

Romanas Januškevičius
Olga Januškevičienė

Tikimybės



VILNIAUS
PEDAGOGINIS
UNIVERSITETAS

ISBN 978-9955-20-506-7



Vilniaus
pedagoginio
universiteto
leidykla

R. Januškevičius, O. Januškevičienė
Tikimybės



**VILNIAUS PEDAGOGINIS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
ALGEBROS IR STATISTIKOS KATEDRA**

Romanas JANUŠKEVIČIUS, Olga JANUŠKEVIČIENĖ

Tikimybės

Vadovėlis



Vilnius, 2010

Apsvarstyta Vilniaus pedagoginio universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Algebros ir statistikos katedros posėdyje 2010 m. kovo 2 d. (protokolo Nr. 2), Vilniaus pedagoginio universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto tarybos posėdyje 2010 m. kovo 3 d. (protokolo Nr. 4) ir rekomenduota spausdinti bei naudoti kaip vadovėlį, pritaikytą Matematikos ir informatikos fakulteto matematikos bakalauro studijoms.

Recenzentai:

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (MII)

dr. Dalius Pumputis (VPU)

ISBN 978-9955-20-506-7

© Romanas Januškevičius, 2010

© Olga Januškevičienė, 2010

© Vilniaus pedagoginis universitetas, 2010

TURINYS

Kas yra tikimybė?	6
1. Stochastinis eksperimentas. Statistinių duomenų aibė.....	8
2. Klasikinis tikimybės apibrėžimas	10
3. Klasikinio tikimybės apibrėžimo taikymo klaidos	15
4. Geometrinės tikimybės. Susitikimo uždavinys.....	17
5. Teorema apie nesikertančių intervalų algebrą. Teorema apie mažiausios sigma algebros egzistavimą	20
6. Borelio sigma algebra. Tikimybinis matas mačiojoje erdvėje.....	25
7. Kolmogorovo aksiomų sistema.....	28
8. Sąlyginių tikimybių empirinis suvokimas, apibrėžimas ir pavyzdžiai	32
9. Pilnos tikimybės formulė. Bajeso formulė.....	35
10. Nepriklausomi atsitiktiniai įvykiai.....	38
11. Atsitiktinis dydis kaip mačioji funkcija. Teorema apie jo generuotų įvykių priklausymą sigma algebrai.....	40
12. Tikimybių skirstinys. Teorema apie skirstinio funkcijų savybes.....	44
13. Bernulio schema. Diskretieji ir tolydieji skirstiniai. Pagrindiniai skirstinio funkcijų tipai. Tankio savybės.....	49
14. Eksponentinio skirstinio charakterizacijos teorema.....	53
15. Stiltjeso integralo apibrėžimas ir skaičiavimas tolydžių ir diskrečių skirstinių atvejais. Skirstinio spektras	55
16. Stiltjeso integralo savybės.....	59
17. Diskrečiojo dydžio vidurkis ir jo fizikinė interpretacija. Draudimo modelis	60
18. Matematinio vidurkio apibrėžimai. Normaliojo, tolygiojo ir Puasono skirstinių vidurkiai	64
19. Matematinio vidurkio savybės	67
20. Teorema apie atsitiktinio dydžio funkcijos vidurkį. Aukštesnių eilių, centriniai ir absoliutieji momentai	70
21. Dispersijos apibrėžimas ir jos apskaičiavimas. Normaliojo, tolygiojo ir Puasono skirstinių dispersijos.....	73
22. Teoremos apie dispersijos savybes	76
23. Dispersija kaip sklaidos matas	78

24. Čebyševio nelygybė. Didžiųjų skaičių dėsnis	81
25. Bernulio teorema. Santykinis dažnis. Statistinio stabilumo fenomenas	85
26. Puasono teorema. Matavimo paklaidų empirinio vidurkio konvergavimas. Chinčino ir Markovo teoremos	90
27. Charakteristinės funkcijos ir jų savybės. Centrinė ribinė teorema	95
Baigiamasis žodis.....	100
Rekomenduojama literatūra	102



KAS YRA TIKIMYBĖ?

Daugiau nei prieš 100 metų išleistame F. A. Brockhaus ir I. A. Efron enciklopediniame žodyne buvo rašoma taip:

Tikimybė - 1) *filosof.*, didesnis artumas tiesai, o ne klydimui, kuris yra sąlygojamas tuo, kad teigiamų faktorių skaičius nagrinėjamo įvykio pasirodymo galimybės naudai viršija neigiamų faktorių skaičių;

2) *matem.*, santykis visų atvejų, palankių nagrinėjamam įvykiui, su visais vienodai galimais atvejais; pavyzdžiui, tikimybė iš visos kortų kaladės ištraukti tūzą lygi 4:52.

O štai kaip „Didžiojoje tarybinėje enciklopedijoje“ rašė tikimybių teorijos aksiomatikos kūrėjas A. N. Kolmogorovas:

Tikimybė - tai tam tikro įvykio pasirodymo galimumo skaitinė charakteristika.

Šis įvykio pasirodymas, tęsė A. N. Kolmogorovas, nagrinėjamas tam tikrose sąlygose, kurios gali būti pakartotos be galo daug kartų.

Kaip mokslinio pažinimo kategorija sąvoka „tikimybė“ atspindi ypatingą sąryšių, būdingų masiniams procesams, tipą. Ši kategorija yra ypatingų dėsningumų - statistinių dėsningumų - klasės pagrindas.

Lietuviškosios tikimybinių mokyklos pradininkas J. Kubilius apie tikimybės sąvoką rašė taip: „Iš karto atrodytų keista kalbėti apie atsitiktinių reiškinių dėsningumus. Ką galima pasakyti apie įvykius, kurie tai įvyksta, tai neįvyksta? Iš tikrųjų, kai susiduriame su *atskirais* atsitiktiniais įvykiais, apie kokius nors dėsningumus kalbėti sunku. Bet visiškai kitaip yra tada, kai reiškinys kartojasi daug kartų.

Tačiau leiskime kalbėti pavyzdžiams.

Jauna šeima laukia pirmojo kūdikio. Nerimauja. Spėlioja. Žinoma, vyras nori sūnaus, žmona - dukros. Ir ką dabar žmogus gali žinoti, kas gims - dukra ar sūnus. Grynas atsitiktinumas.

Bet imkime visas šeimas, kurios tą patį mėnesį susilaukė naujagimio, ir pamatysime, kad gimė maždaug pusė berniukų ir pusė mergaičių. Vadinas, kas buvo vienoje šeimoje tik atsitiktinis reiškinys, dideliame šeimų skaičiui yra dėsningumas. Ir įdomumo dėlei galėtume pasakyti, kad šeimos galva - vyras - turėjo daugiau

galimybių sulaukti sūnaus, negu žmona dukros. Mat, kaip rodo pasaulinė statistika, bendrame naujagimių skaičiuje berniukų būna truputį daugiau kaip 51 nuošimtis“.

Garsus švedų matematikas Harald Cramer 1946-aisiais metais rašė, kad turbūt neįmanoma pateikti tikslų apibrėžimą to, ką nusako žodis *atsitiktinis*, ir šio žodžio prasmę aiškina pavyzdžiu.

Jei daug kartų mesti paprasčiausią monetą, tai net labai stengiantis išsaugoti eksperimento sąlygas nepakitusias, mes vis tiek nepajėgsime pasakyti, ar konkretaus metimo atveju iškris herbas ar skaičius. Net jei mes sukonstruosime mašiną, kiekvieną kartą metančią monetą visiškai vienodai, tai visgi neįtikėtina, kad mums pavyktų tiksliai nuspėti konkretaus metimo rezultatą.

Tai galima paaiškinti tuo, kad nežymūs stebimo objekto pradinių sąlygų pakitimai, kuriuos neįmanoma užfiksuoti mūsų „instrumentais“, gali žymiai nulemti galutinį rezultatą. Ir net jei tokie instrumentai būtų atrasti, dėl pradinių sąlygų užrašymo sudėtingumo parametrų praktinis apskaičiavimas ar net teorinis aprašymas gali būti neįmanomas.

Netrukus įsitikinsime, kad visuose tokiuose atvejuose tarp visų stochastinio eksperimento pradinių sąlygų pakitimų ir jo rezultatų svyravimų galima aptikti vieną dėsningumą, kuris ir yra matematinės statistikos pagrindas. Kalbėsime apie *statistinio stabilumo fenomeną*.

Taigi atliekant konkretų stochastinį eksperimentą yra neįmanoma nusakyti jo rezultato. Tačiau nuo konkretaus eksperimento perėjus prie stochastinių eksperimentų sekos, nagrinėjama situacija radikaliai pasikeičia.

Pastebėta, kad *nors stochastinių eksperimentų konkretūs (individualūs, atskiri) rezultatai „elgiasi labai netaisyklingai“, šių eksperimentų rezultatai pakankamai ilgai juos kartojant yra stabilūs.*

Kartosime mūsų stochastinį eksperimentą pakankamai daug kartų ir stebėsime, kiek kartų įvyko rezultatas A . Tegu pirmuosiuose N eksperimentų A įvyko k kartų. Tada statistinio stabilumo fenomenas galėtų būti formuluojamas taip:

Didėjant stochastinių eksperimentų skaičiui N , rezultato (įvykio) A santykinis dažnis m/n turi tendenciją įgyti pastovią reikšmę.

Ši "pastovi reikšmė" ir yra vadinama įvykio A **tikimybe** ir žymima $P(A)$.

1. STOCHASTINIS EKSPERIMENTAS. STATISTINIŲ DUOMENŲ AIBĖ

Įvairiausiuose praktinių ir teorinių tyrimų srityse dažnai sutinkami atvejai, kai eksperimentai arba stebėjimai, esant toms pačioms sąlygoms gali būti pakartoti daugelį kartų. Kiekvieną tokį kartą mes koncentruosime savo dėmesį į eksperimento (arba stebėjimo) rezultatą, išreikštą skaitine charakteristika.

Eksperimentus, kuriuos, esant vienodoms sąlygoms, galima pakartoti daugelį kartų ir kurių konkretaus rezultato negalima nuspėti iš anksto, vadiname stochastiniais (tikimybiniais) eksperimentais.

Paprasčiausias stochastinio eksperimento pavyzdys – monetos metimas. Jo rezultatas aiškus – pasirodys arba herbas, arba skaičius. Jei herbo pasirodymą pažymėsime 1, o skaičiaus – 0, tai šio eksperimento rezultatus išreikšime skaičiais.

Santuokų ir ištuokų registravimas per metus valstybėje, apskrityje ar mieste – jau sudėtingesnio stochastinio eksperimento pavyzdys. Suskaičiavus santuokas ir ištuokas Lietuvoje, gauta, kad jų, pavyzdžiui, 1990-aisiais yra atitinkamai 36310 ir 12747, o po 10 metų, t.y. 2000-aisiais, - jau tik 16906 ir 10882. Šio eksperimento rezultatų dar po 10 metų, t.y. 2010-aisiais, aišku, negalima tiksliai nuspėti iš anksto, tačiau tendencijų prognozė yra svarbi.

