |f_1(T)| - i \arg f_1(T) - i \arg f_1(-T))/(-2T^2) = \\ &= (2 \ln |f_1(T)| + i \arg f_1(T) + i \arg \bar{f}_1(T))/(2T^2) = \\ &= T^{-2} \ln |f_1(T)|. \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Здесь и далее будем пользоваться обозначениями:

$$f_j(t) = f_{X_j}(t), \quad j=1, 2; \quad \bar{Z} = \operatorname{Re} Z - i \operatorname{Im} Z.$$

Исходя из уравнения (3.2.34), которое выполняется в области (3.2.29), и фиксируя значение $y=y_0=T$, мы, таким образом, перешли к области (3.2.35) и получили (3.2.41) со значением A , определяемым в (3.2.42) при $x_0=-T$, и значением B при $t_0=-T/2$

$$\begin{aligned} B &= -2\psi_1(-T/2)/T + A_* T/4 = -2T^{-1} \ln |f_1(T/2)| + \\ &+ A_* T/4 + 2i \arg f_1(T/2)/T. \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

Разложение (3.2.41) для $x \in [0, T]$ получается путем выбора $y = y_0 = -T$, а затем $x_0 = -y_0 = T$, $t_0 = T/2$. При этом значение величины A не изменится, так как в последнем случае

$$\begin{aligned} A &= (\psi_1(x_0 + y_0) - \psi_1(y_0) - \psi_1(x_0))/(2x_0 y_0) = \\ &= -(-\psi_1(-T) - \psi_1(T))/(2T^2), \end{aligned}$$

т. е. получаем (3.2.42).

Рассмотрим величину B при значении $t_0 = T/2$:

$$\begin{aligned} B &= 2\psi_1(T/2)/T - A_* T/4 = 2T^{-1} \ln |f_1(T/2)| - \\ &\quad - A_* T/4 + 2i \arg f_1(T/2)/T. \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

Мы видим, что значение величины B при $t_0 = -T/2$ отличается от значения B при $t_0 = T/2$ лишь действительной частью (ср. формулы (3.2.43) и (3.2.44)). Убедимся, что эта часть пренебрежимо мала. А именно, что

$$|\operatorname{Re} Bx| \leq 3C_9 \varepsilon \quad \text{при} \quad |x| \leq T. \quad (3.2.45)$$

Действительно, согласно (3.2.41),

$$|f_1(x)| = \exp \{ Ax^2 + x \operatorname{Re} B + \operatorname{Re} R_7(x, t_0) \},$$

откуда в силу $|f_1(x)| = |f_1(-x)|$ получаем:

$$x \operatorname{Re} B + \operatorname{Re} R_7(x, t_0) = -x \operatorname{Re} B + \operatorname{Re} R_7(-x, t_0),$$

что полностью доказывает (3.2.45).

Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= Ax^2 + i \operatorname{Im} Bx + R_8(x), \\ |R_8(x)| &\leq C_{10} \varepsilon = 6C_9 \varepsilon, \quad |x| \leq T. \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Так как

$$|\exp z - 1| \leq |z| \max(1, \exp \operatorname{Re} z),$$

то из (3.2.46) получаем:

$$\begin{aligned} &|f_1(x) - \exp(Ax^2 + i \operatorname{Im} Bx)| = \\ &= \exp(Ax^2) |1 - \exp(\ln f_1(x) - Ax^2 - i \operatorname{Im} Bx)| \leq \\ &\leq \exp(Ax^2) |\ln f_1(x) - Ax^2 - i \operatorname{Im} Bx| \times \\ &\quad \times \max(1, \exp(-Ax^2 + \operatorname{Re} \ln f_1(x))) \leq \\ &\leq |R_8(x)| \max(\exp Ax^2, |f_1(x)|) \leq C_{10} \varepsilon \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

при $|x| \leq T$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.2.3. I. Из условия (λ, ε) -независимости статистик $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ получаем, что

$$\begin{aligned} f_1(t_1 + t_2)f_2(t_1 - t_2) &= \\ &= f_1(t_1)f_2(t_1)f_1(t_2)f_2(-t_2) + r(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

$$|r(t_1, t_2)| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad t_1^2 + t_2^2 \leq 1/\varepsilon^2. \quad (3.2.49)$$

В (3.2.48) положив сначала $t_1 = t_2 = t$, а затем $t_1 = -t_2 = t$, получим

$$f_1(2t) = f_1^2(t)|f_2(t)|^2 + r(t, t), \quad (3.2.50)$$

$$f_2(2t) = |f_1(t)|^2 f_2^2(t) + r(t, -t). \quad (3.2.51)$$

Подставляя в (3.2.50) и (3.2.51) вместо t величину $(-t)$ и перемножая соответственно полученные уравнения с исходными (3.2.50) и (3.2.51), получаем, что при $|t| \leq (\varepsilon\sqrt{2})^{-1}$

$$|f_1(2t)|^2 = |f_1(t)|^4 |f_2(t)|^4 + r_1(t),$$

$$|f_2(2t)|^2 = |f_1(t)|^4 |f_2(t)|^4 + r_2(t),$$

$$|r_1(t)| \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2, \quad |r_2(t)| \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Следовательно, при $|t| \leq \sqrt{2}/\varepsilon$

$$|f_1(t)|^2 = |f_2(t)|^2 - r_2(t/2) + r_1(t/2),$$

т. е. при $|t| \leq \sqrt{2}/\varepsilon$

$$|f_1(t)|^2 = |f_2(t)|^2 + r_3(t), \quad |r_3(t)| \leq \varepsilon(4 + \varepsilon). \quad (3.2.52)$$

Из (3.2.15) и (3.2.52) следует, что если $s_1 = \min(s_1, s_2) \leq 1/\varepsilon$, то

$$|f_2(s_1)| = \sqrt{p^2 - r_3(s_1)}. \quad (3.2.53)$$

II. Если

$$s = \min(s_1, s_2) \geq 1/\varepsilon,$$

то утверждение теоремы следует из леммы очевидным образом. Если же $s = s_1 < 1/\varepsilon$, то полезно ввести следующие обозначения:

$$f_{j,s}(t) = f_j(st), \quad j = 1, 2. \quad (3.2.54)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} &\inf\{|t| : |f_{1,s}(t)| = p\} = \\ &= \frac{1}{s} \inf\{|t| : |f_1(t)| = p\} = s_1/s = 1 \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

и учитывая (3.2.53) относительно интервала $|t| \leq 1$, применяем лемму. Получаем, что при $|t| \leq 1, j=1, 2$,

$$|f_{j,s}(t) - \exp\{t^2 \ln |f_{j,s}(1)|\}| \leq C_{11} \varepsilon / p^4. \quad (3.2.56)$$

III. Поскольку соотношения типа (3.2.50) и (3.2.51) для функций $f_{j,s}(t)$ верны в интервале $|t| \leq 1/(\varepsilon s)$, то в силу (3.2.56) остается рассмотреть область $1 \leq |t| \leq 1/(\varepsilon s)$.

Подставляя (3.2.52) в (3.2.50), получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} f_{1,s}(2t) &= f_{1,s}^3(t) f_{1,s}(-t) + r_4(t), \quad |t| \leq (s\varepsilon\sqrt{2})^{-1}, \\ |r_4(t)| &\leq \varepsilon(4 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Согласно следствию 3.1.3, имеем:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq |t| \leq (s\varepsilon\sqrt{2})^{-1}} |f_{1,s}(t) - \exp\{t^2 \ln |f_{1,s}(1)|\}| &\leq \\ &\leq -C_{12} \varepsilon p^{-4} \ln^{-1} |f_{1,s}(1)|. \end{aligned}$$

В силу (3.2.55) $|f_{1,s}(1)| = p$, поэтому

$$|f_{1,s}(t) - \exp\{t^2 \ln |f_{1,s}(1)|\}| \leq -C_{12} \varepsilon p^{-4} \ln^{-1} p, \quad (3.2.57)$$

$$1 \leq |t| \leq (s\varepsilon\sqrt{2})^{-1}. \quad (3.2.58)$$

Рассуждения относительно функции $f_{2,s}(t)$ аналогичны, так как в силу (3.2.53)

$$|f_{2,s}(1)| = \sqrt{p^2 - r_3(s)}, \quad p/2 \leq |f_{2,s}(1)| \leq 3p/2.$$

Объединяя (3.2.56)–(3.2.58) и вспоминая обозначение (3.2.54), получаем, что при $|u| < 1/(\varepsilon\sqrt{2})$

$$|f_j(u) - \exp\{u^2 s^{-2} \ln |f_j(s)|\}| \leq -C_{12} \varepsilon p^{-4} \ln^{-1} p.$$

IV. Убедимся, что порядок по ε в (3.2.16) неулучшаем. С этой целью определим

$$f(t) = f_{X_1}(t) = f_{X_2}(t) = (1 - \varepsilon) e^{-t^2/2} + \varepsilon e^{-2t^2} \quad (3.2.59)$$

предположим, что X_1, X_2 – независимые случайные величины. Как уже отмечалось, при независимости X_1, X_2 (λ, ε) – независимость статистик $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ означает, что

$$\begin{aligned} &f_{X_1}(t_1 + t_2) f_{X_2}(t_1 - t_2) = \\ &= f_{X_1}(t_1) f_{X_1}(t_2) f_{X_2}(t_1) f_{X_2}(-t_2) + r(t_1, t_2), \\ &|r(t_1, t_2)| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad t_1^2 + t_2^2 \leq 1/\varepsilon^2. \end{aligned}$$

В силу (3.2.59) это условие можно записать так:

$$f(t_1 + t_2)f(t_1 - t_2) = f^2(t_1)f^2(t_2) + r(t_1, t_2). \quad (3.2.60)$$

Непосредственной подстановкой (3.2.59) в (3.2.60) можно убедиться, что действительно

$$|r(t_1, t_2)| \leq c^* \varepsilon \quad \text{при} \quad t_1^2 + t_2^2 \leq 1/\varepsilon^2.$$

С другой стороны, можно подсчитать константу c_* такую, что

$$\inf_{\sigma} \lambda(f(t), \exp(-\sigma^2 t^2/2)) \geq c_* \varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 3.3. Об интервале, в котором характеристическая функция (х. ф.) не имеет нулей

В предыдущих параграфах мы убедились, что обычно решение характеристизационной задачи сводится к решению соответствующего функционального уравнения, причем зачастую последнее является уравнением для характеристических функций. При характеристизации нормального закона, например, такое уравнение достаточно рассмотреть в интервале $[-\delta, \delta]$ при некоторой произвольной положительной константе δ . В самом деле, известно (см. [30, с. 34]), что если характеристическая функция $f(t)$ удовлетворяет соотношению

$$f(t) = \exp(-ct^2) \quad \text{для} \quad t = t_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\ t_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

а $c \geq 0$ — некоторая постоянная, то $f(t) \equiv \exp(-ct^2)$ на всей оси. Поэтому из соображений возможности логарифмирования и деления константа $\delta > 0$ подбирается так, чтобы

$$f(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [-\delta, \delta].$$

При исследовании возмущенных функциональных уравнений картина существенно меняется. Во многих из них уже во весь рост встает проблема оценки длины интервала, в котором характеристическая функция не обращается в нуль, а точнее, проблема оценки величины

$$q(\varepsilon, f_*) = \sup \{ \tau : |f_*(t)| > \varepsilon \quad \text{при} \quad |t| \leq \tau \} \quad (3.3.1)$$

при $\varepsilon \downarrow 0$, где f_ε — характеристическая функция. С величиной q мы уже сталкивались, например, при доказательстве теоремы 2.4.1. В ней рассматривалась устойчивость характеристики нормального закона свойством постоянства регрессии одной линейной статистики на другую и имело место дифференциальное уравнение (2.4.2), которое удобно записать в следующей форме:

$$f'_r(t) f_r(\beta t) = \alpha f'_r(\beta t) f_r(t) + r(t), \quad (3.3.2)$$

$$\alpha\beta = 1, \quad |\beta| \leq 1, \quad |r(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}^1. \quad (3.3.3)$$

Мы также видели, что от оценки снизу величины $q(\varepsilon, f_r)$ непосредственно зависит общая оценка количественной устойчивости в рассматриваемой возмущенной характеристической модели. В модели, описываемой теоремой 2.4.1, таковой является оценка

$$q(\varepsilon, f_r) \geq C_1 \sqrt{\ln 1/\varepsilon}. \quad (3.3.4)$$

Довольно простой пример, рассматриваемый в теореме 3.3.1, показывает, что оценка (3.3.4) по порядку является неулучшаемой. И хотя в этой теореме рассматривается лишь характеристическое уравнение (3.3.2), таким же способом нетрудно убедиться, что (3.3.4) имеет место и в ряде других теорем устойчивости характеристик нормального закона.

Теорема 3.3.1. *Существуют характеристическая функция $f_r^*(t)$ и функция $r(t)$, удовлетворяющие уравнению (3.3.2) и условиям (3.3.3), такие, что длина интервала $q(0, f_r^*)$, в котором $f_r^*(t)$ не обращается в нуль, оценивается следующим образом:*

$$q(0, f_r^*) \leq C_2 \sqrt{\ln 1/\varepsilon}. \quad (3.3.5)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию распределения

$$F_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon) \Phi(x) + \varepsilon E_a(x),$$

где $\Phi(x)$ — стандартный нормальный закон, а $E_a(x)$ — функция распределения случайной величины, вырожденной в точке a , причем

$$a = a(\varepsilon) = \pi / \sqrt{2 \ln(1/\varepsilon - 1)}.$$

Убедимся, что соответствующая $F_\varepsilon(x)$ характеристическая функция $f_\varepsilon(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Поскольку

$$f_\varepsilon(t) = (1 - \varepsilon) \exp(-t^2/2) + \varepsilon \exp(ita), \quad (3.3.6)$$

то легко проверить, что $f_{\varepsilon}(t_0)=0$, если

$$t_0 = \sqrt{2 \ln(1/\varepsilon - 1)}.$$

Это в свою очередь означает, что

$$q(0, f_{\varepsilon}) \leq t_0.$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается оценить член $r(t)$ в уравнении (3.3.2). Это делается непосредственной подстановкой (3.3.6) в (3.3.2). Действительно,

$$\begin{aligned} r(t) = & i(1-\varepsilon)\varepsilon a \exp(ita - \beta^2 t^2/2) + (1-\alpha)i\varepsilon^2 a \exp((1+\beta)ita) + \\ & + \varepsilon(1-\varepsilon)t(\exp(ita - \beta^2 t^2/2) - \exp(i\beta ta - t^2/2)) - \\ & - i(1-\varepsilon)\varepsilon \alpha a \exp(i\beta ta - t^2/2). \end{aligned}$$

Следовательно, при малых $\varepsilon > 0$

$$|r(t)| \leq (2 + 1/|\beta|) \exp(-1/2) \cdot \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Оценка типа (3.3.4) усложняется, если из решений основного функционального уравнения приходится выделять решения, имеющие вероятностный смысл. Рассмотрим в качестве примера задачу устойчивости характеристики нормального закона свойством равномерности двумерных векторов (L_1, L_2) и (L_3, L_4) , где $L_j (j=1, \dots, 4)$ — некоторые линейные статистики. Здесь, однако, необходимо кратко напомнить историю рассматриваемого вопроса.

Пусть $X_1, \dots, X_k$ — независимые случайные величины. Согласно теореме Скитовича — Дармуа, если линейные статистики

$$L_1 = \sum_{j=1}^k a_j X_j, \quad L_2 = \sum_{j=1}^k b_j X_j \quad (3.3.7)$$

независимы, то те случайные величины X_j , для которых $a_j b_j \neq 0$, нормальны.

Введя дополнительно в рассмотрение две линейные статистики

$$L_3 = \sum_{j=1}^k c_j X_j, \quad L_4 = \sum_{j=1}^k d_j X_j, \quad (3.3.8)$$

можно получить более общий результат.

Теорема Л. Б. Клебанова [115]. Если случайные векторы (L_1, L_2) и (L_3, L_4) равномерно распределены, то те случайные величины X_j , для которых

$$\begin{vmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{vmatrix} \neq 0, \quad l=1, \dots, k, \quad (3.3.9)$$

нормальны.

Убедимся, что эта теорема является обобщением теоремы Скитовича — Дармуа. В самом деле, рассмотрим независимые случайные величины $X'_1, \dots, X'_k$ такие, что случайные векторы $(X'_1, \dots, X'_k)$ и $(X_1, \dots, X_k)$ являются независимыми и равномерно распределенными. Тогда условие независимости L_1 и L_2 и условие равномерности (L_1, L_2) и (L_1, L'_2) , где

$$L'_2 = \sum_{j=1}^k b_j X'_j,$$

являются эквивалентными, что и требовалось доказать.

Устойчивость теоремы Клебанова изучалась в работе [116]. И хотя в ней существенно используется оценка снизу величины $q(\varepsilon)$, это вовсе не означает, что она занимает центральное место в доказательстве нижеследующей теоремы 3.3.2. В нем важную роль играют усреднение по Соболеву и некоторые проблемы, связанные с использованием этого усреднения.

Известно, что если

$$\omega_\delta(u) = \begin{cases} I_\delta \exp(\delta^2/(u^2 - \delta^2)) & \text{для } |u| < \delta, \\ 0 & \text{для } |u| \geq \delta, \end{cases}$$

$$I_\delta = 1 / \int_{-\delta}^{\delta} \exp(\delta^2/(u^2 - \delta^2)) du,$$

то для любой непрерывной функции $\psi(t)$ функция

$$\hat{\psi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t + \tau) \omega_\delta(\tau) d\tau$$

является бесконечно дифференцируемой и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\psi}(t) = \psi(t). \quad (3.3.10)$$

Для наших целей необходимо построить оценку скорости сходимости в (3.3.10). Таковой является следующая элементарная оценка:

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}(t) - \psi(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(t+\tau) - \psi(t)) \omega_{\delta}(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \sup_{|\tau| \leq \delta} |\psi(t+\tau) - \psi(t)|. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Здесь уместно отметить, что существование абсолютных моментов первого порядка в условиях теоремы 3.3.2 требуется в основном лишь для оценки модуля непрерывности в (3.3.11) и упрощения формулировки основного результата.

Напомним, что случайные величины X и Y называются (λ, ε) -независимыми, если они удовлетворяют неравенству (3.2.14). Введем следующие обозначения. Пусть L_1 и L_2 определены согласно (3.3.7). Для некоторого целого n ($1 \leq n \leq k$) положим

$$K = K(n) = \{j: 1 \leq j \leq k, \exists x_j(a_n, b_n) = x_j(a_j, b_j)\},$$

$$\Lambda = \sum_{j \in K(n)} x_j X_j$$

и пусть $s = s(n)$ — число элементов множества K .

Теорема 3.3.2 (см. [116]). Пусть $X_1, \dots, X_k$ — независимые случайные величины, причем

$$E|X_j| \leq M < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Пусть, кроме того, линейные формы $L_1, L_2, \bar{L}_3$ и $\bar{L}_4$ определены согласно (3.3.7) и (3.3.8) и для некоторого $j = n$ соотношения (3.3.9) выполняются для любого $l, l = 1, \dots, k$. Если случайные векторы (L_1, L_2) и (L_3, L_4) (λ, ε) -равнораспределены, то существует величина C , зависящая лишь от коэффициентов линейных форм и от M , такая, что

$$\lambda(\Lambda, N) \leq C (\ln 1/\varepsilon)^{-\alpha}, \quad (3.3.12)$$

где N — некоторая нормальная случайная величина, а

$$\alpha = 2^{-(2k-s(n)-1)} \min \left(\frac{1}{s(n)}, \frac{1}{2} \right) / (2k-s(n)-1). \quad (3.3.13)$$

Доказательство. Из условия (λ, ε) -равнораспределенности (L_1, L_2) и (L_3, L_4) имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n (a_j t_1 + b_j t_2) X_j \right\} = \\ & = \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n (c_j t_1 + d_j t_2) X_j \right\} + r(t_1, t_2), \end{aligned}$$

где

$$|r(t_1, t_2)| \leq 2\varepsilon \quad \text{при} \quad t_1^2 + t_2^2 \leq \varepsilon^{-2}.$$

Из независимости $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$ следует, что

$$\prod_{j=1}^k f_j(a_j t_1 + b_j t_2) = \prod_{j=1}^k f_j(c_j t_1 + d_j t_2) + r(t_1, t_2), \quad (3.3.14)$$

где через $f_j(u)$ обозначена характеристическая функция $f_{\tilde{X}_j}(u) = \mathbb{E} \exp(iuX_j)$. Определим

$$\begin{aligned} q = q(\varepsilon) = \min \{ \varepsilon^{-w}, \sup \{ \tau : |f_j(c_j t_1 + d_j t_2)| \geq \varepsilon^{\beta/k}, \\ |f_j(a_j t_1 + b_j t_2)| \geq \varepsilon^{\beta/k}, \quad \forall j, j=1, \dots, k \text{ при } |t| \leq \tau \} \}, \end{aligned}$$

где w, β — некоторые положительные постоянные, определяемые ниже, $t = (t_1, t_2)$. Обозначив

$$\psi_j(u) = \ln f_j(u), \quad j=1, 2, \dots, k,$$

из (3.3.14) получим, что

$$\sum_{j=1}^k \psi_j(a_j t_1 + b_j t_2) - \sum_{j=1}^k \psi_j(c_j t_1 + d_j t_2) = R(t_1, t_2), \quad (3.3.15)$$

при $|t| \leq q$. Здесь

$$R(t_1, t_2) = \ln \left(1 + \frac{r(t_1, t_2)}{\prod_{j=1}^k f_j(c_j t_1 + d_j t_2)} \right).$$

Нетрудно заметить, что

$$|R(t_1, t_2)| \leq 4\varepsilon^{1-\beta} \quad (3.3.16)$$

при $|t| \leq q$, $t = (t_1, t_2)$.

Пусть, далее, ξ_j — сумма функций,

$$\xi_j(a_j t_1 + b_j t_2) = \psi_{j_1}(a_{j_1} t_1 + b_{j_1} t_2) + \dots + \psi_{j_l}(a_{j_l} t_1 + b_{j_l} t_2),$$

для которых векторы (a_j, b_j) , (a_{j_1}, b_{j_1}) , ..., (a_{j_l}, b_{j_l}) коллинеарны. Изменяя, если нужно, нумерацию индексов и при $j = k+1, \dots, 2k$ полагая

$$\xi_j(a_j t_1 + b_j t_2) = -\psi_j(c_{j-k} t_1 + d_{j-k} t_2),$$

можно привести уравнение (3.3.15) к виду

$$\sum_{j=1}^{\rho} \xi_j(a_j t_1 + b_j t_2) = R(t_1, t_2), \quad (3.3.17)$$

$$\rho = 2k - s.$$

В силу определения ξ_j и условия (3.3.9) в уравнении (3.3.17) среди векторов $\{(a_j, b_j)\}$ нет ни одной коллинеарной пары. Очевидно, предположение $n = 1$ не умаляет общности рассуждений.

В таком случае легко заметить, что

$$\xi_1(u) = \ln f_{\Lambda}(u). \quad (3.3.18)$$

Обозначим

$$\tau_1 = a_1 t_1 + b_1 t_2, \quad \tau_2 = a_2 t_1 + b_2 t_2.$$

Тогда (3.3.17) примет вид

$$\xi_1(\tau_1) + \xi_2(\tau_2) + \sum_{j=3}^{\rho} \xi_j(\alpha_j \tau_1 + \beta_j \tau_2) = R^*(\tau_1, \tau_2). \quad (3.3.19)$$

Здесь α_j, β_j — коэффициенты, определяемые по a_l, b_l ($l=1, \dots, \rho$), а соотношение (3.3.19) имеет место при $|(\tau_1, \tau_2)| \leq Cq$, причем

$$|R^*(\tau_1, \tau_2)| \leq C \varepsilon^{1-\beta}. \quad (3.3.20)$$

Напомним, что одним и тем же символом C мы обозначаем различные величины, зависящие лишь от M, k и коэффициентов a_j, b_j, c_j, d_j ($j=1, 2, \dots, k$). Отметим дополнительно, что среди векторов $(1, 0), (0, 1), (\alpha_j, \beta_j), j=3, \dots, \rho$, нет ни одной пары коллинеарных, поэтому

$$\alpha_j \neq 0, \beta_j \neq 0, \quad j=3, \dots, \rho.$$

Обозначим

$$\xi_{1,j}(u) = \xi_j(\alpha_j u), \quad j = 3, \dots, p.$$

Тогда уравнение (3.3.19) запишется в виде

$$\xi_1(\tau_1) + \xi_2(\tau_2) + \sum_{j=3}^p \xi_{1,j} \left(\tau_1 + \frac{\beta_j}{\alpha_j} \tau_2 \right) = R^*(\tau_1, \tau_2).$$

Умножив обе части последнего соотношения на $\omega_{\delta_1}(\tau_1 - u_1)$ ($|u_1| \leq Cq$) и проинтегрировав по τ_1 , получим

$$\hat{\xi}_1(u_1) + \xi_2(\tau_2) + \sum_{j=3}^p \hat{\xi}_{1,j} \left(u_1 + \frac{\beta_j}{\alpha_j} \tau_2 \right) = R_{(1)}^*(u_1, \tau_2), \quad (3.3.21)$$

где знак $\hat{}$ означает усреднение по Соболеву, а

$$R_{(1)}^*(u_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R^*(\tau_1, \tau_2) \omega_{\delta_1}(\tau_1 - u_1) d\tau_1.$$

Положим теперь

$$\xi_{2,j}(u) = \hat{\xi}_{1,j} \left(u + \frac{\beta_j}{\alpha_j} u \right).$$

Уравнение (3.3.21) примет вид

$$\hat{\xi}_1(u_1) + \xi_2(\tau_2) + \sum_{j=3}^p \xi_{2,j} \left(\tau_2 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} u_1 \right) = R_{(1)}^*(u_1, \tau_2).$$

Снова умножим обе части полученного соотношения на $\omega_{\delta_2}(\tau_2 - u_2)$ ($|u_2| \leq Cq$) и проинтегрируем по τ_2 . Найдем

$$\hat{\xi}_1(u_1) + \hat{\xi}_2(u_2) + \sum_{j=3}^p \hat{\xi}_{2,j} \left(u_2 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} u_1 \right) = R_{(2)}^*(u_1, u_2). \quad (3.3.22)$$

В уравнении (3.3.22) одним и тем же знаком $\hat{}$ обозначено как усреднение по Соболеву, соответствующее ядру ω_{δ_2} , так и усреднение, соответствующее ядру ω_{δ_1} , но для дальнейших рассуждений это не имеет значения. При этом

$$R_{(2)}^*(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{(1)}^*(u_1, \tau_2) \omega_{\delta_2}(\tau_2 - u_2) d\tau_2.$$

Отметим теперь, что все функции, входящие в уравнение (3.3.22), имеют производные любого порядка. Положив

$$\xi_{3,j}(u) = \hat{\xi}_{2,j} \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j} u \right),$$

запишем (3.3.22) в следующем виде

$$\hat{\xi}_1(u_1) + \hat{\xi}_2(u_2) + \sum_{j=3}^p \xi_{3,j}(u_1 + \gamma_j u_2) = R_{(2)}^{(*)}(u_1, u_2), \quad (3.3.23)$$

где

$$\gamma_j = \frac{\beta_j}{\alpha_j}, \quad j = 3, \dots, p.$$

Дифференцируя обе части (3.3.23) по u_1 ($|u_1| \leq Cq$), найдем

$$\hat{\xi}'_1(u_1) + \sum_{j=3}^p \xi_{3,j}'(u_1 + \gamma_j u_2) = R_1(u_1, u_2), \quad (3.3.24)$$

где

$$R_1(u_1, u_2) = \frac{\partial}{\partial u_1} R_{(2)}^{(*)}(u_1, u_2).$$

Так как

$$\frac{d^l}{du^l} \omega_\delta(u) = \frac{1}{\delta^{l+1}} \omega_1^{(l)}(u/\delta), \quad (3.3.25)$$

то ясно, что

$$|R_1(u_1, u_2)| \leq C \varepsilon^{1-\beta}/\delta_1. \quad (3.3.26)$$

Положив в (3.3.24) $u_3 = u_1 + \gamma_3 u_2$ и продифференцировав обе части полученного соотношения по u_1 при фиксированном значении u_3 , получим:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1''(u_1) + \sum_{j=4}^p (1 - \gamma_j/\gamma_3) \xi_{3,j}'((1 - \gamma_j/\gamma_3)u_1 + (\gamma_j/\gamma_3)u_3) = \\ = R_2(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

Полагая $\delta_2 \geq \delta_1$, находим, что

$$|R_2(u_1, u_2)| \leq C \varepsilon^{-1\beta}/\delta_1^2.$$

Действуя далее аналогичным образом (т. е. выполняя соответствующие замены переменных и дифференцируя по u_1), придем к соотношению

$$\hat{\xi}_1^{(p-1)}(u_1) = R_{p-1}(u_1, u_p), \quad (3.3.28)$$

где

$$|R_{\rho-1}(u_1, u_\rho)| \leq C \varepsilon^{1-\beta} / \delta_1^{\beta-1}$$

при $|u_1| \leq Cq$, $|u_\rho| \leq Cq$. Соотношение (3.3.27) показывает, что существует полином $P(u)$ степени не выше $\rho-1$,

$$\deg P(u) \leq \rho-1 = 2k-s-1,$$

для которого при $\delta_1 < 1$, $|u| \leq Cq$

$$|\hat{\xi}_1(u) - P(u)| \leq C \varepsilon^{1-\beta} q^{2k-s-1} / \delta_1^{2k-s-1}.$$

С другой стороны,

$$|\hat{\xi}_1(u) - \xi_1(u)| \leq C \delta_1 / \varepsilon^{s\beta/k}.$$

Поэтому при $|u| \leq Cq$ справедливо неравенство

$$|\xi_1(u) - P(u)| \leq C \{ \varepsilon^{1-\beta} q^{2k-s-1} / \delta_1^{2k-s-1} + \delta_1 / \varepsilon^{s\beta/k} \}.$$

Выбирая здесь

$$\delta_1 = \varepsilon^{(1-\beta+s\beta/k)/(2k-s)},$$

видим, что в области $|u| \leq Cq$

$$|\hat{\xi}_1(u) - P(u)| \leq C \varepsilon^\theta q^{2k-s-1},$$

где θ — некоторая положительная величина, зависящая лишь от k , β и s .

Теперь нетрудно оценить $|f_\Lambda(u) - \exp P(u)|$. Действительно, так как

$$|\exp \eta - 1| \leq |\eta| \max \{ 1, \exp \operatorname{Re} \eta \},$$

то при $|u| \leq Cq$ имеем:

$$\begin{aligned} |f_\Lambda(u) - \exp P(u)| &\leq |\xi_1(u) - P(u)| \exp \left(\operatorname{Re} (\xi_1(u) - P(u)) \right) \leq \\ &\leq C \varepsilon^\theta q^{2k-s-1}. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Перейдем теперь к построению оценки снизу для $q = q(\varepsilon)$.

Если H_* — максимальное по модулю значение коэффициента полинома $P(u)$, то, положив $H^* = \rho H_*$ и обозначив

$$Q(u) = \exp \{ -H^* u^{\rho-1} \} - C \varepsilon^\theta q^{\rho-1},$$

из (3.3.29) при $u \in (1, q]$ получаем, что

$$|f_\Lambda(u)| \geq Q(u). \quad (3.3.30)$$

Неравенство (3.3.30) аналогично неравенству (2.5.22), уже рассмотренному в гл. 2. Там же отмечалось, что предположение о выполнимости (3.3.20) на всем интервале $[0, q]$ не умаляет общности рассуждений и что величина H_* , а следовательно, и H^* , может быть оценена величиной, зависящей лишь от M и k . Если показать, что для некоторого $q_* = q_*(\varepsilon)$

$$Q(u) \geq \varepsilon^{\beta/k} \quad \text{при} \quad 0 \leq u \leq q_*, \quad (3.3.31)$$

то в случае $q(\varepsilon) < \varepsilon^{-w}$, очевидно,

$$q(\varepsilon) = \sup \{ \tau : |f_j(a_j t_1 + b_j t_2)| \geq \varepsilon^{\beta/k}, |f_j(c_j t_1 + d_j t_2)| \geq \varepsilon^{\beta/k}, \forall j, j=1, 2, \dots, k \text{ при } |t| \leq \tau \} \geq c q_*^{1/s}(\varepsilon), \quad (3.3.32)$$

где c — некоторая величина, зависящая лишь от $a_j, b_j, c_j, d_j, j=1, \dots, k$.

Наша дальнейшая задача — найти такую положительную константу Ξ , чтобы

$$q_*(\varepsilon) = (\Xi \ln 1/\varepsilon)^{1/(p-1)}. \quad (3.3.33)$$

Из определения $Q(u)$ и (3.3.31) следует, что в этом случае Ξ должна удовлетворять неравенству

$$\exp \{ -H^* \Xi \ln 1/\varepsilon \} - C \varepsilon^{\theta + (1-p)w} \geq \varepsilon^{\beta/k},$$

т. е.

$$\varepsilon^{H^* \Xi} \geq C \varepsilon^{\theta + (1-p)w} + \varepsilon^{\beta/k}.$$

Для того чтобы выполнялось это соотношение, достаточно рассмотреть следующее неравенство:

$$H^* \Xi < \min \{ \beta/k, \theta + (1-p)w \}.$$

Наконец, величину β определим так, чтобы

$$1 - \beta > 0, \quad \theta > 0,$$

а w — как решение уравнения

$$\beta/k = \theta + (1-p)w.$$

Таким образом, мы доказали (3.3.32) при определении (3.3.33). Рассмотрение случая

$$q(\varepsilon) = \varepsilon^{-w}$$

тривиально.

Резюмируем доказанное. В области

$$|u| \leq (\Xi \ln 1/\varepsilon)^{1/(sp-s)} \quad (3.3.34)$$

справедлива оценка (3.3.29), где $P(u)$ — полином степени не выше $\rho-1$, $P(0)=0$. Пусть

$$P(u) = \sum_{j=1}^{\rho-1} d_j u^j.$$

В § 2.5 показано, что предположения

$$d_1=0, \operatorname{Re} d_2 = -1/2$$

не умаляют общности рассуждений. Согласно теореме Голлинского (см. § 2.5) об устойчивости теоремы Марцинкевича,

$$\max\{|\operatorname{Im} d_2|, |d_3|, \dots, |d_{\rho-1}|\} \leq C(\ln 1/\varepsilon)^{-\nu}, \quad (3.3.35)$$

$$\nu = 2^{1-\rho} \min(1/(s\rho-s), 1/(2\rho-2)).$$

Путем сужения области (3.3.34) до

$$|u| \leq (\Xi \ln 1/\varepsilon)^{z/(s\rho-s)}$$

на основе (3.3.29) и (3.3.35) z определим следующим образом:

$$z = \nu s(1 - 1/\rho).$$

Отсюда получаем (3.3.12) и (3.3.13).