Kiekviena stochastinių eksperimentų sekos rezultatų suvestinė sudaro *statistinių duomenų aibę*.

Pagrindinis tikimybių teorijos ir statistikos objektas yra galimybių, leidžiančių gauti patikimas išvadas statistinių duomenų pagrindu, tyrimas ir metodų, leidžiančių pateikti šias išvadas, išplėtojimas. Pagal ES klasifikatorių tikimybių teorija ir matematinė statistika yra priskiriami statistikai.

„Per pastaruosius dvidešimt penkerius metus statistika kaip mokslas stipriai progresavo. Šis progresas pasiektas puikiais anglų ir amerikiečių statistikos mokyklų atstovų darbais, kurių tarpe pirmiausiai turi būti paminėti profesoriaus R.A. Fišerio (Fisher) darbai. Šiuo laikotarpiu daugiausia prancūzų ir rusų matematikų dėka klasikinis tikimybių skaičiavimas virto grynai matematine teorija, tenkinančia

šiuolaikinius griežtus reikalavimus” – taip dar 1945 metais rašė žymus Stokholmo universiteto profesorius H. Krameras.

Kai kurie terminai apibrėžiami du kartus. Taip daroma Lietuvos standarto [8] pavyzdžiu, norint atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad

- a) šių terminų **tikimybė interpretacija** paremta teorinėmis konstrukcijomis, kurios nesusijusios su praktiniais taikymais;
- b) šių terminų **statistinė interpretacija** paremta stebinio sąvoka, o terminų apibrėžimai yra taikomojo pobūdžio.

Klausimai ir užduotys¹

1. Koks yra tikimybių teorijos ir statistikos objektas?

- a) galimybių gauti patikimas išvadas (statistinių duomenų pagrindu) tyrimas;
- b) praktinių uždavinių sprendimas statistinių išvadų pagrindu.

2. Suformuluokite, kuo skiriasi terminų statistinė interpretacija nuo jų tikimybės interpretacijos?

¹ Klausimai ir užduotys pateikiami pirmojoje vadovėlio dalyje po artimų pagal tematiką skyrelių grupės tuo tikslu, kad akcentuoti bazines šių skyrelių sąvokas.

2. KLASIKINIS TIKIMYBĖS APIBRĖŽIMAS

Stochastinio eksperimento visų galimų rezultatų aibę Ω pavadinsime *elementariųjų įvykių erdve (aibe)*, o jos elementus ω_i - *elementariaisiais įvykiais* arba *elementariosiomis baigtimis*.

Detaliau išnagrinėsime stochastinį eksperimentą su baigtine arba skaičiaja visų baigčių $\omega_1, \dots, \omega_i, \dots$ aibe Ω , t.y. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_i, \dots\}$. Tokia aibė Ω vadinama diskrečiąja elementariųjų įvykių erdve (aibe).

Tarkime, kad kiekvienam elementariajam įvykiui ω_i priskirtas „svoris“ p_i (kurį pavadinsime elementariojo įvykio ω_i *tikimybe*) ir kad šie svoriai turi tokias savybes:

- 1) $p_i \geq 0$,
- 2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Tegu, be to, aibė A - bet koks diskrečiosios elementariųjų įvykių erdvės Ω poaibis, $A \subseteq \Omega$. A pavadinsime *atsitiktiniu įvykiu*, stebimu nagrinėjamame stochastiniame eksperimente.

- ☑ Įvykis, kuris būtinai įvyksta, atlikus stochastinį eksperimentą, vadinamas būtinuoju įvykiu ir žymimas Ω .
- ☑ Įvykis, apie kurį iš anksto žinoma, kad, atlikus stochastinį eksperimentą, jis neįvyks, vadinamas negalimuoju įvykiu ir žymimas $\emptyset$.
- ☑ Įvykis, kuris, atlikus stochastinį eksperimentą, gali įvykti, o gali ir neįvykti, vadinamas atsitiktiniu įvykiu.

Vėliau, nagrinėdami ne diskretųjį, o bendrąjį atvejį, atsitiktinio įvykio sąvoką patikslinsime.

Apibrėžimas. Atsitiktinio įvykio A tikimybė $P(A)$ vadiname elementariųjų įvykių, sudarančių įvykį A , tikimybių sumą:

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i \quad (1)$$

Tokiu būdu įvesta tikimybė turi savybes, kurias suformuluosime kaip atskirą teoremą.

Teorema. Tegu Ω yra diskrečioji elementariųjų įvykių erdvė, kurioje tikimybė $P(A)$ yra apibrėžiama formule (1). Tada

- (a) $0 \leq P(A) \leq 1$,
- (b) $P(\Omega) = 1$,
- (c) jei $A \cap B = \emptyset$, $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$, tai $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Irodymas. Teoremos išvados (a) ir (b) yra elementarios, nes iš $\{p_i\}$ savybių 1) ir 2) gauname, kad

$$0 \leq P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

$$P(\Omega) = \sum_{i: \omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Kadangi $A \cap B = \emptyset$, tai

$$P(A \cup B) = \sum_{i: \omega_i \in A \cup B} p_i = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i + \sum_{i: \omega_i \in B} p_i = P(A) + P(B).$$

Teorema įrodyta.

Išvada. $P(\emptyset) = 0$,

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

Irodymas trivialus, grindžiamas teoremos išvadomis (b) ir (c).

Diskrečiosios elementariųjų įvykių erdvės Ω poaibių $\{A\}$ funkcija $P(\cdot)$, turinti savybes (a), (b) ir (c), dar yra vadinama *tikimybinio matu*, o pats dvejetas (Ω, P) - *diskrečiuoju tikimybinio modeliu*.

Kaip „teisingai“ apibrėžti elementariųjų įvykių ω_i tikimybes p_i ? Šis uždavinys nepriskiriamas tikimybių teorijos sričiai, išskyrus paprasčiausius atvejus. Nežinomų tikimybių įvertinimų metodai pagal stebėjimų rezultatus nagrinėjami matematinėje statistikoje.

Paprasčiausią atvejį – taip vadinamą *klasikinę tikimybės apibrėžimą* – galima sieti su įsitikinimo, kad įvykis įvyks, laipsniu. Kai įsitikinimo laipsnis didelis, pastebima standarte [8], tai tikimybė artima vienetui.

Klasikinis tikimybės apibrėžimas. *Jei stochastiniame eksperimente yra tik n vienodai galimų baigčių, t.y. jei diskrečioji elementariųjų įvykių erdvė sudaryta iš n vienodai galimų elementariųjų įvykių, tai atsitiktinio įvykio A tikimybė vadinamas*

$$\text{santykis } P(A) = \frac{m}{n},$$

kur m – elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A , skaičius.

Tačiau, kaip matėme įvade, galimas kitoks tikimybės įvedimo būdas. Jis buvo grindžiamas statistinio stabilumo fenomenu, o įvykio tikimybė apibrėžiama kaip santykinio dažnio riba.

Taigi, tikimybę apibrėžti galima dviem būdais: **kaip santykinio dažnio ribą ir kaip tikėtino laipsnį.**

Pavyzdžiai. Stochastinis eksperimentas yra toks – metamas simetrinis kubiukas. Tada diskrečiąją elementariąją įvykių erdvę Ω natūralu apibrėžti taip:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\omega_i | \omega_i = i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Kadangi kubiukas yra simetrinis, tai kiekvienam elementariajam įvykiui $\omega_i = i$ priskirsime tikimybę $p_i = 1/6 (i = 1, 2, \dots, 6)$. Tai ir yra nagrinėjamo stochastinio eksperimento diskretusis tikimybinių modelis.

Tegu A yra įvykis, kuris reiškia, kad iškritęs skaičius dalijasi iš 3. Tada

$$A = \{\omega_3, \omega_6\},$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Dabar tarkime, kad atliekamas toks stochastinis eksperimentas – metamas nesimetris kubiukas. Yra žinoma, kad jo sienelės pasirodymo tikimybė proporcinga sienelės numeriui.

Diskretųjį tikimybinį modelį konstruosime taip. Diskrečioji elementariųjų įvykių erdvė Ω apibrėžiama taip pat, kaip ir pirmajame pavyzdyje. Kiekvienam elementariajam įvykiui $\omega_i = i$ priskirsime tikimybę p_i . Kadangi sienelės pasirodymo tikimybė proporcinga sienelės numeriui, tai $p_i = c \cdot i$, kur c yra konstanta, apibrėžiama sąryšio

$$\sum_{i=1}^6 p_i = 1$$

pagrindu. Iš čia nesunkiai randame, kad

$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^6 i} = \frac{1}{21},$$

o tai reiškia, kad

$$p_i = c \cdot i = \frac{i}{21}.$$

Lengva įsitikinti, kad taip apibrėžtas skaičių rinkinys $\{p_i\}$ tenkina savybes 1) ir 2). Įvykio $A = \{\omega_3, \omega_6\}$ tikimybė, aišku, skirsis nuo šio įvykio tikimybės, apskaičiuotos pirmajame pavyzdyje, nes kubiukas nėra simetris. Taigi,

$$P(A) = P(\{\omega_3\}) + P(\{\omega_6\}) = p_3 + p_6 = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{3}{7}.$$

Klausimai ir užduotys

1. Ar galima iš anksto nusakyti konkretų stochastinio eksperimento rezultatą?

- a) taip, jei stochastinio eksperimento baigčių skaičius yra baigtinis;
- b) taip, jei stochastinio eksperimento baigčių skaičius yra begalinis;
- c) ne, jei stochastinio eksperimento baigčių skaičius yra baigtinis;
- d) taip, jei stochastinio eksperimento baigčių skaičius yra begalinis;
- e) ne bet kuriuo atveju.

2. Ar galima nustatyti dėsningumą atsitiktinių reiškinių sekoje?
 - a) ne, jei stochastinių eksperimentų serija yra ilga;
 - b) taip, jei stochastinių eksperimentų serija yra ilga;
 - c) taip, jei stochastinių eksperimentų serija yra trumpa.

3. Didėjant stochastinių eksperimentų skaičiui n , rezultato (įvykio) A santykinis dažnis m/n turi tendenciją įgyti pastovią reikšmę. Ar tai reiškia, kad monetą metant 100 kartų:
 - a) įvykis „100 kartų iškris herbas“ yra negalimas?
 - b) įvykis „100 kartų iškris herbas“ negali įvykti;
 - c) įvykis „100 kartų iškris herbas“ gali įvykti.
4. Suformuluokite statistinio stabilumo fenomeną.

3. KLASIKINIO TIKIMYBĖS APIBRĖŽIMO TAIKymo KLAIDOS

Matėme, kad klasikinis tikimybės apibrėžimas yra pagrįstas įvykių *vienodo galimumo*, arba *vienodo tikėtimumo* sąvoka. Jei, pavyzdžiui, loterijos prizų fonde yra 5 automobiliai ir 50 šaldytuvų, tai, aišku, išlošti šaldytuvą yra daugiau galimybių, negu automobilį.

Išnagrinėkime tokį stochastinį eksperimentą ir su juo susijusį uždavinį.

Merė (Ch. de Meray, XVII a.) uždavinys. Lošimo kubiukas metamas tris kartus, skaičiuojama iškritusių akučių suma. Kokia akučių suma dažniau iškris: 11 ar 12?

Merė hipotezė: vienodai dažnai.

Tačiau praktika rodė kitką, todėl Merė parašė Paskaliui ir pateikė jam savo skaičiavimus.

Merė sprendimas. 11 akučių sumą galima gauti šešiais skirtingais būdais: $6+4+1$, $6+3+2$, $5+5+1$, $5+4+2$, $5+3+3$, $4+4+3$. Tas pat dėl 12: $6+5+1$, $6+4+2$, $6+3+3$, $5+5+2$, $5+4+3$, $4+4+4$. Iš čia buvo daroma tokia išvada: sumų 11 ir 12 pasirodymo tikimybės yra lygios.

Paskalis nesutiko su šiuo sprendimu ir nurodė klaidą.

Paskalio atsakymas. Merė nurodyti įvykiai *nėra vienodai galimi*. Pvz., kombinacija $5+4+3$ pasirodo, kai turime rezultatus $(5,4,3)$, $(4,5,3)$, $(5,3,4)$, $(3,4,5)$, $(3,5,4)$, $(4,3,5)$, o kombinacija $4+4+4$ pasirodo tik vieną kartą.

Tai reiškia, kad Paskalis kombinacijas nagrinėjo ne kaip aibes, kuriose, kaip žinome, elementų tvarka yra nesvarbi, o kaip vektorius.

Paskalio sprendimas. Pažymėkime

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\},$$

kur ω_i yra i -tojo metimo kubiuko akučių skaičius. Tada iš viso elementariųjų įvykių yra $n = 6^3 = 216$ ir, kas ypač svarbu pabrėžti, visi jie yra vienodai galimi.

Tarp jų palankių pirmajam įvykiui (t.y. akučių suma lygi 11) elementariųjų įvykių yra 27:

(6,4,1), (6,3,2), (6,2,3), (6,1,4), (5,5,1), (5,4,2),
(5,3,3), (5,2,4), (5,1,5), (4,6,1), (4,5,2), (4,4,3),
(4,3,4), (4,2,5), (4,1,6), (3,6,2), (3,5,3), (3,4,4),
(3,3,5), (3,2,6), (2,6,3), (2,5,4), (2,4,5), (2,3,6),
(1,6,4), (1,5,5), (1,4,6).

Analogiškai, yra 25 elementarūs įvykiai, palankūs antrajam įvykiui (t.y. akučių suma lygi 12).

Pagal klasikinę tikimybės apibrėžimą, atitinkamos pirmojo ir antrojo įvykių tikimybės yra $\frac{27}{216}$ ir $\frac{25}{216}$. Tai reiškia, kad sumų 11 ir 12 pasirodymo tikimybės nėra lygios.

4. GEOMETRINĖS TIKIMYBĖS. SUSITIKIMO UŽDAVINYS

1. Jau pačioje tikimybių teorijos vystymosi pradžioje buvo paskelbti klasikinio tikimybės apibrėžimo trūkumai. Tai, visų pirma, nagrinėjamos diskrečiosios elementariųjų įvykių erdvės elementų skaičius n turi būti baigtinis. O kaip nagrinėti tuos atvejus, kai elementariųjų įvykių be galo daug?

Pirmasis žingsnis šia linkme – geometrinės tikimybės sąvokos įvedimas. Jis taip pat grindžiamas įvykių *vienodo galimumo* arba *vienodo tikėtinumo* principu.

Klasikinio tikimybės apibrėžimo išplėtimas vyksta taip. Tegu, pavyzdžiui, plokštumoje turime sritį G su plotu $mes\ G$, kurioje patalpinta kita sritis g su plotu $mes\ g$. Į sritį G atsitiktinai metamas taškas ir klausiama, kam lygi tikimybė įvykio, kad taškas pateks į sritį g .

2. Sąvokai “į sritį G atsitiktinai metamas taškas” suteikiama tokia prasmė:

- mestas taškas gali pataikyti į bet kurį srities G tašką;
- tikimybė pataikyti į kokią nors srities G dalį g proporcinga šiam plotui ir nepriklauso nuo jos padėties ir formos.

Tai reiškia, kad taško pataikymo į sritį g tikimybė p apibrėžiama taip:

$$p = \frac{mes\ g}{mes\ G}.$$

3. Išnagrinėsime pavyzdį – susitikimo uždavinį.

Susitikimo uždavinys. Jonas ir Petras susitarė susitikti autobuso stotelėje tarp 9 ir 10 valandos iš ryto. Kiekvienas, atėjęs į sustojimą, laukia kito 15 minučių, o po to išeina. Apskaičiuoti tikimybę tokių įvykių: 1) Jonas ir Petras susitiko; 2) Jonas ir Petras ateis vienu metu.

Sprendimas. *Atvejis 1).* Pastebime, kad

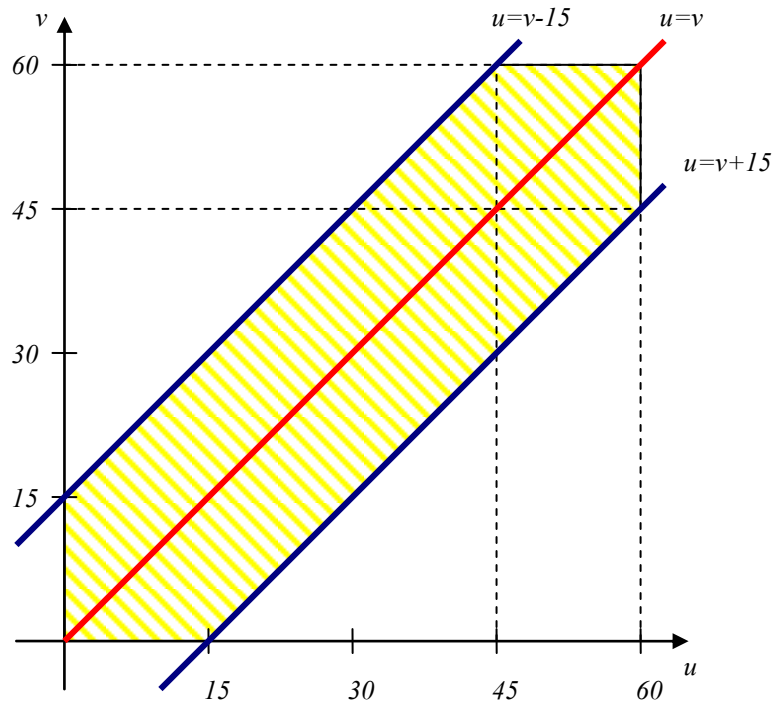
$$G = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 60, \quad 0 \leq v \leq 60\}$$
$$g = \{(u, v) \mid |u - v| \leq 15, \quad 0 \leq u \leq 60, \quad 0 \leq v \leq 60\}$$

$$\text{mes } G = 60^2,$$

$$\text{mes } g = 60^2 - 45^2 = 60^2 \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right) = \frac{7}{16} \cdot 60^2$$

$$P(g) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G} = \frac{7}{16}$$

Piešinyje tai galima pavaizduoti taip:



Atvejis 2). Šiuo atveju sritis g , kuria išreiškiama Jono ir Petro atėjimo vienu metu aibė, yra atkarpa:

$$g = \{(u, v) \mid u = v, 0 \leq u \leq 60, 0 \leq v \leq 60\}.$$

Kadangi $\text{mes } g = 0$, tai antruoju atveju

$$P(g) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G} = \frac{0}{\text{mes } G} = 0.$$

Klausimai ir užduotys

1. Kas yra atsitiktinio įvykio tikimybė?

- skaičius tarp -1 ir 1;
- baigtinė aibė;
- atsitiktinis įvykis;

- d) skaičius tarp 0 ir 1;
 - e) begalinė aibė.
2. Kas yra elementariųjų įvykių erdvė?
- a) skaičius;
 - b) aibė;
 - c) atsitiktinis įvykis;
 - d) vektorius.
3. Kas yra atsitiktinis įvykis?
- a) skaičius;
 - b) bet kokia aibė;
 - c) elementariųjų įvykių erdvės poaibis;
 - d) elementariųjų įvykių erdvės elementas;
 - e) vektorius.
4. Kodėl Merè sprendimas buvo klaidingas?
- a) blogai apibrėžta elementariųjų įvykių erdvė;
 - b) elementarieji įvykiai nebuvo vienodai galimi;
 - c) klaidingai gautas elementariųjų įvykių erdvės elementų skaičius;
 - d) klaidingai gautas palankių elementariųjų įvykių elementų skaičius.
5. Dėl kokio klasikinio tikimybės apibrėžimo trūkumo yra naudinga įvesti geometrinės tikimybės apibrėžimą:
- a) klasikiniame tikimybės apibrėžime elementariųjų įvykių erdvės elementų skaičius n turi būti baigtinis;
 - b) klasikiniame tikimybės apibrėžime elementariųjų įvykių erdvės elementų skaičius n turi būti begalinis.
6. Kokiu principu grindžiamas geometrinės tikimybės sąvokos įvedimas:
- a) statistinio stabilumo fenomenu;
 - b) tikimybinės interpretacijos principu;
 - c) vienodo tikėtinumo principu.
7. Apibrėžkite sąvoką “į sritį G atsitiktinai metamas taškas” ir pateikite geometrinės tikimybės apibrėžimą.

5. TEOREMA APIE NESIKERTANČIŲ INTERVALŲ ALGEBRĄ. TEOREMA APIE MAŽIAUSIOS SIGMA ALGEBROS EGZISTAVIMĄ

Aibių algebros ir σ -algebros sąvokų įvedimas ypač aktualus tada, kai stochastinio eksperimento visų galimų rezultatų aibė Ω nėra diskrečioji elementariųjų įvykių erdvė, t.y. Ω yra neskaičioji aibė.

Priminsime, kad aibės, ekvivalenčios natūrinių skaičių aibei, pasižymi tuo, kad jų elementus galima tam tikru būdu numeruoti, skaičiuoti. Tokios aibės vadinamos skaičiosiomis¹. Begalinės aibės, neekvivalenčios natūrinių skaičių aibei, vadinamos neskaičiosiomis.

Priminsime dar vieną apibrėžimą.

Apibrėžimas. Aibės Ω poaibių klasė $\mathfrak{S}$ vadinama algebra, jei ji turi tokias savybes:

1⁰. $\Omega \in \mathfrak{S}$;

2⁰. Jei $A \in \mathfrak{S}$, tai $\bar{A} \in \mathfrak{S}$;

3⁰. Jei $A \in \mathfrak{S}$ ir $B \in \mathfrak{S}$, tai $A \cup B \in \mathfrak{S}$.