Теорема доказана.

§ 3.4. Расширение интервала в регрессионной модели Е. Лукача

Целесообразность теорем восстановления (см. § 3.1) можно хорошо проиллюстрировать путем существенной переработки теоремы Е. Лукача [126, 127] об устойчивости характеристики равномерного распределения свойствами постоянства регрессии статистик S и T на Λ (определения этих статистик приводятся в (1.1.3) и (1.1.4)).

Теорема Е. Лукача. Пусть $X_1, \dots, X_k$ — независимые невырожденные равнораспределенные симметричные случайные величины с характеристической функцией $f(t)$. Пусть, кроме того, $[a, b]$ — интервал, на котором

$$k_1 \leq |f(t)| \leq k_2, \quad k_1 > 0, \quad k_2 < 1,$$

$$|f''(t) + f(t)| \geq k_3 > 0.$$

Если $EX_j^4 < \infty$, статистика T имеет постоянную регрессию на Λ , а S удовлетворяет следующему условию почти постоянства регрессии на Λ :

$$|E(S|\Lambda) - ES| \leq \varepsilon$$

почти всюду, то при $t \in [a, b]$

$$tf''(t) + 2f'(t) + tf(t) = \varepsilon_1(f''(t) + f(t)) + \varepsilon_2 f'(t), \quad (3.4.1)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — некоторые малые величины, зависящие лишь от $\varepsilon, t, k_1, k_2, k_3$.

(Мы привели уточненный вариант теоремы Лукача.)

Сделаем три замечания к сформулированной теореме. Во-первых, если зависимость оценки сверху для $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ от ε нетрудно найти в доказательстве из работ [126, 127], то из того же доказательства легко убедиться, что при нарушении хотя бы одного из ограничений на k_j такая оценка равна ∞ . Во-вторых, интервал $[a, b]$, конечно, очень узок. В-третьих, решение дифференциального уравнения (3.4.1) в [126, 127] не рассмотрено.

Далее предлагается решение проблем, возникающих из этих трех замечаний.

Пусть μ — некоторое расстояние, определенное на пространстве случайных величин.

Напомним (см. § 2.4), что случайная величина X имеет (μ, ε) -постоянную регрессию на случайную величину Y , если

$$\mu(E(X|Y), EX) \leq \varepsilon.$$

В качестве расстояния μ выберем следующую характеристику:

$$\mu(Z_1, Z_2) = E|Z_1 - Z_2|. \quad (3.4.2)$$

В § 2.4, в частности, проведено сравнение μ с расстоянием, используемым Е. Лукачем [126, 127].

Теорема 3.4.1 (см. [68]). Пусть $X_1, \dots, X_k$ — независимые равнораспределенные симметричные случайные величины. Если статистики S и T имеют (μ, ε) -постоянную регрессию на Λ и $EX_j^4 \leq M < 1$, то либо

$$\lambda(X_j, U) \leq C_1 (\ln \ln 1/\varepsilon) / \ln 1/\varepsilon, \quad (3.4.3)$$

где U — равномерная на $(-1, 1)$ случайная величина, либо X_j — почти вырождена, а именно

$$\lambda(X_j, E) \leq C_2 \varepsilon^w, \quad (3.4.4)$$

где E — вырожденная в нуле случайная величина, w — произвольная константа из интервала $(0, 1)$, C_1 зависит лишь от k , а C_2 — лишь от k и w .

Доказательство. Обозначив

$$r_1(t) = E S \exp(it\Lambda) - E S E \exp(it\Lambda), \quad (3.4.5)$$

получаем

$$\begin{aligned} r_1(t) &= E \left(E(S \exp(it\Lambda) | \Lambda) - \exp(it\Lambda) E S \right) = \\ &= E \left(\exp(it\Lambda) (E(S | \Lambda) - E S) \right). \end{aligned}$$

Отсюда согласно условиям теоремы

$$|r_1(t)| \leq \varepsilon, \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.4.6)$$

Заметим, что в обозначении (3.4.5)

$$E S \exp(it\Lambda) = D f^k(t) + r_1(t), \quad (3.4.7)$$

где

$$D = E S = 4E X_j^2 - 3(E X_j^2)^2,$$

$$f(t) = E \exp(itX_j).$$

Обозначив

$$r_2(t) = E T \exp(it\Lambda) - E T E \exp(it\Lambda),$$

аналогично соотношениям (3.4.6), (3.4.7) получаем, что

$$E T \exp(it\Lambda) = E T f^k(t) + r_2(t) = r_2(t), \quad (3.4.8)$$

$$|r_2(t)| \leq \varepsilon, \quad (3.4.9)$$

так как в силу симметричности рассматриваемых случайных величин

$$E T = 0.$$

Из (3.4.7), (3.4.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} 2f'''(t)f'(t) + 2(f'(t))^2 - 3(f''(t))^2 - 4f''(t)f(t) &= \\ &= Df^2(t) + r_1(t)f^{2-k}(t), \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

$$f^{IV}(t)f'(t) - 2f''(t)f'''(t) - 2f'''(t)f(t) - f'(t)f(t) = ir_2(t)f^{2-k}(t). \quad (3.4.11)$$

Интегрируя уравнение (3.4.11), получаем

$$2f'''(t)f'(t) + 2(f'(t))^2 - 3(f''(t))^2 - 4f''(t)f(t) = f^2(t) + 2i \int_0^t r_2(t)f^{2-k}(t) dt + D_1. \quad (3.4.12)$$

При $t=0$ имеем

$$D_1 = D - 1.$$

Из сравнения уравнений (3.4.10) и (3.4.12) видим, что

$$Df^2(t) + r_1(t)f^{2-k}(t) = f^2(t) + 2i \int_0^t r_2(t)f^{2-k}(t) dt + D - 1.$$

Следовательно, при некотором фиксированном значении $t=t_*$

$$(D-1)(f^2(t_*)-1) = 2i \int_0^{t_*} r_2(t)f^{2-k}(t) dt - r_1(t_*)f^{2-k}(t_*).$$

Подставляя это значение D в (3.4.10), получаем

$$2f'''f' + 2f'^2 - 3f''^2 - 4f''f = f^2 + R, \quad (3.4.13)$$

где

$$R = R(t) = \frac{f^2(t)}{f^2(t_*)-1} \left(2i \int_0^{t_*} r_2(t)f^{2-k}(t) dt - r_1(t_*)f^{2-k}(t_*) \right) + r_1(t)f^{2-k}(t). \quad (3.4.14)$$

Справедливо тождество

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f''(t)+f'(t)}{f'(t)} \right) = \frac{(f''(t)+f'(t))f'(t) - (f''(t)+f(t))f''(t)}{(f'(t))^2}.$$

Поэтому (3.4.13) можно переписать так:

$$2 \frac{d}{dt} \left(\frac{f''(t)+f'(t)}{f'(t)} \right) = \frac{(f''(t)+f(t))^2 + R(t)}{(f'(t))^2}. \quad (3.4.15)$$

Не уменьшая общности рассуждений, далее будем предполагать, что $f'(t) \neq 0$. Обозначив

$$h(t) = (f''(t) + f(t))/f'(t),$$

уравнение (3.4.15) перепишем так:

$$2h'(t) - h^2(t) = R(t)/(f'(t))^2. \quad (3.4.16)$$

Переходим к оценке величины $|R(t)|$. Возможны лишь следующие два случая:

А. В интервале $[-\varepsilon^{-\delta_1}, \varepsilon^{-\delta_1}]$ (здесь и далее $\delta_1, \delta_2, \dots$ — некоторые положительные числа, определяемые ниже) существует точка t_0 такая, что

$$f(t_0) = 1 - \varepsilon^{\delta_2}.$$

Б. Такая точка не существует, т. е.

$$f(t) > 1 - \varepsilon^{\delta_2} \quad \forall t \in [-\varepsilon^{-\delta_1}, \varepsilon^{\delta_1}]. \quad (3.4.17)$$

Рассмотрение начнем с соотношения (3.4.17), т. е. пусть имеет место случай Б. Легко заметить, что тогда

$$|f(t) - 1| \leq \varepsilon^{\delta_2} \quad \text{при} \quad |t| \leq \varepsilon^{-\delta_1},$$

т. е.

$$\lambda(X_j, E) \leq \varepsilon^{\min(\delta_1, \delta_2)}.$$

В случае Б, таким образом, справедлива оценка (3.4.4).

Переходим к рассмотрению случая А. Если множество

$$\{t_0 : f(t_0) = 1 - \varepsilon^{\delta_2}\}$$

имеет не один, а несколько элементов, то из них мы выбираем минимальный. В этом случае в формуле (3.4.14), полагая $t_* = t_0$ и вспоминая оценки (3.4.6), (3.4.9), получаем

$$\begin{aligned} |R(t)| &\leq 2\varepsilon^{-\delta_2} (|t| \varepsilon (1 - \varepsilon^{\delta_2})^{2-k} + \varepsilon (1 - \varepsilon^{\delta_2})^{2-k}) + \\ &+ \varepsilon |f(t)|^{2-k} \leq 3\varepsilon^{1-\delta_2} |t| + \varepsilon |f(t)|^{2-k}. \end{aligned}$$

Величину $T_1 > 0$ определим следующим образом:

$$T_1 = \sup \{ \tau : |f''(t) + f(t)| \geq \varepsilon^{\delta_2} \quad \text{при} \quad |t| \leq \tau \},$$

где, как уже отмечалось, δ_2 — некоторое положительное число, определяемое ниже. Такое T_1 существует, поскольку

$$f''(0) + f(0) = 1 - EX_j^2 \geq 1 - \sqrt{M} = \text{const} > 0. \quad (3.4.18)$$

В силу (3.4.16) легко убедиться, что при $t \in [0, T_1]$

$$\begin{aligned} 2h'(t)/h^2(t) &= 1 + R_1(t), \\ R_1(t) &= R(t)/(f''(t) + f(t))^2. \end{aligned}$$

Так как $1/h(0)=0$, то

$$-2/h(t) = t + \int_0^t R_1(t) dt,$$

$$t f''(t) + t f(t) = -2f'(t)/(1 + R_2(t)),$$

где $R_2(0)=0$,

$$R_2(t) = t^{-1} \int_0^t R_1(t) dt \quad \text{при } t \neq 0.$$

Обозначая $g(t) = t f'(t)$, при $t \in [0, T_1]$ получаем

$$g''(t) + g(t) = R_3(t), \quad (3.4.19)$$

$$R_3(t) = 2f'(t) R_2(t)/(1 + R_2(t)).$$

Общее решение уравнения (3.4.19) имеет следующий вид:

$$g(t) = \int_0^t R_3(z) \sin(t-z) dz + C_3 \cos t + C_4 \sin t.$$

Так как $g(0)=0$, то $C_3=0$. С другой стороны, соотношения $f(0)=1$ и

$$f(t) = g(t)/t = t^{-1} \int_0^t R_3(u) \sin(t-u) du + C_4 t^{-1} \sin t$$

означают, что при условии

$$|R_3(t)| \leq \text{const}$$

справедливо равенство $C_4=1$. Следовательно, при $t \in [0, T]_1$

$$f(t) = \sin t/t + R_4(t),$$

$$R_4(t) = t^{-1} \int_0^t R_3(u) \sin(t-u) du. \quad (3.4.20)$$

Займемся оценкой $|R_4(t)|$ при $t \in [0, T_1]$:

$$\begin{aligned} |R_4(t)| &\leq |R_3(t)| \leq 3 |R_2(t)| \leq 3 |R_1(t)| \leq 3 |R(t)| \varepsilon^{-2\delta_1} \leq \\ &\leq 9\varepsilon^{1-\delta_1-2\delta_1} |t| + 3\varepsilon^{1-2\delta_1} |f(t)|^{2-k}. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Докажем существование абсолютной константы $A > 0$ такой, что

$$T_1 \geq A. \quad (3.4.22)$$

Действительно, поскольку множество характеристических функций $\{f_X: EX^4 \leq M\}$ относительно компактно (предкомпактно) в пространстве $C[-T, T]$ (T — любое положительное число), то мы вправе воспользоваться теоремой Золотарева о качественной устойчивости (см. § 1.2). В частности, отсюда следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$|f(t) - \sin t/t| < 1/10 \quad \text{при} \quad |t| \leq \pi/2,$$

т.е.

$$|f(t)| > 1/2 \quad \text{при} \quad |t| \leq \pi/2. \quad (3.4.23)$$

Таким образом, из (3.4.21) и (3.4.23) видим, что при $|t| \leq \pi/2$

$$\begin{aligned} |R_4(t)| &\leq 9\pi\varepsilon^{1-\delta_1-2\delta_1}/2 + 3 \cdot 2^{n-2} \varepsilon^{1-2\delta_1} \leq 15\varepsilon^{\delta_4}, \quad (3.4.24) \\ \delta_4 &= 1 - \delta_2 - 2\delta_3. \end{aligned}$$

Далее, на основе метрической леммы 2.5.1, формулы (3.4.20) и оценки (3.4.24) нетрудно убедиться, что при $|t| \leq \pi/2$

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2t^{-3} \sin t - 2t^{-2} \cos t - t^{-1} \sin t + R_4''(t), \\ |R_4''(t)| &\leq C_1 \varepsilon^{\delta_4/2}. \end{aligned}$$

Итак, для t из интервала $[-\pi/2, \pi/2]$ мы получили, что

$$\begin{aligned} |f''(t) + f(t)| &= |2t^{-3} \sin t - 2t^{-2} \cos t + R_4(t) + R_4''(t)| \geq \\ &\geq |2t^{-3} \sin t - 2t^{-2} \cos t| - 15\varepsilon^{\delta_4} - C_1 \varepsilon^{\delta_4/2}. \end{aligned}$$

Согласно определению величины T_1 ,

$$|f''(t) + f(t)| \geq \varepsilon^{\delta_4} \quad (3.4.25)$$

при $t \in [-T_1, T_1]$. Рассмотрим неравенство

$$|2t^{-3} \sin t - 2t^{-2} \cos t| \geq \varepsilon^{\delta_4} + 15\varepsilon^{\delta_4} + C_1 \varepsilon^{\delta_4/2}. \quad (3.4.26)$$

Поскольку для функции $V(t)$,

$$V(t) = 2t^{-3} \sin t - 2t^{-2} \cos t$$

справедливо соотношение

$$V(0) = 2/3,$$

то нетрудно убедиться в существовании абсолютных констант A_1, A_2 таких, что при $\varepsilon \leq A_2$ в интервале $[-A_1, A_1]$ справедливо неравенство (3.4.26), и следовательно, (3.4.25). Это в свою очередь означает, что при $A = A_1$ верна оценка (3.4.22).

Подведем итог: в интервале $[-A, A]$, A — фиксированная константа, справедлива оценка

$$|f(t) - \sin t/t| \leq 10\varepsilon^{\delta_3} A.$$

Отсюда в силу теоремы Клебанаова—Мкртчяна (см. § 3.1) и выбора

$$\delta_1 = \delta_2 < 1, \quad \delta_3 < (1 - \delta_2)/2$$

получаем оценку (3.4.3).

Теорема доказана.

ГЛАВА 4

УСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИЗАЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЛИШЬ СТАТИСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ ФОРМ

В предыдущем параграфе на примере теоремы устойчивости Е. Лукача мы видели, как существенно усложняются ее условия по сравнению с самой характеристикой того же автора. Возникает естественный вопрос: а нельзя ли избежать этих усложнений? Более того, возможны ли формулировки теорем устойчивости, в которых присутствовало бы только возмущенное статистическое свойство рассматриваемых форм (например, почти независимость или почти равномерность)? Такая постановка задачи требует существенного использования всей ее специфики и довольно сложного математического аппарата. Например, в настоящей главе используются результаты теории диофантовых аппроксимаций, теорема о сближении n -кратных сверток распределений с сопровождающими законами, решение проблемы неутекания существенной вероятностной массы в бесконечность и др.

§ 4.1. Устойчивость характеристической теоремы П. Леви

Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — независимые равномерно распределенные случайные величины,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad X = X_1,$$

а F_X — функция распределения случайной величины X .

Определение 4.1.1 (см. [70]). *Распределение F_X называется строго устойчивым, если оно не сосредоточено в нуле и для каждого n существует постоянная $d_n > 0$ такая, что*

$$F_{S_n}(x) = F_{d_n X}(x). \quad (4.1.1)$$

Оказывается (см. [70]), постоянные $d_n = n^{1/\alpha}$ являются единственно возможными нормирующими постоянными и

при этом $0 < \alpha \leq 2$. Таким образом, формула (4.1.1) перепишется так:

$$F_{S_n}(x) = F_{n^{1/\alpha} X}(x). \quad (4.1.2)$$

Теорема П. Леви. Для устойчивости распределения F_X достаточно выполнения (4.1.2) при $n=2$ и $n=3$.

Весьма любопытно, что, вообще говоря, выполнение (4.1.2) лишь при $n=2$ еще недостаточно для устойчивости F_X .

Пример П. Леви ([70, гл. 17]). Характеристическая функция

$$f(t) = \exp \left\{ 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k} (\cos 2^k t - 1) \right\}$$

обладает свойством

$$f(t) = f^2(t/2),$$

т. е.

$$F_{S_2}(x) = F_{2X}(x),$$

но не является строго устойчивой.

Наша ближайшая цель — исследовать устойчивость теоремы Леви. В зависимости от того, в какой области переменной рассматривается возмущенное соотношение

$$f(t) = f^k(t/k^{1/\alpha}), \quad \alpha \in (0, 2], \quad k = 2, 3 \quad (4.1.3)$$

($f(t) = E \exp itX$), формулируются две теоремы. Перед их формулировкой сделаем следующее очевидное замечание. Для любой характеристической функции $f(t)$ и любого числа $p \in (0, 1)$ существует положительное число s (зависящее, вообще говоря, от f и p , конечное или бесконечное) такое, что

$$s = \inf \{ |t| : |f(t)| = p \}. \quad (4.1.4)$$

При $|f(t)| > p$, $t \in (-\infty, \infty)$ считается, что $s = \infty$.

Теорема 4.1.1 (см. [161]). Пусть при некотором $\alpha \in (0, 2]$ и $T \geq 1$ выполняются следующие два условия

$$|f(t) - f^k(t/k^{1/\alpha})| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad |t| \leq T, \quad k = 2, 3. \quad (4.1.5)$$

Тогда существует величина C , зависящая лишь от α такая, что при $|t| \leq \min(T, \varepsilon^{-\eta/(1+\alpha)})$

$$|f(t) - \exp \{ -|A| \exp(iD \operatorname{sign} t) s_*^{-\alpha} |t|^\alpha \}| \leq C \tau_p \varepsilon^{\eta/(1+\alpha)}, \quad (4.1.6)$$

где $A = 2 \ln f(2^{-1/\alpha} s_*)$, $D = \arctg(\operatorname{Im} A / \operatorname{Re} A)$, $s_* = s$ при $s < T$ и $s_* = 1$ при $s \geq T$

$$\eta = 1/(b + \max(1, \alpha)), \quad \tau_p = \{p^3 \ln(2/(p+1))\}^{-1}$$

и, наконец, b — абсолютная постоянная Н. И. Фельдмана [71], $b > 1$.

В случае $s < T$ результат теоремы может быть улучшен следующим образом.

Следствие 4.1.1. Пусть для некоторого $\alpha \in (0, 2]$ и $1 < T \leq \infty$ при $k=2, 3$ выполняются условия (4.1.5). Если $s < T$, то существует C , зависящая лишь от α , такая, что при $|t| \leq T$

$$|f(t) - \exp\{-|A_s| \exp(iD_s \operatorname{sign} t) s^{-\alpha} |t|^\alpha\}| \leq C \tau_p \varepsilon^\eta, \quad (4.1.7)$$

где $A_s = 2 \ln f(2^{-1/\alpha} s)$, $D_s = \arctg(\operatorname{Im} A_s / \operatorname{Re} A_s)$.

Если информация о возмущенном уравнении (4.1.3) имеется на всей оси, то справедлива более сильная, чем (4.1.6), оценка (4.1.8). По порядку она аналогична оценке (4.1.7).

Теорема 4.1.2 (см. [161]). Если (4.1.5) справедливы при $k=2, 3$ и $T = \infty$, то либо

$$|f(t) - \exp\{-\tilde{A} |t|^\alpha\}| \leq C \varepsilon^\eta, \quad |t| \leq \infty, \quad (4.1.8)$$

где $\tilde{A}$ — величина, зависящая лишь от f , α и $\operatorname{sign} t$, а C зависит лишь от α , либо $f(t)$ почти вырождена, а именно, при $\varepsilon \leq 1/4$

$$|f(t)| \geq (1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2 \geq 1 - 2\varepsilon. \quad (4.1.9)$$

1°. Основные леммы. В теории диофантовых аппроксимаций известно (см. [71]), что для любых натуральных r и k существуют абсолютные постоянные b и b' такие, что

$$|r \ln 2 - k \ln 3| > b' r^{-b}.$$

Эти абсолютные константы b и b' рассматриваются в той же работе [71].

Лемма О. Л. Янушкявичене [78]. Пусть m — произвольное натуральное число, $x > 0$ и пусть ε — произвольное положительное число, удовлетворяющее условию

$$\varepsilon^{-x^b} M - (b' M / \ln 3)^{1/b} \varepsilon^{-x} \geq 2^{b(1-b)} (b' / \ln 3)^{1/b-1}, \quad (4.1.10)$$

$$M = 2 \cdot 3^b (\ln 3)^{1+b} / ((2^{1/b} - 1) b' \alpha^b).$$

Тогда существуют натуральное число m' и соответствующее ему натуральное n' такие, что

$$|m' \beta_2 - n' \beta_1| \leq \varepsilon^x, \quad (4.1.11)$$

$$0 \leq m - m' < M \varepsilon^{xb}, \quad (4.1.12)$$

где $\beta_1 = -\alpha^{-1} \ln 2$, $\beta_2 = -\alpha^{-1} \ln 3$.

Заметим, что (4.1.10) всегда имеет положительное решение по ε , ибо, согласно [71], $b > 1$. Лемма тривиальна для случая $m=0$ — тогда подбираются $m'=n'=0$.

Для дальнейшего также потребуется следующая лемма.

Лемма Клебанава—Янушкавичене. Пусть $\chi(t)$ — комплекснозначная функция и пусть

$$\chi^*(\delta) = \sup_{|t| \leq \delta} |\chi(t)|.$$

Если

$$|\chi(t)| \geq 2 |\chi(t/2^{1/\alpha})| - |r(t)|, \quad \alpha > 0,$$

и $|r(t)| \leq \varepsilon$ при $-T \leq t \leq T$, $T \geq 1$, то для произвольного δ из интервала $(0, 1]$

$$\chi^*(\delta) \leq 2 \chi^*(1) \delta^\alpha + \varepsilon.$$

Следствие 4.1.2. Пусть характеристическая функция $f(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ln f(t) = 2 \ln f(t/2^{1/\alpha}) + r(t), \quad (4.1.13)$$

причем при $f(t) \neq 0$ $-T \leq t \leq T$, $T \geq 1$ и $|r(t)| \leq \varepsilon$. Если $|z| \leq T$, $|t_0| \leq T - |t_0 - z|$, то

$$|\ln f(t_0) - \ln f(z)| \leq H |t_0 - z|^\alpha + 2\varepsilon, \quad (4.1.14)$$

где

$$H = 2 \sup_{z: |t_0 - z| \leq 1, z \in [-T, T]} |\ln f(t_0) - \ln f(z)|. \quad (4.1.15)$$

Доказательство леммы и ее следствия приводится в [161].

Лемма 4.1.1 (см. [161]). Пусть при некотором $\alpha \in (0, 2]$ выполняются следующие два условия:

$$|f(t) - f^k(t/k^{1/\alpha})| \leq \varepsilon, \quad |t| \leq 1, \quad k = 1, 2. \quad (4.1.16)$$

Пусть, кроме того, существует константа $p \in (0, 1)$ такая, что

$$|f(t)| \geq p \quad \text{при} \quad |t| \leq 1. \quad (4.1.17)$$

Тогда существует величина C_1 , зависящая лишь от α , такая, что при $|t| \leq 1$

$$|f(t) - \exp\{-|A_1| \exp(iD_1 \operatorname{sign} t) |t|^\alpha\}| \leq C_1 p^{-3} (\varepsilon + \varepsilon^n |t|^\alpha),$$

где

$$A_1 = 2 \ln f(2^{-1/\alpha}), \quad \eta = 1/(b + \max(1, \alpha)),$$

$$D_1 = \arctg(\operatorname{Im} A_1 / \operatorname{Re} A_1),$$

$b > 1$ — абсолютная константа.

2°. Доказательство леммы 4.1.1. Пусть сначала $0 < t \leq 1$. Обозначая

$$u = \ln t, \quad \psi(\ln t) = \ln f(t),$$

из (4.1.16) и (4.1.17) при $\varepsilon \leq p^k/2$ получаем, что

$$\psi(u) = k \psi(u + \beta_{k-1}) + R_{k-1}(\exp u), \quad (4.1.18)$$

$$\beta_{k-1} = -(1/\alpha) \ln k, \quad k = 2, 3;$$

$$|R_{k-1}(t)| \leq 2p^{-k} \varepsilon, \quad 0 < t \leq 1. \quad (4.1.19)$$

Утверждение леммы очевидно для $\varepsilon > p^k/2$ при $C_1 = 2$. В дальнейшем будет полезно следующее обозначение

$$G(u) = \psi(u) \exp(-\alpha u).$$

Подставляя это соотношение в (4.1.18), получаем

$$G(u) = G(u + \beta_j) + R_j(\exp u) \exp(-\alpha u), \quad j = 1, 2. \quad (4.1.20)$$

Рассмотрим следующие множества:

$$\mathcal{U}_1 = \{u : u = n\beta_1 + m\beta_2; \ n, \ m - \text{неотрицательные целые}\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{u : \beta_1 < u = n\beta_1 + m\beta_2 \leq 0; \ n, \ m - \text{целые}\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : u = n\beta_1 + m\beta_2 \leq 0; \ n, \ m - \text{целые}\}.$$

Заметим, что множество $\mathcal{U}_2$ всюду плотно в интервале $(\beta_1, 0)$, а $\mathcal{U}$ — всюду плотно в интервале $(-\infty, 0)$.

Нетрудно убедиться, что для произвольного $u \in \mathcal{U}$ имеет место следующее представление:

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in \mathcal{U}_1, \quad u_2 \in \mathcal{U}_2. \quad (4.1.21)$$

В самом деле, пусть $u \in \mathcal{U}$ и $u \leq \beta_2$. Определим

$$m_0 = \min \{m : m - \text{натуральное, } m\beta_2 \geq u\}.$$

Если $|u - m_0\beta_2| \geq |\beta_1|$, то, очевидно,

$$\beta_1 < u - m_0\beta_2 - \beta_1 = u_0 \leq 0. \quad (4.1.22)$$

Поскольку $u_0 \in \mathcal{U}$ согласно определению u_0 , то из (4.1.22) заключаем, что $u_0 \in \mathcal{U}_0$. Если же $|u - m_0\beta_2| < |\beta_1|$, то вместо (4.1.22) следует рассматривать

$$\beta_1 < u - m_0\beta_2 \leq 0.$$

Таким образом, представление (4.1.21) полностью доказано.

Оценим теперь $|G(u) - G(\beta_1)|$. Предположим сначала, что $u \in \mathcal{U}_1$. Из (4.1.20) получаем:

$$\begin{aligned} G(u) &= G(n\beta_1 + m\beta_2) = G((n-1)\beta_1 + m\beta_2) - \\ &- R_1(\exp\{(n-1)\beta_1 + m\beta_2\}) \exp\{-\alpha((n-1)\beta_1 + m\beta_2)\} = \dots = \\ &= G(\beta_1 + m\beta_2) - \\ &- \sum_{j=1}^{n-1} R_1(\exp(j\beta_1 + m\beta_2)) \exp\{-\alpha(j\beta_1 + m\beta_2)\} = \\ &= G(\beta_1) - \sum_{j=0}^{m-1} R_2(\exp(\beta_1 + j\beta_2)) \exp\{-\alpha(\beta_1 + j\beta_2)\} - \\ &- \sum_{j=1}^{n-1} R_1(\exp(j\beta_1 + m\beta_2)) \exp\{-\alpha(j\beta_1 + m\beta_2)\}. \quad (4.1.23) \end{aligned}$$

Заметим, что в силу (4.1.19)

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=1}^{n-1} R_1(\exp(j\beta_1 + m\beta_2)) \exp(-\alpha(j\beta_1 + m\beta_2)) \right| \leq \\ &\leq 2p^{-2}\varepsilon (\exp\{-\alpha(n\beta_1 + m\beta_2)\} - \exp\{-\alpha(\beta_1 + m\beta_2)\}) \leq \\ &\leq 2p^{-2}\varepsilon \exp(-\alpha u). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=0}^{m-1} R_2(\exp(\beta_1 + j\beta_2)) \exp(-\alpha(\beta_1 + j\beta_2)) \right| \leq \\ &\leq p^{-3}\varepsilon \exp(-\alpha(\beta_1 + m\beta_2)). \end{aligned}$$

С учетом (4.1.23) отсюда получаем:

$$|G(u) - G(\beta_1)| \leq C_2 \varepsilon \exp(-\alpha u), \quad (4.1.24)$$

$$C_2 = 3p^{-3}.$$

Пусть теперь $u \in \mathcal{U}_2$. Согласно определению множества $\mathcal{U}_2$, либо $u = n\beta_1 - m\beta_2$, либо же $u = m\beta_2 - n\beta_1$, где n, m — целые неотрицательные числа. Оба случая рассматриваются таким же образом, поэтому предположение

$$\mathcal{U}_2 \ni u = n\beta_1 - m\beta_2, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0,$$

не уменьшает общности рассуждений. Определим

$$m_i = m_{i-1} - 1 = m_{i-2} - 2 = \dots = m - i;$$

$$n_0 = n,$$

$$n_i = \min \{ n^* : n^* \beta_1 - m_i \beta_2 \leq 0, \quad n^* - \text{натуральное} \}. \quad (4.1.25)$$

Нетрудно доказать, что n_i находится в следующих пределах:

$$[m_i \beta_2 / \beta_1] \leq n_i \leq [m_i \beta_2 / \beta_1] + 1. \quad (4.1.26)$$

Применяя (4.1.20) для $u \in \mathcal{U}_2$, получаем:

$$\begin{aligned} G(u) &= G(n\beta_1 - m\beta_2) = G(n\beta_1 - (m-1)\beta_2) + \\ &+ R_2(\exp(n\beta_1 - m\beta_2)) \exp(-\alpha(n\beta_1 - m\beta_2)) = \\ &= G(n_1\beta_1 - m_1\beta_2) + R_2(\exp(n\beta_1 - m\beta_2)) \exp(-\alpha(n\beta_1 - m\beta_2)) - \\ &- \sum_{j=n_1}^{n-1} R_1(\exp(j\beta_1 - m_1\beta_2)) \exp(-\alpha(j\beta_1 - m_1\beta_2)) = \dots = \\ &= G(n_i\beta_1 - m_i\beta_2) + \\ &+ \sum_{l=0}^{i-1} R_2(\exp(n_l\beta_1 - m_l\beta_2)) \exp(-\alpha(n_l\beta_1 - m_l\beta_2)) - \\ &- \sum_{l=1}^i \sum_{j=n_l}^{n_{l-1}-1} R_1(\exp(j\beta_1 - m_l\beta_2)) \exp(-\alpha(j\beta_1 - m_l\beta_2)). \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

Применим теперь лемму Янушкявичене для нашего m . Поскольку в этой лемме m' — натуральное, $m' \leq m$ и, согласно определению,

$$m_j = m - j,$$

то, очевидно, существует i такое, что $m' = m_i$. Покажем теперь, что для описываемого леммой n' справедливо следующее утверждение: либо $n' = n_i$, либо же $n' = n_i - 1$. В самом деле, согласно (4.1.25), для фиксированного m_i натуральное n_i выбирается так, чтобы разность $n_i\beta_1 - m_i\beta_2$ была ближе всего к нулю слева. В лемме же Янушкявичене n' выбирается по близости к нулю числа $n'\beta_1 - m'\beta_2$ без учета знака этой аппроксимации. Следовательно, возможны лишь следующие два случая: если

$$|n'\beta_1 - m_i\beta_2| = n'\beta_1 - m_i\beta_2,$$

то

$$n_i = n' - 1;$$

если же

$$|n'\beta_1 - m_i\beta_2| = -(n'\beta_1 - m_i\beta_2),$$

то $n_i = n'$.

Теперь нетрудно оценить суммы в (4.1.27). Сначала сравним случай $u \in \mathcal{U}_2$ со случаем $u \in \mathcal{U}_1$, точнее, соотношение (4.1.27) с соотношением (4.1.23). В последнем случае, т. е. в (4.1.23), мы видели, что экспоненциальный множитель существенно учитывается во всех последующих оценках. В (4.1.27) он такой роли не играет, поскольку хотя n_i и m_i могут быть очень велики, тем не менее их разность $n_i\beta_1 - m_i\beta_2$ может быть очень малой и тем самым $\exp \{-\alpha (n_i\beta_1 - m_i\beta_2)\}$ близка к 1.

Согласно (4.1.12) и сделанному выше замечанию, существует i такое, что

$$i < M \varepsilon^{-xb}, \quad (4.1.28)$$

при этом

$$|m_i\beta_2 - n_i\beta_1 - \beta_1| \leq \varepsilon^x \quad (4.1.29)$$

(мы предполагаем сначала, что $n_i = n' - 1$).