Teiginys. Tegu $\mathfrak{S}$ yra algebra. Jei $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{S}$, tai $A \cap B \in \mathfrak{S}$.

Irodymas. Pirmiausia prisiminsime de Morgano formulės aibėms įrodymą, kurio pagrindu pastebėsime, kad

$$A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}. \quad (1)$$

Tai nesunku atlikti, prisiminus de Morgano logikos dėsnį, pagal kurį bet kuriems teiginiams p ir q yra teisingas toks sąryšis:

$$\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}.$$

Taigi, kadangi $p \wedge q \Leftrightarrow \overline{\overline{p \wedge q}}$, tai pažymėję $p \equiv (\omega \in A)$ ir $q \equiv (\omega \in B)$ turime, kad

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow \neg(\bar{p} \vee \bar{q}) \Leftrightarrow \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} \Leftrightarrow \overline{(\omega \notin A) \vee (\omega \notin B)},$$

todėl

¹ Angl. countable, rus. счетное.

$$\begin{aligned}\omega \in A \cap B &\Leftrightarrow (\omega \in A) \wedge (\omega \in B) \Leftrightarrow (\overline{\omega \notin A}) \vee (\overline{\omega \notin B}) \Leftrightarrow (\overline{\omega \in \overline{A}}) \vee (\overline{\omega \in \overline{B}}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{\omega \in (\overline{A} \cup \overline{B})} \Leftrightarrow \omega \notin (\overline{A} \cup \overline{B}) \Leftrightarrow \omega \in \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})},\end{aligned}$$

o tuo pačiu įrodyta formulė (1).

Iš 2^0 savybės gauname, kad $\overline{A} \in \mathfrak{F}$, $\overline{B} \in \mathfrak{F}$, o iš 3^0 – kad $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathfrak{F}$. Vėl pasinaudoję savybe 2^0 turime, kad

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathfrak{F}.$$

Iš čia ir iš formulės (1) darome išvadą, kad

$$A \cap B \in \mathfrak{F}.$$

Teiginys įrodytas.

Šis teiginys reiškia, kad algebra yra uždara ne tik sumos, bet ir sankirtos (pjūvio) operacijos atžvilgiu.

Pavyzdys. Matyt, paprasčiausias netrivialus algebros pavyzdys yra toks.

Tegu $A \subset \Omega$. Tada aibių klasė $\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F} = \{\Omega, \emptyset, A, \overline{A}\}$$

yra algebra. Siūlome tai skaitytojui įrodyti savarankiškai.

Teorema. Tegu Ω yra intervalas $[0;1)$. Jei $\mathcal{A}$ yra visų tokių poaibių iš Ω sistema, kurių kiekvienas yra nesikertančių intervalų tipo $[a,b)$ baigtinė suma, t.y.

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j) \mid 0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq 1, n < \infty \right\}, \quad (2)$$

tai $\mathcal{A}$ yra algebra.

Įrodymas. Pirmiausia pastebėsime, kad $\Omega \in \mathcal{A}$, o de Morgano formulę aibėms (ir jos pagrindu gaunamą formulę (1)) užrašysime bendresniu pavidalu:

$$\overline{\bigcup_{j=1}^n A_j} = \bigcap_{j=1}^n \overline{A_j}. \quad (3)$$

Tegu dabar A – bet koks $\mathcal{A}$ elementas. Ar $\overline{A} \in \mathcal{A}$, t.y. ar nagrinėjamoji sistema $\mathcal{A}$ tenkina savybę 2^0 ?

Jei $A \in \mathcal{A}$, tai

$$A = \bigcup_{j=1}^n [a_j; b_j]$$

Pažymėkime $A_j = [a_j; b_j]$. Tada iš (3) gauname, kad

$$\overline{A} = \overline{\bigcup_{j=1}^n A_j} = \bigcap_{j=1}^n \overline{A_j} = \bigcap_{j=1}^n ([0; a_j) \cup [b_j; 1])$$

Žymėjimų supaprastinimui toliau tarkime, kad $n = 2$. Tada

$$\overline{A} = ([0; a_1) \cup [b_1; 1]) \cap ([0; a_2) \cup [b_2; 1]).$$

Kadangi $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2$, tai pastebime, kad

$$\overline{A} = [0; a_1) \cup [b_1; a_2) \cup [b_2; 1),$$

t.y. $\overline{A}$ yra baigtinė nesikertančių intervalų tipo $[a; b)$ suma ir todėl $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

Dabar belieka įrodyti, kad

$$A \in \mathcal{A}, \quad C \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup C \in \mathcal{A},$$

t.y. nagrinėjamoji sistema $\mathcal{A}$ tenkina ir savybę 3^0 . Taigi, tegu

$$A = \bigcup_{j_1=1}^{k_1} [a_{j_1}; b_{j_1}], \quad C = \bigcup_{j_2=1}^{k_2} [c_{j_2}; d_{j_2}].$$

Ar šių aibių suma

$$A \cup C = \left\{ \bigcup_{j_1=1}^{k_1} [a_{j_1}; b_{j_1}] \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j_2=1}^{k_2} [c_{j_2}; d_{j_2}] \right\} \quad (4)$$

turi (2) pavidalą? Čia, pasirinkus bet kuriuos i ir j , galimi tik du variantai:

(I). $[a_i; b_i) \cap [c_j; d_j) = \emptyset$. Tada sumoje (4) paprasčiausiai atliekama nauja numeracija.

(II). $[a_i; b_i) \cap [c_j; d_j) \neq \emptyset$, t.y. intervalai $[a_i; b_i)$ ir $[c_j; d_j)$ turi bendrą tašką.

Tai reiškia, kad arba $b_i > c_j$, arba $d_j > a_i$. Pirmuoju atveju

$$[a_i; b_i) \cup [c_j; d_j) = [\min(a_i; c_j), \max(b_i; d_j)),$$

o antruoju –

$$[c_j; d_j) \cup [a_i; b_i) = [\min(c_j; a_i), \max(d_j; b_i)),$$

t.y. tas pats. Taigi, $A \cup C$ galima išdėstyti kaip baigtinę nesikertančių intervalų $[\cdot; \cdot)$ sumą, kadangi visus susikertančius intervaliukus apjungėme į to paties tipo intervalą.

Tai reiškia, kad $A \cup C \in \mathcal{A}$.

Teorema įrodyta.

Apibrėždami algebrą reikalavome, kad bet kurių jos elementų baigtinė suma priklausytų jai vėl. Tačiau yra daug tikimybių teorijos ir matematinės statistikos uždavinių, kuriuos sprendžiant tenka nagrinėti begalines sumas. Todėl ir tikimybinių matas įvedamas ne algebroje, o σ -algebroje, kurios apibrėžimą dabar ir pateiksime.

Apibrėžimas. Aibės Ω poaibių klasė $\mathcal{F}$ vadinama σ -algebra, jei ji turi tokias savybes: 1⁰. $\Omega \in \mathcal{F}$;

2⁰. Jei $A \in \mathcal{F}$, tai $\bar{A} \in \mathcal{F}$;

3⁰. Jei $A_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2, \dots$, tai $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$

- Skaitytojui siūlome įsitikinti, kad aibė *visų* bet kokios aibės Ω poaibių sudaro σ -algebrą.

Toliau mums yra reikalingas dar vienas apibrėžimas.

Apibrėžimas. Jei $\mathcal{K}$ – bet kuri aibės Ω poaibių klasė, tai σ -algebra $\sigma(\mathcal{K})$ vadinama mažiausia σ -algebra, talpinančia klasę $\mathcal{K}$, jei ji tenkina šias savybes:

1⁰. $\mathcal{K} \subset \sigma(\mathcal{K})$;

2⁰. Jei $\mathcal{F}$ – bet kuri σ -algebra tokia, kad $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, tai $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}$.

Teorema. Bet kuriai klasei $\mathcal{K}$ egzistuoja mažiausia σ -algebra, talpinanti klasę $\mathcal{K}$.

Irodymas. Pirmiausia pastebėsime, kad egzistuoja bent viena σ -algebra, talpinanti klasę $\mathcal{K}$. Iš tiesų, kadangi $\mathcal{K}$ yra aibės Ω poaibių klasė, tai tokia σ -algebra yra, pavyzdžiui, visų Ω poaibių σ -algebra.

Visų σ -algebrų $\mathcal{K}_j$, talpinančių klasę $\mathcal{K}$, pjūvį pažymėkime $\sigma(\mathcal{K})$.

Naudojant vien tik σ -algebros apibrėžimą patikrinsime, kad $\sigma(\mathcal{K})$ yra σ -algebra.

1). Ar $\Omega \in \sigma(\mathcal{K})$? Pagal apibrėžimą,

$$\sigma(\mathcal{K}) = \bigcap_{j \in I} \mathcal{K}_j, \quad \mathcal{K}_j - \sigma\text{-algebros, talpinančios klasę } \mathcal{K}.$$

Taigi, $\Omega \in \mathcal{K}_j \quad \forall j \in I$, todėl

$$\Omega \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{K} = \mathcal{K}.$$

2). Jei $A \in \sigma(\mathcal{K})$, tai ar $\bar{A} \in \sigma(\mathcal{K})$? Kadangi $\mathcal{K}_j$ - σ -algebros, tai $A \in \mathcal{K}_j \quad \forall j \in I \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{K}_j \quad \forall j \in I$, todėl

$$A \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{K}_j = \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{K}_j = \mathcal{K}.$$

3). Jei $A_1, A_2, \dots \in \sigma(\mathcal{K})$, tai ar $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$? Vėl pasinaudoję tuo, kad $\mathcal{K}_j$

yra σ -algebros, gauname, kad

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \dots \in \sigma(\mathcal{K}) &= \bigcap_{j \in I} \mathcal{K}_j \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_{j \in I} \mathcal{K}_j = \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Taigi, atsakymai į klausimus 1), 2) ir 3) yra teigiami, o tai reiškia, kad $\sigma(\mathcal{K})$ yra σ -algebra. Ar tai mažiausia σ -algebra, talpinanti klasę $\mathcal{K}$? Tegu $\mathfrak{S}$ – bet kuri σ -algebra, talpinanti klasę $\mathcal{K}$. Pagal mūsų konstrukciją

$$\mathfrak{S} \in \{\mathcal{K}_j, j \in I\},$$

t.y. $\mathfrak{S}$ yra viena iš aibių $\mathcal{K}_j$, o kadangi $\sigma(\mathcal{K}) = \bigcap_{j \in I} \mathcal{K}_j$, tai

$$\mathfrak{S} \supset \sigma(\mathcal{K}).$$

Iš čia gauname, kad $\sigma(\mathcal{K})$ yra mažiausia σ -algebra, talpinanti klasę $\mathcal{K}$.

Teorema įrodyta.

6. BORELIO SIGMA ALGEBRA. TIKIMYBINIS MATAS MAČIOJOJE ERDVĖJE

1. Praeitame skyrelyje daug dėmesio skyrėme intervalų $[a;b)$ klasės nagrinėjimui. Šiame skyrelyje tarę, kad $\Omega = R^1 = (-\infty, \infty)$, šių intervalų $[a;b)$ klasę pažymėkime raide $\mathcal{K}$.

Apibrėžimas. Mažiausia σ -algebra, talpinanti klasę

$$\mathcal{K} = \{[a;b): a \in R^1, b \in R^1\},$$

vadinama Borelio σ -algebra erdvėje R^1 , jos elementai vadinami Borelio aibėmis¹, o žymėsime ją raide $\mathcal{B}$.

Teorema. Vienataškė aibė $\{a\}$, atviras intervalas $(a;b)$ ir uždaras intervalas $[a;b]$ yra Borelio aibės.

Įrodymas. Pirmiausia įrodysime, kad jei $\mathcal{F}$ yra bet kokia σ -algebra ir $A_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2, \dots, n, \dots$, tai ir šių aibių begalinė sankirta priklauso tai pačiai σ -algebrai $\mathcal{F}$, t.y.

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F} \quad (1)$$

Tuo tikslu pirmiausia pastebėsime, kad

$$\omega \in \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \Leftrightarrow \omega \in A_j, \forall j \Leftrightarrow \omega \notin \overline{A_j}, \forall j \Leftrightarrow \omega \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} \Leftrightarrow \omega \in \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}}.$$

Tai reiškia, kad

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}}.$$

O kadangi $\mathcal{F}$ yra σ -algebra, tai iš šio sąryšio gauname tokią implikacijų seką:

$$A_j \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A_j} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}} \in \mathcal{F}.$$

Formulė (1) pilnai įrodyta.

Pereiname prie betarpiško teoremos įrodymo. Kadangi

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a; a + 1/n),$$

o aibės $[a; a + 1/n)$ yra Borelio σ -algebros $\mathcal{B}$ elementai, tai iš (1) gauname, kad $\{a\} \in \mathcal{B}$.

Toliau pastebėsime, kad $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Iš čia gauname, kad jei $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ – bet kokia σ -algebra, tai $A \setminus B \in \mathcal{F}$. O kadangi

$$(a; b) = [a; b) \setminus \{a\},$$

$$[a; b) \in \mathcal{B}, \quad \{a\} \in \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} - \sigma\text{-algebra},$$

tai ir $(a; b) \in \mathcal{B}$. Dabar belieka pastebėti, kad

$$[a; b] = [a; b) \cup \{b\} \in \mathcal{B}.$$

Iš tiesų, $[a; b) \in \mathcal{B}$. Be to, įrodėme, kad bet kuri vienataškė aibė priklauso σ -algebrai $\mathcal{B}$, todėl ir šių dviejų aibių suma $[a; b]$ priklauso $\mathcal{B}$.

Teorema įrodyta.

2. Formulės (1) pagrindu pastebėsime, kad **σ -algebra yra aibių klasė, uždara ne tik sumos, bet ir sankirtos operacijų atlikimo begalinį skaičių kartu atžvilgiu.**

Apibrėžimas. Jei Ω yra bet kokia aibė, o $\mathcal{F}$ – bet kokia jos poaibių σ -algebra, tai dvejetas $(\Omega, \mathcal{F})$ vadinamas *mačiąja erdve*¹.

Jau pats šios erdvės pavadinimas sufleruoja, kad viskas paruošta tikimybinių mato sąvokos įvedimui.

Apibrėžimas. Funkcija P , apibrėžta σ -algebroje $\mathcal{F}$ ir įgyjanti reikšmes iš intervalo $[0; 1]$, vadinama **tikimybiniu matu** mačiojoje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, jei:

$$(P1) \quad P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F};$$

$$(P2) \quad P(\Omega) = 1;$$

¹ Analogiškai galima apibrėžti Borelio aibę ir Borelio σ -algebrą erdvėje R^n .

¹ Angl. *measurable space*, rus. *измеримое пространство*.

(P3) $\forall A_i \in \mathcal{F}$ tokiems, kad $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

3. **Pavyzdys.** Išnagrinėsime tokį stochastinį eksperimentą – “taškas” metamas į atkarpą $[0;1)$. Tarkime, kad visi eksperimento rezultatai yra vienodai galimi. Aišku, kad šiame stochastiniame eksperimente $\Omega = [0;1)$.

Tačiau jei, kaip dažnai darėme anksčiau, kiekvienam elementariam įvykiui ω mėginsime priskirti tikimybę $P(\omega)$, tai nieko gero negausime. Iš tiesų, kadangi visi elementarieji įvykiai “vienodai galimi” ir jų yra be galo daug, tai

$$P(\omega) = 1/\infty = 0 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Todėl tikimybinį matą P reikia konstruoti kitaip. Tikimybę “taškui” patekti į intervalą $[a;b) \subset [0;1)$ apibrėžkime lygią skaičiui $b-a$. Sumai nesikertančių intervalų $[a_i;b_i)$ tokių, kad

$$\bigcup_{i=1}^m [a_i;b_i) \subset [0;1),$$

tokiu atveju priskirtina tikimybė

$$\sum_{i=1}^m (b_i - a_i).$$

Mačioji erdvė $(\Omega, \mathcal{F})$ pilnai aprašo nagrinėjamą stochastinį eksperimentą, jei $\mathcal{F}$ apibrėšime kaip Borelio σ -algebrą intervale $[0;1)$.

7. KOLMOGOROVO AKSIOMŲ SISTEMA

Pagal tarptautinių žodžių žodyną, *aksioma*² - tai pradinis išeities teiginys, sudarantis kitų teiginių (teoremų) įrodymų pagrindą mokslinėje teorijoje, kurios ribose priimamas be įrodymo.

Vaizdžiai kalbant, *aksiomų sistema* – tai nagrinėjamos teorijos fundamentas. Šiame skyrelyje išnagrinėsime tikimybių teorijos (o tuo pačiu ir statistikos) fundamentą, ant kurio ir yra statomas didžiulis statistikos rūmas.

Nagrinėjimui pasirinksimė bet kokią stochastinį eksperimentą. Tegu Ω - šio stochastinio eksperimento *elementariųjų įvykių erdvė*. Tarkime, kad Ω poaibių sistema $\mathcal{F}$ yra σ -algebra. Tai reiškia, kad

$$(F1) \quad \Omega \in \mathcal{F};$$

$$(F2) \quad \text{Jei } A \in \mathcal{F}, \text{ tai } \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F};$$

$$(F3) \quad \text{Jei } A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots, \text{ tai ir } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Aibės iš $\mathcal{F}$ vadinamos *atsitiktiniais įvykiais*, o dvejetas $(\Omega, \mathcal{F})$, kaip buvo minėta, *mačiąja erdve*.

Šioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ kiekvienam atsitiktiniam įvykiui A (t.y. aibei iš klasės $\mathcal{F}$) priskirsime skaičių $P(A)$, kuris vadinamas *atsitiktinio įvykio A tikimybe*, taip, kad būtų patenkintos praeito skyrelio sąlygos (P1), (P2) ir (P3).

Apibrėžimas. *Teiginiai (F1), (F2), (F3) ir (P1), (P2), (P3) vadinami tikimybių teorijos ir statistikos aksiomų sistema.*

Tokiu pavidalu šią sistemą pirmasis suformulavo rusų matematikas A.N. Kolmogorovas, todėl dažnai ji vadinama *Kolmogorovo aksiomų sistema*.

² Gr. axioma

Aksiomos (P1) ir (P3) reiškia, kad funkcija $P(\cdot)$, apibrėžta σ -algebroje $\mathcal{F}$, yra matas. Kadangi šis matas tenkina dar vieną sąlygą – sąlygą (P2), - tai jis vadinamas normuotu (arba tikimybinu) matu.

Apibrėžimas. Trejetas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kuriame $\mathcal{F}$ pažymėta aibės Ω poaibių sistemos σ -algebra, o $P(\cdot)$ - tikimybiniis matas σ -algebroje $\mathcal{F}$, yra vadinamas tikimybine erdve. Be to, σ -algebros $\mathcal{F}$ elementai vadinami atsitiktiniais įvykiais.

Išnagrinėkime paprasčiausias tikimybinių mato savybes.

Teorema 1. Tegu A ir B – atsitiktiniai įvykiai, t.y. $A \in \mathcal{F}$ ir $B \in \mathcal{F}$. Tegu, be to, $A \subset B$. Tada

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A). \quad (1)$$

Irodymas. Kadangi $A \subset B$, tai

$$B = A \cup (B \setminus A), \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Pagal aksiomą (P3) iš čia gauname, kad

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Pastaba. Pagal tikimybės erdvės apibrėžimą matas $P(\cdot)$ yra apibrėžtas tik σ -algebroje $\mathcal{F}$, todėl pirmiausia reiktų įrodyti, kad $B \setminus A \in \mathcal{F}$. Tuo tikslu pastebėsime, kad $B \setminus A = \bar{A} \cap B$. Pagal aksiomą (F2) turime, kad $\bar{A} \in \mathcal{F}$, o pagal 5-ojo skyrelio teiginį 1 – dviejų σ -algebros $\mathcal{F}$ elementų (mūsų atveju tai aibės $\bar{A}$ ir B) sankirta vėl priklauso $\mathcal{F}$. Taigi,

$$B \setminus A = \bar{A} \cap B \in \mathcal{F}.$$

Teorema įrodyta.

Pateiksime kai kurias šios teoremos išvadas.

Išvada 1. Priešingojo įvykiui A įvykio $\bar{A}$ tikimybė yra $1 - P(A)$, t.y.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Įrodymas akivaizdus – formulėje (1) pakanka paimti $B = \Omega$.

Išvada 2. *Negalimo įvykio $\emptyset$ tikimybė yra lygi nuliui, t.y.*

$$P(\emptyset) = 0.$$

Norint įsitikinti šios išvados teisingumu, formulėje (1) pakanka paimti $B = A$.

Išvada 3. *Jei $A \subset B$, tai $P(A) \leq P(B)$.*

Įrodymas. Iš tiesų, pagal aksiomą (P1), $P(B \setminus A) \geq 0$. Pasinaudoję (1) iš čia gauname, kad

$$P(B) - P(A) \geq 0, \text{ t.y. } P(A) \leq P(B).$$

Išvada pilnai įrodyta.

Pastarojoje formulėje paėmę $B = \Omega$, iš aksiomos (P2) gauname tokį teiginį:

Išvada 4. *Jei A yra atsitiktinis įvykis, t.y. $A \in \mathcal{F}$, tai $P(A) \leq 1$.*

Pagal išvadą 2, $P(\emptyset) = 0$. Tačiau atvirkščias teiginys yra neteisingas, t.y. įvykis A , kurio tikimybė yra lygi nuliui, nebūtinai yra negalimas įvykis. Norėdami tai pagrįsti, sukonstruosime konkretų pavyzdį, prieš tai suformuluodami patį teiginį.