Вспомнив (4.1.26), легко обнаружить, что экспоненциальные множители в (4.1.27) ограничены: для $j = n_i, \dots, n_{i-1} - 1$,

$$\begin{aligned} \exp(-\alpha(j\beta_1 - m_i\beta_2)) &\leq \exp(-\alpha((n_{i-1} - 1)\beta_1 - m_i\beta_2)) \leq \\ &\leq \exp(-\alpha(\beta_1 + \beta_2)) = 6. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

В силу (4.1.26) число слагаемых, не совпадающих с $G(n_i\beta_1 - m_i\beta_2)$, в (4.1.27) не превосходит числа

$$i + i([\beta_2/\beta_1] + 2) = 4i.$$

Из (4.1.19), (4.1.28), и (4.1.30) следует, что

$$|G(n\beta_1 - m_i\beta_2) - G(n_i\beta_1 - m_i\beta_2)| \leq C_3 \varepsilon^{1-\alpha b}, \quad (4.1.31)$$

где

$$C_3 = 48M(p+1)p^{-3}.$$

Теперь, учитывая (4.1.29), оценим модуль разности $G(n_i\beta_1 - m_i\beta_2) - G(\beta_1)$. Очевидно, при $0 < t_j \leq 1$ и $u_j = \ln t_j$, $j=1, 2$,

$$\begin{aligned} |G(u_1) - G(u_2)| &= |t_1^{-\alpha} \ln f(t_1) - t_2^{-\alpha} \ln f(t_2)| \leq \\ &\leq t^{-\alpha} |\ln f(t_1) - \ln f(t_2)| + |\ln f(t_2)| |t_1^{-\alpha} - t_2^{-\alpha}|. \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

Полагая

$$t_1 = \exp \beta_1, \quad t_2 = \exp(n_i\beta_1 - m_i\beta_2),$$

в силу (4.1.29) и следствия 4.1.2 получаем, что

$$|\ln f(t_1) - \ln f(t_2)| \leq 4C_4 |t_1 - t_2|^\alpha + 2\varepsilon,$$

где

$$C_4 = (\ln^2(1/p) + 4\pi^2)^{1/2}.$$

Тогда из (4.1.17), (4.1.29) и (4.1.32) следует, что при $u_1 = \beta_1$, $u_2 = n_i\beta_1 - m_i\beta_2$

$$\begin{aligned} |G(u_1) - G(u_2)| &\leq 8C_4 t_2^\alpha |e^{u_1 - u_2} - 1|^\alpha + 4\varepsilon + 2C_4 |e^{\alpha(u_1 - u_2)} - 1| \leq \\ &\leq 16C_4 \varepsilon^{\alpha x} + 4\varepsilon + 4C_4 \alpha \varepsilon^x, \end{aligned}$$

если при этом

$$\varepsilon^x \max(1, \alpha) \leq 1/2.$$

Следовательно, с учетом (4.1.31) для $u \in \mathcal{U}_2$ и $n_i = n' - 1$ получаем

$$|G(u) - G(\beta_1)| \leq C_5 \varepsilon^\eta, \quad (4.1.33)$$

где

$$\begin{aligned} C_5 &= C_3 + 4C_4(4 + \alpha) + 4, \\ \eta &= \begin{cases} 1/(b+1) & \text{при } 0 < \alpha \leq 1, \\ 1/(b+\alpha) & \text{при } 1 \leq \alpha \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, осталось рассмотреть случай $u \in \mathcal{U}_2$ и $n_i = n'$. В этом случае в (4.1.27) вместо слагаемого $G(n_i\beta_1 - m_i\beta_2)$ следует рассматривать слагаемое $G((n_i+1)\beta_1 - m_i\beta_2)$,

т. е. цепочку (4.1.27) следует сократить на один шаг. Обозначая остаточный член в (4.1.27) через $\bar{K}_2$, получаем:

$$G(n\beta_1 - m\beta_2) = G((n_i + 1)\beta_1 - m_i\beta_2) + R_3 + \\ + R_1(\exp(n_i\beta_1 - m_i\beta_2)) \exp(-\alpha(n_i\beta_1 - m_i\beta_2)).$$

В этом соотношении и в (4.1.27) член m_i один и тот же. Применяя лемму Янушкявичене и повторяя (4.1.28)–(4.1.33) находим, что (4.1.33) справедливо для любого $u \in \mathcal{U}_2$.

Пусть, наконец, $u \in \mathcal{U}$. Записав u в форме (4.1.21), повторим (4.1.23):

$$G(u) = G(u_1 + u_2) = G(n\beta_1 + m\beta_2 + u_2) = G(u_2) - \\ - \sum_{j=0}^{m-1} R_2(\exp(\beta_1 + j\beta_2 + u_2)) \exp(-\alpha(\beta_1 + j\beta_2 + u_2)) - \\ - \sum_{j=0}^{n-1} R_1(\exp(j\beta_1 + m\beta_2 + u_2)) \exp(-\alpha(j\beta_1 + m\beta_2 + u_2)).$$

Следовательно, как и в (4.1.24),

$$|G(u) - G(u_2)| \leq C_2 \varepsilon \exp(-\alpha u), \\ |G(u) - G(\beta_1)| \leq C_2 \varepsilon \exp(-\alpha u) + C_5 \varepsilon^\eta, \quad u \in \mathcal{U}. \quad (4.1.34)$$

В заключение рассмотрения случая $0 \leq t \leq 1$ остается заметить, что для любого $u \in (-\infty, 0]$

$$|G(u) - G(\beta_1)| = \lim_{j \uparrow \infty} |G(u_j) - G(\beta_1)|,$$

поскольку $G(u)$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и соотношение

$$u = \lim_{j \uparrow \infty} u_j, \quad u_j \in \mathcal{U}$$

справедливо для любого $u \in (-\infty, 0]$. Таким образом, (4.1.34) имеет место для произвольного $u \in (-\infty, 0]$. А поскольку

$$\psi(\ln t) = \ln f(t), \quad \psi(u) = \exp(\alpha u) G(u),$$

то

$$|\psi(u) - G(\beta_1) \exp(\alpha u)| \leq C_2 \varepsilon + C_5 \varepsilon^\eta \exp(\alpha u), \quad u \leq 0,$$

т. е. при $0 \leq t \leq 1$

$$|\ln f(t) - 2t^\alpha \ln f(2^{-1/\alpha})| \leq C_2 \varepsilon + C_5 \varepsilon^\eta t^\alpha. \quad (4.1.35)$$

Пусть теперь $-1 \leq t < 0$. Полагая

$$t = -z, \quad 0 < z \leq 1,$$

перепишем (4.1.35) в следующем виде:

$$\ln f(z) = Az^\alpha + r_*(z), \quad 0 < z \leq 1,$$

где

$$A = 2 \ln f(2^{-\alpha}),$$

$$|r_*(z)| \leq C_2 \varepsilon + C_5 \varepsilon^\eta z^\alpha. \quad (4.1.36)$$

Заметим, что

$$f(t) = f(-z) = \overline{f(z)} = \exp(\overline{Az^\alpha}) \exp(\overline{r_*(z)}). \quad (4.1.37)$$

Если

$$\operatorname{tg} D = \operatorname{Im} A / \operatorname{Re} A,$$

то, как известно,

$$A = -|A| \exp(iD).$$

Поэтому из (4.1.35)–(4.1.37) при $|t| \leq 1$ получаем следующее соотношение:

$$f(t) = \exp \{ -|A| \exp(iD \operatorname{sign} t) |t|^\alpha \} \exp r_0(t),$$

причем для $|r_0(t)|$ также имеет место оценка (4.1.36). Это означает, что при $|t| \leq 1$

$$\begin{aligned} |f(t) - \exp(-|A| \exp(iD \operatorname{sign} t) |t|^\alpha)| &\leq \\ &\leq 2C_2 \varepsilon + 2C_5 \varepsilon^\eta |t|^\alpha. \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

3°. Доказательство теоремы 4.1.1 и ее следствия. Легко заметить, что

$$s = s(f, p) = \inf \{ |t| : |f(t)| = p \} > 0. \quad (4.1.39)$$

Как уже отмечалось, возможны два случая: $s < T$ и $s \geq T$.

Сначала рассмотрим случай $s < T$. Вместо характеристической функции $f(t)$ введем в рассмотрение характеристическую функцию

$$f_s(t) = f(ts),$$

для которой

$$\begin{aligned} s(f_s, p) &= \inf \{ |t| : |f(st)| = p \} = \\ &= \frac{1}{s} \inf \{ s|t| : |f(st)| = p \} = 1. \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

Легко убедиться, что если $f(t)$ удовлетворяет неравенству (4.1.5) при $|t| \leq T$, то $f_s(t)$ удовлетворяет (4.1.5) при $|t| \leq T/s$. В силу (4.1.40) имеет место соотношение (4.1.17). Поэтому для f_s мы вправе применять лемму 4.1.1 и при $|t| \leq 1$ имеем:

$$|f_s(t) - \exp(-|A_s| \exp(iD_s \operatorname{sign} t) |t|^\alpha)| \leq C_1^1 \epsilon^\eta, \quad (4.1.41)$$

где

$$A_s = 2 \ln f_s(2^{-1/\alpha}), \quad D_s = \arctg(\operatorname{Im} A_s / \operatorname{Re} A_s).$$

Следовательно, для завершения доказательства теоремы достаточно рассмотреть область

$$1 < |t| \leq T/s.$$

С этой целью обозначим

$$r(t) = f_s(t) - f_s^2(t/2^{1/\alpha}). \quad (4.1.42)$$

Согласно условиям теоремы,

$$|r(t)| \leq \epsilon \quad \text{при} \quad |t| \leq T/s.$$

Второе неравенство из условий теоремы, а именно,

$$|f(t) - f^3(t/3^{1/\alpha})| \leq \epsilon, \quad |t| \leq T,$$

при рассмотрении случая $|t| > 1$ нам не потребуется. Положим

$$h(t) = f_s(t) - \exp(B_t |t|^\alpha),$$

где

$$B_t = B_t(s) = -|A_s| \exp(iD_s \operatorname{sign} t) = 2 \ln f_s(2^{-1/\alpha} \operatorname{sign} t).$$

Согласно (4.1.42),

$$h(t) = h^2(t/2^{1/\alpha}) + 2h(t/2^{1/\alpha}) \exp(B_t |t|^\alpha/2) + r(t). \quad (4.1.43)$$

Предположив, что

$$|h(t)|^2 \leq \Delta = \sup_{|t| < 1} |f_s(t) - \exp(B_t |t|^\alpha)| \quad (4.1.44)$$

при $|t| < t_0$, где t_0 — произвольное число из интервала $[1, T/s]$, докажем, что это неравенство имеет место и для

$$|t| \leq \min(t_0 2^{1/\alpha}, T/s).$$

Поскольку $\alpha > 0$ и с учетом (4.1.41) соотношение (4.1.44) имеет место для $t_0 = 1$, то это будет означать, что (4.1.44) справедливо в интервале $[-T/s, T/s]$. Положим

$$d = 1 + [\alpha \log_2 t_0].$$

Заметим, что при $|t| \leq 2^{1/\alpha} t_0$

$$2^{-(d+1)/\alpha} |t| < 1. \quad (4.1.45)$$

Поскольку, согласно предположению, (4.1.44) имеет место при $|t| < t_0$, то для любого натурального m

$$|h(t/2^{m/\alpha})|^2 \leq \Delta \quad (4.1.46)$$

при $|t| < t_0 2^{1/\alpha}$.

Согласно (4.1.43), (4.1.44) и (4.1.46), в интервале $|t| < t_0 2^{1/\alpha}$ получаем, что

$$\begin{aligned} |h(t/2^{(m-1)/\alpha})| &\leq 2 |h(t/2^{m/\alpha})| \exp(\operatorname{Re} B_t |t|^\alpha/2^m) + \Delta + \varepsilon, \\ |h(t)| &\leq 2 |h(t/2^{1/\alpha})| \exp(\operatorname{Re} B_t |t|^\alpha/2) + \Delta + \varepsilon \leq \\ &\leq 2^2 |h(t/2^{1/\alpha})| \exp(\operatorname{Re} B_t |t|^\alpha(2^{-1} + 2^{-2})) + \\ &+ 2(\Delta + \varepsilon) \exp(\operatorname{Re} B_t |t|^\alpha/2) + \Delta + \varepsilon \leq \dots \leq \\ &\leq 2^{d+1} |h(t/2^{(d+1)/\alpha})| \exp(\operatorname{Re} B_t |t|^\alpha/2) + \\ &+ 2^{d+1}(\Delta + \varepsilon) \exp(\operatorname{Re} B_t |t|^\alpha/2) + \Delta + \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

Поскольку $B_t = 2 \ln f_s(2^{-1/\alpha} \operatorname{sign} t)$, то

$$\operatorname{Re} B_t = 2 \ln |f_s(2^{-1/\alpha} \operatorname{sign} t)| = 2 \ln |f_s(2^{-1/\alpha})| = B.$$

Обозначив

$$G^*(t) = 4 |t|^\alpha \exp(B |t|^\alpha/2),$$

видим, что при $|t| \geq t_0$

$$2^{d+1} \exp(B |t|^\alpha/2) \leq G^*(t_0).$$

Так как функция $G^*(t)$ — четная, то нетрудно убедиться, что максимум $G^*(t)$ достигается в точках t_* и $-t_*$,

$$t_* = (2/(-B))^{1/\alpha}.$$

Следовательно,

$$|h(t)| \leq G^*(t_*) (|h(t/2^{(d+1)/\alpha})| + \Delta + \varepsilon) + \Delta + \varepsilon, \quad (4.1.48)$$

$$t_0 \leq |t| < \min(2^{1/\alpha} t_0, T/s).$$

Далее, согласно (4.1.40), $f_s(1) = p$. Поэтому из (4.1.5) получаем:

$$|f_s(2^{-1/\alpha})|^2 \leq p + \varepsilon.$$

Таким образом, при $\varepsilon < (1-p)/2$

$$|B|^{-1} \leq |\ln(p + \varepsilon)|^{-1} \leq |\ln((p+1)/2)|^{-1}.$$

А так как

$$G^*(t_*) = 8/(e|B|),$$

то (4.1.48) означает, что

$$|h(t)| \leq \left| \ln \frac{p+1}{2} \right|^{-1} (|h(t/2^{(d+1)/\alpha})| + \Delta + \varepsilon) + \Delta + \varepsilon, \quad (4.1.49)$$

$$t_0 \leq |t| < \min(2^{1/\alpha} t_0, T/s).$$

Из (4.1.41) и (4.1.45) соответственно заключаем, что

$$\Delta = \Delta(\varepsilon) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

$$|h(t/2^{(d+1)/\alpha})| \leq \Delta.$$

Следовательно, существует положительная величина ε_* , зависящая лишь от α и p , такая, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*$

$$\sqrt{\Delta} \leq \left(3 \left| \ln \frac{p+1}{2} \right|^{-1} + 2 \right)^{-1}. \quad (4.1.50)$$

Предположение $\Delta \geq \varepsilon$, очевидно, не уменьшает общности рассуждений. Оценки (4.1.49) и (4.1.50) означают, что (4.1.44) имеет место при $|t| \leq \min(2^{1/\alpha} t_0, T/s)$, а тем самым, как уже отмечалось, и для любого действительного t из интервала $[-T/s, T/s]$. Поэтому в силу (4.1.49) в этом интервале справедлива оценка

$$|h(t)| \leq \left(2 \left| \ln \frac{p+1}{2} \right|^{-1} + 1 \right) (\varepsilon^n + \varepsilon). \quad (4.1.51)$$

Для завершения рассмотрения случая $s < T$ (а тем самым и следствия 4.1.1) достаточно осуществить переход от f_s к f и воспользоваться оценкой (4.1.51).

Пусть теперь $s \geq T$. Это означает, что

$$|f(t)| \geq p \quad \text{при} \quad |t| \leq T. \quad (4.1.52)$$

Несколько изменим проведенное для случая $s < T$ доказательство. А именно, рассматривая лишь

$$|t| \leq \min(T, \varepsilon^{-\eta/(1+\alpha)}),$$

т. е. полагая априори, что

$$t_0 \leq \varepsilon^{-\eta/(1+\alpha)},$$

вместо (4.1.47) будем использовать следующую оценку:

$$|h(t)| \leq 2^{d+1} |h(t/2^{(d+1)/\alpha})| + (2^{d+1} + 1)(\Delta + \varepsilon). \quad (4.1.53)$$

(Напомним, что

$$\operatorname{Re} B_t = 2 \ln |f(2^{-1/\alpha})| < 0$$

и что при $s \geq T$ нет надобности вводить функции $f_s(t)$.) Замечая теперь, что

$$2^{d+1} \leq 4 t_0^\alpha \leq 4 \varepsilon^{-\eta\alpha/(1+\alpha)},$$

из (4.1.53) получаем

$$|h(t)| \leq 4 \varepsilon^{-\eta\alpha/(1+\alpha)} (|h(t/2^{(d+1)/\alpha})| + (\Delta + \varepsilon)) + \Delta + \varepsilon.$$

Согласно (4.1.45) и лемме 4.1.1 (которую применять имеем право в силу (4.1.52)), имеем:

$$|h(t)| \leq 5 C_1 \varepsilon^{\eta/(1+\alpha)} + (4 \varepsilon^{-\eta\alpha/(1+\alpha)} + 1)(\Delta + \varepsilon).$$

Теперь остается лишь уточнить предположение (4.1.44):

$$|h(t)|^2 \leq \Delta = \varepsilon^{\eta/(1+\alpha)}$$

для любого $|t| \leq t_0$, где t_0 — произвольное число из интервала $[1, \min(T, \varepsilon^{-\eta/(1+\alpha)})]$.

Теорема 4.1.1 и ее следствие доказаны.

4°. Доказательство теоремы 4.1.2. Согласно (4.1.5), при $k=2$ имеем:

$$f(t) = f^2(t/2^{1/\alpha}) + r(t), \quad |r(t)| \leq \varepsilon, \quad |t| \leq \infty. \quad (4.1.54)$$

Обозначим

$$I = \inf \{ |f(t)| : |t| \leq \infty \}.$$

В силу (4.1.54)

$$I \leq I^2 + \sup \{ |r(t)| : |t| \leq \infty \} \leq I^2 + \varepsilon,$$

$$I^2 - I + \varepsilon \geq 0.$$

Таким образом, либо при $\varepsilon \leq 1/4$

$$I \geq (1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2, \quad (4.1.55)$$

либо же

$$I \leq (1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2. \quad (4.1.56)$$

Неравенство (4.1.55) означает, что $f(t)$ почти вырождена и верно соотношение (4.1.9).

Если же справедливо неравенство (4.1.56), то это означает, что существует точка $0 < z_0 < \infty$ такая, что при $\varepsilon \leq 1/4$

$$|f(z_0)| = 1/2. \quad (4.1.57)$$

Обозначим

$$|\hat{f}(t)| = |f(tz_0)|.$$

Согласно (4.1.57),

$$\hat{s} = s(\hat{f}, 1/2) = \min \{ |t| : |\hat{f}(t)| = 1/2 \} \leq 1.$$

Теперь к характеристическим функциям $\hat{f}(t)$ остается применить следствие 4.1.1 и осуществить обратный переход от $\hat{f}$ к f , который в силу соотношения $T = \infty$ является тривиальным.

Теорема доказана.

5°. Дополнения. Хорошо известно, что класс устойчивых распределений образует четырехпараметрическое множество функций $F(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ с параметрами

$$0 < \alpha \leq 2, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad \lambda > 0.$$

При этом характеристическая функция $u(t)$ устойчивого распределения задается следующим образом:

$$\ln u(t) = it\gamma - \lambda |t|^\alpha \omega(t, \alpha, \beta), \quad (4.1.58)$$

где

$$\omega(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} \exp \left(i \frac{\pi}{2} \beta K(\alpha) \operatorname{sign} t \right) & \text{при } \alpha \neq 1, \\ 1 + i\beta \frac{2}{\pi} \ln |t| \operatorname{sign} t & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

$$K(\alpha) = 1 - |1 - \alpha| = \min(\alpha, 2 - \alpha).$$

Подставляя (4.1.58) в (4.1.3), получаем, что $\gamma = 0$ при $\alpha \neq 1$ и $\beta = 0$ при $\alpha = 1$. Это означает, что характеризационная теорема Леви в действительности описывает подкласс $\mathfrak{M}$ класса устойчивых распределений. Этот подкласс $\mathfrak{M}$ был под-

робно исследован В. М. Золотаревым [165]. Характеристические функции из $\mathcal{M}$ можно представить в следующей форме:

$$\ln y(t) = -\exp \left\{ v^{-1/2} \left(\ln |t| + \tau - \frac{i}{2} \pi \Theta \operatorname{sign} t + C(1 - v^{1/2}) \right) \right\},$$

$$v \geq 1/4, \quad |\Theta| \leq \min(1, 2\sqrt{v} - 1), \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (4.1.59)$$

где $C = -\Gamma'(1) = 0.577\dots$ — константа Эйлера.

Возникает естественный вопрос: всегда ли член

$$\exp \left\{ -|A| \exp \{ iD \operatorname{sign} t \} s^{-\alpha} |t|^{\alpha} \right\},$$

присутствующий в (4.1.6) и (4.1.7), является элементом класса $\mathcal{M}$? Очевидно, ответ всегда утвердителен, если дополнительно известно, что $\operatorname{Im} A = 0$. Этот случай более подробно затрагивается ниже, в теореме 4.1.3. При рассмотрении общего случая заметим, что в принятых обозначениях

$$\Theta = -2D v^{1/2} / \pi.$$

Таким образом, в условиях (4.1.59) остается проверить, что

$$|D| \leq \frac{\pi}{2} \min(v^{-1/2}, 2 - v^{1/2}). \quad (4.1.60)$$

Правую сторону неравенства (4.1.60) обозначим через ξ . Тогда (4.1.60) эквивалентно следующему неравенству:

$$\left| \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A} \right| \leq \operatorname{tg} \xi. \quad (4.1.61)$$

Напомним, что $A = \ln f(x_0)$, где x_0 устанавливается в ходе доказательства теоремы. Заметим, что если в (4.1.3) $\alpha \neq 2$ (т. е. исключается случай характеристики нормального закона), то для любой из характеристических функций f , удовлетворяющих условиям теоремы 4.1.1 или теоремы 4.1.2, существует число $z_0 > 0$ такое, что

$$|\operatorname{Im} \ln f(z_0) / \operatorname{Re} \ln f(z_0)| \leq \operatorname{tg} \xi. \quad (4.1.62)$$

Действительно, о малости $\operatorname{Im}^2 \ln f(z_0) + \operatorname{Re}^2 \ln f(z_0)$ можно судить по следствию 4.1.2, а точнее, по (4.1.14), полагая при этом, что z_0 достаточно близко к нулю. Однако по этому признаку судить о малости отношения в (4.1.62), конечно, еще нельзя. Это будет нетрудно сделать, если заметить, что

$$\operatorname{Re} \ln f(z_0) = \ln |f(z_0)|,$$

а к характеристической функции $|f(t)|^2$ применить теорему 4.1.1 или теорему 4.1.2, получая тем самым близость с классом симметрических устойчивых законов.

Пусть, таким образом, при $\alpha \neq 2$ ($\nu \neq 1/4$) мы нашли число z_0 такое, что верно (4.1.62). Можно ли x_0 принять за z_0 ? Точнее, можно ли доказательства теорем провести так, чтобы x_0 выбиралось не в ходе доказательства, а априори полагалось бы, что $x_0 = z_0$? Ответ оказывается утвердительным. Это можно сделать путем замены в лемме 4.1.1 точки $x_0 = 2^{-1/\alpha}$ на требуемую точку z_0 (такого рода замены делались в работе [78]). Часто это удается сделать и путем замены $f(t)$ на $f_{y_0}(t)$,

$$f_{y_0}(t) = f(ty_0), \quad y_0 = 2^{1/\alpha} z_0.$$

Итак, нерассмотренным остался лишь случай $\alpha = 2$ или, что то же самое, $\nu = 1/4$. В этом случае правая сторона (4.1.60) равна нулю. В условиях (4.1.3) это хорошо известная характеристизационная теорема Д. Пойа, рассмотренная в гл. 1. При этом заметим, что достаточно требовать выполнения (4.1.3) лишь при $k=2$. Устойчивость самой теоремы Д. Пойа без моментных ограничений будет подробно рассмотрена в следующем параграфе.

Вернемся теперь к случаю $\text{Im } A = 0$, о котором говорилось в первой половине настоящего пункта. Как известно, в тех случаях, когда доказательства утверждений проводятся в терминах характеристических функций, особенно удобна λ -метрика. Поэтому именно эта метрика выбрана для формулировки следующего результата.

Теорема 4.1.3 (см. [161]). Пусть X_1, X_2, X_3 — независимые равномерно распределенные симметричные случайные величины. Если при $k=2, 3$ и некотором $\alpha \in (0, 2]$

$$\lambda \left(X_1, k^{-1/\alpha} \sum_{j=1}^k X_j \right) \leq \varepsilon,$$

то существует симметричная устойчивая случайная величина Y и величина C , зависящая лишь от α , такие, что

$$\lambda(X_j, Y) \leq C \varepsilon^{\eta/(1+\alpha)}.$$

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что $\operatorname{Im} A = 0$ и, положив $p = 1/2$, воспользоваться теоремой 4.1.1. Пользуясь случаем, отметим, также, что в (4.1.6) и аналогично в (4.1.7) и (4.1.8) член

$$\exp \left\{ -|A| \exp \{ iD \operatorname{sign} t \} s_*^{-\alpha} |t|^\alpha \right\}$$

можно записать в иной форме:

$$\exp \{ 2 \ln f(2^{-1/\alpha} s_* \operatorname{sign} t) s_*^{-\alpha} |t|^\alpha \}.$$

Этой формой записи мы уже пользовались при доказательстве теоремы 4.1.1.

Наконец, заметим, что при $T < \infty$ вместо характеристики s , определенной в (4.1.4), имеет смысл использовать характеристику

$$s_T = \min \{ |t| \leq T : |f(t)| = p \},$$

ибо, очевидно, для ее нахождения требуется меньше информации, чем для s . Тем не менее с целью упрощения выкладок мы не ставили перед собой такую задачу. Модификация доказательства очевидна.

§ 4.2. Устойчивость теоремы Д. Пойа

В предыдущем параграфе уже отмечалось, что при $\alpha = 2$ для характеристики нормального закона достаточно потребовать выполнения (4.1.3) лишь для $k = 2$, т. е. чтобы

$$f(t) = f^2(t/\sqrt{2}).$$

Однако это утверждение, как мы видели в гл. 1, является характеристической теоремой Д. Пойа. Изучим теперь устойчивость этой теоремы, не прибегая при этом к какому-либо рода моментным ограничениям. При изложении будем придерживаться работы [17].

Теорема 4.2.1. Пусть X_1, X_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины. Если статистики X_1 и $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ (λ, ε) -равномерно распределены, т. е. $\lambda(X_1, (X_1 + X_2)/\sqrt{2}) \leq \varepsilon$, то

$$\lambda(X_j, N) \leq C_1 \varepsilon^{1/5}. \quad (4.2.1)$$

Если дополнительно известно, что X_1, X_2 — симметричны, то

$$\lambda(X_j, N_*) \leq C_2 \varepsilon^{1/4}. \quad (4.2.2)$$

Здесь N, N_* — нормальные случайные величины (возможно, вырожденные), а C_1, C_2 — абсолютные константы.

Доказательство. Поскольку X_1 и $(X_1 + X_2)/\sqrt{2} - (\lambda, \varepsilon)$ -равнораспределены, то

$$f(t) = f^2(t/\sqrt{2}) + r(t), \quad |r(t)| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad |t| \leq 1/\varepsilon, \quad (4.2.3)$$

где $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины X_j . В § 3.1 мы уже видели, что в таком случае

$$\begin{aligned} f(t) = f^{2^m}(t/2^{m/2}) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{2^{j-1}-1} f^{2^{j-1}-(i+1)}(t/2^{(j-1)/2}) \times \\ \times f^{2^i}(t/2^{j/2}) r(t/2^{(j-1)/2}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(t) = f^{2^m}(t/2^{m/2}) + r_0(t), \quad (4.2.4)$$

$$|r_0(t)| \leq (2^m - 1)\varepsilon \quad \text{при} \quad |t| \leq 1/\varepsilon. \quad (4.2.5)$$

1°. Сначала докажем неравенство (4.2.2). Согласно теореме Т. В. Арака ([2], с. 226), для любого распределения F с неотрицательной характеристической функцией (т. е. $F \in \mathfrak{F}_+$) найдется такое безгранично делимое распределение B_n , что

$$\sup_{F \in \mathfrak{F}_+} \sup_x |F^{*n}(x) - B_n(x)| \leq C_3/n, \quad (4.2.6)$$

где C_3 — абсолютная константа. Следуя доказательству [2], нетрудно убедиться, что в (4.2.6) равномерную метрику можно заменить на λ или λ_0 .

Итак, полагая $n = 2^{m-1}$, из (4.2.4)–(4.2.6) получаем, что при $|t| \leq \min(1/\varepsilon, n)$

$$|f(t) - b_n^*(t)| \leq C_3/n + (2n - 1)\varepsilon, \quad (4.2.7)$$

где

$$b_n^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d B_n(x/\sqrt{n}).$$

Отметим, что идея аппроксимации функции $f(t)$ сопровождаемыми законами в рассматриваемой схеме была впервые высказана Л. Б. Клебановым и реализована в совместных работах [16, 17]. Определив $n = [\varepsilon^{-1/2}] + 1$, имеем:

$$f(t) = b_n^*(t) + r_1(t), \quad |r_1(t)| \leq C_4 \sqrt{\varepsilon}, \quad |t| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}. \quad (4.2.8)$$

Согласно (4.2.3),

$$f(t) = f^4(t/2) + 2f^2(t/2)r(t/\sqrt{2}) + r^2(t/\sqrt{2}) + r(t). \quad (4.2.9)$$

Вспомнив определение величины s (см. формулу (4.1.4)), как и ранее, обозначим

$$f_s(t) = f(st).$$

Пусть для некоторого фиксированного p $s \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$. Тогда из (4.2.9) следует, что

$$\ln f_s(t) = 4 \ln f_s(t/2) + r_3(t), \quad |t| \leq 1, \quad (4.2.10)$$

$$r_3(t) = \ln(1 + r_2(t)/f_s^2(t/\sqrt{2})),$$

$$|r_2(t)| = |2f_s^2(t/2)r(t/\sqrt{2}) + r^2(t/\sqrt{2}) + r(t)| \leq 3\varepsilon + \varepsilon^2,$$

$$|r_3(t)| \leq 7\varepsilon/p^2.$$

Заметим, что в силу симметричности рассматриваемых случайных величин $f(t)$ действительна.

Используя (4.2.8), аналогично получаем

$$\ln f_s(t) = \ln b_n(t) + r_4(t), \quad |t| \leq 1, \quad (4.2.11)$$

$$|r_4(t)| = |\ln(1 - r_1(st)/f(st))| \leq 2C_4 p^{-1} \sqrt{\varepsilon},$$

$$b_n(t) = b_n^*(st).$$

Воспользуемся каноническим представлением для безгранично делимых законов. Согласно формуле Леви—Хинчина, при условии действительности рассматриваемых характеристических функций

$$b_n(t) = \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) \frac{1 + x^2}{x^2} d\Theta(x) \right\}, \quad (4.2.12)$$

где $\Theta = \Theta_n(x)$ — неубывающая ограниченная функция такая, что

$$\Theta(-\infty) = 0.$$

Подынтегральное выражение в (4.2.12) при $x=0$ определяется по непрерывности и равно $-t^2/2$.

Отсюда в силу (4.2.6) и (4.2.7) при $|t| \leq 1$ имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (\cos tx - 1) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) = \\ & = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos \frac{tx}{2} - 1 \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) + r_5(t), \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

где

$$|r_5(t)| = |4r_4(t/2) - r_4(t) + r_3(t)| \leq 10C_2 p^{-1} \sqrt{\varepsilon} + 7\varepsilon/p^2.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos \frac{tx}{2} - 1 \right)^2 \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) = r_5(t)/2. \quad (4.2.14)$$

Обозначим

$$\mathfrak{P}_1 = \{x : 1 - \cos(tx/2) \geq \varepsilon^{1/4}\},$$

$$\mathfrak{P}_2 = \{x : 1 - \cos(tx/2) < \varepsilon^{1/4}\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (5C_4 p^{-1} + 1) \sqrt{\varepsilon} & \geq \int_{\mathfrak{P}_1} (1 - \cos(tx/2))^2 \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) \geq \\ & \geq \varepsilon^{1/4} \int_{\mathfrak{P}_1} (1 - \cos(tx/2)) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x), \\ \int_{\mathfrak{P}_1} (1 - \cos(tx/2)) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) & \leq (5C_4 p^{-1} + 1) \varepsilon^{1/4}. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Множество $\mathfrak{P}_3$ определим так:

$$\mathfrak{P}_3 = [-\pi/t, \pi/t] \cap \mathfrak{P}_2.$$

Используя формулу Маклорена, получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{P}_3} (1 - \cos(tx/2)) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) = \\ & = \frac{t^2}{8} \int_{\mathfrak{P}_3} d\Theta(x) + \frac{t^2}{8} \int_{\mathfrak{P}_3} x^2 d\Theta(x) - \\ & - \frac{t^3}{48} \int_{\mathfrak{P}_3} x(1+x^2) \sin(xtx) d\Theta(x), \quad x \in (0, 1). \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

В силу элементарного неравенства

$$1 - \cos u \geq 2u^2/\pi^2 \quad \text{при} \quad |u| \leq \pi/2$$

и из условия $x \in t\mathbb{P}_3$ следует, что

$$t^2 x^2 < \pi^2 \varepsilon^{1/4}.$$

Для $x \in t\mathbb{P}_3$ справедливо неравенство

$$|x \sin(xtx)| \leq tx^2.$$

Обозначив через $R(t)$ сумму двух последних слагаемых в (4.2.16), при $|t| \leq 1$ получим:

$$|R(t)| \leq 2\varepsilon^{1/4} \int_{t\mathbb{P}_3} d\Theta(x). \quad (4.2.17)$$

Заметим, что если $x \in \mathbb{P}_2 \setminus \mathbb{P}_3$, то $|x| \geq 3\pi/t$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{t(\mathbb{P}_2 \setminus \mathbb{P}_3)} \left(1 - \cos \frac{tx}{2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) \leq \\ & \leq \left(1 + \frac{1}{9\pi^2}\right) \varepsilon^{1/4} \int_{t(\mathbb{P}_2 \setminus \mathbb{P}_3)} d\Theta(x) \leq 2\varepsilon^{1/4} \int_{t(\mathbb{P}_2 \setminus \mathbb{P}_3)} d\Theta(x). \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Наконец, интеграл $\int_{t\mathbb{P}_3} d\Theta(x)$ в формуле (4.2.16) от t не зависит, поскольку

$$\mathbb{P}_4 = t\mathbb{P}_3 = [-\pi/2, \pi/2] \cap \{u: 1 - \cos(u/2) < \varepsilon^{1/4}\}.$$

Докажем, что этот интеграл конечен. В самом деле, так как

$$f_s^{(\varepsilon)}(t) \equiv f_s(t) \geq p \quad \text{при} \quad |t| \leq 1,$$

то для последовательности $\{f^{(\varepsilon)}(\cdot) = f_s^{(\varepsilon)}(\cdot)\}$ выполнены условия (1.2.2) и (1.2.3) теоремы 1.2.1. Согласно ее следствию 1.2.1, множество $\{f^{(\varepsilon)}\}$ относительно компактно в пространстве характеристических функций. Согласно теореме Золотарева о качественной устойчивости характеристизационной модели (см. § 1.2), последовательность $\{f^{(\varepsilon)}\}$ сходится к некоторому нормальному закону с дисперсией σ^2 . В силу условия

$$f_s(1) = p$$

нетрудно убедиться, что

$$\ln \frac{1}{p} \leq \sigma^2 \leq 2 \ln \frac{2}{p}.$$

С другой стороны, согласно лемме 5.5.2 из [53],

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta_{\varepsilon}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta_0(x) = \sigma^2.$$

Следующее неравенство справедливо при малых $\varepsilon > 0$ (обозначение $\Theta = \Theta_{\varepsilon}$ полагается очевидным):

$$0 \leq \int_{\mathbb{P}_1} d\Theta(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta_0(x) + \ln \frac{2}{p} \leq 3 \ln \frac{2}{p}. \quad (4.2.19)$$

Объединяя соотношения (4.2.15)–(4.2.19), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{tx}{2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) - \frac{t^2}{8} \int_{\mathbb{P}_1} d\Theta(x) \right| \leq \\ & \leq \left(5C_2 p^{-1} + 1 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta(x)\right) \varepsilon^{1/4} \leq \left(5C_4 p^{-1} + 1 + 6 \ln \frac{2}{p}\right) \varepsilon^{1/4}. \end{aligned}$$

Вспоминая (4.2.12), заключаем, что при $|t| \leq 1$

$$|\ln b_n(t) + Dt^2/2| \leq C_5 \varepsilon^{1/4},$$

$$D = \int_{\mathbb{P}_1} d\Theta(x), \quad C_5 = 5C_2 p^{-1} + 1 + 6 \ln \frac{2}{p}.$$

В силу (4.2.11) при $|t| \leq 1$

$$|\ln f_s(t) + Dt^2/2| \leq C_5 \varepsilon^{1/4} + 2C_4 p^{-1} \sqrt{\varepsilon}. \quad (4.2.20)$$

Так как $|\exp z - 1| \leq |z| \max(1, \exp \operatorname{Re} z)$, то отсюда при $|t| \leq 1$ получаем:

$$\begin{aligned} & |f_s(t) - \exp(-Dt^2/2)| \leq \\ & \leq \exp(-Dt^2/2) |\exp(\ln f_s(t) + Dt^2/2) - 1| \leq 2C_5 \varepsilon^{1/4}. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Остается, таким образом, рассмотреть область $|1 \leq t \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$.