Teiginys. *Egzistuoja tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir aibė $C \in \mathcal{F}$ tokia, kad*

$$P(C) = 0, \text{ tačiau } C \neq \emptyset.$$

Įrodymas. Tegu $\Omega = [0;1)$, o $\mathcal{F}$ – intervalų iš $[0;1)$ Borelio σ -algebra. Intervalo $[0;1)$ (o taip pat bet kurio iš intervalų $(a;b), [a;b), (a;b]$) taip vadinamas *Lebego matas* m lygus šio intervalo ilgiui $b - a$. Apibrėžkime

$$P(A) = m(A).$$

Jei C yra atkarpos $[0;1)$ racionaliųjų skaičių aibė, tai

$$P(C) = m(C) = 0, \text{ tačiau } C \neq \emptyset.$$

Teiginys įrodytas.

Skyrelio pabaigoje suformuluosime ir įrodysime taip vadinamą įvykių *sumos teoremą*.

Teorema 2. Tegu $A \in \mathcal{F}$ ir $B \in \mathcal{F}$. Tada

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Įrodymas. Pastebėsime, kad aibę $A \cup B$ galima suskaidyti į trijų nesikertančių aibių sumą:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

Todėl iš aksiomos (P3) ir teoremos 1 gauname, kad

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(A \setminus (A \cap B)) + P(B \setminus (A \cap B)) = \\ &= P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Teorema įrodyta.

Pastaba. Pagal aksiomą (F3), $A \cup B \in \mathcal{F}$. Be to, kadangi σ -algebra yra uždara pjūvio operacijos atžvilgiu, tai ir $A \cap B \in \mathcal{F}$. Taigi, yra prasmė kalbėti apie šių aibių matus $P(A \cup B)$ ir $P(A \cap B)$.

Klausimai ir užduotys

1. Kuriame amžiuje A. Kolmogorovas sukūrė savo aksiomų sistemą:
a) XIX a.; b) XX a.; c) XXI a.
2. Kelios aksiomos sudaro Kolmogorovo aksiomų sistemą?
a) šešios; b) trys; c) keturios.
3. Suformuluokite Kolmogorovo aksiomų sistemą.
4. Suformuluokite ir įrodykite teoremą apie dviejų atsitiktinių įvykių sumą.

8. SĄLYGINIŲ TIKIMYBIŲ EMPIRINIS SUVOKIMAS, APIBRĖŽIMAS IR PAVYZDŽIAI

Jei norime apskaičiuoti tikimybę įvykio, apie kurį turima papildomos informacijos, paprastai susiduriame su sąlyginėmis tikimybėmis.

Tarkime, pavyzdžiui, kad kasmet apie 20% dienų metuose Helsinkyje sninga. Tai reiškia, kad jei mes atsitiktinai pasirinksiame kalendorinę dieną metuose, tai tikimybė, kad tą dieną snigs, yra 0,2.

Dabar tarkime, kad atsitiktinai pasirinkta diena priklauso žiemos periodui. Turėdami šią papildomą informaciją (papildomą sąlygą), mes galime tvirtinti, kad tikimybė, jog šią dieną snigs, yra žymiai didesnė.

Analogiškai, jei žinoma, kad atsitiktinai pasirinkta diena priklauso vasaros periodui, tai galime tvirtinti, kad tikimybė, jog tokią dieną snigs, ≈ 0 .

Abiem atvejais papildoma informacija apie metų laiką leidžia mums ženkliai patikslinti tikimybės, kad tą metų laiko dieną snigs, skaičiavimus. Išnagrinėsime dar kelis pavyzdžius.

1 pavyzdys. Tarkime, kad sporto klube yra 35 nariai, iš kurių 20 yra suaugę ir 15 paaugliai. Tarp suaugusių yra 8 krepšininkai, tarp paauglių – 5 krepšininkai. Tai galima pavaizduoti lentele taip:

	Suaugęs	Paauglys	Viso
Krepšininkas	8	5	13
Nežaidžia krepšinio	12	10	22
Viso	20	15	35

Tarkime, kad atsitiktinai pasirinktas asmuo yra krepšinio žaidėjas, t.y. krepšininkas. Turint šią informaciją, mums reikia apskaičiuoti tikimybę įvykio, kad šis atsitiktinai pasirinktas asmuo yra suaugęs.

Sprendimas. Pažymėkime šiuos įvykius raidėmis:

A : asmuo yra suaugęs; B : asmuo yra krepšininkas.

Simboliu $P(A|B)$ priimta žymėti “tikimybę įvykio A , kai yra įvykęs įvykis B ” arba “įvykio A tikimybė su sąlyga B ”.

Mūsų pavyzdyje ši sąlyga reiškia, kad pasirinktasis asmuo yra krepšininkas, o jų yra 13. Iš jų tik 8 – suaugę (žr. lentelę). Todėl

$$P(A|B) = \frac{8}{13} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}, \quad (1)$$

kur $n(A)$, kaip paprastai, žymimas aibės A elementų skaičius. Perrašome formulę (1):

$$P(A|B) = \frac{8/35}{13/35} = \frac{n(A \cap B)/n(\Omega)}{n(B)/n(\Omega)}.$$

O kadangi

$$\frac{n(A \cap B)/n(\Omega)}{n(B)/n(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

tai

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B).$$

Apibrėžimas. Tikimybė įvykio A su sąlyga B apibrėžiama taip:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ jei } P(B) \neq 0.$$

$P(A|B)$ neapibrėžta, jei $P(B) = 0$.

3. Pratęsimė pavyzdžių nagrinėjimą.

2 pavyzdys. Yra žinoma, kad tikimybė įvykio, jog elektros lemputė tarnaus virš 100 valandų, yra 0,7, o tikimybė įvykio, kad lemputė degs virš 150, yra 0,28. Žinoma, kad lemputė degė virš 100 val. Kokia tikimybė įvykio, kad elektros lemputė tarnaus virš 150 valandų.

Sprendimas. Tegū L_{100} – įvykis, kad lemputė tarnaus virš 100 val., o L_{150} – virš 150 valandų. Tada

$$P(L_{150}|L_{100}) = \frac{P(L_{150} \cap L_{100})}{P(L_{100})} = \frac{P(L_{150})}{P(L_{100})} = \frac{0,28}{0,7} = 0,4.$$

3 pavyzdys. Individas yra atsitiktinai parenkamas iš 52 atletų grupės. Šioje grupėje yra 26 moterys ir 6 iš jų plaukikės. Tarp vyrų yra 10 plaukikų. Užduotis tokia:

(A) Žinant, kad atsitiktinai parinktas individas yra moteris, apskaičiuoti tikimybę, kad ji yra plaukikė.

(B) Žinant, kad atsitiktinai parinktas individas yra plaukikas, apskaičiuoti tikimybę, kad jis yra vyras.

Sprendimas. Sudarome lentelę:

	Moterys	Vyrai	Viso
Plaukikai	6	10	16
Neplaukia	20	16	36
Viso	26	26	52

Pažymėkime šiuos atsitiktinius įvykius:

B – asmuo yra moteris,

A – asmuo yra plaukikas.

Pastebime, kad atveju (A):

$$P(AB) = \frac{6}{52}; \quad P(B) = \frac{26}{52}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{6 \cdot 52}{52 \cdot 26} = \frac{3}{13}.$$

Skaičiavimus galima buvo atlikti ir tiesiogiai: $P(A|B) = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}$.

Atveju (B) raide C pažymėkime įvykį, kad asmuo yra plaukikas, o raide D - kad asmuo yra vyras. Tada

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)},$$

$$P(C) = \frac{16}{52}; \quad P(D \cap C) = \frac{10}{52}; \quad P(D|C) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

9. PILNOS TIKIMYBĖS FORMULĖ. BAJESO FORMULĖ

Iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ išplaukia taip vadinama tikimybių daugybos teorema.

Teorema (Daugybės formulė). Jei $P(A) > 0$ ir $P(B) > 0$, tai

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

Irodymas akivaizdus ir, kaip minėta, betarpiškai seka iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo.

Pavyzdys. Tikimybė, kad akcijos fondų biržoje kils pirmadienį, yra 0,6. Tikimybė, kad jų kursas kils antradienį, jei kilo pirmadienį, yra 0,3. Apskaičiuokite tikimybę, kad jis kils ir pirmadienį, ir antradienį.

Sprendimas. Raidėmis M ir T pažymėkime šiuos atsitiktinius įvykius:

M : kursas kils pirmadienį;

T : kursas kils antradienį.

Turime, kad:

$$P(M) = 0,6, \quad P(T|M) = 0,3; \quad P(T \cap M) = P(M)P(T|M) = 0,6 \times 0,3 = 0,18.$$

Apibrėžimas. Atsitiktinių įvykių $H_1, \dots, H_n$ rinkinys sudaro pilną įvykių grupę, jei

$$\bullet \quad H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega; \quad (1)$$

$$\bullet \quad H_i \cap H_j = \emptyset, \text{ kai } i \neq j. \quad (2)$$

Teorema (Pilnos tikimybės formulė). Jei $H_1, \dots, H_n$ - pilna įvykių grupė, ir $P(H_i) > 0$, kai $i = 1, 2, \dots, n$, tai bet kuriam atsitiktiniam įvykiui A

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i). \quad (3)$$

Įrodymas. Iš (1) išplaukia, kad

$$A = A \cap \Omega = \bigcup_{i=1}^n (H_i \cap A).$$

Iš (2) išplaukia, kad atsitiktiniai įvykiai $H_i \cap A$ neturi sankirtos, t.y. bendrų taškų, todėl iš mato P adityvumo savybės (P3) gauname, kad

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i \cap A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i),$$

ką ir reikėjo įrodyti.

Bajeso formulė. Tegu išpildomos sąlygos (1) ir (2). Tada

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)}. \quad (4)$$

Įrodymas. Iš daugybos formulės turime, kad

$$P(H_j A) = P(A)P(H_j|A) = P(H_j)P(A|H_j).$$

Iš čia gauname, kad

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)}.$$

Pritaikę vardikliui pilnos tikimybės formulę (3), gauname (4). Teorema (Bajeso formulė) įrodyta.

Klausimai ir užduotys

1. Ar sąlyginė tikimybė yra:

- (a) sąlyga;
- (b) asmuo;
- (c) skaičius, nelygus nuliui;
- (d) neneigiamas skaičius, mažesnis už 1;
- (e) neneigiamas skaičius, nedidesnis už 1;

(f) sąlyginis įvykis.

2. Studentas neturi supratimo apie sąlygines tikimybes. Su kokia tikimybe jis atspės 1 klausimą:

(a) $1/4$; (b) $1/5$; (c) $1/6$; (d) $1/7$; (e) $6/1$; (f) $2/3$.

3. Kam yra lygi tikimybė įvykiui A įvykti, jei yra žinoma, kad šis įvykis A yra įvykęs:

(a) 0; (b) 0.5; (c) 1.

4. Ar galima tvirtinti, kad atsitiktinių įvykių $H_1, \dots, H_n$ rinkinys sudaro pilną įvykių grupę, jei

a) $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$;

b) $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, tačiau aibės $H_1, \dots, H_n$ nesikerta, t.y. neturi bendrų taškų;

c) aibės $H_1, \dots, H_n$ bendrų taškų neturi.

10. NEPRIKLAUSOMI ATSTITIKTINIAI ĮVYKIAI

Dažnai pasitaiko situacija, kai, pavyzdžiui, $P(A|B) = P(A)$. Tokiu atveju

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A).$$

Tada $P(AB) = P(A)P(B)$.

Apibrėžimas. Atsitiktiniai įvykiai A ir B vadinami nepriklausomais, jei

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Jei įvykiai nėra nepriklausomi, tai jie vadinami priklausomais.

Apibrėžimas. Atsitiktiniai įvykiai A ir B vadinami nesutaikomais, jei

$A \cap B = \emptyset$, t.y. jeigu jie negali įvykti kartu.

Teorema. Jei du atsitiktiniai įvykiai A ir B su teigiamomis tikimybėmis yra nepriklausomi, tai jie negali būti nesutaikomi, ir atvirkščiai.

Irodymas. Jei A ir B yra nesutaikomi, tai

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0. \quad (1)$$

Jei jie yra nepriklausomi su teigiamomis tikimybėmis, tai

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0. \quad (2)$$

Kadangi sąryšis (1) yra teisingas tada ir tik tada, kai neteisingas (2), tai teoremos teisingumas yra akivaizdus.

1 pavyzdys. Lankomumo registracija parodė, jog tikimybė įvykio, kad valdybos pirmininkas atvyks į posėdį, yra 0,65, tarybos prezidento atvykimo į posėdį tikimybė yra 0,8, o tikimybė, kad jie abu atvyks į posėdį, yra 0,6. Ar galime tvirtinti, kad pirmininkas ir prezidentas atvyksta į posėdį nepriklausomai?

Sprendimas. Panagrinėkime šiuos atsitiktinius įvykius:

V : valdybos pirmininkas atvyks į posėdį;

T : tarybos prezidentas atvyks į posėdį.

Kadangi

$$P(V \cap T) = 0,6, \quad P(V)P(T) = (0,65) \times (0,8) = 0,52,$$

tai

$$P(V \cap T) \neq P(V)P(T).$$

Todėl atsitiktiniai įvykiai V ir T yra priklausomi.

2 pavyzdys. Viktoras skrenda iš San Francisko į Niujorką per Čikagą. Iš San Francisko į Čikagą jis skrenda α aviakompanijos lėktuvu, o iš Čikagos į Niujorką - β aviakompanijos lėktuvu. Tikimybė, kad α aviakompanijos lėktuvai saugiai pasiekia tikslą, yra 0,9995, o tikimybė, kad β aviakompanijos lėktuvai saugiai pasiekia tikslą, yra 0,9998. Apskaičiuokite tikimybes sekančių įvykių:

- (a) Viktoras saugiai atskris į Čikagą ir Niujorką;
- (b) Viktoras saugiai atskris į Čikagą, bet patirs nelaimę kelyje į Niujorką.

Sprendimas. Panagrinėkime šiuos atsitiktinius įvykius:

A – Viktoras saugiai pasiekia Čikagą iš San Francisko.

B – Viktoras saugiai pasiekia Niujorką iš Čikagos.

Kadangi įvykiai yra nepriklausomi, tai

- (a) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,9995 \times 0,9998 = 0,9993$;
- (b) $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = 0,9995 \times 0,0002 = 0,0002$.

3 pavyzdys. Iš skaitmenų 1, 2, ..., 9 atsitiktinai pasirenkamas vienas skaičius. Taip pat metami moneta ir kauliukas. Apskaičiuoti tikimybę įvykio, kad pasirinktas nelyginis skaičius, iškris herbas ir kad akučių skaičius dalosi iš 3, t.y. tikimybę tokio įvykio: $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, kur A_1 – pasirinktas nelyginis skaičius, A_2 – iškris herbas, A_3 – akučių skaičius dalosi iš 3.

Sprendimas.

$$P(A_1) = \frac{5}{9}, \quad P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{54}.$$

11. ATSITIKTINIS DYDIS KAIP MAČIOJI FUNKCIJA. TEOREMA APIE JO GENERUOTŲ ĮVYKIŲ PRIKLAUSYMĄ SIGMA ALGEBRAI

Paprasčiausiu atveju atsitiktinis dydis – tai funkcija, suteikianti kiekvienai stochastinio eksperimento baigčiai skaitinę reikšmę. Tai reiškia, kad atsitiktinį dydį X galima nagrinėti kaip įgyjančią realias reikšmes funkciją $X=X(\omega)$, apibrėžtą elementariųjų įvykių erdvėje Ω .

Pateiksime kelis atsitiktinių dydžių pavyzdžius.

1 pavyzdys. Kosminių dalelių, papuolančių į pasirinktą žemės paviršių pasirinktame laiko intervale, skaičius labai kinta ir priklauso nuo daugelio atsitiktinių aplinkybių.

2 pavyzdys. Abonentų iškvietimų, ateinančių į telefono stotį, skaičius per tam tikrą laiko tarpą taip pat yra atsitiktinis dydis, įgyjantis vieną ar kitą reikšmę priklausomai nuo atsitiktinių aplinkybių.

3 pavyzdys. Dujų molekulės greitis kinta priklausomai nuo susidūrimų su kitomis molekulėmis. Šių susidūrimų labai daug per labai trumpą laiko tarpą. Net jei žinomas molekulės greitis duotuoju laiko momentu, negalima tiksliai nustatyti šio greičio reikšmę po 0,01 ar, tarkime, po 0,001 sek. Dujų molekulės greičio kitimas yra atsitiktinis dydis.

Matematiškai šie pavyzdžiai turi vieną bendrą savybę: kiekvienas iš aprašytų fizikinių dydžių, įtakojamas atsitiktinių aplinkybių, gali įgyti skirtingas reikšmes. Negalima iš anksto nurodyti, kokią reikšmę įgijo dydis, nes jis kinta atsitiktinai, stochastinius eksperimentus atliekant vieną po kito.

Taigi, norint aprašyti atsitiktinį dydį būtina žinoti reikšmes, kurias jis įgyja. Tačiau šito nepakanka!

Iš tiesų, jei, pavyzdžiui, nagrinėti dujų stovį kintant temperatūrai, tai molekulių greičių reikšmių aibė nesikeis, nors dujų stovis ženkliai keisis.

Taigi, svarbu žinoti ne tik tai, kokias reikšmes įgis atsitiktinis dydis, bet ir kaip dažnai jis jas įgis, t.y. su kokia tikimybe atsitiktinis dydis šias reikšmes įgis.

Atsitiktinio dydžio įgyjamų reikšmių aibės gali būti labai įvairios: baigtinės, skaičiosios ir neskaičiosios; reikšmės gali būti išdėstytos **diskrečiai** arba užpildyti intervalą **tolygiai** ir pan.

Tikimybių teorijoje yra parodoma, jog atsitiktinis dydis $X(\omega)$ pilnai nusakomas aibėmis $\{\omega | X(\omega) < x\}$, kur $x \in R^1$. Šios aibės tikimybiniame erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ yra “informatyvios” tik tuo atveju, jei jas galima “išmatuoti”. O “išmatuoti” jas šioje erdvėje galima tik tada, kai bet kuriam realiam x

$$\{\omega | X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}, \quad (1)$$

nes pagal tikimybės erdvės apibrėžimą matas P yra apibrėžtas σ -algebroje $\mathfrak{F}$.

Suformuluosime pagrindinį šio skyrelio apibrėžimą.

Apibrėžimas. *Realioji funkcija $X = X(\omega)$, apibrėžta aibėje Ω , vadinama atsitiktiniu dydžiu tikimybiniame erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, jei bet kuriam realiam x tenkinamas sąryšis (1).*

Funkcijos, tenkinančios sąryšį (1), funkcijų teorijoje vadinamos **mačiosiomis** atžvilgiu σ -algebros $\mathfrak{F}$ funkcijoms.

Pateiksime tokios funkcijos pavyzdį.

4 pavyzdys. Stochastinį eksperimentą apibrėžkime tokiu būdu: moneta metama vieną kartą. Tada $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, kur ω_1 - herbo pasirodymo elementarus įvykis, o ω_2 - skaičiaus pasirodymo elementarusis įvykis. Tarkime, kad $\mathfrak{F}$ – visų galimų Ω poaibių aibė ir $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$.

Funkciją $X(\omega)$ apibrėžkime taip:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \omega = \omega_1, \\ 0, & \text{kai } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Pastebėsime, kad

$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{kai } x \leq 0, \\ \{\omega_2\}, & \text{kai } 0 < x \leq 1, \\ \Omega, & \text{kai } x > 1. \end{cases}$$

Tai reiškia, kad $\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$ bet kuriam realiam x , t.y. kad $X(\omega)$ yra atsitiktinis dydis nagrinėjamoje tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Nagrinėjant atsitiktinius dydžius, dažnai tenka atsakyti į tokį klausimą: kokia yra tikimybė įvykio, kad atsitiktinio dydžio $X(\omega)$ reikšmės priklausys bet kuriai Borelio aibei B ?

Tai reiškia, kad pakankamai plačiai aibių klasei $\{B\}$ mes turime patikrinti, kad $\{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}$, nes tik tokiu atveju matas P yra apibrėžtas ir yra prasmė nagrinėti tikimybę $P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\})$.

Apibrėžimas. Jei $X(\omega)$ yra atsitiktinis dydis tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, o B – bet kokia Borelio aibė, tai aibė $\{\omega \mid X(\omega) \in B\}$ vadinama atsitiktiniu įvykiu, kurį generavo atsitiktinis dydis $X(\omega)$.

Perskaičius šį apibrėžimą, iškyla natūralus klausimas – ar aibė $\{\omega \mid X(\omega) \in B\}$ tikrai yra atsitiktinis įvykis, t.y. ar tikrai

$$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}?$$

Atsakymas į šį klausimą yra teigiamas, tačiau jo įrodymą pateiksime tik pagrindiniam atvejui, t.y. kai B yra arba intervalas, arba pusašė, arba taškas.

Teorema. Tegu $X(\omega)$ - atsitiktinis dydis tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Tada kiekvienas iš sekančių Ω poaibių

$$\begin{aligned} &\{\omega \mid X(\omega) \geq x\}, \quad \{\omega \mid X(\omega) \leq x\}, \quad \{\omega \mid X(\omega) > x\}, \\ &\{\omega \mid x \leq X(\omega) < y\}, \quad \{\omega \mid x < X(\omega) < y\}, \quad \{\omega \mid X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

bet kuriems realiems skaičiams x ir y yra atsitiktinis įvykis, t.y. kiekviena iš šių aibių priklauso σ -algebrai $\mathfrak{F}$.