При $|t| \leq 1/\varepsilon$ в силу (4.2.3)

$$f_s(t/s) = f_s^2(t/(s\sqrt{2})) + r(t), \quad |r(t)| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, при $|t| \leq 1/(s\varepsilon)$

$$f_s(t) = f_s^2(t/\sqrt{2}) + r(st).$$

Согласно теореме 3.1.1 и (4.2.21) имеем

$$\sup_{|t| \leq 1/(s\varepsilon)} |f_s(t) - \exp(-Dt^2/2)| \leq C_6 \varepsilon^{1/4} (D^{-1} + 1). \quad (4.2.22)$$

Оценив правую часть (4.2.20) величиной $C_7 \varepsilon^{1/4}$ и опять воспользовавшись соотношением $f_s(1) = p$, получим:

$$2 \ln 1/p - C_7 \varepsilon^{1/4} \leq D \leq 2 \ln 1/p + C_7 \varepsilon^{1/4}. \quad (4.2.23)$$

Из (4.2.22) и (4.2.23) следует оценка (4.2.2).

Пусть теперь для фиксированного выше p $s > 1/\sqrt{\varepsilon}$. Тогда, очевидно, возможен случай $D=0$, и поэтому соотношение (4.2.22) не содержит в себе никакой информации. В этом, однако, при условии $s > 1/\sqrt{\varepsilon}$ нет никакой необходимости. В самом деле, (4.2.21) означает, что при $|t| \leq s$

$$|f(t) - \exp(-Dt^2/(2s^2))| \leq 2C_5 \varepsilon^{1/4},$$

т. е. имеет место оценка (4.2.2).

2°. Теперь рассмотрим случай, когда неизвестно, являются ли X_1, X_2 симметричными. Поскольку, как мы только что показали, случай $s > 1/\sqrt{\varepsilon}$ тривиален, то достаточно рассмотреть противоположный случай, т. е. $s \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$. В проведенных рассуждениях следует сделать следующие изменения. Согласно [3], в (4.2.6) n следует заменить на $n^{2/3}$, а вместо (4.2.8) и (4.2.12) рассмотреть соотношения

$$f(t) = b_n^*(t) + r_1(t),$$

$$|r_1(t)| \leq C_4 \varepsilon^{2/5}, \quad |t| \leq \varepsilon^{-2/5} - 1,$$

$$b_n(t) = \exp \left\{ ita + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) \right\}.$$

Следовательно, наряду с (4.2.13) надо рассмотреть уравнение

$$\begin{aligned} ta + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin tx - \frac{tx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) = \\ = 2ta + 4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \frac{tx}{2} - \frac{tx}{2(1+x^2)} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) + r_6(t), \\ |r_6(t)| \leq C_8 \varepsilon^{2/5}, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

т. е.

$$\begin{aligned} & t\alpha/2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \frac{tx}{2} - \frac{tx}{2(1+x^2)} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{tx}{2} \left(1 - \cos \frac{tx}{2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) - r_6(t)/2. \end{aligned}$$

Для $u > 0$ обозначая

$$N(u) = - \int_u^{\infty} \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x)$$

и применяя неравенство Гельдера, получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\infty} \sin \frac{tu}{2} \left(\cos \frac{tu}{2} - 1 \right) dN(u) \right| \leq \\ & \leq \left(\int_0^{\infty} \sin^2 \frac{tu}{2} dN(u) \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} \left(1 - \cos \frac{tu}{2} \right)^2 dN(u) \right)^{1/2}. \quad (4.2.25) \end{aligned}$$

Убедимся, что первый интеграл в правой части (4.2.25) конечен. Действительно, в силу (4.2.15)–(4.2.19)

$$\int_0^{\infty} \sin^2 \frac{tu}{2} dN(u) = \int_0^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) \leq 4t^2 \ln(2/p).$$

Второй интеграл в правой части (4.2.25) оценивается очевидным образом на основании (4.2.14), в котором $r_5(t)$ заменено на $r_6(t)$, и (4.2.24).

Легко убедиться, что

$$\int_{\{0\}} \sin \frac{tu}{2} \left(\cos \frac{tu}{2} - 1 \right) \frac{1+u^2}{u^2} d\Theta(u) = 0. \quad (4.2.26)$$

Для $u < 0$, обозначая

$$M(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x),$$

аналогично (4.2.25) получаем, что

$$\left| \int_{-\infty}^0 \sin \frac{tx}{2} \left(1 - \cos \frac{tx}{2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) \right| \leq C_9 \varepsilon^{1/5}. \quad (4.2.27)$$

Объединяя (4.2.25)–(4.2.27), заключаем

$$\left| ta + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin tx - \frac{tx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Theta(x) \right| \leq C_{10} \varepsilon^{1/5},$$

что и следовало доказать.

§ 4.3. Почти независимость выборочного среднего и выборочной дисперсии

Пусть $X_1, \dots, X_k$ — повторная выборка. Хорошо известно, что для независимости выборочного среднего $\bar{X}$ и выборочной дисперсии S^2 ,

$$\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_j, \quad S^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X})^2, \quad k \geq 2, \quad (4.3.1)$$

необходима и достаточна нормальность повторной выборки (см. пример 1.3.4). Зададимся целью построить оценку устойчивости в этой характеристизации.

В настоящей и предыдущей главах исследование устойчивости характеристизационных задач проводилось в основном в λ -метрике. Мы обосновали такой выбор тем, что для рассматриваемых в этих главах задач основное функциональное уравнение записывается в характеристических функциях. Следовательно, если почти выполнимость того или иного статистического свойства измеряется в λ -метрике, то в основном уравнении остаточный член имеет первый порядок. Тем самым по оценке устойчивости сразу можно установить, что если порядок этой оценки не является первым, то возможность утечки информации обуславливается не сравнением метрик, а используемым методом построения оценки устойчивости. (Иногда, конечно, никакой „утечки“ не происходит, т. е. существует пример, доказывающий, что полученная оценка — неулучшаема.) Естественно, это обстоя-

тельство позволяет эффективно сравнивать результаты и методы различных авторов.

Тем не менее при выборе меры почти независимости в заключительных двух параграфах мы остановились на равномерной метрике

$$\rho(X, Y) = \sup_x |\mathbf{P}(X < x) - \mathbf{P}(Y < x)|,$$

руководствуясь при этом следующими соображениями. Во-первых, эта метрика инвариантна относительно параметра масштаба. Это очень естественное требование при рассмотрении практических задач, так как оно означает, что при замене единиц измерения на входе (например, при переходе от измерения в метрах к измерению в сантиметрах) ответ на выходе системы остается тем же. Хорошо известные слабые метрики Леви, метрика λ и т. п. таким свойством не обладают.

Во-вторых, равномерная метрика очень удобна в случае применения характеризационных теорем в качестве статистических критериев. О таких примерах еще в 1953 г. писал Ю. В. Линник (см. [51]) и отмечалось нами в [156].

Далее метрику ρ будем рассматривать в пространстве распределений, поскольку это позволяет более компактно ввести понятие (ρ, ε) -независимости. Напомним, что если Z_1, Z_2 — n -мерные случайные векторы с распределениями G_1, G_2 соответственно, то

$$\rho(G_1, G_2) = \rho(Z_1, Z_2) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |G_1(z) - G_2(z)|.$$

Определение 4.3.1. Случайные величины X и Y называются (ρ, ε) -независимыми, если

$$\rho(F_{(X, Y)}, F_X F_Y) \leq \varepsilon,$$

где $F_{(X, Y)}(x, y) = \mathbf{P}(X < x, Y < y)$, $F_X(x) = \mathbf{P}(X < x)$.

Полезно сравнить это определение с определением 3.2.1.

Теорема 4.3.1 (см. [157]). Пусть $X_1, \dots, X_k$ — независимые равномерно распределенные случайные величины. Если $\bar{X}$ и S^2 , определенные формулами (4.3.1), являются (ρ, ε) -независимыми, то существует нормальная (возможно, вырожденная) случайная величина $N_{a, \sigma}$ такая, что

$$\rho(X_j, N_{a, \sigma}) \leq C (\ln 1/\varepsilon)^{-1/2}, \quad (4.3.2)$$

где C зависит лишь от k .

Первая оценка устойчивости характеристики нормально-го закона независимостью выборочного среднего $\bar{X}$ и выборочной дисперсии S^2 была получена Хоанг Хыу Ньы. В своей работе [73] он первым рассмотрел дифференциальное уравнение

$$f''(t)f^{k-1}(t) - f'^2(t)f^{k-2}(t) + Df^k(t) = R(t) \quad (4.3.3)$$

(ср. с уравнением (1.3.6)) для характеристической функции $f(t)$,

$$f(t) = E \exp(itX_j),$$

причем $|R(t)| \leq \varepsilon$ в некотором интервале $|t| \leq T$, а D — некоторый параметр.

Уравнение (4.3.3), однако, Хоанг Хыу Ньы рассматривал лишь при дополнительных моментных ограничениях

$$EX_j = 0, \quad EX_j^2 = 1, \quad E|X_j|^{2+\delta} \leq M_\delta < \infty$$

(отсюда, в частности, следовало, что $D=1$).

Существенное продвижение в рассматриваемом вопросе принадлежит Ю. Р. Габовичу. В статье [6] он отказался от моментных ограничений. Для сравнительно широкого класса случайных величин ему удалось провести урезание так, что урезанные случайные величины X_j^N стали обладать следующими свойствами:

$$1^0. \rho(X_j^N, X_j) \leq C_1 \varepsilon;$$

$$2^0. \bar{X}_N = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_j^N \text{ и } S_N^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (X_j^N - \bar{X}_N)^2$$

являются $(\rho, C_2\varepsilon)$ -независимыми, где C_1, C_2 — некоторые величины, зависящие лишь от k .

Эти свойства позволяют с точностью $C_1\varepsilon$ заменить исходные функции распределения распределениями урезанных случайных величин, причем при такой замене условие (ρ, ε) -независимости статистик $\bar{X}$ и S^2 переходит с точностью до постоянной в условие такого же типа относительно статистик $\bar{X}_N$ (выборочного среднего урезанной выборки) и S_N^2 (выборочной дисперсии урезанной выборки). Таким образом, результат Ю. Р. Габовича позволяет получить основное дифференциальное уравнение (4.3.3) уже для характеристических функций урезанных случайных величин. Следует отметить,

что этот результат является в определенном смысле аналогом теоремы А. А. Зингера [14], устанавливающей существование всех моментов компонент векторов при условии, что некоторые квазиполиномиальные статистики от них независимы.

При этом необходимо отметить, что Ю. Р. Габовичем использовались ограничения на класс рассматриваемых случайных величин. Это были ограничения типа неутекания существенной вероятностной массы в бесконечность, а также ограничения типа невырожденности в нуле.

Нам удалось отказаться от всех этих ограничений, упростить доказательство результата Ю. Р. Габовича и предложить новый подход к составлению и анализу основного дифференциального уравнения (4.3.3).

А именно, предлагается использовать масштабирование исходных случайных величин и строгий учет вероятностной массы в нуле. Предлагаемый подход позволяет отказаться от таких конструкций, используемых Р. Ю. Габовичем, как сглаживание, дифференцирование остаточных членов и т. п.

В качестве исторической справки отметим, что до работы Ю. Р. Габовича [6] исследованием почти независимости $\bar{X}$ и S^2 занимались также Б. Беднарек-Козек и А. Козек [103]. В этой работе было реализовано лишь некоторое ослабление моментных ограничений Хоанг Хыу Ныу [73].

Для доказательства теоремы 4.3.1 потребуется следующая вспомогательная лемма.

Лемма 4.3.1 (см. [157]). Пусть $X_1, \dots, X_k$ ($k \geq 2$) — независимые равномерно распределенные случайные величины из класса

$$\mathcal{W}(p) = \{X: \mathbf{P}(|X| < 1) \leq p, \mathbf{P}(|X| \leq 1) \geq p\},$$

причем

$$2(1-p) \leq p^{k-1}/k^2. \quad (4.3.4)$$

Если $\bar{X}$ и S^2 (ρ, ε)-независимы, то урезанные случайные величины $X_1^N, \dots, X_k^N$,

$$X_i^N = \begin{cases} N, & \text{если } X_i > N, \\ X_i, & \text{если } |X_i| \leq N, \\ -N, & \text{если } X_i < -N, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

где $N = d(\ln 1/\varepsilon)^{1+\log_2 k}$, $d = 22k/10$, обладают следующими свойствами:

$$1^0. \rho(X_i, X_i^N) \leq C_1 \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k;$$

$$2^0. \bar{X}_N = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_j^N \text{ и } S_N^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (X_j^N - \bar{X}_N)^2$$

являются $(\rho, C_2 \varepsilon)$ -независимыми;

$$3^0. E(X_j^N)^2 \geq 1 - p, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Здесь C_1, C_2 — величины, зависящие лишь от k .

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= \{ \omega : |X_1| = |X_1(\omega)| \geq d_n, |X_j| = \\ &= |X_j(\omega)| \leq 1, \quad j = 2, \dots, k \}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X})^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_j^2 - \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_j \right)^2 = \\ &= \frac{k-1}{k^2} X_1^2 - \frac{2}{k^2} X_1 \sum_{j=2}^k X_j + \frac{k-1}{k^2} \sum_{j=2}^k X_j^2 - \frac{2}{k^2} \sum_{i>j>1} X_i X_j, \end{aligned}$$

а при $\omega \in \mathcal{M}_n$ и $d_n > 2$

$$\begin{aligned} \left| \frac{k-1}{k^2} X_1^2 - \frac{2}{k^2} X_1 \sum_{j=2}^k X_j \right| &\geq |X_1| \left| \frac{k-1}{k^2} |X_1| - \frac{2(k-1)}{k^2} \right| = \\ &= (k-1) d_n^2 / k^2 - 2(k-1) d_n / k^2, \\ \left| \frac{k-1}{k^2} \sum_{j=2}^k X_j^2 - \frac{2}{k^2} \sum_{i>j>1} X_i X_j \right| &\leq \frac{2(k-1)^2}{k^2}, \end{aligned}$$

то

$$S^2 \geq \frac{k-1}{k^2} d_n^2 - \frac{2(k-1)}{k^2} d_n - \frac{2(k-1)^2}{k^2}, \quad (4.3.6)$$

$$|\bar{X}| \geq (d_n - k + 1)/k. \quad (4.3.7)$$

Положим

$$d_{n+1} = 2k d_n.$$

Из (4.3.6) и (4.3.7) нетрудно убедиться, что при $\omega \in \mathcal{M}_n$

$$S^2(\omega) \geq d_n^2/(2k^2) = 2d_{n-1}^2,$$

$$|\bar{X}(\omega)| \geq d_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

если только

$$d_0 \geq 2(k-1)(1 + \sqrt{2k+1})/(2k-3).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{M}_n) &\leq \mathbf{P}(S^2 \geq 2d_{n-1}^2, |\bar{X}| \geq d_{n-1}) = \mathbf{P}(S^2 \geq 2d_{n-1}^2) - \\ &- \mathbf{P}(|\bar{X}| < d_{n-1}) + \mathbf{P}(S^2 < 2d_{n-1}^2, |\bar{X}| < d_{n-1}) \leq \mathbf{P}(S^2 \geq 2d_{n-1}^2) - \\ &- \mathbf{P}(|\bar{X}| < d_{n-1}) + \mathbf{P}(S^2 < 2d_{n-1}^2) \mathbf{P}(|\bar{X}| < d_{n-1}) + \varepsilon = \\ &= \mathbf{P}(S^2 \geq 2d_{n-1}^2) \mathbf{P}(|\bar{X}| \geq d_{n-1}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Оценим вероятность $\mathbf{P}(S^2 \geq 2d_{n-1}^2)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S^2 \geq 2d_{n-1}^2) &\leq \mathbf{P}\left(\left\{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_j^2 \geq d_{n-1}^2\right\} \cup \{|\bar{X}| > d_{n-1}\}\right) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^k \{X_j^2 \geq d_{n-1}^2\} \cup \{|\bar{X}| > d_{n-1}\}\right) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^k \{|X_j| \geq d_{n-1}\}\right) \leq \sum_{j=1}^k \mathbf{P}(|X_j| \geq d_{n-1}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(|\bar{X}| \geq d_{n-1}) \leq \sum_{j=1}^k \mathbf{P}(|X_j| \geq d_{n-1}).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\mathcal{M}_n) \leq \left(\sum_{j=1}^k \mathbf{P}(|X_j| \geq d_{n-1})\right)^2 + \varepsilon.$$

Так как $X_1, \dots, X_k$ — независимые равномерно распределенные случайные величины из класса $\mathcal{W}^p(p)$, то

$$p^{k-1} \mathbf{P}(|X_1| \geq d_n) \leq \mathbf{P}(\mathcal{M}_n) \leq k^2 \mathbf{P}^2(|X_1| \geq d_{n-1}) + \varepsilon,$$

т. е.

$$|P(|X_1| \geq d_n) \leq k^2 p^{1-k} P^2(|X_1| \geq d_{n-1}) + \varepsilon p^{1-k}, \quad (4.3.8)$$

$$d_n = 2k d_{n-1}, \quad d_0 = 1, 1.$$

По индукции докажем, что для любого натурального n

$$P_n \leq \beta^{2^n-1} P_0^{2^n} + \beta_0 \varepsilon, \quad (4.3.9)$$

где $P_s = P(|X_1| \geq d_s)$, $\beta = k^2 p^{1-k}$, $\beta_0 = 2p^{1-k}$.

Пусть $n=1$. Тогда (4.3.9) является очевидным следствием (4.3.8). Пусть (4.3.9) справедлива при $n=j$. Докажем, что в этом случае (4.3.9) справедлива и для $n=j+1$. Из (4.3.8) имеем:

$$\begin{aligned} P_{j+1} &\leq \beta P_j^2 + p^{1-k} \varepsilon \leq \beta (\beta^{2^j-1} P_0^{2^j} + \beta_0 \varepsilon)^2 + p^{1-k} \varepsilon = \\ &= \beta (\beta^{2^{j+1}-2} P_0^{2^{j+1}} + 2 \beta^{2^j-1} P_0^{2^j} \beta_0 \varepsilon + \beta_0^2 \varepsilon^2) + p^{1-k} \varepsilon = \\ &= \beta^{2^{j+1}-1} P_0^{2^{j+1}} + \varepsilon (2 \beta^{2^j-1} P_0^{2^j} \beta_0 + \beta_0^2 \varepsilon + p^{1-k}). \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Убедимся, что при $\varepsilon \leq 1/(4\beta_0)$

$$2 \beta^{2^j-1} P_0^{2^j} \beta_0 + \beta_0^2 \varepsilon + p^{1-k} \leq \beta_0. \quad (4.3.11)$$

В этом случае (4.3.10) и (4.3.11) будут означать, что (4.3.9) справедлива при $n=j+1$ и, следовательно, для любого натурального n .

Действительно, при $\varepsilon \leq 1/(4\beta_0)$

$$\beta_0^2 \varepsilon \leq \beta_0/4.$$

Далее,

$$P_0 \beta = P(|X_1| \geq 1, 1) \beta \leq (1-p) \beta.$$

Поскольку $2(1-p) \leq p/4$, т. е. $p \geq 8/9$, то

$$\begin{aligned} &2 \beta^{2^j-1} P_0^{2^j} \beta_0 + \beta_0^2 \varepsilon + p^{1-k} \leq \\ &\leq 2 \beta^{-1} (1-p) \beta \beta_0 + \beta_0/4 + p^{1-k} \leq 35 p^{1-k}/18 < \beta_0, \end{aligned}$$

что и следовало доказать. Соотношение (4.3.9) полностью доказано.

Так как, согласно предположению,

$$2(1-p) \leq p^{k-1}/k^2,$$

то в силу (4.3.9) и оценки $P_0 \leq 1-p$

$$P_n = P(|X_1| > (2k)^n d_0) \leq 2^{-2^n} \beta^{-1} + \beta_0 \varepsilon.$$

Определив

$$n = [\log_2 \log_2 1/\varepsilon] + 1$$

при $\varepsilon \leq 1/(4\beta_0)$ имеем:

$$P(|X_1| > (2k)^n d_0) \leq \varepsilon (\beta_0 + \beta^{-1}) \leq \varepsilon (2(9/8)^{k-1} + 1/k^2),$$

$$P(|X_1| > 2k d_0 (\ln 1/\varepsilon)^{1+\log_2 k}) \leq \varepsilon (2(9/8)^{k-1} + k^{-2}). \quad (4.3.12)$$

Теперь убедимся, что

$$\rho(X_i, X_i^N) \leq C_1 \varepsilon,$$

где, напомним, случайная величина X_i^N определяется согласно (4.3.5). Для этого достаточно заметить, что

$$\rho(X_i, X_i^N) \leq P(|X_i| > N)$$

и воспользоваться оценкой (4.3.12).

Переходим к доказательству пункта 2°, т. е. к доказательству $(\rho, C_2 \varepsilon)$ -независимости статистик $\bar{X}_N$ и S_N^2 . Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} & P(\bar{X}_N < u, S_N^2 < v) = \\ &= P\left(\bar{X} < u, S^2 < v, X_j = X_j^N; j = 1, \dots, k\right) \cup \\ & \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^k \{\bar{X}_N < u, S_N^2 < v, X_i \neq X_i^N\} \right\} \leq P(\bar{X} < u, S^2 < v) + \\ &+ \sum_{i=1}^k P(X_i \neq X_i^N) \leq P(\bar{X} < u) P(S^2 < v) + \varepsilon + \sum_{i=1}^k P(X_i \neq X_i^N) = \\ &= \left(P(\bar{X} < u, X_j = X_j^N, j = 1, \dots, k) + \right. \\ &+ \left. P\left(\bar{X} < u, \bigcup_{j=1}^k \{X_j \neq X_j^N\}\right) \right) P(S^2 < v) + \varepsilon + \sum_{i=1}^k P(X_i \neq X_i^N) \leq \\ &\leq P(\bar{X}_N < u) P(S^2 < v) + \varepsilon + 2 \sum_{i=1}^k P(X_i \neq X_i^N) \leq \\ &\leq P(\bar{X}_N < u) P(S_N^2 < v) + \varepsilon + 3 \sum_{i=1}^k P(X_i \neq X_i^N). \quad (4.3.13) \end{aligned}$$

И наоборот,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}(\bar{X}_N < u) \mathbf{P}(S_N^2 < v) \leq \left(\mathbf{P}(\bar{X}_N < u, X_j = X_j^N, j = 1, \dots, k) + \right. \\
 & \quad \left. + \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^k \{X_j \neq X_j^N\}\right) \right) \mathbf{P}(S_N^2 < v) \leq \\
 & \leq \mathbf{P}(\bar{X} < u) \left(\mathbf{P}(S^2 < v) + \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^k \{X_i \neq X_i^N\}\right) \right) + \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(X_i \neq X_i^N) \leq \\
 & \leq \mathbf{P}(\bar{X} < u, S^2 < v) + \varepsilon + 2 \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(X_i \neq X_i^N) \leq \\
 & \leq \mathbf{P}(\bar{X} < u, S^2 < v, X_j = X_j^N, j = 1, \dots, k) + \varepsilon + \\
 & \quad + 3 \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(X_i \neq X_i^N) \leq \\
 & \leq \mathbf{P}(\bar{X}_N < u, S_N^2 < v) + \varepsilon + 3 \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(X_i \neq X_i^N). \quad (4.3.14)
 \end{aligned}$$

Так как, согласно (4.3.12),

$$\mathbf{P}(X_i \neq X_i^N) = \mathbf{P}(|X_i| > N) \leq (2(9/8)^{k-1} + k^{-2})\varepsilon,$$

то в силу (4.3.13) и (4.3.14) получаем, что

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{P}(\bar{X}_N < u, S_N^2 < v) - \mathbf{P}(\bar{X}_N < u) \mathbf{P}(S_N^2 < v)| \leq \\
 & \leq \varepsilon + 3k(2(9/8)^{k-1} + k^{-2})\varepsilon = C_2\varepsilon. \quad (4.3.15)
 \end{aligned}$$

Неравенство (4.3.15) означает, что статистики $\bar{X}_N$ и S_N^2 ($\rho, C_2\varepsilon$)-независимы.

Переходим к заключительной и кратчайшей части доказательства леммы — пункта 3°. При $N \geq 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(X_1^N)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{X_1^N}(x) \geq \int_{|x| \geq 1} dF_{X_1^N}(x) = \\
 &= \mathbf{P}(|X_1^N| \geq 1) = \mathbf{P}(|X_1| \geq 1) \geq 1 - p.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.3.1. Фиксируем некоторую положительную величину d . Для произвольной действительной величины m и произвольной случайной величины X существует величина $z_0 = z_0(m, X) \geq 0$ такая, что

$$P(|X - m| < z_0) \leq d, \quad P(|X - m| \leq z_0) \geq d. \quad (4.3.16)$$

В случае $z_0 > 0$ определим

$$\hat{X} = (X - m)/z_0$$

и произведем урезание:

$$\hat{X}^N = \begin{cases} \hat{X}, & \text{если } |\hat{X}| \leq N, \\ N, & \text{если } \hat{X} > N, \\ -N, & \text{если } \hat{X} < -N. \end{cases} \quad (4.3.17)$$

Рассмотрев функцию распределения случайной величины $X - m$, нетрудно убедиться, что при фиксированной X $z_0 = z_0(m)$ — непрерывная и неубывающая функция. Это означает, что для любого $N > 0$ существует $m = m(N)$ такое, что

$$E \hat{X}^N = 0. \quad (4.3.18)$$

Действительно, чтобы убедиться в справедливости (4.3.18), в силу непрерывности и неубывания функции $z_0 = z_0(m)$ достаточно заметить, что $E[\hat{X}^N(m)]^+$ также является непрерывной неубывающей функцией от m , а $E[\hat{X}^N(m)]^-$ — непрерывной невозрастающей.

В дальнейшем штрихом будем обозначать сдвиг на величину m :

$$X' = X - m.$$

Введем еще одно обозначение:

$$p_1 = P(X'_1 = 0).$$

Если $p_1 \geq 1 - \sqrt{\varepsilon}$, то, очевидно,

$$\rho(X_1, E) \leq \sqrt{\varepsilon},$$

где E — вырожденная в точке m случайная величина, и теорема доказана.

Пусть теперь $p_1 < 1 - \sqrt[3]{\varepsilon}$. В (4.3.16) положим $X = X_1$ и определим d так:

$$d = (1 + p_2)/2, \quad p_2 = \max(p_1, p_*),$$

где p_* — решение уравнения $2(1 - p) = p^{k-1}/k^2$, $p_* \geq 8/9$ (ср. с неравенством (4.3.4)).

Убедимся, что при таком выборе d в (4.3.16) справедлива оценка $z_0 > 0$. Действительно, если

$$p_* \leq p_1 < 1 - \sqrt[3]{\varepsilon},$$

то

$$d = (1 + p_1)/2$$

и второе из соотношений (4.3.16) при $z_0 = 0$ и $\bar{X} = \bar{X}_1$ абсурдно:

$$p_1 \geq (1 + p_1)/2 = p_1 + (1 - p_1)/2 > p_1.$$

Если $p_1 < p_*$, то из (4.3.16) получаем следующее противоречие:

$$p_1 \geq (1 + p_*)/2 = p_* + (1 - p_*)/2 \geq p_*.$$

Итак, существуют m и $z_0 > 0$ такие, что при урезании случайной величины

$$\hat{X}_1 = (X_1 - m)/z_0$$

по правилу (4.3.17) справедливы соотношения

$$\mathbf{P}(|\hat{X}_1| < 1) \leq (1 + p_2)/2, \quad \mathbf{P}(|\hat{X}_1| \leq 1) \geq (1 + p_2)/2, \quad (4.3.19)$$

т. е. $\hat{X}_1 \in \mathcal{W}((1 + p_2)/2)$ и

$$\mathbf{E} \hat{X}_1^N = 0. \quad (4.3.20)$$

В силу равномерности случайных величин $X_1, \dots, X_k$ свойствами (4.3.19) и (4.3.20) обладают также случайные величины $X_2, \dots, X_k$.

Убедимся, что $\hat{X}$ и $\hat{S}^2$,

$$\hat{X} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{X}_j, \quad \hat{S}^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\hat{X}_j - \hat{X})^2,$$

являются (ρ, ϵ) -независимыми. Действительно,

$$\begin{aligned} & \sup_{x, y} |\mathbf{P}(\bar{X} < x, \bar{S}^2 < y) - \mathbf{P}(\bar{X} < x) \mathbf{P}(\bar{S}^2 < y)| = \\ &= \sup_{x, y} \left| \mathbf{P}\left(\frac{1}{z_0 k} \sum_{j=1}^k X'_j < x, \frac{1}{z_0^2 k} \sum_{j=1}^k \left(X'_j - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X'_j\right)^2 < y\right) - \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{P}\left(\frac{1}{z_0 k} \sum_{j=1}^k X'_j < x\right) \mathbf{P}\left(\frac{1}{z_0^2 k} \sum_{j=1}^k \left(X'_j - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X'_j\right)^2 < y\right) \right| = \\ &= \sup_{x, y} |\mathbf{P}(\bar{X} < z_0 x + m, \bar{S}^2 < z_0^2 y) - \mathbf{P}(\bar{X} < z_0 x + m) \mathbf{P}(\bar{S}^2 < z_0^2 y)| = \\ &= \sup_{x, y} |\mathbf{P}(\bar{X} < x, \bar{S}^2 < y) - \mathbf{P}(\bar{X} < x) \mathbf{P}(\bar{S}^2 < y)| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Оценка $p_1 < 1 - \sqrt[3]{\epsilon}$ слишком груба, поэтому зададимся целью построения более точной оценки величины p_1 . А именно, методом доказательства от противного убедимся, что

$$p_1 = \mathbf{P}(X'_1 = 0) = \mathbf{P}(\hat{X}_1^N = 0) < 2/3. \quad (4.3.21)$$

В самом деле, пусть (4.3.21) неверно, т. е. пусть

$$\mathbf{P}(X = 0) \geq 2/3, \quad X = \hat{X}_1^N. \quad (4.3.22)$$

В таком случае докажем, что

$$|f(t)| \geq 1/3, \quad \forall t \in (-\infty, \infty), \quad (4.3.23)$$

где $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины $X = \hat{X}_1^N$. Обозначив $F_X(x) = \mathbf{P}(X < x)$, имеем:

$$\begin{aligned} |f(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) dF_X(x) \right| \geq \mathbf{P}(X = 0) - \\ &- \left| \int_{-\infty}^{-0} \exp(itx) dF_X(x) + \int_{0+}^{+\infty} \exp(itx) dF_X(x) \right| \geq \\ &\geq 2/3 - \mathbf{P}(X \neq 0) \geq 1/3. \end{aligned}$$

Так как $\hat{X}_1 \in \mathcal{W}((1+p_2)/2)$, а $\hat{X}$ и $\hat{S}^2$ (ρ, ϵ) -независимы, то, согласно лемме 4.3.1, статистики

$$\hat{X}_N = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{X}_j^N, \quad \hat{S}_N^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\hat{X}_j^N - \hat{X}_N)^2$$

являются $(\rho, C_2\varepsilon)$ -независимыми. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} k \hat{S}_N^2 \exp(it \hat{X}_N) &= k \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v \exp(itku) dF_{(\hat{X}_N, \hat{S}_N^2)}(u, v) = \\ &= k \int_0^\infty v dF_{\hat{S}_N^2}(v) \int_{-\infty}^\infty \exp(itku) dF_{\hat{X}_N}(u) + \\ &+ k \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v \exp(itku) w(du, dv) = \\ &= k \frac{k-1}{k} Df^k(t) + R_1(t), \quad -\infty < t < \infty, \end{aligned}$$

где $D = D(\hat{X}_j^N) = \mathbf{E}(\hat{X}_j^N)^2 - (\mathbf{E} \hat{X}_j^N)^2$,

$$F_{(U, V)}(u, v) = \mathbf{P}(U < u, V < v),$$

$$R_1(t) = k \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v \exp(itku) w(du, dv),$$

$$|w(u, v)| = |F_{(\hat{X}_N, \hat{S}_N^2)}(u, v) - F_{\hat{X}_N}(u) F_{\hat{S}_N^2}(v)| \leq C_2 \varepsilon \quad (4.3.24)$$

для любых $(u, v) \in \mathbf{R}^2$.

Заметим, что при выборе сдвига m , удовлетворяющего соотношению (4.3.20), получаем

$$D = \mathbf{E}(\hat{X}_j^N)^2. \quad (4.3.25)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} k \hat{S}_N^2 \exp(it \hat{X}_N) &= \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^k ((\hat{X}_j^N)^2 - k \hat{X}_N^2) \exp(it \hat{X}_N) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^k \mathbf{E} (\hat{X}_j^N)^2 \exp \left(it \sum_{j=1}^k \hat{X}_j^N \right) - \\ &- \frac{1}{k} \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^k \hat{X}_j^N \right)^2 \exp \left(it \sum_{j=1}^k \hat{X}_j^N \right) = -kf''(t) f^{k-1}(t) + \\ &+ (k-1) f^{k-2}(t) f'^2(t) + f^{k-1}(t) f''(t) = \\ &= -(k-1) f''(t) f^{k-1}(t) + (k-1) f'^2(t) f^{k-2}(t). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого действительного t

$$f''(t)f^{k-1}(t) - f'^2(t)f^{k-2}(t) + Df^k(t) = R_2(t), \quad (4.3.26)$$

$$R_2(t) = -R_1(t)/(k-1).$$

Как уже отмечалось в начале параграфа, дифференциальное уравнение (4.3.26) для характеристической функции $g(t) = E \exp itY$,

$$g''(t)g^{n-1}(t) - g'^2(t)g^{n-2}(t) + Dg^n(t) = R_2^*(t),$$

где случайная величина Y имеет ограниченный абсолютный момент порядка $2 + \delta$, впервые рассматривалось в работе [73]. При этом необходимо подчеркнуть, что (ρ, ε) -независимость статистик $\bar{X}$ и S^2 нами по существу используется лишь в доказательстве леммы. Основное дифференциальное уравнение (4.3.26), на котором базируется доказательство, при вышеупомянутом моментном ограничении можно получить, используя менее ограничительное свойство почти постоянства регрессии S^2 на $\bar{X}$.

Из (4.3.23) и (4.3.26) получаем, что

$$\frac{f''(t)}{f(t)} - \frac{f'^2(t)}{f^2(t)} + D = \frac{R_2(t)}{f^k(t)}, \quad (4.3.27)$$

или, обозначив $R_3(t) = R_2(t)f^{-k}(t)$,

$$\frac{d^2 \ln f(t)}{dt^2} + D = \bar{R}_3(t), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Так как $f(0) = 1$, а в силу (4.3.20) $f'(0) = 0$, то для любого $t \in R^1$

$$|\ln f(t) + Dt^2/2| = \left| \int_0^t \int_0^v R_3(u) du dv \right|. \quad (4.3.28)$$

Займемся оценкой величины

$$R_4(t) = \int_0^t \int_0^v R_3(u) du dv. \quad (4.3.29)$$

Докажем сначала, что

$$|R_1(t)| < 4\varepsilon N^3 k(1 + k|t|). \quad (4.3.30)$$

Действительно, так как

$$\hat{S}_N^2 \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\hat{X}_j^N)^2,$$

то

$$\begin{aligned} |R_1(t)| &= k \left| \int_0^\infty v \exp(itku) w(du, dv) \right| = \\ &= k \left| \int_0^{N^3} \int_{-N}^N v \exp(itku) w(du, dv) \right|. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} |R_1(t)| &\leq 4kN^2\varepsilon + 2k^2 |t| \varepsilon N + \\ &+ k \left| \int_0^{N^3} \int_{-N}^N w(u, v) d \exp(itku) dv \right| \leq \\ &\leq 4kN^2\varepsilon + 2k^2 |t| N \varepsilon + 2k^2 N^3 |t| \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда следует (4.3.30).

В силу (4.3.23) и (4.3.30) справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} |R_3(t)| &\leq |R_1(t)| |f(t)|^{-k} (k-1)^{-1} \leq \\ &\leq 4k(k-1)^{-1} 3^k N^3 (1+k|t|) \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|R_4(t)| \leq 2k(k-1)^{-1} 3^{k-1} N^3 (k|t|^3 + 3t^2) \varepsilon. \quad (4.3.31)$$

Так как $|\exp z - 1| \leq |z| \max(1, \exp \operatorname{Re} z)$, то

$$\begin{aligned} |f(t) - \exp(-Dt^2/2)| &\leq \\ &\leq \exp(-Dt^2/2) |1 - \exp(\ln f(t) + Dt^2/2)| \leq \\ &\leq \exp(-Dt^2/2) |\ln f(t) + Dt^2/2| \times \\ &\times \max \left(1, \exp(Dt^2/2 + \operatorname{Re} \ln f(t)) \right) \leq \\ &\leq |\ln f(t) + Dt^2/2| \max(\exp(-Dt^2/2), |f(t)|) \leq \\ &\leq |R_4(t)|. \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Согласно известной лемме Эссеена,

$$\rho(X, Y) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T |f_X(t) - f_Y(t)| |t|^{-1} dt + \\ + \frac{24}{\pi T} \sup_x \left| \frac{d}{dx} F_X(x) \right|, \quad (4.3.33)$$

$$F_X(x) = P(X < x), \quad f_X(t) = E \exp(itX),$$

если только производная функция $P(X < x)$ существует. Поэтому на основе (4.3.31)–(4.3.33) записываем:

$$\rho(X, N_D) \leq 2\pi^{-1} k (k-1)^{-1} 3^{k-1} N^3 \varepsilon \int_{-T}^T (kt^2 + 3|t|) dt + \\ + 24/(\pi T \sqrt{2\pi D}) = 2\pi^{-1} k (k-1)^{-1} 3^{k-1} N^3 (2kT^3/3 + 3T^2) \varepsilon + \\ + 24/(\pi T \sqrt{2\pi D}), \quad (4.3.34)$$

где N_D — нормальная случайная величина с нулевым средним и дисперсией D , определяемой формулой (4.3.25).

Согласно п. 3° леммы, оценке $p_1 < 1 - \sqrt{\varepsilon}$ и определению величины p_2 , существует постоянная $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$ такая, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$

$$D = E(\hat{X}_1^N)^2 \geq 1 - (1 + p_2)/2 > \sqrt{\varepsilon}/2. \quad (4.3.35)$$

Положив в (4.3.34) $T = \varepsilon^{-5/16}$ и вспомнив определение N (см. формулировку леммы 4.3.1), получим:

$$\rho(X, N_D) \leq C_4 \varepsilon^{1/16} (\ln 1/\varepsilon)^{3+3 \log_2 k}, \quad (4.3.36)$$

где C_4 зависит лишь от k .

Соотношение (4.3.36) означает, что при $\varepsilon \downarrow 0$

$$\rho(X, N_D) \downarrow 0.$$

Следовательно, если X в точке 0 имеет скачок, то независимо от значения величины $D = D_\varepsilon > 0$ этот скачок не превосходит $2C_4 \varepsilon^{1/16} (\ln 1/\varepsilon)^{3+3 \log_2 n}$. Это (при $\varepsilon \leq \varepsilon_1(k)$, $\varepsilon_1(k)$ — достаточно мало) очевидным образом противоречит предположению (4.3.22). Справедливость неравенства (4.3.21) полностью доказана.

На основе только что доказанного неравенства (4.3.21) и оценки (4.3.19) существенно улучшим оценку (4.3.35):

$$D = E(\hat{X}_1^N)^2 \geq P(|\hat{X}_1| \geq 1) \geq 1/2 - p_*/2. \quad (4.3.37)$$

Мы уже видели, что в области $|t| \leq q(\varepsilon)$,

$$q = q(\varepsilon) = \sup \{ \tau > 0 : |f(t)| \geq \varepsilon^\delta \text{ при } |t| \leq \tau \}, \quad (4.3.38)$$

$$\delta = 1/(k+2),$$

справедливо соотношение (4.3.27), а следовательно, и (4.3.28). Определив $R_4(t)$ с помощью (4.3.29), перейдем к оцениванию величины $|R_4(t)|$ в области $|t| \leq q(\varepsilon)$. Воспользовавшись (4.3.30), запишем:

$$\begin{aligned} |R_3(t)| &\leq |R_1(t)| |f(t)|^{-k} (k-1)^{-1} \leq \\ &\leq 4\varepsilon N^3 (1+k|t|) \varepsilon^{-k\delta} (k-1)^{-1}, \\ |R_4(t)| &\leq 4\varepsilon^{1-k\delta} N^3 (t^2 + k|t|^3/3), \quad |t| \leq q(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

Повторяя рассуждения (4.3.32), (4.3.33) и учитывая (4.3.37), получаем:

$$\begin{aligned} \rho(X, N_D) &\leq 4\pi^{-1} \varepsilon^{1-k\delta} N^3 \int_{-q_0}^{q_0} (|t| + kt^2/3) dt + \\ &+ 24/(\pi q_0 \sqrt{2\pi D}) \leq \\ &\leq 4\pi^{-1} \varepsilon^{1-k\delta} N^3 (q_0^2 + 2kq_0^3/9) + 24/(\pi q_0 p^*), \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

где $q_0 = q_0(\varepsilon) = \sqrt{2A \ln 1/\varepsilon}$, $p = \sqrt{\pi(1-p_*)} = p^*(k) > 0$, а A определяется из неравенства, которое подробно рассматривалось в гл. 3:

$$q(\varepsilon) \geq q_0(\varepsilon).$$

Итак, займемся подбором величины A . Так как при $|t| \leq q$

$$|f(t) - \exp(-Dt^2/2)| \leq |R_4(t)|$$

(см. (4.3.32)), то

$$|f(t)| \geq \exp(-Dt^2/2) - |R_4(t)|. \quad (4.3.41)$$

Убедимся, что если $DA = 1 - k\delta - \delta/2$, то при $|t| \leq q_0$

$$|f(t)| \geq \varepsilon^\delta,$$

т. е.

$$q \geq q_0 = \sqrt{(3 \ln 1/\varepsilon)/(D(k+2))}.$$

Это делается непосредственной подстановкой (4.3.39) в (4.3.41):

$$|f(t)| \geq \exp(-DA \ln 1/\varepsilon) - 4\varepsilon^{1-k\delta} N^3 (q_0^2 + kq_0^3/3).$$

При указанном значении $DA = 1 - k\delta - \delta/2$ правая часть этого неравенства не меньше величины ε^δ при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2(k)]$, где $\varepsilon_2(k)$ — некоторая положительная величина, зависящая лишь от k .

Подставляя в (4.3.40) значение

$$q_0^2 = 3D^{-1}(k+2)^{-1} \ln 1/\varepsilon,$$

получаем

$$\rho(\hat{X}_1^N, N_D) \leq C_5 (\ln 1/\varepsilon)^{-1/2},$$

где C_5 — величина, зависящая лишь от k .

В силу п. 1° леммы 4.3.1

$$\rho(\hat{X}_1^N, \hat{X}_1) \leq C_1 \varepsilon,$$

поэтому согласно неравенству треугольника

$$\rho(\hat{X}_1, N_D) \leq \rho(\hat{X}_1, \hat{X}_1^N) + \rho(\hat{X}_1^N, N_D) \leq C_1 \varepsilon + C_5 (\ln 1/\varepsilon)^{-1/2}.$$

Поскольку равномерная метрика обладает легко проверяемым свойством инвариантности относительно параметра масштаба, т. е.

$$\rho(cY, cZ) = \rho(Y, Z)$$

для любого $c \in \mathbf{R}^1$ любых случайных величин Y и Z , то

$$\rho(\hat{X}_1, N_D) = \rho(X'_1/z_0, N_D) = \rho(X'_1, N_{z_0^2 D}).$$

Следовательно,

$$\rho(X_1, N_{z_0^2 D + m}) \leq C_5 (\ln 1/\varepsilon)^{-1/2} + C_1 \varepsilon.$$

Теорема доказана.

В заключение полезно следующее замечание. Мы видели, что в условиях теоремы 4.3.1

$$\rho(X_j, N_{a, \sigma}) \leq C_3 (\ln 1/\varepsilon)^{-1/2}, \quad (4.3.42)$$

т. е. порядок устойчивости является логарифмическим. Обратив внимание на (4.3.32), видим, что порядок в (4.3.42) был бы степенным, если бы таковой была оценка величины $q(\varepsilon)$. Однако в силу теоремы 3.3.1 этого не может быть. Точнее, характеристическая функция

$$f_\varepsilon(t) = (1 - \varepsilon) \exp(-t^2/2) + \varepsilon \exp(ita),$$

рассматриваемая в доказательстве этой теоремы (см. (3.3.6)), с одной стороны, в точке

$$t_0 = \sqrt{2 \ln(1/\varepsilon - 1)}$$

обращается в нуль, т. е. имеет место оценка

$$q(0, f_\varepsilon) \leq c \sqrt{\ln 1/\varepsilon}, \quad c = \text{const},$$

а, с другой стороны, при $\varepsilon \leq \varepsilon_3 < 1$, $\varepsilon_3 = \text{const}$, $f_\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению (4.3.26) при $k=2$, $D=1$, и при этом справедлива оценка

$$|R_2(t)| \leq \varepsilon.$$

Таким образом, оценка снизу для $q(\varepsilon)$ в рассматриваемой задаче не может иметь порядок по ε лучше, чем $\sqrt{\ln 1/\varepsilon}$.

§ 4.4. Устойчивость характеристики свойств независимости суммы и разности

В предыдущем параграфе отмечались преимущества равномерной метрики ρ . А именно, она инвариантна относительно параметра масштаба, удобна при использовании результатов устойчивости для построения непараметрических статистических критериев.

Поэтому настоящий параграф посвящен рассмотрению устойчивости характеристизационной теоремы С. Н. Бернштейна (см. § 2.6, § 3.2) именно в этой метрике, а также ее аналога в пространстве характеристических функций:

$$\lambda_0(f_X, f_Y) = \lambda_0(X, Y) = \sup_t |f_X(t) - f_Y(t)|,$$

где, как обычно, f_X, f_Y — характеристические функции случайных величин (или случайных векторов) X и Y соответственно.

Отметим, что изучению (ρ, ε) -независимых статистик S и D ,

$$S = X_1 + X_2, \quad D = X_1 - X_2,$$

наряду с другими задачами посвятили свои работы Хоанг Хыу Ньы [73], Л. Д. Мешалкин [131], Б. Беднарек-Козек и А. Козек [103], Ю. Р. Габович [6, 7]. Последнему по данной проблематике удалось обобщить и усилить результаты вышеперечисленных авторов.

Теорема Ю. Р. Габовича (см. [6, 7]). Пусть X_1, X_2 — независимые случайные величины из класса $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{B} = \{X : \mathbf{P}(|X| > d_1) < d_2, \mathbf{P}(|X| > \delta_1) > \delta_2\}, \quad (4.4.1)$$

где $d_2 < 1/9$, d_1, δ_1, δ_2 — фиксированные положительные параметры. Если $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ (ρ, ε) -независимы, то при $j=1, 2$

$$\rho(X_j, N_j) \leq C(\mathcal{B}) \varepsilon^{1/3} (\ln 1/\varepsilon)^{(1+2 \log_2 3)/3}, \quad (4.4.2)$$

где N_j — некоторая нормальная случайная величина, а $C = C(\mathcal{B})$ зависит лишь от $d_1, d_2, \delta_1, \delta_2$.

В [7] получен также многомерный аналог этой теоремы.

Смысл условий в определении класса $\mathcal{B}$ заключается в том, чтобы воспрепятствовать „утеканию“ значительной вероятностной массы в бесконечность и обеспечить определенную степень невырожденности рассматриваемых величин.

Нам удалось улучшить оценку Ю. Р. Габовича (4.3.2) и, главное, отказаться от условий (4.4.1).

Теорема 4.4.1 (см. [92]). Пусть X_1, X_2 — независимые ~~равно~~распределенные случайные величины. Если статистики $S = X_1 + X_2$ и $D = X_1 - X_2$ (ρ, ε) -независимы, то

$$\rho(X_j, N) \leq C_1 \varepsilon^{1/3} (\ln 1/\varepsilon)^{\frac{2}{3} \log_2 3}, \quad (4.4.3)$$

где C_1 — абсолютная константа, а N — нормальная (возможно, вырожденная) случайная величина.

Замечание. Если в формуле (4.4.3) N — нормальная невырожденная случайная величина, то ее дисперсией и средним являются величины

$$-2z_0^2 \ln |f_{\hat{X}_j}(1)|, \quad 2z_0 \arg f_{\hat{X}_j}(1/2)$$

соответственно, где $\hat{X}_j = X_j/z_0$, z_0 определяется формулой (4.4.17), $\hat{X}_j^N$ — урезанная на уровне

$$N = 3 (\log_2 1/\varepsilon)^{\log_2 3}$$

случайная величина $\hat{X}_j$ и, наконец, $f_U(t)$ — характеристическая функция случайной величины U .

Потеря порядка с ε в условиях теоремы до $\varepsilon^{1/3}$ с логарифмическим множителем в (4.4.3) происходит исключительно в результате перехода от функционального уравнения в терминах функций распределения

$$(4.4.4) \quad F_{(S, D)}(x, y) = F_S(x) F_D(y) + r(x, y), \\ |r(x, y)| \leq \varepsilon, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

к функциональному уравнению (4.4.31) в терминах характеристических функций. На основе этого замечания легко убедиться, что если вместо условия (ρ, ε) -независимости статистик $S = X_1 + X_2$ и $D = X_1 - X_2$ потребовать выполнения более жесткого условия (ρ^*, ε) -независимости, используемого Л. Д. Мешалкиным [131], то вместо оценки (4.4.3) получим более сильную оценку:

$$\rho(X_j, N) \leq C_2 \varepsilon^{1/2} (\ln 1/\varepsilon)^{\frac{2}{3} \log_2 3}.$$

Далее нам потребуются следующие три вспомогательные леммы.

Лемма Хоанг Хыу Ны [73]. Пусть X_1, X_2 — независимые случайные величины и

$$\mathbb{E} X_j = a_j, \quad \sigma^2 = (\mathbb{E} (X_1 - a_1)^2 + \mathbb{E} (X_2 - a_2)^2)/2, \quad \mathbb{E} |X_j|^3 \leq M_3.$$

Если статистики $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ (ρ, ε) -независимы, то при $|t| \leq \sigma^{-1} \sqrt{\ln 1/\varepsilon}$

$$|f_{X_j}(t) - \exp(ia_j t - \sigma^2 t^2/2)| \leq C_3 M_3 \sigma^{-2} \varepsilon^{1/24}, \quad (4.4.5)$$

где $f_{X_j}(t) = \mathbb{E} \exp(itX_j)$, а C_3 — абсолютная константа.

Следует отметить, что порядок $1/24$ в (4.4.5) может быть улучшен более аккуратным использованием тех же соображений Хоанг Хыу Ны [73], однако это для нас несущественно,

так как важен лишь сам факт степенного порядка близости $f_{X_j}(t)$ к характеристической функции определенного нормального закона.

Лемма Ю. Р. Габовича [7]. Пусть X, Y — случайные величины с характеристическими функциями f, g соответственно. Пусть, кроме того,

$$Q_X(M) = P(|X| > M), \quad Q_Y(M) = P(|Y| > M),$$

$$G(x) = P(Y < x), \quad A = \sup \{G'(x) : x \in \mathbf{R}^1\}.$$

Если $M > 1, T > 1$, то

$$\rho(X, Y) \leq \frac{1}{\pi - 2} \left(\int_{\Delta/(TM)}^T |f(t) - g(t)| t^{-1} dt + \right.$$

$$\left. + (4/M + (8\pi + 2e)A)/T + \pi Q_X(M) + \pi Q_Y(M) \right),$$

где $\Delta = \min(1, A)/16$.

Эта лемма представляет собой некоторый аналог хорошо известной леммы Эссеена.

Лемма 4.4.1 (см. [92]). Пусть X_1, X_2 — независимые случайные величины из класса $\mathcal{G}(p)$,

$$\mathcal{G}(p) = \{X : P(|X| > 1) < p\},$$

причем $p \leq 1/9$. Если $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ (ρ, ε) -независимы, то урезанные случайные величины X_1^N и X_2^N ,

$$X_j^N = \begin{cases} N, & \text{если } X_j > N, \\ X_j, & \text{если } |X_j| \leq N, \\ -N, & \text{если } X_j < -N, \end{cases}$$

где $N = 3(\log_2 1/\varepsilon)^{\log_2 3}$, обладают следующими свойствами:

1°. $\rho(X_j, X_j^N) \leq C_4 \varepsilon, \quad j = 1, 2;$

2°. $X_1^N + X_2^N$ и $X_1^N - X_2^N$ $(\rho, C_5 \varepsilon)$ -независимы;

3°. $E|X_j^N|^r \leq M_r < \infty$ для любого $r > 0$.

Здесь C_4, C_5 — абсолютные константы, а M_r — величина, зависящая лишь от r .

Доказательство леммы 4.4.1. Обозначим

$$d_{k+1} = 3d_k, \quad d_0 = 1.$$

Используя только независимость случайных величин X_1, X_2 и (ρ, ε) -независимость статистик $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_1| > d_{k+1}) \mathbf{P}(|X_2| \leq d_k) &= \mathbf{P}(|X_1| > d_{k+1}, |X_2| \leq d_k) \leq \\ &\leq \mathbf{P}(|X_1 + X_2| > d_{k+1} - d_k, |X_1 - X_2| > d_{k+1} - d_k) \leq \\ &\leq \mathbf{P}(|X_1 + X_2| > 2d_k) \mathbf{P}(|X_1 - X_2| > 2d_k) + \varepsilon \leq \\ &\leq \mathbf{P}^2(\{|X_1| > d_k\} \cup \{|X_2| > d_k\}) + \varepsilon \leq \\ &\leq (\mathbf{P}(|X_1| > d_k) + \mathbf{P}(|X_2| > d_k))^2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_1| > d_{k+1}) &\leq \\ &\leq (\mathbf{P}(|X_1| > d_k) + \mathbf{P}(|X_2| > d_k))^2 / \mathbf{P}(|X_2| \leq d_k) + \varepsilon / \mathbf{P}(|X_2| \leq d_k). \end{aligned}$$

Получив аналогичную оценку для $\mathbf{P}(|X_2| > d_{k+1})$ и учитывая то обстоятельство, что $X_j \in \mathcal{G}(\rho), j=1, 2$, в обозначении

$$S(u) = \mathbf{P}(|X_1| > u) + \mathbf{P}(|X_2| > u)$$

имеем

$$S(d_{k+1}) \leq \frac{2}{1-p} S^2(d_k) + \frac{2\varepsilon}{1-p}. \quad (4.4.6)$$

Следуя Ю. Р. Габовичу [7], методом математической индукции докажем, что

$$S(d_j) \leq \left(\frac{2}{1-p}\right)^{2^j-1} S^{2^j} + \frac{6\varepsilon}{1-p}, \quad j=1, 2, \dots, \quad (4.4.7)$$

где $S = S(d_0) = S(1)$.

Действительно, при $j=1$ (4.4.7) является очевидным следствием неравенства (4.4.6). Предположив, что (4.4.7) имеет место при $j=k$, докажем, что оно справедливо и при $j=k+1$:

$$\begin{aligned} S(d_{k+1}) &= \frac{2}{1-p} S^2(d_k) + \frac{2\varepsilon}{1-p} \leq \\ &\leq \frac{2}{1-p} \left(\left(\frac{2}{1-p}\right)^{2^k-1} S^{2^k} + \frac{6\varepsilon}{(1-p)^2} \right)^2 + \frac{2\varepsilon}{1-p} = \\ &= \left(\frac{2}{1-p}\right)^{2^{k+1}-1} S^{2^{k+1}} + \left(\frac{2S}{1-p}\right)^{2^k} \frac{6\varepsilon}{(1-p)^2} + \frac{72\varepsilon^2}{(1-p)^5} + \frac{2\varepsilon}{1-p}. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно заметить, что при $\varepsilon \leq (1-p)^4/72$ и условии

$$(2S/(1-p))^2 \leq (1-p)/2,$$

которое при $p \leq 1/9$ заведомо выполняется, справедлива оценка

$$S(d_{k+1}) \leq \left(\frac{2}{1-p}\right)^{2^{k+1}-1} S^{2^{k+1}} + \frac{6\varepsilon}{1-p}.$$

Таким образом, справедливость (4.4.7) полностью доказана.

Поскольку $S \leq 2p$, $p \leq 1/9$, то (4.4.7) означает, что

$$S(d_j) \leq 2^{-2^j-1} + 6\varepsilon/(1-p), \quad j=1, 2, \dots$$

Определив

$$k = [\log_2 \log_2 1/\varepsilon] + 1,$$

где, как и прежде, через $[A]$ обозначается целая часть числа A , при $\varepsilon \leq (1-p)^4/72$ имеем:

$$\sum_{j=1}^2 \mathbf{P}(|X_j| > 3(\log_2 1/\varepsilon)^{\log_2 3}) \leq \varepsilon/2 + 6\varepsilon/(1-p). \quad (4.4.8)$$

Далее, заметив, что

$$\rho(X_j, X_j^N) \leq \mathbf{P}(|X_j| > N),$$

из (4.4.8) получаем

$$\rho(X_j, X_j^N) \leq C_4 \varepsilon, \quad C_4 = \frac{13-p}{2(1-p)} < 8.$$

Переходим к доказательству пункта 2°, т. е. к доказательству $(\rho, C_5\varepsilon)$ -независимости статистик $X_1^N + X_2^N$ и $X_1^N - X_2^N$. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_1^N + X_2^N < u, X_1^N - X_2^N < v) = \\ &= \mathbf{P}\left(\{X_1 + X_2 < u, X_1 - X_2 < v, X_j = X_j^N, j=1, 2\} \cup \right. \\ & \left. \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^2 \{X_1^N + X_2^N < u, X_1^N - X_2^N < v, X_j \neq X_j^N\} \right\}\right) \leq \\ & \leq \mathbf{P}(X_1 + X_2 < u, X_1 - X_2 < v) + \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}(X_j \neq X_j^N) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}(X_1 + X_2 < u, X_1 - X_2 < v) + \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}(|X_j| > N) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(X_1 + X_2 < u, X_1 - X_2 < v) + C_4 \varepsilon \leq \\
&\leq \mathbf{P}(X_1 + X_2 < u) \mathbf{P}(X_1 - X_2 < v) + \varepsilon + C_4 \varepsilon = \\
&= \left(\mathbf{P}(X_1 + X_2 < u, X_j = X_j^N, j = 1, 2) + \right. \\
&+ \mathbf{P}\left(X_1 + X_2 < u, \bigcup_{j=1}^n \{X_j \neq X_j^N\}\right) \Big) \mathbf{P}(X_1 - X_2 < v) + (C_4 + 1) \varepsilon \leq \\
&\leq \mathbf{P}(X_1^N + X_2^N < u) \mathbf{P}(X_1 - X_2 < v) + (2C_4 + 1) \varepsilon \leq \\
&\leq \mathbf{P}(X_1^N + X_2^N < u) \mathbf{P}(X_1^N - X_2^N < v) + (3C_4 + 1) \varepsilon.
\end{aligned}$$

И наоборот, аналогичным образом доказывается, что для любых u и v

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_1^N + X_2^N < u) \mathbf{P}(X_1^N - X_2^N < v) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(X_1^N + X_2^N < u, X_1^N - X_2^N < v) + (3C_4 + 1) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{P}(X_1^N + X_2^N < u) \mathbf{P}(X_1^N - X_2^N < v) - \\
&- \mathbf{P}(X_1^N + X_2^N < u, X_1^N - X_2^N < v)| \leq C_5 \varepsilon,
\end{aligned}$$

$$C_5 = 3C_4 + 1,$$

т. е. статистики $X_1^N + X_2^N$ и $X_1^N - X_2^N$ (ρ , $C_5 \varepsilon$)-независимы.

Докажем теперь, что

$$\mathbf{E}|X_j^N|^r \leq M_r < \infty, \quad \forall r, j = 1, 2,$$

т. е. что выполняется пункт 3°. Легко убедиться, что

$$\mathbf{E}|X_j^N|^r = - \int_0^N x^r d\mathbf{P}(|X_j^N| \geq x).$$

Положив $s = [\log_2 N]$ и воспользовавшись оценкой (4.4.7), имеем:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}|X_j^N|^r \leq d_0^r + \sum_{i=0}^s d_{i+1}^r \mathbf{P}(d_i \leq |X_j^N| < d_{i+1}) \leq \\
&\leq 1 + \frac{1-p}{2} \sum_{i=0}^s \left(\frac{2S}{1-p}\right)^{2^i} 3^{r(i+1)} + \frac{6\varepsilon}{1-p} \sum_{i=0}^s 3^{r(i+1)}. \quad (4.4.9)
\end{aligned}$$

Так как, согласно условиям леммы, $S = S(1) \leq 2p$ и при этом

$$2 \frac{S}{1-p} \leq 4 \frac{p}{1-p} \leq \frac{1}{2},$$

$$2^{-2^i} \leq 4^{-ri} \quad \text{при } i \geq i_0,$$

где $i_0 = i_0(r)$ и определяется из уравнения $i_0 - \log_2 i_0 = 1 + \log_2 r$, то

$$\sum_{i=i_0}^s (2S/(1-p))^{2^i} 3^{ri} \leq \sum_{i=i_0}^s (3/4)^{ri} \leq 1/(1-(3/4)^r).$$

Оценка третьего слагаемого в правой части (4.4.9) также не представляет затруднений. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^s 3^{r(i+1)} &\leq 3^{r(s+2)}/(3^r - 1) \leq N^r 3^{2r}/(3^r - 1) = \\ &= 3^{3r} (\log_2 1/\varepsilon)^r \log_2 3/(3^r - 1). \end{aligned}$$

Теперь легко найти постоянную $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r)$ такую, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\frac{6\varepsilon}{1-p} \sum_{j=0}^s 3^{r(j+1)} \leq 1.$$

Лемма доказана.

Имея все необходимые вспомогательные результаты, переходим к доказательству сформулированной выше теоремы.

Доказательство теоремы 4.4.1. Докажем сначала, что

$$\begin{aligned} &|\mathbf{P}(X_1 + X_2 = 0, X_1 - X_2 = 0) - \\ &- \mathbf{P}(X_1 + X_2 = 0) \mathbf{P}(X_1 - X_2 = 0)| \leq 4\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Для этого обозначим

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_1 + X_2 < x, X_1 - X_2 < y) - \mathbf{P}(X_1 + X_2 < x) \mathbf{P}(X_1 - X_2 < y) = \\ &= r(x, y) \end{aligned}$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_1 + X_2 = 0, X_1 - X_2 = 0) = \mathbf{P}(X_1 + X_2 \leq 0, X_1 - X_2 \leq 0) - \\ &- \mathbf{P}(X_1 + X_2 \leq 0, X_1 - X_2 < 0) - \mathbf{P}(X_1 + X_2 < 0, X_1 - X_2 \leq 0) + \\ &+ \mathbf{P}(X_1 + X_2 < 0, X_1 - X_2 < 0). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \mathbf{P}(X_1 + X_2 \leq 0) \mathbf{P}(X_1 - X_2 \leq 0) - \mathbf{P}(X_1 + X_2 \leq 0) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(X_1 - X_2 < 0) = \mathbf{P}(X_1 + X_2 \leq 0) \mathbf{P}(X_1 - X_2 = 0), \\ Q_2 &= \mathbf{P}(X_1 + X_2 < 0) \mathbf{P}(X_1 - X_2 < 0) - \mathbf{P}(X_1 + X_2 < 0) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(X_1 - X_2 \leq 0) = -\mathbf{P}(X_1 = X_2) \mathbf{P}(X_1 + X_2 < 0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Q_1 + Q_2 = \mathbf{P}(X_1 + X_2 = 0) \mathbf{P}(X_1 = X_2).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &|\mathbf{P}(X_1 + X_2 = 0, X_1 - X_2 = 0) - \mathbf{P}(X_1 + X_2 = 0) \mathbf{P}(X_1 - X_2 = 0)| = \\ &= |r(0+, 0+) - r(0+, 0) - r(0, 0+) + r(0, 0)| \leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Неравенство (4.4.10) доказано. Обозначая

$$p = \mathbf{P}(X_i = 0),$$

убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 + X_2 = 0, X_1 - X_2 = 0) &= \mathbf{P}(X_1 = -X_2, X_1 = X_2) = \\ &= \mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = p^2. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_1 + X_2 = 0, X_1 - X_2 = 0) \leq \\ &\leq \mathbf{P}(X_1 + X_2 = 0) \mathbf{P}(X_1 - X_2 = 0) + 4\varepsilon = (\mathbf{P}(X_1 = -X_2, X_2 \neq 0) + \\ &+ \mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0)) (\mathbf{P}(X_1 = X_2, X_2 \neq 0) + \mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0)) + \\ &+ 4\varepsilon \leq (\mathbf{P}(X_1 \neq 0) \mathbf{P}(X_2 \neq 0) + \mathbf{P}(X_1 = 0) \mathbf{P}(X_2 = 0))^2 + 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p^2 \leq ((1-p)^2 + p^2)^2 + 4\varepsilon. \quad (4.4.11)$$

Нетрудно убедиться, что решения p неравенства (4.4.11) должны удовлетворять следующим условиям:

либо

$$p \geq (3 + \sqrt{1 - 16\sqrt{\varepsilon}})/4, \quad (4.4.12)$$

либо же

$$p \leq (3 - \sqrt{1 - 16\sqrt{\varepsilon}})/4. \quad (4.4.13)$$

Предположим сначала, что верно неравенство (4.4.12). Это означает, что при $\varepsilon \leq 1/256$

$$\rho(X_1, E) \leq 1 - (3 + \sqrt{1 - 16\sqrt{\varepsilon}})/4 \leq 3\sqrt{\varepsilon},$$

где E — вырожденная в нуле случайная величина. Следовательно, в этом случае справедлива оценка (4.4.3).

Пусть теперь имеет место неравенство (4.4.13). Тогда $p \leq 3/4$ и

$$X_j \in \mathcal{M}(3/4), \quad j=1, 2, \quad (4.4.14)$$

причем, по определению,

$$\mathcal{M}(\beta) = \{X: P(X=0) \leq \beta\}.$$

В дальнейшем условие равномерности X_1 и X_2 нам не потребуется, поэтому с учетом (4.4.14) будем полагать лишь, что

$$X_j \in \mathcal{M}(\beta), \quad \beta < 1, \quad j=1, 2. \quad (4.4.15)$$

Тогда существуют положительные числа z_1 и z_2 такие, что при $j=1, 2$ и $\gamma = \max(7/9, \beta)$

$$P(|X_j| < z_j) \leq (1 + \gamma)/2, \quad P(|X_j| \leq z_j) \geq (1 + \gamma)/2. \quad (4.4.16)$$

Положим

$$z_0 = \max(z_1, z_2) \quad (4.4.17)$$

и определим

$$\hat{X}_j = X_j/z_0.$$

В силу (4.4.16), очевидно,

$$P(|\hat{X}_j| \leq 1) \geq (1 + \gamma)/2, \quad j=1, 2. \quad (4.4.18)$$

Пусть для определенности $z_0 = z_1$. Тогда

$$P(|\hat{X}_1| < 1) \leq (1 + \gamma)/2. \quad (4.4.19)$$

Оценки (4.4.18) означают, что

$$\hat{X}_1 \in \mathcal{G}((1 - \gamma)/2),$$

причем легко убедиться, что

$$(1 - \gamma)/2 \leq 1/9.$$

Следовательно, случайные величины $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ удовлетворяют условиям леммы 4.4.1, а к урезанным случайным величинам

$\hat{X}_1^N$ и $\hat{X}_2^N$ применимы заключения 1°–3° этой леммы. Заметим, что в силу (4.4.19)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (\hat{X}_1^N)^2 &\geq \int_{|x| \geq 1} x^2 d\mathbf{P}(\hat{X}_1^N < x) \geq \mathbf{P}(|\hat{X}_1^N| \geq 1) = \\ &= \mathbf{P}(|\hat{X}_1| \geq 1) \geq (1 - \gamma)/2 > 0, \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

если только $N \geq 1$. Построим такого же типа оценку для $\mathbf{E}(\hat{X}_2^N)^2$, точнее, для дисперсии случайной величины $\hat{X}_2^N$. С этой целью $\hat{X}_1^N$ сдвинем так, чтобы

$$\mathbf{E} \hat{X}_1^N = 0. \quad (4.4.21)$$

Убедимся сначала, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(\hat{X}_1^N + \hat{X}_2^N)(\hat{X}_1^N - \hat{X}_2^N) - \mathbf{E}(\hat{X}_1^N + \hat{X}_2^N)\mathbf{E}(\hat{X}_1^N - \hat{X}_2^N)| &\leq \\ &\leq C_6 \varepsilon N^2. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Действительно, обозначая

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \{ \mathbf{P}(X_1 + X_2 < x, X_1 - X_2 < y) - \\ &- \mathbf{P}(X_1 + X_2 < x)\mathbf{P}(X_1 - X_2 < y) \}, \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

интегрированием по частям убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{-2N}^{2N} \int_{-2N}^{2N} xyw(dx, dy) \right| &\leq \\ &\leq C_7 N^2 \varepsilon + \int_{-2N}^{2N} \int_{-2N}^{2N} |w(x, y)| dx dy \leq C_6 N^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Используя (4.4.21) и (4.4.22), заключаем, что

$$|\mathbf{E}(\hat{X}_1^N)^2 - \mathbf{E}(\hat{X}_2^N)^2 + (\mathbf{E} \hat{X}_2^N)^2| \leq C_6 N^2 \varepsilon.$$

В силу (4.4.20) это означает, что

$$\mathbf{E}(\hat{X}_2^N - \mathbf{E} \hat{X}_2^N)^2 \geq (1 - \gamma)/2 - C_6 N^2 \varepsilon$$

и, следовательно, если

$$\varepsilon N^2 \leq (1 - \gamma)/(4C_6),$$

то

$$\mathbf{E}(\hat{X}_2^N - \mathbf{E} \hat{X}_2^N)^2 \geq (1 - \gamma)/4. \quad (4.4.24)$$

На основании (4.4.20), (4.4.21), (4.4.24), п. 2° и п. 3° леммы 4.4.1 и леммы Хоанг Хыу Ныи получаем, что при $|t| \leq 2$

$$|f_{\hat{X}_1^N}(t) - \exp(-\sigma_N^2 t^2/2)| \leq C_8(1-\gamma)^{-1} \varepsilon^{1/24}, \quad (4.4.25)$$

$$|f_{\hat{X}_2^N}(t) - \exp(it E \hat{X}_2^N - \sigma_N^2 t^2/2)| \leq C_8(1-\gamma)^{-1} \varepsilon^{1/24}, \quad (4.4.26)$$

где

$$\sigma_N^2 = (E(\hat{X}_1^N)^2 + E(\hat{X}_2^N - E \hat{X}_2^N)^2)/2.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \exp(-\sigma_N^2/2) + C_8(1-\gamma)^{-1} \varepsilon^{1/24} &\geq |f_{\hat{X}_1^N}(1)| \geq \\ &\geq \exp(-\sigma_N^2/2) - C_8(1-\gamma)^{-1} \varepsilon^{1/24}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$3(1-\gamma)/8 \leq \sigma_N^2 \leq M_2,$$

то при $j=1, 2$

$$\begin{aligned} \exp(-M_2/2) - C_8(1-\gamma)^{-1} \varepsilon^{1/24} &\leq |f_{\hat{X}_j^N}(1)| \leq \\ &\leq \exp(-3(1-\gamma)/8) + C_8(1-\gamma)^{-1} \varepsilon^{1/24}, \end{aligned}$$

или, обозначив

$$l_1 = \exp(-M_2/2), \quad l_2 = \exp(-3(1-\gamma)/8),$$

получим:

$$l_1 - C_8(1-\gamma)^{-1} \varepsilon^{1/24} \leq |f_{\hat{X}_j^N}(1)| \leq l_2 + C_8(1-\gamma)^{-1} \varepsilon^{1/24}. \quad (4.4.27)$$

Неравенства (4.4.25) и (4.4.26) означают также, что при $|t| \leq 1$, $j=1, 2$

$$|f_{\hat{X}_j^N}(t)| \geq \frac{1}{2} \exp(-M_2/2), \quad (4.4.28)$$

если только

$$\varepsilon \leq (1-\gamma)^{24} (2C_8)^{24} \exp(-12M_2).$$

В силу п. 2° леммы 4.4.1 $\hat{X}_1^N + \hat{X}_2^N$ и $\hat{X}_1^N - \hat{X}_2^N$ (ρ , $C_5\varepsilon$)-независимы. Докажем, что

$$\begin{aligned} |f_{\hat{X}_1^N + \hat{X}_2^N}(t_1) f_{\hat{X}_1^N - \hat{X}_2^N}(t_2) - f_{(\hat{X}_1^N + \hat{X}_2^N, \hat{X}_1^N - \hat{X}_2^N)}(t_1, t_2)| \leq \\ \leq C_9 \varepsilon N^2 (1 + |t_1 t_2|). \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

Действительно, учитывая обозначение (4.4.23) и используя интегрирование по частям, имеем:

$$\begin{aligned}
 & |f_{(\hat{X}_1^N + \hat{X}_2^N, \hat{X}_1^N - \hat{X}_2^N)}(t_1, t_2) - f_{\hat{X}_1^N + \hat{X}_2^N}(t_1) f_{\hat{X}_1^N - \hat{X}_2^N}(t_2)| = \\
 & = \left| \int_{-2N}^{2N} \int_{-2N}^{2N} \exp(it_1 x + it_2 y) w(x, y) dx dy \right| = \\
 & = \left| w(2N, -2N) \exp(2iN(t_1 + t_2)) - w(2N, -2N) \times \right. \\
 & \times \exp(2iN(t_1 - t_2)) + w(-2N, 2N) \exp(2iN(-t_1 + t_2)) - \\
 & - w(-2N, -2N) \exp(-2iN(t_1 + t_2)) - \int_{-2N}^{2N} \{w(x, 2N) \times \\
 & \times \exp 2it_2 N - w(x, -2N) \exp(-2it_2 N)\} dx - \\
 & - \int_{-2N}^{2N} \{w(2N, y) \exp 2it_1 N - w(-2N, y) \exp(-2it_1 N)\} \times \\
 & \times dy + \int_{-2N}^{2N} \int_{-2N}^{2N} w(x, y) dx dy \exp it_1 x \exp it_2 y \left| \leq \right. \\
 & \leq 4C_5 \varepsilon + 8C_5 N \varepsilon (|t_1| + |t_2|) + 16C_5 N^2 \varepsilon |t_1 t_2|.
 \end{aligned}$$

На основе (4.4.28), (4.4.29) и леммы 3.2.1 получаем, что при $|t| \leq 1$

$$\begin{aligned}
 & |f_{\hat{X}_j^N}(t) - \exp(t^2 \ln |f_{\hat{X}_j^N}(1)| + iB^{(j)} t)| \leq \\
 & \leq C_{10} \varepsilon N^2 \exp(2M_2),
 \end{aligned} \tag{4.4.30}$$

где $B^{(j)} = 2 \arg f_{\hat{X}_j^N}(1/2)$.

Перепишем (4.4.29) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & f_1(t_1 + t_2) f_2(t_1 - t_2) = \\
 & = f_1(t_1) f_2(t_1) f_1(t_2) f_2(-t_2) + r(t_1, t_2),
 \end{aligned} \tag{4.4.31}$$

$$|r(t_1, t_2)| \leq C_9 N^2 \varepsilon (1 + |t_1 t_2|),$$

$$f_j(t) = \mathbb{E} \exp it \hat{X}_j^N = f_{\hat{X}_j^N}(t).$$

В (4.4.31) положив сначала $t_1 = t_2 = t$, а затем $t_1 = -t_2 = t$, получим:

$$f_1(2t) = f_1^2(t) |f_2(t)|^2 + r(t, t), \quad (4.4.32)$$

$$f_2(2t) = |f_1(t)|^2 f_2^2(t) + r(t, -t). \quad (4.4.33)$$

Подставляя в (4.4.32) и (4.4.33) вместо t величину $-t$ и перемножая соответственно полученные уравнения с исходными (4.4.32) и (4.4.33), заключаем, что при $|t| \leq \varepsilon^{-1/3} N^{-2/3}$

$$|f_1(2t)|^2 = |f_1(t)|^4 |f_2(t)|^4 + r_1(t),$$

$$|f_2(2t)|^2 = |f_1(t)|^4 |f_2(t)|^4 + r_2(t),$$

где $|r_j(t)| \leq C_{10} \varepsilon^{1/3} N^{2/3}$, $j = 1, 2$.

Следовательно, при $|t| \leq \varepsilon^{-1/3} N^{-2/3}/2$

$$|f_1(t)|^2 = |f_2(t)|^2 + r_3(t),$$

$$|r_3(t)| \leq 2C_{10} \varepsilon^{1/3} N^{2/3}.$$

Подставляя этот результат в (4.4.32), получаем, что

$$f_j(2t) = f_j^2(t) |f_j(t)|^2 + r_4(t), \quad j = 1, 2;$$

$$|r_4(t)| \leq C_{11} \varepsilon^{1/3} N^{2/3}.$$

Применяя следствие 3.1.1 и учитывая (4.4.27), (4.4.30), а также то обстоятельство, что M_2 является абсолютной константой (см. п. 3° леммы 4.4.1), имеем

$$\int_1^T t^{-1} |f_j(t) - \exp\{t^2 \ln |f_j(1)| + iB^{(j)} t\}| dt \leq \\ \leq C_{12} \varepsilon^{1/3} N^{2/3} (1 - \alpha)^{-1}.$$

Теперь остается применить лемму Габовича. Полагая в ней

$$M = N = 3 (\log_2 1/\varepsilon)^{\log_2 3},$$

получаем, что

$$\rho(\hat{X}_j^N, N_j^*) \leq C_{13} (1 - \gamma)^{-1} \varepsilon^{1/3} N^{2/3},$$

где N_j^* — нормальная случайная величина со средним $B^{(j)}$ и дисперсией $-2 \ln |f_j(1)|$.

Из п. 1° леммы 4.4.1 следует, что

$$\rho(X_j, N_j) \leq C_4 \varepsilon + C_{13} (1 - \gamma)^{-1} \varepsilon^{1/3} N^{2/3},$$

$$N_j = z_0 N_j^*.$$

Теорема доказана.

Могут оказаться полезными следующие два замечания. Мы видели, что условие на равномерность случайных величин X_1, X_2 использовалось нами лишь для доказательства соотношения (4.4.14). В сообщении Ю. Ю. Мачиса [55] отмечено, что теорема 4.4.1 остается в силе и без вышеупомянутого условия на равномерность.

Далее, аналогом равномерной метрики ρ в пространстве характеристических функций является, как упоминалось в начале параграфа, метрика λ_0 . Неулучшаемая по порядку оценка устойчивости теоремы Бернштейна в этой метрике получена Л. Б. Клебановым и Р. В. Янушквичюсом в [45]. Сформулируем этот результат.

Обозначим через $\mathcal{P}_2$ класс случайных векторов (X_1, X_2) с независимыми компонентами, для которых

$$\lambda_0(f_{(X_1+X_2, X_1-X_2)}, f_{X_1+X_2}, f_{X_1-X_2}) \leq \varepsilon.$$

Теорема 4.4.2. *Существуют положительные абсолютные константы c и C такие, что при всех $\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq 1$, справедливы неравенства*

$$c\varepsilon \leq \sup_{(X_1, X_2) \in \mathcal{P}_2} \max_{j=1, 2} \lambda_0(X_j, \mathcal{N}) \leq C\varepsilon, \quad (4.4.34)$$

где $\mathcal{N}$ — множество всех нормальных случайных величин.

Доказательство этого результата аналогично доказательству теоремы 3.2.3, поэтому нами не приводится. Его, правда, в рассматриваемом случае можно сократить, поскольку λ_0 инвариантна относительно параметра масштаба и поэтому можно считать, что дисперсия σ^2 в (3.1.12) (см. также следствие 3.1.2) ограничена снизу некоторой абсолютной константой.

Очевидно, что и саму теорему 3.2.3 можно также сформулировать в виде цепочки неравенств (4.4.34), что имеет некоторые преимущества.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБЗОР РАБОТ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИЗАЦИЙ СВОЙСТВАМИ СТАТИСТИК

Во Введении отмечалось, что предлагаемый в монографии метод исследования устойчивости характеристизационных теорем послужил основой для разбиения ее на главы. Так, основным результатом первой главы является теорема о качественной устойчивости характеристизационных задач. Здесь также показано, что решение большинства из этих задач можно свести к рассмотрению вероятностных решений уравнений типа свертки. Оценки устойчивости таких решений исследуются во второй главе. Осуществлению „растяжения“ полученных оценок с узкого на более широкий интервал или установлению длины интервала, в котором характеристическая функция не обращается в нуль, посвящена третья глава. В заключительной — четвертой — главе рассматриваются теоремы устойчивости, в формулировках которых отсутствуют условия на моменты, требования компактности и т. п., а присутствуют лишь возмущенные характеристизационные свойства исследуемых статистик.

Следовательно, структурной основой монографии послужил используемый в ней аналитический аппарат. Это обстоятельство, конечно, не способствовало выделению основных направлений устойчивости характеристизаций по свойствам рассматриваемых статистик (например, их независимости, равномерности, допустимости и т. д.) и послужило поводом для написания настоящего Приложения.

1. Устойчивость характеристизаций свойствами равномерности статистик

Первой работой по исследованию устойчивости характеристизаций свойствами равномерности статистик является работа Л. Д. Мешалкина [131], посвященная оценке устойчивости в исторически первой характеристизационной задаче — теореме Д. Пойа [134] (см. Введение, а также § 1.1, п. 1).

Теорема Л. Д. Мешалкина. Пусть X_1, X_2 — независимые равнораспределенные случайные величины, $EX_i=0$, $EX_i^2=1$, $E|X_j|^3 \leq M < \infty$. Если статистики $(X_1+X_2)/\sqrt{2}$ и X_1 (ρ, ε)-равнораспределены, т. е.

$$\rho(X_1, (X_1+X_2)/\sqrt{2}) \leq \varepsilon,$$

то

$$\rho(X_j, N_{0,1}) \leq C\varepsilon^{1/3},$$

где C зависит лишь от M , $N_{0,1}$ — стандартная нормальная случайная величина, а ρ — равномерная метрика (определение см. в § 4.3).

Первые обобщения этой теоремы принадлежат автору [84, 85]. В них рассматривается почти равнораспределенность статистик aX_1+bX_2 и X_1 уже без ограничения $a=b=1/\sqrt{2}$ (но при естественном для данной задачи условии $a^2+b^2=1$), исследуется выборка объема $k>2$. Здесь также впервые установлена зависимость оценки устойчивости от коэффициентов и моментных характеристик рассматриваемых статистик. Дальнейшее продвижение в этом направлении принадлежит И. С. Шиганову. В его статье [76], как, впрочем, и в работах [98, 160], существенным моментом в исследовании устойчивости является использование предельных теорем. Некоторыми участниками упоминавшегося во Введении семинара по устойчивости высказывалось мнение, что применение предельных теорем страдает следующим недостатком: в теоремах устойчивости с такого рода применением, как правило, присутствуют условия на моменты, а не на псевдомоменты, как, скажем, в статье Р. Шимицу [145]. В работе [89] показано, что в действительности это обстоятельство не является ограничительным, и переформулирован ряд результатов [76, 85, 98, 160]. Этим проблемам посвящена теорема 3.2.1.

На примере исследования устойчивости теоремы Пойа В. М. Золотарев [27, 164] наглядно продемонстрировал метрико-топологическую природу задач устойчивости стохастических моделей. За счет выбора так называемой идеальной метрики им была обоснована оценка устойчивости, имеющая первый порядок малости по ε . К сожалению, это обстоятельство не было замечено в работе Р. Шимицу и Л. Давис [148], также по сути дела использующих идеальную метрику. В этой статье, а также в работе [145], среди других результатов рассмотрена и устойчивость характеристик свойств

равнораспределенности монома и линейной статистики со случайными коэффициентами.

Еще в 1980 г. Л. Б. Клебанов высказал гипотезу, что в теореме Пойа можно построить оценку устойчивости без моментных ограничений. Эта нелегкая проблема была решена в сообщении [16]. Однако при этом на рассматриваемый класс случайных величин еще накладывались условия компактности. И лишь в теореме А. А. Зингера, Л. Б. Клебанова и Р. В. Янушкявичюса (теорема 4.2.1) была построена оценка без каких-либо ограничений на исходный класс случайных величин. Работа О. Л. Янушкявичене [79, 235] позволяет надеяться, что такого типа оценка устойчивости теоремы Пойа в λ -метрике имеет первый порядок. Остановимся на более подробном рассмотрении этого результата.

Функция f называется характеристической функцией квазиустойчивого закона, если она удовлетворяет уравнению $f(t) = (f(\beta t))^x$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$ и некоторых $x > 0$, $0 < |\beta| < 1$. Единственный вещественный корень x уравнения $x |\beta|^x = 1$ называется *характеристическим показателем* квазиустойчивого закона.

Квазиустойчивое распределение является безгранично делимым, и для него спектральная функция $H(x)$ в представлении Леви имеет вид

$$H(x) = -x^\alpha \theta_1(\ln x), \quad x > 0; \quad H(-x) = x^{-\alpha} \theta_2(\ln x), \quad x > 0,$$

где θ_j — неотрицательные непрерывные справа периодические функции с периодом a .

Обозначим через $\mathcal{M}(\alpha, a)$ совокупность характеристических функций квазиустойчивых законов с характеристическим показателем α , $\alpha \in (0, 2)$, которым соответствуют функции $\theta_i(x)$ с периодом a . Справедлив следующий результат.

Теорема О. Л. Янушкявичене [79]. *Существуют абсолютные постоянные C_1, C_2 такие, что при $1,5 \leq \alpha < 2$ справедливы неравенства*

$$C_1(2-\alpha) \exp(-\alpha a) \leq \sup_{\mathcal{M}(\alpha, a)} \inf_{\gamma, \sigma} \sup_t |f(t) - \exp(it\gamma - \sigma^2 t^2/2)| \leq C_2(2-\alpha) \exp(\alpha a) \max(a, 1).$$

Теперь применим этот результат для построения оценки устойчивости в теореме Пойа. Если X_1 и $(X_1 + X_2)/2^{1/\alpha}$ рав-

нораспределены, а X_1, X_2 — независимые равнораспределенные величины с характеристической функцией $f(t)$, то

$$f(t) = f^2(t/2^{1/\alpha}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \quad (\text{П.1})$$

т. е. X_1 и X_2 являются квазиустойчивыми. Перепишав это уравнение в форме

$$f(t) = f^2(t/\sqrt[5]{2}) + r(2 - \alpha, t)$$

и обозначив $2 - \alpha = \varepsilon$, получаем хорошо известную схему задачи устойчивости характеристизационной теоремы Пойа (см. § 4.2, уравнение (4.2.3)). Можно доказать, что $|r_3(\varepsilon, t)| \leq C_3 \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}^1$. Сформулированная теорема означает, что при $C_4 = C_1/2, C_5 = 2C_2$

$$C_4 \varepsilon \leq \sup_{f \in \mathcal{U}} \inf_{\gamma, \sigma} \sup_t |f(t) - \exp(it\gamma - \sigma^2 t^2/2)| \leq C_5 \varepsilon,$$

где $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\alpha, (1/\alpha) \ln 2)$. Таким образом, получена оценка устойчивости первого порядка в классе квазиустойчивых законов для характеристизационной теоремы Пойа.

Некоторые другие оценки устойчивости, имеющие отношение к самой теореме Пойа или ее аналогам, рассмотрены в работах [77, 80, 153, 229].

В определении 4.1.1 напоминалось понятие строго устойчивого распределения. Согласно примеру П. Леви (см. § 4.1), для устойчивости распределения с характеристической функцией $f(t)$ в общем случае недостаточно выполнения лишь уравнения (П. 1). Однако для положительного ответа достаточно наряду с (П. 1) потребовать, чтобы

$$f(t) = f^3(t/3^{1/\alpha}), \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Устойчивости этой характеристизации П. Леви без каких-либо моментных ограничений посвящены теоремы 4.1.1, 4.1.2 со следствиями и теорема 4.1.3.

В 1953 г. вышла статья Ю. В. Линника [49] (см. также [51]), в которой был описан класс законов, допускающих равнораспределенные линейные статистики L_1 и L_2 ,

$$L_1 = \sum_{j=1}^k a_j X_j, \quad L_2 = \sum_{j=1}^k b_j X_j. \quad (\text{П.2})$$

Здесь $X_1, X_2, \dots, X_k$ — независимые равнораспределенные случайные величины, обладающие моментами определенного порядка. Там же подробно исследован вопрос характери-

зации нормального закона при помощи таких статистик, а также даны некоторые приложения к теории испытания гипотез. Устойчивость этой теоремы и некоторой ее модификации была подробно исследована нами в совместных с А. А. Зингером работах [18–22] и в теоремах 2.5.1, 2.5.2. Порядок оценки устойчивости в этих теоремах — логарифмический.

Возникает следующий интересный вопрос: нельзя ли существенно улучшить этот порядок, если о статистиках L_1 и L_2 дополнительно известно, что коэффициенты хотя бы в одной из них равны? Ответ оказался положительным и содержится в теореме 3.2.2.

В заключение наряду с (П. 2) рассмотрим еще две линейные статистики

$$L_3 = \sum_{j=1}^k c_j X_j, \quad L_4 = \sum_{j=1}^k d_j X_j$$

и откажемся от условия равномерности $X_1, \dots, X_k$. Л. Б. Клебанов [115], в частности, доказал, что если случайные векторы (L_1, L_2) и (L_3, L_4) равномерно распределены, то те случайные величины X_j , для которых

$$\begin{vmatrix} a_j & b_j \\ c_l & d_l \end{vmatrix} \neq 0, \quad l=1, 2, \dots, k,$$

нормальны. Оценкам устойчивости в этой характеристической теореме посвящены работы Л. Б. Клебанова, Р. В. Янушквичюса [38, 116] и теорема 3.3.2.

2. Устойчивость характеристик свойствами независимости статистик

Нетрудно убедиться, что вышеупомянутая характеристика равномерности (L_1, L_2) и (L_3, L_4) представляет собой обобщение следующей известной теоремы Скитовича — Дармуа. Если L_1 и L_2 независимы, то те случайные величины X_j , для которых $a_j b_j \neq 0$, нормальны. Итак, мы перешли к характеристикам свойствами независимости статистик.

Вспомнив определения метрик λ и λ_0 из § 1.2, через $\mathcal{P}$ обозначим класс случайных векторов (X_1, X_2) с независимыми компонентами, для которых

$$\lambda(f_{(X_1+X_2, X_1-X_2)}, f_{X_1+X_2} f_{X_1-X_2}) \leq \varepsilon, \\ f_X(t) = E \exp(i(t, X)).$$

Существуют положительные абсолютные константы c и C такие, что при всех ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$, справедливы неравенства

$$c\varepsilon \leq \sup_{(X_1, X_2) \in \mathcal{P}_\varepsilon} \max_{j=1, 2} \lambda(X_j, \mathcal{N}) \leq C\varepsilon, \quad (\text{П.3})$$

где $\mathcal{N}$ — множество всех нормальных случайных величин и, как обычно,

$$\lambda(X_j, \mathcal{N}) = \inf_{N \in \mathcal{N}} \lambda(X_j, N).$$

Утверждение остается в силе, если метрику λ везде заменить на λ_0 . Эти результаты получены совместно с Л. Б. Клебаноным в работах [42, 44, 45] и в теоремах 3.2.3, 4.4.2. Они представляют собой оценки устойчивости теоремы С. Н. Бернштейна в метриках λ и λ_0 .

Выбор этих метрик был обусловлен аналитической структурой задачи, основное функциональное уравнение которой рассматривалось в пространстве характеристических функций. Однако при применении характеризационных теорем в качестве статистических критериев более предпочтительной является равномерная метрика ρ . На такие применения еще в 1953 г. указал Ю. В. Линник (см. [49]). Действительно, пусть дана повторная выборка

$$X_1, X_2, \dots, X_k. \quad (\text{П.4})$$

Требуется испытать гипотезу H_0 о том, что это — выборка из нормальной генеральной совокупности с неизвестными параметрами a, σ . С этой целью из выборки (П. 4) берем первые две реализации X_1, X_2 и составляем из них сумму $S_1 = X_1 + X_2$ и разность $D_1 = X_1 - X_2$. Из последующих двух реализаций X_3, X_4 опять составляем сумму $S_2 = X_3 + X_4$ и разность $D_2 = X_3 - X_4$ и т. д. Таким образом, полагая $k = 2m$, получаем последовательности $S_1, \dots, S_m$ и $D_1, \dots, D_m$, где при $j = 0, 1, \dots, m-1$

$$S_{j+1} = X_{2j+1} + X_{2j+2}, \quad D_{j+1} = X_{2j+1} - X_{2j+2}. \quad (\text{П.5})$$

В силу теоремы С. Н. Бернштейна рассматриваемый тип наблюдений нормален (с нулевым средним) тогда и только тогда, когда функция распределения $F_{(S, D)}(x, y)$ двумерного вектора (S, D) совпадает с произведением $F_S(x) F_D(y)$ маргинальных функций распределений F_S и F_D статистик S и D соответственно. Это совпадение функций распределения $F_{(S, D)}$ и $F_S F_D$ можно проверить по критерию Смирнова,

использующему равномерную метрику и эмпирические функции распределения, построенные по значениям $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_m$ и $D_1, \dots, D_m$ (см. (П. 5)).

Конечно, в случае любой конечной выборки (П. 4) — а именно такая ситуация наблюдается в практических задачах — совпадение $F_{(S, D)}$ и $\bar{F}_S \bar{F}_D$ с использованием критерия Смирнова или иного статистического критерия можно проверить лишь с некоторой степенью точности. Следовательно, предпосылки соответствующей характеристизационной теоремы выполняются не точно, а лишь приближенно, причем эта близость измеряется в равномерной метрике ρ .

Метрика ρ обладает и другими полезными свойствами. Например, она инвариантна относительно параметра масштаба. Оценкам устойчивости теоремы С. Н. Бернштейна в этой метрике посвятили свои работы (наряду с другими задачами) Хоанг Хыу Ньы [73], Л. Д. Мешалкин [131], Б. Беднарек-Козек и А. Козек [103], Ю. Р. Габович [5—7], Ю. Ю. Мачис [55], Р. В. Янушкявичюс [92] (см. теорему 4.4.1). В отличие от (П. 3) здесь порядок малости величины ϵ несколько хуже. В § 4.4 показано, что эта потеря происходит исключительно из-за перехода от функционального уравнения в терминах функций распределения к функциональному уравнению в терминах характеристических функций. Метод, используемый нами, порядок не портит.

Устойчивость сформулированной ранее теоремы Скитовича — Дармуа без использования каких бы то ни было моментных ограничений подробно исследовал Ю. Р. Габович [6—8]. Смысл условий Габовича на исходный класс случайных величин заключается в воспрепятствовании „утеканию“ значительной вероятностной массы в бесконечность и обеспечении определенной степени невырожденности случайных величин. Эти же условия присутствуют в работах Ю. Р. Габовича [6, 7] при построении оценки устойчивости характеристизации нормального закона свойством независимости выборочного среднего $\bar{X}$ и выборочной дисперсии S^2 . В теореме 4.3.1 нам удалось избежать этих ограничений и построить оценку устойчивости лишь на основе почти независимости $\bar{X}$ и S^2 .

В работах [39, 40] получена количественная оценка устойчивости в теореме Д. В. Аносова о характеристизации нормального закона свойством независимости выборочного среднего и трубчатой статистики. Наконец, оценка устойчивости

характеризации обобщенного гамма-распределения свойством независимости специальных статистик построена А. В. Какосьяном [31].

3. Регрессионные модели

Первые исследования по устойчивости характеристик вероятностных распределений регрессионными свойствами статистик принадлежат Е. Лукачу и его соавторам [121, 166, 167, 177, 178], а также Б. Беднарек-Козек и А. Козеку [103]. Поскольку этим результатам посвящены две обзорные статьи Е. Лукача [122, 123], то остановимся вкратце лишь на работах более позднего периода.

В § 2.4 и работе [89] нами проведено сравнение оценок устойчивости в статьях Е. Лукача [125] и автора [87] в пользу последней. В ней основным является следующий результат.

Пусть X_1, X_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины, $EX_j = 0$, $EX_j^2 = \sigma^2$, $E|X_j|^{2+\delta} \leq M < \infty$ для некоторого $\delta > 0$. Если статистика $L_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2$ имеет ε -регрессию на $L_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2$, т. е.

$$E\{E(L_1|L_2)| \leq \varepsilon,$$

причем $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$, $|b_2/b_1| < 1$, то существует величина C , зависящая лишь от M и $\{a_j, b_j\}$, такая, что

$$\sup_x |F(x) - \Phi(x)| \leq C/\sqrt{\ln 1/\varepsilon},$$

где $F(x) = P(X_j < x)$, а $\Phi(x)$ — нормальное распределение с параметрами 0 и σ .

Доказательство этого результата рассмотрено в § 2.4.

Содержание работ Е. Лукача [126, 127] об устойчивости характеристики равномерного на интервале $(-1, 1)$ распределения также существенно улучшено. Это сделано совместно с С. П. Стейшунасом [68], однако из-за громоздкости обозначений мы опускаем соответствующее сравнение результатов и отсылаем читателя к § 3.4 „Расширение интервала в регрессионной модели Е. Лукача“.

Проблемам устойчивости регрессионных моделей посвящены также заметки [86, 179, 183]. Остановимся вкратце на последней.

В известной характеризационной теореме Рао — Рубина утверждается следующее. Пусть неотрицательные целочисленные случайные величины X и Y удовлетворяют условию

$$P(Y=r | X=n) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}, \quad r=0, 1, \dots, n; \\ n=0, 1, \dots, \quad (\text{П.6})$$

где $0 < p < 1$, p — фиксированное число, $q = 1 - p$. Соотношение

$$P(Y=r) = P(Y=r | X=Y), \quad r=0, 1, \dots \quad (\text{П.7})$$

необходимо и достаточно для того, чтобы X имело распределение Пуассона. В вышеупомянутой заметке [183] Дж. Паркетос и Р. Шимицу „возмущают“ как условие (П. 6), так и условие (П. 7), получая при этом близость в равномерной метрике распределения случайной величины X к пуассоновскому распределению.

Наконец, устойчивости характеристик экспоненциального распределения свойствами условных математических ожиданий порядковых статистик и рекордов посвящены соответственно теорема 2.2.2 и теорема 2.2.3.

4. Свойство отсутствия последействия

Экспоненциальное распределение имеет много полезных свойств. Хорошо известно, например, что если предварительное использование устройства никак не влияет на оставшееся время его работы, то распределение времени безотказной работы этого устройства экспоненциально.

Определение. Неотрицательная случайная величина X обладает свойством отсутствия последействия, если для всех $x \geq 0$ и $y \geq 0$ таких, что $P(X \geq y) > 0$,

$$P(X \geq x+y | X \geq y) = P(X \geq x). \quad (\text{П.8})$$

Свойство отсутствия последействия (П. 8) характеризует экспоненциальное распределение. Устойчивость этой характеристики впервые была исследована Хоангом Хыу Ньы [234]. В предположении

$$\sup_{x \geq 0, y \geq 0} |P(X \geq x+y | X \geq y) - P(X \geq x)| \leq \varepsilon \quad (\text{П.9})$$

им доказано, что

$$\sup_{x \geq 0} |\mathbf{P}(X \geq x) - \exp(-\lambda x)| \leq 2 \sqrt{\varepsilon}.$$

Т. А. Азларову [194, 196] удалось $\sqrt{\varepsilon}$ заменить на ε .

Если $\mathbf{P}(X=0) \neq 1$, то существует такое число $y_0 > 0$, что $\mathbf{P}(X \geq y_0) > 0$. Но в таком случае из (П. 8) следует, что $\mathbf{P}(X \geq ny_0) > 0$ для любого натурального n и, следовательно, $\mathbf{P}(X \geq y) > 0$ для любого действительного $y \geq 0$. Это означает, что (П. 8) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{P}(X \geq x + y) = \mathbf{P}(X \geq x) \mathbf{P}(Y \geq y), \quad \forall x \geq 0, \quad \forall y \geq 0. \quad (\text{П.10})$$

Оказывается (см. [129]), что для характеристики экспоненциального закона свойством (П. 10) достаточно, чтобы это свойство имело место лишь для двух несоизмеримых значений y_1 и y_2 . Простое доказательство этого утверждения приводится в [78]. Там же показано, что оценка устойчивости этой характеристики зависит от типа иррациональности числа $\alpha = y_1/y_2$. Тип иррациональности в теории диофантовых приближений определяется следующим образом.

Определение. Число α называется числом типа $\leq g$ (g — неубывающая функция, все значения которой больше единицы), если для всех достаточно больших чисел N существует решение неравенств

$$|n\alpha - m| \leq 1/n, \quad N/g(N) \leq n < N$$

со взаимно простыми числами n и m . Число α типа $\leq g$ называется числом постоянного типа, если g — константа.

Известно, что числами постоянного типа являются, например, числа вида $\alpha = a + b \sqrt{D}$, где D — натуральное число, не являющееся квадратом, а a и b — рациональные числа, причем $b \neq 0$.

Теорема О. Л. Янушкявичене [78]. Пусть для двух несоизмеримых точек y_1 и y_2 , $0 < y_1 < y_2$, выполнено соотношение

$$|\bar{F}(x + y_i) - \bar{F}(x) \bar{F}(y_i)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{П.11})$$

где $\bar{F}(x) = \mathbf{P}(X \geq x)$, $\bar{F}(0) = 1$, $\bar{F}(y_i) > 0$. Если $\alpha = y_1/y_2$ является числом постоянного типа ~~то~~ то существует такая величина C , зависящая лишь от $y_1, y_2, \bar{F}(y_1), \bar{F}(y_2), d$, что $|\bar{F}(x) - \exp(-\lambda x)| \leq C \sqrt{\varepsilon}$, где $\lambda = -\ln \bar{F}(y_1)/y_1$. Если же α являет-

ся числом типа $\leq g$, а ряд $\sum_{j=1}^{\infty} g(m_j)/m_j$ сходится и $\gamma(\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon/\gamma(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} g(m_j)/m_j,$$

то существует такая величина c , зависящая лишь от $y_1, y_2, F(y_1), F(y_2)$, что справедливо неравенство

$$|\bar{F}(x) - \exp(-\lambda x)| \leq c\varepsilon/\gamma(\varepsilon).$$

Легко убедиться, что метрика типа (П. 11) даже при дополнительном условии $\forall y_i \geq 0$ является менее жесткой, чем (П. 9). Более того, в [200] построен пример, доказывающий отсутствие непрерывности для модели характеристики экспоненциального закона в метрике (П. 9). Поэтому в следующей теореме полагается, что

$$\sup_{x \geq 0, y \geq 0} |\mathbf{P}(X \geq x + y) - \mathbf{P}(X \geq x) \mathbf{P}(X \geq y)| = \varepsilon. \quad (\text{П.12})$$

Теорема Димитрова—Клебанова—Рачева [200]. Пусть X — неотрицательная случайная величина, удовлетворяющая соотношению (П. 12). Тогда

$$\varepsilon/3 \leq \inf_{\lambda > 0} \sup_{x \geq 0} |\mathbf{P}(X \geq x) - \exp(-\lambda x)| \leq 20\varepsilon. \quad (\text{П.13})$$

Если, кроме того, $\varepsilon \leq 0,01$, то

$$\inf_{\lambda > 0} \sup_{x \geq 0} |\mathbf{P}(X \geq x) - \exp(-\lambda x)| \leq 6\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Наконец, рассмотрению условия отсутствия последействия в мультипликативной форме записи посвящена теорема 2.2.4.

Проблемы дискретизации в задачах устойчивости характеристик экспоненциального распределения изучены в статьях Л. Б. Клебанова и И. А. Меламеда [175, 213]. Этими же авторами рассмотрено свойство ε -отсутствия последействия лишь в конечном числе точек, причем метод работы [214] тесно связан с методом вышеупомянутой дискретизации.

Обобщение свойства почти-отсутствия последействия рассматривалось Р. Шимицу [144] и Х.-М. Гу, К. С. Лау [111] и записывалось следующим образом:

$$P(X \geq x + Y | X > Y) = P(X > x)(1 - R(x)), \quad \forall x \geq 0, \quad (\text{П.14})$$

где X, Y — независимые случайные величины,

$$|R(x)| \leq \varepsilon \exp(-\delta x), \quad (\text{П.15})$$

δ — некоторое положительное число, а ε , как обычно, малый параметр, $\varepsilon > 0$.

Уравнение свертки, возникающее в связи с соотношением (П. 14), и ограничение (П. 15) на остаточный член обсуждались в гл. 2, поэтому перейдем к краткому обзору многомерных обобщений.

Количественная оценка близости распределения n -мерного случайного вектора $\mathbf{X}$ к многомерному экспоненциальному распределению в терминах значений дискретных аналогов функционалов, описывающих свойство отсутствия последействия вектора $\mathbf{X}$, построена Л. Б. Клебановым и С. Т. Рачевым [176]. Там же рассмотрено n -мерное обобщение оценки (П. 13) из статьи [200]. В последней, впрочем, также рассматривается устойчивость характеристики двумерного экспоненциального распределения и распределения Маршалла — Олкина. При этом свойство отсутствия последействия в двумерном случае распространяется двумя способами: первый —

$$G(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = G(x_1, x_2) G(y_1, y_2), \quad \forall x_j \geq 0, \quad \forall y_j \geq 0, \\ j = 1, 2,$$

где $G(x_1, x_2) = P(X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2)$, $G(0+, 0+) = 1$, и второй —

$$G(x_1 + t, x_2 + t) = G(x_1, x_2) G(t, t), \quad \forall x_j \geq 0, \quad j = 1, 2; \\ \forall t \geq 0$$

(см. также [189]).

Характеристики и устойчивость тех же распределений — двумерного экспоненциального и распределения Маршалла — Олкина, — но уже при условии проинтегрированных свойств отсутствия последействия, изучены А. Обретеновым и С. Рачевым [181]. В статье Н. А. Володина, А. Ю. Умарова, Ш. Х. Шукурлаевой [198] предлагается рассматривать сам многомерный аналог свойства отсутствия последействия в

новой форме. Там же получена оценка устойчивости характеристики распределения Маршалла — Олкина таким свойством. Наконец, некоторый обзор по характеристикам многомерных распределений экспоненциального типа и их устойчивости приводится в работе А. Обретенова [227] и монографии Т. А. Азларова, Н. А. Володина [1].

В этой монографии характеристическим задачам в классе распределений с монотонной интенсивностью отказов и их устойчивости посвящен отдельный параграф, поэтому здесь мы лишь дополнительно укажем работы [180, 195, 224, 225]. Теоремы устойчивости для некоторых других характеристик экспоненциального распределения рассмотрены в статьях [96, 144, 170, 188, 190]. Устойчивости характеристик экспоненциального закона посвящен также § 2.2 настоящей монографии и недавно появившаяся заметка В. Н. Никулина в журнале „Теория вероятности и ее применение“, 1990, т. 35, № 2, с. 367–370.

5. Свойство отсутствия последействия в среднем

Пусть X — неотрицательная случайная величина. Известно, что если для некоторого натурального k справедливо равенство

$$E \{ (X - x)^k | X \geq x \} = E X^k < \infty, \quad \forall x \geq 0, \quad (\text{П.16})$$

то X имеет экспоненциальное распределение. Соотношение (П. 16) принято называть свойством отсутствия последействия в среднем k -го порядка. Случай $k=1$ рассмотрен в статье [187], а $k=2$ — в [196]. Наконец, случай произвольного натурального k был исследован О. М. Сахобовым и А. А. Гешевым [67] в 1974 г. Доказательство этого результата можно найти также в монографии Я. Галамбоша, С. Коца [110, теорема 2.3.2].

Для случая $k=1, 2$ устойчивость характеристики свойством (П. 16) была исследована в [194, 196] в следующей постановке: если выполнено условие

$$\sup_{x \geq 0} |E \{ (X - x)^k | X \geq x \} - a| \leq \varepsilon \quad (\text{П.17})$$

для некоторого $a > 0$, то имеет ли место близость порядка ε величины X и экспоненциальной случайной величины в равномерной метрике?

Случай произвольного натурального k рассматривался Л. Б. Клебановым и О. Л. Янушкявичене [37, 218], а также Х.-М. Гу и К. С. Лау [111].

Теорема Гу—Лау. Пусть X — положительная случайная величина с распределением F . Пусть, кроме того,

$$\mathbf{E} \{ (X - x)^k \mid X \geq x \} = \mathbf{E} X^k (1 - R(x)), \quad \forall x \geq 0,$$

и при этом $|R(x)| \leq C \exp(-\delta x)$,

$$C < \left\{ 1 - (\mathbf{E} X^k)^{-1} k \int_0^{\infty} \exp\{-(\alpha + \varepsilon)y\} y^{k-1} dy \right\} / 6,$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторый параметр, δ — фиксированная положительная величина, а α — корень уравнения

$$\mathbf{E} X^k = k \int_0^{\infty} \exp(-\alpha y) y^{k-1} dy.$$

Тогда

$$F(x) = 1 - (1 + S(x)) \exp(-\alpha x), \quad \forall x \geq 0,$$

причем $|S(x)| \leq \varepsilon$.

При доказательстве этой теоремы используется уравнение свертки (2.0.3) из гл. 2.

Однако оказывается, что условие (П. 17) чрезмерно ограничительно (как при $k = 1, 2$, так и при $k > 2$), так как из него следует, например, что существуют конечные моменты всех порядков случайной величины X . Поэтому Л. Б. Клебанов и О. Л. Янушкявичене [37, 218] предложили использовать более слабые, чем (П. 17), условия почти-отсутствия последдействия в среднем k -го порядка, а именно:

$$\sup_{x \geq 0} |\mathbf{E} \{ (X - x)^k \mid X \geq x \} - \mathbf{E} X^k| \mathbf{P}(X \geq x) \leq \varepsilon.$$

Это же определение использовалось затем А. Обретенным и С. Рачевым [228].

Л. Б. Клебанов [34] обобщил саму задачу характеризации, заменив (П. 16) соотношением

$$\mathbf{E} \{ h(X - x) \mid X \geq x \} = \mathbf{E} h(X), \quad \forall x \geq 0, \quad (\text{П. 18})$$

где $h(y)$ — некоторая вещественная измеримая функция, для которой $\mathbf{E} |h(X)| < \infty$.

Устойчивость характеристики экспоненциального закона свойством (П. 18) для случая когда $h(y)$ — полином с неотрицательными коэффициентами, рассмотрена Р. Шимицу [146, 147]. При отказе от неотрицательности коэффициентов как сама характеристика, так и ее устойчивость существенно меняются. Соответствующие примеры рассмотрены в работе Л. Б. Клебанова [34] и автора [97] и отражены в теореме 2.3.1. Сама же теорема Л. Б. Клебанова и ее устойчивость формулируются в § 2.2.

6. Устойчивость в задачах восстановления типа распределения

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 3$, — случайный вектор. Обозначим

$$a_X = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad S_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - a_X)^2.$$

Образуем статистики

$$\mathbf{Y}^{(k)} = (Y_1^{(k)}, \dots, Y_n^{(k)}) = G_k(\mathbf{X}), \quad k = 1, 2,$$

где $Y_j^{(1)} = X_j - a_X$, $Y_j^{(2)} = Y_j^{(1)} / S_X$.

Аналогично, но уже по другому вектору $\tilde{\mathbf{X}}$, образуются статистики

$$\tilde{\mathbf{Y}}^{(k)} = G_k(\tilde{\mathbf{X}}).$$

Пусть в пространстве распределений всевозможных случайных векторов $\{\mathbf{X}\}$ задана метрика μ . Восстановлением аддитивного ($k=1$) и полного ($k=2$) типов распределений можно назвать следующие заключения (см. [203]):

$$\mu(\mathbf{Y}^{(k)}, \tilde{\mathbf{Y}}^{(k)}) = 0 \Rightarrow \mu(\mathcal{A}_X^{(k)}, \tilde{\mathbf{X}}) = 0,$$

где

$$\mathcal{A}_X^{(1)} = \{\mathbf{X} + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n\},$$

$$\mathcal{A}_X^{(2)} = \{t^2 \mathbf{X} + \mathbf{u} : t \in \mathbf{R}^1, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n\}.$$

Такая метрическая постановка характеристической задачи делает очевидной постановку соответствующей задачи устойчивости. Наличие качественной устойчивости в схеме восстановления было установлено в 1965 г. Ю. В. Прохоровым [230] при дополнительном условии аналитичности

в окрестности нуля характеристической функции рассматриваемой повторной выборки. Количественные оценки устойчивости в задаче восстановления аддитивного типа рассматривались А. М. Каганом и Л. Б. Клебановым [207], В. М. Золотаревым [203], Л. Б. Клебановым [209], а в задаче восстановления полного типа — А. А. Зингером [202] и В. М. Золотаревым [203]. Оценки устойчивости в задаче восстановления нормального типа получены С. В. Семовским [231] и А. П. Ушаковой [233].

7. ε -допустимость оценок

Пусть $X_1, \dots, X_n, n \geq 3$, — повторная выборка из совокупности с распределением $F(x - \Theta)$, $\Theta \in \mathbb{R}^1$, причем $F(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x) = 0, \quad 0 < \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF(x) = \sigma^2 < \infty. \quad (\text{П.19})$$

Будем говорить, что $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ ε -допустима в классе несмещенных оценок параметра $\Theta \in \mathbb{R}^1$ (при квадратической функции потерь), если не существует оценки $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$ с $E_{\Theta} \tilde{\Theta} = \Theta$, для которой

$$E_{\Theta} (\tilde{\Theta} - \Theta)^2 < E_{\Theta} (\bar{X} - \Theta)^2 - \varepsilon$$

при всех $\Theta \in \mathbb{R}^1$ (см. [30, § 9.3]).

В 1970 г. А. М. Каганом [171] была получена следующая теорема устойчивости характеристики нормального закона свойством допустимости $\bar{X}$ в классе несмещенных оценок $\Theta \in \mathbb{R}^1$ при фиксированном σ .

Теорема А. М. Кагана. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые равнораспределенные случайные величины с симметричным распределением $F(x)$, удовлетворяющим условию (П. 19). Если $\bar{X}$ является $\frac{\sigma^2 \varepsilon^2}{n}$ -допустимой в классе несмещенных оценок параметра $\Theta \in \mathbb{R}^1$, то существует абсолютная константа C такая, что

$$\rho(X_j, N_{0, \sigma^2}) \leq C (\ln 1/\varepsilon)^{-1/2}, \quad (\text{П.20})$$

где N_{0, σ^2} — нормальный закон с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Основным функциональным уравнением в доказательстве этой теоремы является уравнение

$$f''(t)f(t) - f'(t) + \sigma^2 f^2(t) = r(t),$$

где $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины X_j , а $r(t)$ — некоторый остаточный член. Любопытно отметить, что с этим уравнением мы уже встречались в § 4.3 при исследовании устойчивости в характеристизации совершенно иным свойством статистик.

Оценка устойчивости характеристизации нормального закона свойством допустимости выборочного среднего $\bar{X}$ как оценки Θ , но уже при мешающем параметре σ , была получена А. А. Зингером [201]. При этом порядок оценки — логарифмический, как и в (П. 20). Оценка такого же порядка, но уже при рассмотрении устойчивости в задаче характеристизации распределения Мизеса, была получена В. Н. Никулиным [226].

Л. Бондессоном [168] получены оценки устойчивости характеристизации нормального, гамма- и сдвинутого гамма-распределений свойством асимптотической ϵ -допустимости выборочного среднего как оценки параметра сдвига, масштаба или параметра сдвига при наличии мешающего масштабного параметра. Проблемам асимптотической ϵ -допустимости посвящены также работы А. М. Кагана и Л. Б. Клебанова [172], Л. Б. Клебанова и И. А. Меламеда [211].

8. Разное

А. М. Каган [205] обратил внимание на то обстоятельство, что многие характеристизационные свойства S могут быть ослаблены до свойств S^* , представляющих собой аналоги свойств S в так называемом широком смысле. Под этим обычно подразумевается, что новое свойство S^* также является характеристизационным, но уже для распределения, соответствующее число первых моментов которого совпадает с одноименными моментами некоторого закона из множества распределений, описываемого свойством S .

Рассмотрим простой пример. В § 2.6 мы отмечали, что если X_1, X_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины с распределением F , а статистики $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ независимы, то из теоремы С. Н. Бернштейна следует, что X_1, X_2 нормальны. Аналогом в широком смысле этой

теоремы является следующий результат (см. [205]). Пусть $E |X_j|^{k+m} < \infty$, $k \geq 2$, $m \geq 2$. Если

$$E(X_1 + X_2)^p (X_1 - X_2)^q = E(X_1 + X_2)^p E(X_1 - X_2)^q,$$

то при четном m первые $k+m$ моментов распределения $F(x)$, а при нечетном m — первые $k+m-1$ моментов распределения $F(x)$ совпадают с одноименными моментами нормального закона.

Исследования таких „ослаблений“ или „расширений“ S^* часто по существу являются исследованием устойчивости в некоторых специальных метриках характеристического свойства S . Рассмотрим следующий пример.

Пусть, как и прежде, $X_1, \dots, X_n$ — независимые равнораспределенные случайные величины, и пусть

$$L_1 = \sum_{j=1}^n a_j X_j, \quad L_2 = \sum_{j=1}^n b_j X_j$$

— две линейные статистики. Согласно теореме И. Марцинкевича [128], при условиях

$$\max_j |a_j| \neq \max_j |b_j|, \quad E |X_j|^k < \infty, \quad k=1, 2, \dots$$

из равнораспределенности статистик L_1 и L_2 следует нормальность случайных величин $X_1, \dots, X_n$.

Аналогом в широком смысле равнораспределенности статистик L_1 и L_2 является равномоментность

$$E L_1^l = E L_2^l, \quad l=1, 2, \dots, k, \quad (\text{П.21})$$

причем предполагается, что $E |X_j|^k < \infty$.

Согласно [205], при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_j^l \neq \sum_{j=1}^n b_j^l, \quad l=3, \dots, k, \quad (\text{П.22})$$

из равномоментности (П.21) следует совпадение моментов случайных величин $\{X_j\}$ с соответствующими нормальными моментами.

Введем теперь на множестве функций распределения метрику $d(F_1, F_2)$, положив, следуя [222],

$$d(F_1, F_2) = 1/(k+1),$$

если ровно k первых моментов распределений F_1 и F_2 конечны и совпадают. Строго говоря, d является метрикой только

на множестве функций распределения, обладающих моментами всех порядков и определяемых по своим моментам единственным образом.

Обозначим через F , G_1 , G_2 функции распределения случайных величин X_j , L_1 и L_2 соответственно. Тогда сформулированный выше результат о равномоментности двух линейных статистик может быть сформулирован как теорема устойчивости характеристикизации И. Марцинкевича в метрике d :

Если $d(G_1, G_2) \leq 1/(k+1)$ и выполнены условия (П. 22), то $d(F, \Phi) \leq 1/(k+1)$, где Φ — функция распределения некоторого нормального закона.

Характеризационные в широком смысле свойства рассматривались также в статьях [216, 221] и диссертации С. Т. Мкртчяна [223], а оценки близости распределений в терминах совпадающих моментов — в [217]. „Расширение“ характеристикаций путем замены условия на независимость линейных статистик регрессионными соотношениями и другие родственные задачи исследовались А. М. Каганом и А. А. Зингером [173].

Несомненный интерес представляют собой характеристики на основе так называемых свойств сужения. Еще в 50-х годах А. Н. Колмогоров поставил следующий вопрос. Пусть Ψ — безгранично делимое вероятностное распределение на прямой $\mathbb{R}^1$, а Φ — стандартное нормальное распределение, и пусть сужения Ψ и Φ совпадают на некоторой полуоси $(-\infty, a)$. Следует ли отсюда, что $\Psi \equiv \Phi$? Утвердительный ответ был получен лишь в 1974 г. Г. Россбергом. Дальнейшее развитие этой проблематики и соответствующая библиография подробно рассмотрены И. В. Островским, А. М. Улановским [182]. В [232] строятся оценки устойчивости в некоторых теоремах сужения.

Мы видели, что в ряде теорем устойчивости получаемая оценка устойчивости неумлучшаема с точностью до постоянной. К сожалению, зачастую оценки снизу вообще не рассматривались. Существуют, однако, оценки устойчивости „абсолютной точности“. Конечно, рассмотрение таких оценок было начато с простейших характеристик вырожденного в нуле распределения E .

Действительно, если $F * F = F$, то очевидно, $F = E$, и наоборот. Введем меру устойчивости рассматриваемой характеристики:

$$\beta(\varepsilon) = \sup \{ \rho(F, E) : F \in \mathcal{F}_\varepsilon \},$$

где $\mathcal{F}_\varepsilon = \{F : \rho(F * F, F) \leq \varepsilon\}$.

Теорема Ю. Мачиса [220]. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\beta(\varepsilon) = (1 - \sqrt{1 - 12\varepsilon})/6.$$

Краткий обзор оценок устойчивости характеристик вырожденного распределения приводится в статье [184], библиографию которой пополним работой [219].

В заключение перечислим работы по устойчивости характеристик, более подробное рассмотрение которых мы не смогли осуществить из-за ограниченности объема настоящей монографии. Так, оценки устойчивости характеристик свойством фишеровской информации изучались в работах Л. Б. Клебанова и И. А. Меламеда [174, 210, 212]. В статьях тех же авторов [35, 215] рассматривается устойчивость характеристики нормального закона свойствами параметрических оценок плотности распределения и некоторые задачи характеристики и устойчивости, возникающие при асимптотическом оценивании параметров сдвига и масштаба. Понятие ε -байесовости вводится в работе А. М. Кагана и Ю. Н. Карпова [206] и развивается в диссертации последнего [208], а свойство ε -достаточности рассмотрено Л. А. Анориной в работе [197].

Наконец, список литературы по общим вопросам устойчивости, цитированной во Введении и гл. 1, можно пополнить работами В. М. Золотарева [192, 204], а по аналитическому аппарату — работами П. Давис и Д. Шанбхага [169], Б. Рамачандрана [185, 186], Х. Уитта [191].

ЛИТЕРАТУРА

1. Азларов Т. А., Володин Н. А. Характеризационные задачи, связанные с показательным распределением. Ташкент: Фан, 1982. 98 с.
2. Арак Т. В. О сближении n -кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25, № 2. С. 225—246.
3. Арак Т. В. О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26, № 2. С. 225—245.
4. Бернштейн С. Н. Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса // Труды Ленингр. политехн. ин-та. 1941. Т. 3. С. 21—22.
5. Габович Ю. Р. Об эффекте устойчивости характеристики нормального распределения в теореме С. Н. Бернштейна // Доклады АН СССР. 1972. Т. 205, № 1. С. 13—15.
6. Габович Ю. Р. Об устойчивости некоторых характеристических свойств нормального распределения // Теория вероятн. и ее примен. 1974. Т. 19, № 2. С. 374—382.
7. Габович Ю. Р. Устойчивость некоторых характеристик нормального распределения независимостью статистик: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1974. 104 с.
8. Габович Ю. Р. Устойчивость характеристики многомерного нормального распределения в теореме Скитовича — Дармуа // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 61. С. 5—16.
9. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.
10. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. М.: Физмат, 1960. 316 с.
11. Голинский Л. Б. Оценки устойчивости в теореме И. Марцинкевича // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1988. С. 8—24.
12. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Интегрально-разностные уравнения Винера — Хопфа // Acta Scientiarum Math. 1969. V. 30, N 3—4. P. 199—224.
13. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.
14. Зингер А. А. О независимых выборках из нормальной совокупности // Успехи матем. наук. 1951. Т. 6, № 2. С. 172—175.
15. Зингер А. А. Исследования по аналитической статистике и их приложения к предельным теоремам теории вероятностей: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Л., 1968.
16. Зингер А. А., Клебанов Л. Б. Об оценке устойчивости в задаче характеристики свойством равномерности линейных статистик // Теория вероятн. и ее примен. 1985. Т. 30, № 3. С. 598—599.

17. Зингер А. А., Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. Оценки устойчивости в теореме Д. Пойа // Литовский матем. сб. 1987. Т. 27, № 3. С. 481–488.
18. Зингер А. А., Янушкявичюс Р. В. Об одной характеристике нормального закона и ее устойчивости // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25, № 2. С. 425–427.
19. Зингер А. А., Янушкявичюс Р. В. Об одной теореме характеристики одинаковой распределенностью статистик и ее устойчивости // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1980. С. 32–45.
20. Зингер А. А., Янушкявичюс Р. В. Оценка устойчивости одной характеристической теоремы Ю. В. Линника // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26, № 3. С. 653–654.
21. Зингер А. А., Янушкявичюс Р. В. Устойчивость одной характеристической теоремы Ю. В. Линника // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1981. С. 24–30.
22. Зингер А. А., Янушкявичюс Р. В. Оценки устойчивости характеристики одинаковой распределенностью линейных статистик // Литовский матем. сборник. 1983. Т. 23, № 3. С. 39–47.
23. Золотарев В. М. К вопросу об устойчивости разложения нормального закона распределения на компоненты // Теория вероятн. и ее примен. 1968. Т. 13, № 4. С. 738–742.
24. Золотарев В. М. Эффект устойчивости характеристики распределений // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 61. С. 38–55.
25. Золотарев В. М. Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений // Матем. сборник. 1976. Т. 104 (143), № 11. С. 416–454.
26. Золотарев В. М. О проблеме устойчивости одного класса задач характеристики распределений и одной лемме Ю. Р. Габовича // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1980. С. 46–52. Исправление: 1981. С. 154.
27. Золотарев В. М. О строении идеальных метрик // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1981. С. 30–39.
28. Золотарев В. М., Сенатов В. В. Двусторонние оценки метрики Леви // Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т. 20, № 2. С. 239–250.
29. Исследования по математической статистике: Записки науч. семинаров ЛОМИ, 1979. Т. 87. 215 с.
30. Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972. 656 с.
31. Какосян А. В. Об устойчивости одной характеристики обобщенного гамма-распределения // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1984. С. 58–61.
32. Какосян А. В., Клебанов Л. Б. Оценка устойчивости в задаче восстановления аналитической характеристической функции // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1987. С. 49–56.
33. Какосян А. В., Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. Вероятностные применения аналога одного неравенства А. Н. Колмогорова // Доклады АН СССР. 1984. Т. 279, № 3. С. 535–538.
34. Клебанов Л. Б. Несколько результатов, связанных с характеристикой показательного распределения // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25, № 3. С. 628–633.
35. Клебанов Л. Б., Меламед И. А. Об устойчивости характеристики нормального закона свойствами параметрических оценок плот-

- ности распределения // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1981. С. 60–66.
36. Клебанов Л. Б., Мкртчян С. Т. Оценка близости распределений по близости их характеристических функций на конечном интервале // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 108. С. 111–118.
37. Клебанов Л. Б., Янушкявичене О. Л. Об устойчивости характеристики экспоненциального закона // Литовский матем. сб. 1982. Т. 22, № 3. С. 103–111.
38. Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. Оценки устойчивости в одной теореме о характеристизации свойством одинаковой распределенности // Литовский матем. сб. 1981. Т. 21, № 3. С. 172–174.
39. Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. Об оценке устойчивости в одной теореме Д. В. Аносова // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26, № 3. С. 668–669.
40. Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. ϵ -независимость выборочно-го среднего и грубчатой статистики // Теория вероятн. и ее примен. 1983. Т. 28, № 1. С. 157–163.
41. Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. О неравенствах между верхними гранями модулей функции и ее производных // Литовский матем. сб. 1983. Т. 23, № 4. С. 177–179.
42. Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. О неулучшаемой оценке устойчивости в одной теореме С. Н. Бернштейна // Теория вероятн. и ее примен. 1983. Т. 28, № 4. С. 814.
43. Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. О компактности одного класса характеристических функций // Литовский матем. сб. 1984. Т. 24, № 1. С. 91–101.
44. Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. Об ϵ -независимости $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ // Литовский матем. сб. 1985. Т. 25, № 3. С. 83–92.
45. Клебанов Л. Б., Янушкявичюс Р. В. Оценка устойчивости в теореме С. Н. Бернштейна // Теория вероятн. и ее примен. 1985. Т. 30, № 2. С. 358–360.
46. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
47. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи матем. наук. 1958. Т. 13, № 5. С. 3–120.
48. Линник Ю. В. Замечания по поводу классического вывода закона Максвелла // Доклады АН СССР. 1952. Т. 85, № 6. С. 1251–1254.
49. Линник Ю. В. Линейные формы и статистические критерии // Укр. матем. журнал. 1953. Т. 5, № 2. С. 207–243; № 3. С. 247–290.
50. Линник Ю. В. Разложения вероятностных законов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1960. 264 с.
51. Линник Ю. В. Избранные труды. Математическая статистика. Л.: Наука, 1982. 284 с.
52. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М.: Наука, 1972. 479 с.
53. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979. 424 с.
54. Мандельброт С. Примыкающие ряды. Регуляция последовательностей. Применения. М.: ИЛ, 1955. 268 с.
55. Мачис Ю. Об одной характеристизации нормального распределения // 28-я конференция Литовского матем. общ.: Тез. докл. Вильнюс, 1987. С. 224–225.

56. Непрерывность и устойчивость в задачах теории вероятностей и математической статистики: Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 61. 138 с.
57. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. 416 с.
58. Прохоров Ю. В., Фиш М. Характеристическое свойство нормального распределения в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен. 1957. Т. 2, № 4. С. 475–477.
59. Райков Д. А. О разложении закона Пуассона // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14. С. 9–12.
60. Сапогов Н. А. Проблема устойчивости для теоремы Крамера // Известия АН СССР, серия матем. 1951. Т. 15, № 3. С. 205–218.
61. Сапогов Н. А. О независимых слагаемых сумм случайных величин, распределенных приближенно нормально // Вестник ЛГУ. 1959. № 19. С. 78–105.
62. Сапогов Н. А. Устойчивость решений функциональных уравнений, связанных с задачами характеристики вероятностных распределений // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 55. С. 15–25.
63. Сапогов Н. А. Устойчивость для теоремы Марцинкевича. Случай многочлена четвертой степени // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 61. С. 107–124.
64. Сапогов Н. А. Проблема устойчивости для теоремы Марцинкевича // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 87. С. 104–124.
65. Сапогов Н. А. Задача об устойчивости теоремы единственности характеристической функции, аналитической в окрестности точки $t=0$ // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25, № 2. С. 416.
66. Сапогов Н. А. Задачи об устойчивости теоремы единственности характеристической функции, аналитической в окрестности начала $t=0$ // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1980. С. 88–94.
67. Сахобов О. М., Гешев А. А. Характеризационные свойства показательного распределения // Natura Univ. Plovdiv. 1974. V. 7, N 1. P. 25–28.
68. Стейшунас С. П., Янушквичюс Р. В. Замечания к одной теореме Е. Лукача // Литовский матем. сб. 1986. Т. 26, № 4. С. 759–767.
69. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов. М.: ОГИЗ, 1948. 479 с.
70. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 751 с.
71. Фельдман Н. И. Улучшение оценки линейной формы от логарифмов алгебраических чисел // Матем. сборник. 1968. Т. 77 (119), № 3. С. 423–436.
72. Хеннекен П. Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974. 472 с.
73. Хоанг Хыу Ньы. Об устойчивости некоторых характеристических свойств нормальной совокупности // Теория вероятн. и ее примен. 1968. Т. 13, № 2. С. 308–314.
74. Чистяков Г. П. Устойчивость разложений законов распределения // Теория вероятн. и ее примен. 1986. Т. 21, № 3. С. 433–450.
75. Шалаевский О. В. Об устойчивости для теоремы Д. А. Райкова // Вестник ЛГУ. 1959. № 7. С. 41–49.
76. Шиганов И. С. Метрический подход к исследованию устойчивости теоремы Поля о характеристизации нормального распределения //

- Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1981. С. 145–154.
77. Шиганов И. С. Уточнение оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме для схемы минимизации случайных величин // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1983. С. 117–119.
78. Янушкявичене О. Л. Оценка устойчивости одной характеристики экспоненциального закона // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29, № 2. С. 279–288.
79. Янушкявичене О. Л. О скорости сходимости квазиустойчивых законов к нормальному закону // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1985. С. 152–160.
80. Янушкявичене О. Л., Янушкявичюс Р. В. Устойчивость одной характеристики свойством одинаковой распределенности // Литовский матем. сб. 1982. Т. 22, № 4. С. 206–207.
81. Янушкявичюс Р. В. Об оценках устойчивости в некоторых задачах характеристики распределений // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23, № 2. С. 469–470.
82. Янушкявичюс Р. В. Об оценках меры устойчивости разложений вероятностных распределений на компоненты // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23, № 3. С. 527–539.
83. Янушкявичюс Р. В. Оценки устойчивости характеристики вырожденного распределения // Литовский матем. сб. 1979. Т. 19, № 3. С. 196–197.
84. Янушкявичюс Р. В. Оценки устойчивости характеристики нормального закона в теореме Д. Пойа // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 87. С. 196–205.
85. Янушкявичюс Р. В. Оценки устойчивости характеристики нормального закона одинаковой распределенностью монома и линейной статистики // Литовский матем. сб. 1980. Т. 20, № 2. С. 195–206.
86. Янушкявичюс Р. В. Устойчивость характеристики нормального закона постоянством регрессии // Литовский матем. сб. 1980. Т. 20, № 3. С. 173–174.
87. Янушкявичюс Р. В. Об устойчивости характеристики свойством постоянства регрессии // Литовский матем. сб. 1981. Т. 21, № 2. С. 215–223.
88. Янушкявичюс Р. В. К вопросу об устойчивости одной характеристики вырожденного распределения // Литовский матем. сб. 1982. Т. 22, № 4. С. 208–209.
89. Янушкявичюс Р. В. Еще раз об устойчивости теоремы Д. Пойа и одной регрессионной задаче // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1983. С. 119–128.
90. Янушкявичюс Р. В. О почти независимых линейных статистиках // Междунар. семинар по пробл. мат. модел. и устойчивости стох. моделей: София, 1985. С. 53–54.
91. Янушкявичюс Р. В. О почти независимости суммы случайных величин и их разности // Теория вероятн. и ее примен. 1985. Т. 30, № 3. С. 606.
92. Янушкявичюс Р. В. О почти независимых в равномерной метрике статистиках $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1985. С. 160–170.
93. Янушкявичюс Р. В. О скорости сходимости в некоторых характеристизационных задачах // Первый всемирный конгресс общ. матем.

- статист. и теории вероятн. им. Бернулли: Тез. докл. Т. 2. М.: Наука, 1986. С. 806.
94. Янушкявичюс Р. В. Применения уравнений свертки в задачах устойчивости характеристик вероятностных распределений // Литовский матем. сб. 1987. Т. 27, № 4. С. 798–811.
 95. Янушкявичюс Р. В. Уравнения свертки в задачах устойчивости характеристик вероятностных законов // Теория вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33, № 4. С. 720–734.
 96. Янушкявичюс Р. В. О новом подходе построения оценок устойчивости характеристик распределений // Пятая междунар. вильнюсская конф. по теории вероятн. и матем. статистике: Тез. докл. Вильнюс, 1989. Т. 4. С. 394.
 97. Янушкявичюс Р. В. Об устойчивости характеристик смеси вероятностных распределений // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1989. С. 154–163.
 98. Янушкявичюс Р. В., Янушкявичене О. Л. Метод многократных преобразований в теории устойчивости // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1982. С. 115–120.
 99. Янушкявичюс Р. В., Янушкявичене О. Л. Оценки устойчивости в характеристизационной теореме П. Леви // Теория вероятн. и ее примен. 1983. Т. 28, № 4. С. 820.
 100. Alzaid A. A., Lau K.-S., Rao C. R., Shanbhag D. N. Solution of Deny Convolution equation restricted to a half line via a random walk approach // J. Multivar. Anal. 1988. Vol. 24, N 2. P. 309–329.
 101. Alzaid A. A., Rao C. R., Shanbhag D. N. Solution of the integrated Cauchy functional equation on a half line using exchangeability // Sankhya. 1987. Vol. 49 (A), N 2. P. 189–194.
 102. Analytical methods in probability theory: Proc. Conf. Oberwolfach, Germany, 1980 // Lecture Notes in Math. 1981. Vol. 861.
 103. Bednarek-Kozek B., Kozek A. On the robustness of properties characterizing the normal distribution // Zastowania matem. (Appl. Math.). 1972. Vol. 13, N 2. P. 215–230.
 104. Bednarek-Kozek B., Kozek A. Stability, sensitivity and sensitivity of characterizations // Math. Statist. Warszawa, 1980. P. 39–64.
 105. Brandhofs T., Davies L. On a functional equation in the theory of linear statistics // Ann. Inst. Statist. Math. 1980. Vol. 32, N 1(A). P. 17–23.
 106. Choquet G., Deny J. Sur l'equation de convolution // C. R. Acad. Sci. 1960. Vol. 250. P. 799–801.
 107. Cramer H. Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion // Math. Zeitschrift. 1936. B. 41. S. 405–414.
 108. Davies L. A theorem of Deny with applications to characterization problems // Lecture Notes in Math. 1980. Vol. 861. P. 35–41.
 109. Ferguson T. S. On characterizing distributions by properties of order statistics // Sankhya. 1967. Vol. 29, N 3(A). P. 265–278.
 110. Galambos J., Kotz S. Characterizations of probability distributions // Lecture Notes in Math. 1978. Vol. 675. P. 1–169.
 111. Gu H. M., Lau K. S. Integrated Cauchy functional equation with an error term and the exponential law // Sankhya. 1984. Vol. 46, N 3(A). P. 339–354.
 112. Gupta R. C. Relationships between order statistics and record values and some characterization results // J. Appl. Probab. 1984. Vol. 21, N 2. P. 425–430.

113. **Kakosyan A. V., Klebanov L. B., Melamed J. A.** Characterization of distributions by the method of intensively monotone operators // *Lecture Notes in Math.* 1984. Vol. 1088. P. I–VIII, 1–175.
114. **Kawata T., Sakamoto H.** On the characterization of the independence of the sample mean and the sample variance // *J. Math. Soc. Japan.* 1949. Vol. 1, N 2. P. 111–115.
115. **Klebanov L.** When are two special linear forms of independent random vectors identically distributed? // *Trans. Eight Prague Conf. Prague,* 1978. Vol. A. P. 355–362.
116. **Klebanov L. B., Yanushkevichius R.** The estimates of stability for a theorem on the characterization by means of the identical distribution property // *Nonparametric statistical inference.* Amsterdam; New York: North-Holland Publ. Co., 1982. Vol. 2. P. 501–514.
117. **Krishnaji N.** Characterization of the Pareto distribution through a model of underreported incomes // *Econometrica.* 1970. Vol. 38, N 2. P. 251–255.
118. **Lau K. S., Rao C. R.** Integrated Cauchy functional equation and characterizations of the exponential law // *Sankhya.* 1982. Vol. 44, N 1(A). P. 72–90.
119. **Lau K. S., Rao C. R.** Solution to the integrated Cauchy functional equation on the whole line // *Sankhya.* 1984. Vol. 46, N 3(A). P. 311–318.
120. **Lukacs E.** A characterization of the normal distribution // *Ann. Math. Stat.* 1942. Vol. 13, N 1. P. 91–96.
121. **Lukacs E.** Stability theorems for characterizations by constant regression // *Periodica Math. Hungarica.* 1972. Vol. 2. P. 111–128.
122. **Lukacs E.** Stability theorems for characterizations by independence and by regression // *Bull. Int. Stat. Inst.* 1977. Vol. 47, N 2. P. 366–381.
123. **Lukacs E.** Stability theorems // *Adv. Appl. Probab.* 1977. Vol. 9. P. 336–361.
124. **Lukacs E.** A characterization of rectangular distribution // *Stoch. Processes and Their Appl.* 1979. Vol. 9, N 3. P. 273–279.
125. **Lukacs E.** Stability theorems for characterizations of the normal and of the degenerate distributions // *Asymptotic Theory of Statistical Tests and Estimation.* Academic Press, 1980. P. 205–229.
126. **Lukacs E.** On the stability of a characterization of the rectangular distribution // *Probability and Mathematical Statistics: Essays in Honor of. C.-G. Esseen.* North-Holland Publ. Co., 1983. P. 118–128.
127. **Lukacs E.** On the stability of a characterization of the rectangular distribution // *Proc. 3rd Pannonian Symp. on Math. Statistics.* Visegrad, Hungary, 1984. P. 183–190.
128. **Marcinkiewicz I.** Sur une propriete de la loi de Gauss // *Math. Zeitschrift.* 1938. B. 44. S. 622–638.
129. **Marsaglia G., Tubilla A.** A note on the "lack of memory" property of the exponential distribution // *Ann. Probab.* 1975. Vol. 3, N 2. P. 353–354.
130. **Mathai A. M., Pederzoli G.** Characterization of the Normal Probability Law. New York; London: J. Wiley, 1977. I–X, 149 p.
131. **Meshalkin L. D.** On the robustness of some characterizations of the normal law // *Ann. Math. Statist.* 1968. Vol. 39, N 5. P. 1747–1750.
132. **Modern Course on Statistical Distributions in Scientific Works: Proc. NATO Adv. Study Inst., Calgary, 1974.** Dordrecht e. a., 1975. Vol. 1–3.

133. **Muliere P., Scarsini M.** Characterization of a Marshall – Olkin type class of distributions // *Ann. Inst. Statist. Math.* 1987. Vol. 39, N 2. P. 429–441.
134. **Polya G.** Herleitung des Gausschen fehlergesetzes aus einer funktionalgleichung // *Math. Zeitschrift.* 1923. B. 18. S. 96–108.
135. **Prakasa Rao B. L. S., Ramachandran B.** On a characterization of symmetric stable processes // *Aequationes Mathematicae.* 1983. Vol. 26. P. 113–119.
136. **Ramachandran B.** On the strong memorylessness property of the exponential and geometric probability laws // *Sankhya.* 1979. Vol. 41, N 2(A). P. 244–251.
137. **Ramachandran B.** On the equation $\int_{[0, \infty)} f(x+y) d\mu(y)$ // *Sankhya.* 1982. Vol. 44, N 3(A). P. 364–371.
138. **Ramachandran B.** Renewal type equations on $\mathbb{Z}$ // *Sankhya.* 1984. Vol. 46, N 3(A). P. 319–325.
139. **Ramachandran B., Prakasa Rao B. L. S.** On the equation $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) d\mu(y)$ // *Sankhya.* 1984. Vol. 46, N 3(A). P. 326–338.
140. **Ramachandran B., Rao C. R.** Solutions of functional equations arising in some regression problems and a characterization of the Cauchy law // *Sankhya.* 1970. Vol. 32, N 1(A). P. 1–30.
141. **Rao C. R., Shanbhag D. N.** Recent results on characterization of probability distributions: a unified approach through extensions of Deny's theorem // *Adv. Appl. Prob.* 1986. Vol. 18, N 3. P. 660–678.
142. **Rosberg H. J.** Characterization of the exponential and the Pareto distributions by means of some properties of the distributions which the differences and quotients of order statistics are subject to // *Math. Operations. Statist.* 1972. Vol. 3, N 3. P. 207–216.
143. **Shimizu R.** Solution to a functional equations and its application to some characterization problems // *Sankhya.* 1978. Vol. 40, N 3(A). P. 319–332.
144. **Shimizu R.** Functional equation with an error term and the stability of some characterizations of the exponential distribution // *Ann. Inst. Statist. Math.* 1980. Vol. 32, N 1(A). P. 1–16.
145. **Shimizu R.** On the stability of characterizations of the normal distribution // *Statistics and Probability: Essays in Honor of C. R. Rao.* North-Holland Publ. Co., 1982. P. 661–670.
146. **Shimizu R.** On the stability of lack of memory characterization of the exponential distribution // *Lecture Notes in Math.* 1983. Vol. 982. P. 217–226.
147. **Shimizu R.** Some stability theorems for characterizations of probability distributions // *Lecture Notes in Math.* 1983. Vol. 1021. P. 603–611.
148. **Shimizu R., Davies L.** On the stability of characterizations of non-normal stable distributions // *Statistical Distrib. in Scientific Work: Proc. NATO Adv. Study Inst., Trieste, 1980.* Dordrecht e. a., 1981. Vol. 4. P. 433–446.
149. **Stability problems for stochastic models:** Proc. 6th Internat. Seminar, Moscow, April 1982 // *Lecture Notes in Math.* 1983. Vol. 982.
150. **Stability problems for stochastic models:** Proc. 8th Internat. Seminar, Uzhgorod, Sept. 1984 // *Lecture Notes in Math.* 1985. Vol. 1155.

151. Stability problems for stochastic models: Proc. 9th Internat. Seminar, Varna, May, 1985 // Lecture Notes in Math. 1987. Vol. 1233.
152. Statistical Distributions in Scientific Works: Proc. NATO Adv. Study Inst., Trieste, 1980. Dordrecht e. a., 1981. Vol. 1—4.
153. Siganov I. S. Several remarks on applications of one approach to studies of characterization problems of Polya's theorem type // Lecture Notes in Math. 1983. Vol. 982. P. 227—237.
154. Wiener N. Tauberian theorems // Ann. Math. 1932. Vol. 33. P. 1—100.
155. Yanushkevichius R. On the stability of some characterizations of the normal law // Colloquium on Nonparametric Statistical Inference: Abstracts. Budapest, 1980. P. 25.
156. Yanushkevichius R. On almost independence of sample mean and sample variance // Четвертая междунар. вильнюсская конференция по теории вероятностей и мат. статистике: Тез. докл. Вильнюс, 1985. Т. 4. С. 340—342.
157. Yanushkevichius R. On ϵ -independence of sample mean and sample variance // Lecture Notes in Math. 1987. Vol. 1233. P. 207—223.
158. Yanushkevichius R., Yanushkevichiene O. On the stability of characterizations by an identical distribution property // 14th European Meeting of Statisticians: Abstracts. Wroclaw, 1981. P. 175—176.
159. Yanushkevichius R., Yanushkevichiene O. Investigation of stability by limit theorems // 4th USSR-Japan Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics: Abstracts. Tbilisi, 1982. Vol. 2. P. 257—258.
160. Yanushkevichius R., Yanushkevichiene O. Limit theorems in the problems of stability // Lecture Notes in Math. 1983. Vol. 982. P. 254—282.
161. Yanushkevichius R., Yanushkevichiene O. Stability of P. Lévy's characterization theorem // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. 1985. B. 70. S. 457—472.
162. Yanushkevichius R., Zinger A. On (μ, ϵ) -identically distributed linear statistics // Третья междунар. вильнюсская конференция по теории вероятностей и матем. статистике: Тез. докл. Вильнюс, 1981. Т. 3. С. 137—138.
163. Zolotarev V. M. General problems of the stability of mathematical models // Bull. Int. Stat. Inst. 1977. Vol. 47, N 2. P. 382—401.
164. Zolotarev V. M. Ideal metrics in the problems of probability theory and mathematical statistics // Austral. J. Statist. 1979. Vol. 21, N 3. P. 193—208.
165. Zolotarev V. M. Statistical estimates of the parameters of stable laws // Math. Statistics. Banach Center Publications. Warsaw, 1980. Vol. 6. P. 359—376.

* * *

166. Beer S., Lukacs E. Remarks concerning a stability theorem for a characterization of the gamma distribution // Periodica Math. Hungarica. 1972. Vol. 2. P. 129—132.
167. Beer S., Lukacs E. Stability theorems for a characterization of the Poisson distribution // Теория вероятн. и ее примен. 1974. Т. 19, № 4. С. 689—699.
168. Bondesson L. When has the sample mean as an estimator of location or scale parameter high efficiency? // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. 1977. B. 39, N 2. S. 127—146.

169. Davies P. L., Shanbhag D. N. A generalization of a theorem of Deny with applications in characterization theory // Quart. J. Math. Oxford (2). 1987. Vol. 38. P. 13–34.
170. Hohlov Yu. S. On stability estimation of certain characterization of the exponential distribution // Lecture Notes in Math. 1983. Vol. 982. P. 32–37.
171. Kagan A. M. On ε -admissibility of the sample mean as an estimator of location parameter // Sankhya. 1970. Vol. 32(A), N 1. P. 37–40.
172. Kagan A. M., Klebanov L. B. On the conditions of asymptotic ε -admissibility of the polynomial Pitman estimators of a location parameter and certain properties of information measure of closeness // Modern Course on Statist. Distrib. in Scientific Works: Proc. NATO Adv. Study Inst. Calgary, 1974. Dordrecht e. a., 1975. Vol. 3. P. 173–184.
173. Kagan A. M., Zinger A. A. A refinement of Darmois-Skitovitch and Heyde theorems // Lecture Notes in Math. 1985. Vol. 1155. P. 81–94.
174. Klebanov L. B., Melamed J. A. Stability of some problems of characterization of the normal and related distributions // Stud. Sci. Math. Hung. 1982. Vol. 17, N 1–4. P. 367–378.
175. Klebanov L. B., Melamed J. A. Discretization in the problems of stability of characterization of the exponential distribution // Lecture Notes in Math. 1983. Vol. 982. P. 110–122.
176. Klebanov L. B., Rachev S. T. Stability of the lack-of-memory property in a finite number of points // Lecture Notes in Math. 1985. Vol. 1155. P. 131–143.
177. Lukacs E. Über die Stabilität einer Charakterisierung der Normalverteilung // Sitzungsber. Osterr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1976. Abt. 2. 185, N 4–7. S. 167–179.
178. Lukacs E. A stability theorem for a characterization on the Wiener process // Trans. Seventh Prague Conf. Prague, 1977. Vol. A. P. 375–390.
179. Lukacs E. Stability theorems for characterizations of the normal and degenerate distributions // Rec. Develop. Statist. Amsterdam e. a., 1977. P. 535.
180. Obretenov A. Some characterization of bivariate distributions based on hazard rate properties // Lecture Notes in Math. 1985. Vol. 1155. P. 223–241.
181. Obretenov A., Rachev S. Characterizations of the bivariate exponential distribution and Marshall–Olkin distribution and stability // Lecture Notes in Math. 1983. Vol. 982. P. 136–150.
182. Ostrovskii I. V., Ulanovskii A. M. Probability distributions and Borel measures uniquely determined by their restrictions to a half-space // Probab. Theory and Math. Statistics: Proc. 5th Vilnius Conf. 1990. Vol. 2. P. 278–287.
183. Panaretos J., Shimizu R. On the stability of a characterization of the Poisson distribution // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29, № 4. С. 753–756.
184. Petrova L. L. On the stability of characterizations of the unit distribution // Lecture Notes in Math. 1983. Vol. 982. P. 165–171.
185. Ramachandran B. On the equation $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) d\mu(y)$ // Sankhya. 1987. Vol. 49(A), N 2. P. 195–198.

186. **Ramachandran B.** On the equation $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) d\mu(y)$ for $x \geq 0$ // Sankhya. 1988. Vol. 50(A), N 1. P. 44–51.
187. **Reinhardt H. E.** Characterising the exponential distribution // Biometrika. 1968. Vol. 28, N 2. P. 437–439.
188. **Richards D. St. P.** Stability theorems for some characterizations of the exponential distribution // Ann. Inst. Statist. Math. 1981. Vol. 33, N 2(A). P. 199–204.
189. **Roy D., Mukherjee S. P.** Characterizations of some bivariate life-distributions // J. Multivar. Anal. 1989. Vol. 28. P. 1–8.
190. **Shimizu R.** On the stability of characterizations of the exponential distribution // Ann. Inst. Statist. Math. 1981. Vol. 33(A). P. 339–346.
191. **Witte H.-J.** Some characterizations of distributions based on the integrated Cauchy functional equation // Sankhya. 1988. Vol. 50(A), N 1. P. 59–63.
192. **Zolotarev V. M.** Foreword // Lecture Notes in Math. 1983. Vol. 982. P. VII–XVII.
193. **Азларов Т. А.** Устойчивость характеристизационных свойств показательного распределения // Литовский матем. сб. 1972. Т. 12, № 2. С. 5–9.
194. **Азларов Т. А.** Характеризационные свойства показательного распределения и их устойчивость // Предельные теоремы, случайные процессы и их приложения. Ташкент, 1979. С. 3–14.
195. **Азларов Т. А., Володин Н. А.** Две оценки близости распределений с монотонной интенсивностью отказов к показательному // Сердика Българско математическо списание. 1983. Т. 9. С. 218–222.
196. **Азларов Т. А., Джамирзаев А. А., Султанова М. М.** Характеризационные свойства показательного распределения и их устойчивость // Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент: Фаи, 1972. С. 10–19.
197. **Анорина Л. А.** ϵ -достаточность в задаче характеризации нормального распределения // Асимптотические методы математической статистики. Ташкент: Фан, 1987. С. 13–17.
198. **Володин Н. А., Умаров А. Ю., Шукурлаева Ш. Х.** Характеризационные свойства многомерного показательного распределения и их устойчивость // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1986. С. 30–33.
199. **Габович Ю. Р., Мачис Ю. Ю.** Об устойчивости одной характеризации вырожденного распределения // Литовский матем. сб. 1975. Т. 15, № 3. С. 212–213.
200. **Димитров Б., Клебанов Л., Рачев С.** Устойчивость характеризации экспоненциального закона // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1982. С. 39–46.
201. **Зингер А. А.** Условие ϵ -допустимости выборочного среднего как оценки параметра сдвига при мешающем масштабном параметре // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 61. С. 25–37.
202. **Зингер А. А.** К вопросу оценки устойчивости в задаче восстановления типа распределения // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 87. С. 7–17.
203. **Золотарев В. М.** Об эффекте устойчивости в задачах восстановления аддитивного и полного типов распределений // Теория вероятн. и ее примеи. 1978. Т. 23, № 2. С. 470–472.

204. Золотарев В. М. Предельные теоремы как теоремы устойчивости // Теория вероятн. и ее примен. 1989. Т. 34, № 1. С. 178—189.
205. Каган А. М. Несколько аналогов в широком смысле характеристических свойств нормального распределения // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 61. С. 59—67.
206. Каган А. М., Карпов Ю. Н. Байесовская постановка задачи оценивания параметра сдвига // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1972. Т. 29. С. 62—73.
207. Каган А. М., Клебанов Л. Б. Об оценке устойчивости в задаче восстановления аддитивного типа распределения // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 61. С. 68—74.
208. Карпов Ю. Н. Характеризационные задачи, возникающие при байесовском оценивании: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1985. 86 с.
209. Клебанов Л. Б. Еще раз об оценке устойчивости в задаче восстановления аддитивного типа распределения // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 87. С. 74—78.
210. Клебанов Л. Б., Меламед И. А. Устойчивость характеристик некоторых распределений свойствами фишеровской информации // Сообщения АН ГрузССР. 1975. Т. 79. С. 21—24.
211. Клебанов Л. Б., Меламед И. А. Асимптотическая ϵ -допустимость выборочной дисперсии как оценки генеральной дисперсии // Записки. науч. семинаров ЛОМИ. 1976. Т. 61. С. 75—83.
212. Клебанов Л. Б., Меламед И. А. Об устойчивости характеристики нормального и гамма-распределений свойствами фишеровской информации // Сообщения АН ГрузССР. 1978. Т. 91, № 3. С. 537—539.
213. Клебанов Л. Б., Меламед И. А. Об устойчивости характеристики показательного распределения свойством дискретизации // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25, № 2. С. 427 // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1980. С. 63—64.
214. Клебанов Л. Б., Меламед И. А. Свойство ϵ -отсутствия последовательности в конечном числе точек и устойчивость характеристики показательного распределения // Теория вероятн. и ее примен. 1983. Т. 28, № 4. С. 813 // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1980. С. 32—46.
215. Клебанов Л. Б., Меламед И. А. О некоторых задачах характеристики и устойчивости, возникающих при асимптотическом оценивании параметров сдвига и масштаба // Случайн. анализ и асимптотические задачи теории вероятн. и мат. стат. Тбилиси, 1984. С. 106—107.
216. Клебанов Л. Б., Мкртчян С. Т. Характеристические в широком смысле свойства нормального распределения в связи с задачей устойчивости характеристик // Теория вероятн. и ее примен. 1979. Т. 24, № 2. С. 434—435.
217. Клебанов Л. Б., Мкртчян С. Т. Оценка близости распределений в терминах совпадающих моментов // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25, № 2. С. 428 // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1980. С. 64—72.
218. Клебанов Л. Б., Янушквичене О. Л. Оценки устойчивости одной характеристики экспоненциального закона // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26, № 3. С. 664.
219. Мачис Ю. Ю. Об устойчивости характеристики вырожденного распределения // Литовский матем. сб. 1987. Т. 27, № 1. С. 133—141.
220. Мачис Ю. Ю. О характеристике вырожденного в нуле закона // Литовский матем. сб. 1990. Т. 30, № 2. С. 313—318.

221. **Мкртчян С. Т.** Устойчивость характеристик распределений и некоторые характеристические в широком смысле свойства нормального распределения // Доклады АН АрмССР. 1978. Т. 67, № 3. С. 129–131.
222. **Мкртчян С. Т.** Устойчивость характеристик распределений и некоторые характеристические в широком смысле свойства нормального распределения // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26, № 1. С. 165–171.
223. **Мкртчян С. Т.** Моментные метрики и их применение к исследованию устойчивости в задачах характеристики распределений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ереван, 1981. 97 с.
224. **Неупокоева М. В.** О мгновенной интенсивности отказов и характеристики геометрического распределения // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1985. С. 112–117.
225. **Неупокоева М. В.** Характеризация экспоненциального и геометрического распределений и оценка ее устойчивости // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1986. С. 68–72.
226. **Никулин В. Н.** Об устойчивости характеристики распределения Мизеса // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1986. С. 73–84.
227. **Обретенков А.** Характеризация экспоненциального распределения и многомерных распределений экспоненциального типа и их устойчивость // Четвертая междунар. летняя школа по теории вероятн. и матем. стат. Варна, 1982. 1983. С. 168–185.
228. **Обретенков А., Рачев С.** Устойчивость некоторых характеристических свойств экспоненциального закона // Труды семинара / Всесоюз. НИИ системн. исслед. 1983. С. 79–87.
229. **Петрова Л. Л.** Оценки устойчивости в характеристической теореме Д. Поля // Матем. методы управления и обработки информации: Межведомств. сб. / МФТИ. 1982. С. 90–96.
230. **Прохоров Ю. В.** Характеризация класса распределений распределением некоторой статистики // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. 10, № 3. С. 479–487.
231. **Семовский С. В.** Об оценке устойчивости в задаче характеристики нормальности распределения равномерным распределением безразмерной статистики // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23, № 2. С. 476.
232. **Улановский А. М.** Определение n -кратной свертки функции распределения по ее значениям на системе интервалов // Доклады АН УССР. Сер. А. 1988. № 3. С. 32–35.
233. **Ушакова А. П.** Оценка устойчивости в задаче восстановления нормального типа распределения в классе симметрических типов // Методы решения задач мат. физ. и их програм. обесп. М., 1984. С. 53–54.
234. **Хоанг Хыу Нь.** Оценка устойчивости одной характеристики экспоненциального закона // Литовский матем. сб. 1968. Т. 8, № 1. С. 175–178.
235. **Янушкявичене О. Л.** Оценка скорости сходимости квазиустойчивых законов и ее приложения к задачам устойчивости // Теория вероятн. и ее примен. 1985. Т. 30, № 3. С. 605–606.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Азларов Т. А. 8, 11, 66, 223
 Анорина Л. А. 230
 Аносов Д. В. 217
 Арак Т. В. 171
- Беднарек-Козек Б. (Bednarek-Kozek B.) 181, 197, 217, 218
 Бернштейн С. Н. 8, 115, 122, 196, 210, 216, 217
 Бондессон Л. (Bondesson L.) 227
 Брандхоф Т. (Brandhofe T.) 36
- Винер Н. (Wiener N.) 31, 32, 33, 38, 39, 52
 Володин Н. А. 8, 11, 66, 222, 223
- Габович Ю. Р. 122, 180, 181, 197, 199, 200, 209, 217
 Галамбош Я. (Galambos J.) 8, 11, 75, 223
 Гешев А. А. 78, 223
 Голинский Л. Б. 86, 95, 105, 144
 Горный А. (Gorny A.) 55, 97
 Гохберг И. Ц. 47
 Гу Х. М. (Gu H. M.) 34, 37, 38, 66, 222, 224
 Гупта Р. (Gupta R. C.) 62, 75
- Давис Л. (Davies L.) 36, 212
 Давис П. (Davies P. L.) 230
 Дармуа Г. (Darmois G.) 24, 135, 136, 215, 217
 Димитров Б. 221
- Зингер А. А. 8, 10, 23, 36, 85, 86, 87, 97, 170, 181, 213, 215, 226, 227, 229
 Золотарев В. М. 4, 8, 9, 10, 11, 16, 18, 21, 22, 97, 150, 168, 174, 212, 226, 230
- Кавата Т. (Kawata T.) 8
- Каган А. М. 8, 11, 226, 227, 229, 230
 Какосян А. В. 8, 94, 106, 218
 Калашников В. В. 9
 Карпов Ю. Н. 230
 Картан А. (Cartan H.) 55, 97
 Клебанов Л. Б. 8, 10, 17, 36, 40, 45, 49, 56, 68, 94, 96, 106, 122, 136, 151, 155, 172, 210, 213, 216, 221, 224, 225, 226, 227, 230
 Козек А. (Kozek A.) 181, 197, 217, 218
 Колмогоров А. Н. 229
 Коц Т. (Kotz S.) 8, 11, 75, 223
 Крамер Г. (Cramer H.) 8
 Крейн М. Г. 31, 33, 34, 47, 48, 49, 72
 Кришнайи Н. (Krishnaji N.) 27
- Лау К. С. (Lau K. S.) 34, 36, 37, 38, 45, 66, 222, 224
 Леви П. (Lévy P.) 152, 153, 167, 214
 Линник Ю. В. 8, 11, 23, 85, 96, 179, 214, 216
 Лукач Е. (Lukacs E.) 8, 13, 14, 83, 84, 144, 145, 218
- Марцинкевич И. (Marcinkiewicz I.) 8, 85, 96, 144, 228, 229
 Матаи А. (Mathai A. M.) 8
 Мачис Ю. Ю. 210, 217, 230
 Меламед И. А. 8, 221, 227, 230
 Мешалкин Л. Д. 9, 107, 122, 197, 198, 211, 212, 217
 Мкртчян С. Т. 106, 151, 228, 229
- Напалков В. В. 43
 Никулин В. Н. 227

Обретенов А. 222, 224
Островский И. В. 11, 229

Панаретос Дж. (Panaretos J.) 219
Педерзоли Г. (Pederzoli G.) 8
Петрова Л. Л. 230
Пойа Д. (Polya G.) 8, 12, 18, 22, 23, 44, 115, 211, 212, 213
Пракаса Рао Б. Л. С. (Prakasa Rao B. L. S.) 38
Прохоров Ю. В. 116, 225

Райков Д. А. 8
Рамачандран Б. (Ramachandran B.) 25, 36, 38, 230
Рао С. Р. (Rao C. R.) 8, 11, 25, 34, 36, 38, 45, 66
Рачев С. Т. 221, 222, 224
Россберг Г. (Rossberg H. J.) 26, 229

Сакамото Х. (Sakamoto H.) 8
Сапогов Н. А. 9, 85, 86, 106
Сахобов О. М. 78, 223
Семовский С. В. 226
Скитович В. П. 24, 135, 136, 215, 217

Стейшунас С. П. 14, 218

Уитт Х. (Witte H.-J.) 230
Улановский А. М. 229

Умаров А. Ю. 222
Ушакова А. П. 226

Фельдман И. А. 47
Фельдман Н. И. 154
Фергюсон Т. (Ferguson T. S.) 47, 58, 77
Фиш М. 46, 116

Хоанг Хыу Ньы 9, 122, 180, 181, 191, 197, 198, 207, 217, 219
Хопф Е. (Hopf E.) 32, 33, 38, 39

Чистяков Г. П. 105

Шалаевский О. В. 9
Шанбхаг Д. (Shanbhag D. N.) 36, 230
Шиганов И. С. 116, 212
Шимицу Р. (Shimizu R.) 34, 36, 37, 58, 61, 71, 72, 79, 117, 212, 219, 222, 225
Шукурлаева Ш. Х. 222

Янушкявичене О. Л. 107, 116, 154, 155, 158, 159, 161, 213, 220, 224
Янушкявичюс Р. В. 14, 17, 38, 41, 57, 58, 68, 85, 86, 87, 94, 96, 97, 107, 116, 122, 199, 210, 213, 215, 216, 217, 218, 225

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Восстановление типа 225

Допустимость X 25

— допустимость 226

Индекс уравнивания 32

Квазиустойчивый закон 213

Класс устойчивых распределений 167

Лемма Габовича 199

— Клебанова—Янушкявичене 155

— метрическая 96

— Хоанг Хыу Ны 198

— Шимицу 34

— Янушкявичене 154

Метод исследования устойчивости 9

— итераций 107

— многократных преобразований 107

— факторизаций 33, 43

Метрика λ 21

— λ_0 21, 196

— λ_j 96

— равномерная q 17, 179

Множество μ -замкнутое 15

— компактное 17

— (Θ, μ) -компактное 15

— μ -компактное 15

— относительно компакное 17

Независимость X и S^2 24, 178

($\cdot, \cdot$)-независимость 122, 179

Нормальности условие 31

Отображение (v, μ) -непрерывное 15

($\cdot, \cdot$)-постоянная регрессия 79, 145

Почти независимость X и S^2 217

— отсутствие последствий 222, 224

— постоянная регрессия 79, 145, 191

F -почти всюду 46

Предельные теоремы в характеристизационных задачах 15, 116

Проблема Сапогова 86, 106

Процедура масштабирования 30, 110, 117

— растяжения 10, 107, 115

Равномерно сходящиеся на бесконечности семейства 16

Равнораспределенность статистик 23

($\cdot, \cdot$)-равнораспределенность 44, 97, 116

Равнотепенная непрерывность 17

Распределение строго устойчивое 152

Расстояние от точки до множества 15

Регрессионные модели 218

— регрессия 79, 218

Рекорд 62

Решения, имеющие вероятностный смысл 42, 61, 85, 135

Римана—Гильберта задача 33

Свойство отсутствия последельствия 28, 219

— — — m R^2 222

— — — в среднем 29, 223

Символ уравнения свертки 39

— — — невырожденный 39

Сочетание 26, 93

Теорема Арака 171

— Арцела 19

— Бернштейна 115, 122, 216, 227

— — —, расширение 228

— Винера 32

— Габовича 197

- Голинского 86
- Горного—Картана 55
- Гу—Лау 37, 66, 224
- Димитрова—Клебанова—Рачева 221
- Зингера—Клебанова—Янушкявичюса 170
- Зингера—Янушкявичюса 87, 97
- Золотарева 16
- Кагана 226
- Клебанова 56, 136
- Клебанова—Мкртчяна 106
- Клебанова—Янушкявичюса 17, 123, 137, 210
- Крейна 33
- Кришнайи 27
- Лау—Рао 36, 66
- Леви 153
- Линника 23, 96
- Лиувилля 53
- Лукача 13, 83, 84, 144
- —, замечания 145
- Марцинкевича 85, 228
- Мачиса 230
- Мешалкина 212
- Пойа 8, 12, 170
- —, обобщение 12, 23
- Рао—Рубина 219
- Скитовича—Дармуа 24, 135, 215
- —, обобщение 136
- Стейшунаса—Янушкявичюса 14, 145
- Фергюсона 58, 77
- Фиша 46
- Шоке—Дени 36
- Янушкявичене 213, 220
- Янушкявичюса 30, 42, 43, 57, 58, 63, 64, 68, 69, 73, 80, 116, 134, 179, 197
- Янушкявичюсов 110, 121, 153, 154, 169
- Теоремы устойчивости 15
- Уравнение Винера—Хопфа 32, 38, 45
 - Коши 34, 35, 125
 - —, интегральное 34
 - свертки 22, 31, 32, 34, 36, 38
 - свертки на всей оси 31, 38
 - — — полусоси 32, 36, 37, 38
- Уравнения типа свертки 22, 31, 34
- Условие нормальности 31
 - отсутствия последствия 219
 - — — в среднем 56, 57
- Усреднение по Соболеву 136, 140
- Устойчивость в задаче характеристики 10
 - в обобщенной теореме Пойа 116
 - задачи характеристики 10
 - «качественная» 8, 16
 - «количественная» 8, 16, 134
 - разложений 105
 - теоремы Бернштейна 122, 197, 210, 216, 217
 - — Клебанова 136
 - — Крамера 105
 - — Леви 153, 154
 - — Марцинкевича 86, 229
 - — Пойа 21, 44, 107, 211, 214
 - — Скитовича—Дармуа 217
 - характеристики нормально-го распределения 80, 83, 87, 96, 97, 116, 121, 123, 124, 137, 170, 179, 197, 210, 211, 218, 226, 229
 - — равномерного распределения 145
 - — распределения Парето 45, 64
 - — свойствами порядковых статистик 58
 - — — рекордов 63
 - — свойством независимости 123, 179, 197, 210, 216
 - — — постоянства регрессии 80, 83, 145, 218
 - — — равномерности 87, 96, 97, 116, 121, 137, 153, 154, 169, 170, 211
 - — — типа отсутствия последствия 57, 64, 68, 69, 220, 221, 224
 - — смеси распределений 68
 - — устойчивого распределения 169
 - — экспоненциального распределения 63, 69, 219, 220, 221, 224

— чистой задачи 11, 15
(.,.)-устойчивость 16

Факторизация 33

Функция с вероятностным
смыслом 42

F-почти всюду 46

Число постоянного типа 220

— типа $\leq g$ 220

Чистая задача 11, 12

Характеризация 11

— Бернштейна 122

— Гупта 75

— Клебанова 78, 224

— компонент вероятностных
законов 14

— нормального распределения
8, 12, 23, 24, 25, 96, 122,
135, 136, 178, 215, 228

— пуассоновского распределе-
ния 219

— равномерного распределе-
ния 13

— Рамачандрана—Рао 25

— распределения Парето 27

— Россберга 26

— симметричного распределе-
ния 14

— смеси распределений 73

— строго устойчивого распре-
деления 152

— Фиша 46

— экспоненциального распре-
деления 26, 28, 29, 46, 56,
75, 78, 219, 224

Характеристический показа-
тель 213

Научное издание. Институт математики и информатики Литовской АН.
Янушкявичюс Романас, Влодо. УСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ВЕ-
РОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ. Монография

Mokslinis leidinys. Lietuvos MA Matematikos ir informatikos institutas. Janus-
kevičius Romanas. TIKIMYBINIŲ DESNIŲ CHARAKTERIZACIJŲ STABILUMAS.
Monografija

Редактор И. Миклашевская. Художник А. Бейнаровичюс. Художественный
редактор В. Курайте. Технический редактор И. Дубинайте. Корректоры:
Н. Колпигина и Н. Кведорелене.

ИБ № 3623

Сдано в набор 16.10.1990. Подписано в печать 12.03.1991. SL № 256. Форма.
84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная, 10 пунктов.
Печать высокая. Усл.-печ. л. 13,02. Усл. кр. отт. 13,35. Уч. изд. л. 13,69. Тираж
1000 экз. Заказ № 1966. Цена 3 р. Издательство «Мокслас». 232050. Вильнюс
ул. Жвайгджю, 23. Отпечатано в типографии «Спиндулис». 233000, Каунас
ул. Гедиминаса, 10.