Irodymas grindžiamas σ -algebros apibrėžimu bei jos savybėmis. Tai, kad $X(\omega)$ yra atsitiktinis dydis, reiškia, jog bet kuriam realiam x galioja sąryšis (1). Jei teoremoje išvardytus Ω poaibius pavyktų pavaizduoti kaip aibių tipo (1) sumą, neigimą, sankirtą arba skirtumą, tai, kadangi σ -algebra yra uždara šių operacijų atžvilgiu (taigi, $\mathfrak{F}$ jų atžvilgiu taip pat uždara), gautume, kad šie poaibiai yra atsitiktiniai įvykiai ir teorema būtų įrodyta.

Šiam tikslui pakanka pastebėti, kad

$$\{\omega \mid X(\omega) \geq x\} = \Omega \setminus \{\omega \mid X(\omega) < x\},$$

$$\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid X(\omega) < x + 1/n\},$$

$$\{\omega \mid X(\omega) > x\} = \Omega \setminus \{\omega \mid X(\omega) \leq x\},$$

$$\{\omega \mid x \leq X(\omega) < y\} = \{\omega \mid X(\omega) < y\} \setminus \{\omega \mid X(\omega) < x\},$$

$$\{\omega \mid x < X(\omega) < y\} = \{\omega \mid X(\omega) < y\} \setminus \{\omega \mid X(\omega) \leq x\},$$

$$\{\omega \mid X(\omega) = x\} = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \setminus \{\omega \mid X(\omega) < x\}.$$

Teorema įrodyta.

Klausimai ir užduotys

1. Ar atsitiktinis dydis yra: (a) skaičius; (b) matas; (c) kažkas, nesuprasi kas; (d) funkcija; (e) aibė; (f) tikimybinė erdvė?

2. Kuris iš šių trijų teiginių yra teisingas:

(a) Jei X yra atsitiktinis dydis tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, tai

$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F} \text{ bet kuriam realiam } x;$$

(b) Jei X yra atsitiktinis dydis tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, tai X yra

atsitiktinis dydis ir bet kurioje kitoje tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}^*, P)$;

(c) Teiginiai (a) ir (b) yra klaidingi.

3. Pateikite atsitiktinio dydžio apibrėžimą ir naują atsitiktinio dydžio pavyzdį.

12. TIKIMYBIŲ SKIRSTINYS. TEOREMA APIE SKIRSTINIO FUNKCIJŲ SAVYBES

Praeitame skyrelyje matėme, kad jei $X(\omega)$ yra atsitiktinis dydis tikimybiniame erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, tai

$$\{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}$$

bet kuriai Borelio aibei B . Tai reiškia, kad bet kuriai Borelio aibei B egzistuoja matas

$$P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\}), \quad (1)$$

kuris yra vadinamas atsitiktinio dydžio X **tikimybės skirstiniu**³.

Kadangi B , kaip minėta, yra bet kokia Borelio aibė, tai išraišką (1) galima nagrinėti kaip aibių funkciją, o ką tik įvestą tikimybės skirstinio sąvoką galima suformuluoti atskiru apibrėžimu.

Apibrėžimas. *Funkciją*

$$P_X(B) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\}),$$

apibrėžtą bet kuriai Borelio aibei B , vadiname atsitiktinio dydžio X tikimybės skirstiniu.

Taigi, tikimybės skirstiniai yra Borelio aibių funkcijos. Todėl juos sunku nagrinėti klasikinės analizės metodais, nes ši analizė išvystyta “taškų” (t.y. vieno kintamojo) funkcijoms. Siekiant plačiai taikyti klasikinius analizinius metodus tikimybės teorijoje ir statistikoje, įrodoma, kad tikimybės skirstiniai (1) pilnai aprašomi taip vadinamomis *skirstinio funkcijomis*⁴ (arba, sutrumpintai, *skirstiniais*) $P(X < x)$, kur $x \in (-\infty; \infty)$.

Apibrėžimas. *Atsitiktinio dydžio X skirstinio funkcija (arba, sutrumpintai, skirstiniu) vadinama realaus kintamojo x funkcija $F(x)$,*

$$F(x) = P(X < x) = P(\{\omega \mid X(\omega) < x\}).$$

³ Angl. *probability distributios*, rus. *распределение вероятностей*.

⁴ Angl. *distribution function*, rus. *функция распределения*.

Panagrinėkime skirstinio funkcijų pavyzdžius – tris svarbias skirstinių klases. Tai tolygusis, dvitaškis ir išsigimęs skirstiniai.

1 pavyzdys. Stochastinis eksperimentas yra toks: į intervalą $[a; b]$ atsitiktinai metamas taškas. Skaitoma, kad bet kuri taško padėtis šiame intervale yra vienodai galima.

Šiuo atveju $\Omega = [a; b]$, $\mathfrak{F}$ yra pusiau atvirų iš dešinės intervalų $[a; b)$ Borelio σ - algebra, o tikimybinių matą P galima įvesti tokiu būdu:

$$P([\alpha; \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}, \quad \text{jei } [\alpha; \beta] \subset [a; b].$$

Funkciją $X = X(\omega)$ apibrėžiame taip: $X(\omega) = \omega$. Tada

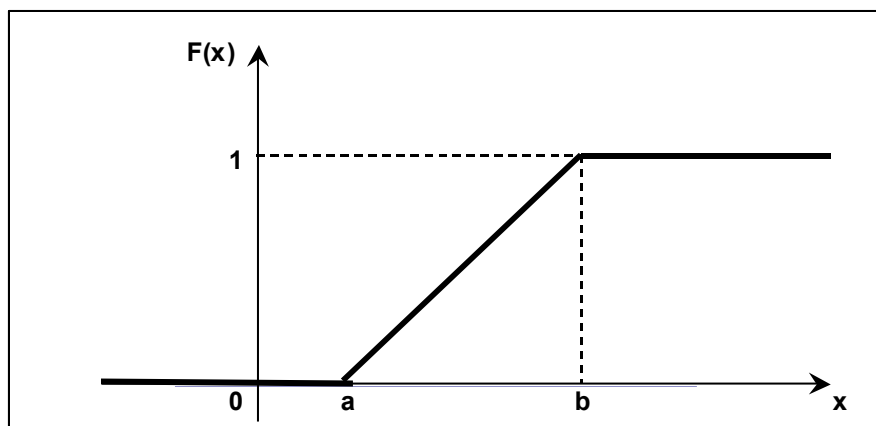
$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{jei } x \leq a, \\ [a; x), & \text{jei } a < x \leq b, \\ \Omega = [a; b], & \text{jei } x > b. \end{cases}$$

Iš čia darome išvadą, kad $\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$ bet kuriam realiam x , t.y. funkcija $X(\omega)$ yra mačioji funkcija tikimybiniame erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. O tuo pačiu ji yra ir atsitiktinis dydis šioje erdvėje.

Šio atsitiktinio dydžio skirstinys yra taip vadinamas **tolygusis skirstinys**:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \leq a, \\ \frac{x - a}{b - a}, & \text{jei } a < x \leq b, \\ 1, & \text{jei } x > b. \end{cases}$$

Tolygiojo skirstinio grafikas yra toks:



2 pavyzdys. Stochastinis eksperimentas yra toks: moneta metama vieną kartą. Rasime skirstinio funkciją atsitiktinio dydžio X , kuris šio stochastinio eksperimento pagrindu yra apibrėžiamas taip:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \omega = \omega_1 (= H), \\ 0, & \text{kai } \omega = \omega_2 (= S). \end{cases}$$

Čia raide H pažymėtas elementarusis įvykis, reiškiantis herbo pasirodymą, o raide S – skaičiaus pasirodymą. Nesunku pastebėti, kad tokiu atveju

$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{kai } x \leq 0, \\ \{\omega_2\}, & \text{kai } 0 < x \leq 1, \\ \Omega, & \text{kai } x > 1. \end{cases}$$

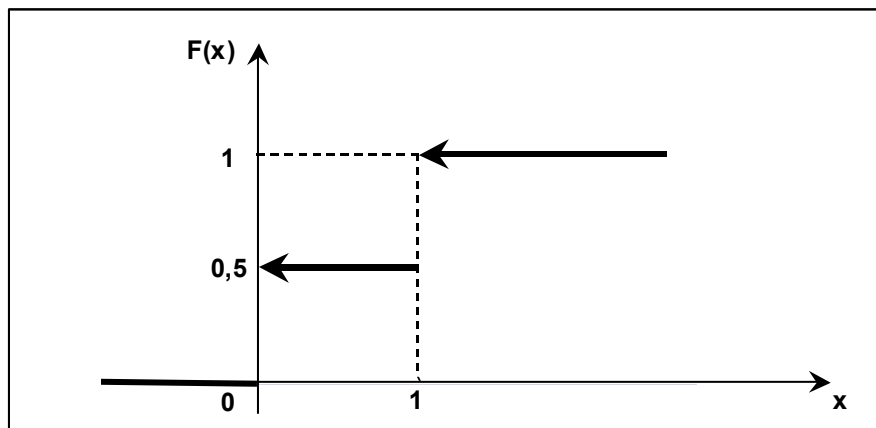
Kadangi

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/2$$

ir visada $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, tai

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{kai } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{kai } x > 1. \end{cases}$$

Ši funkcija $F(x)$ vadinama **dvitaškiu skirstiniu**, o jos grafikas yra toks:

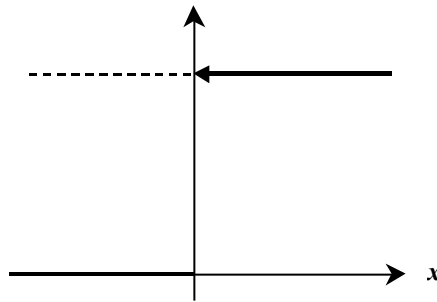


3 pavyzdys. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X yra beveik konstanta šia prasme:

$$P(X=a)=1.$$

Tada jo skirstinys vadinamas **išsigimusiu taške a skirstiniu**.

Nesunku įsitikinti, kad šio skirstinio grafikas (kai $a=0$) yra toks:



5. Ar skirstinio funkcijos apibrėžimas yra korektiškas, t.y. ar tikimybė $P(X < x)$ visada egzistuoja?

Atsakymas teigiamas tuo atveju, jei aibė $\{\omega \mid X(\omega) < x\}$ yra atsitiktinis įvykis, t.y. jei ji priklauso σ -algebrai $\mathfrak{F}$. O taip bus tada, kai X yra atsitiktinis dydis tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, t.y. kai X yra mačioji funkcija atžvilgiu σ -algebros $\mathfrak{F}$.

6. Panagrinėsime paprasčiausias atsitiktinio dydžio $X = X(\omega)$ tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ skirstinio funkcijos $F(x) = P(\{\omega \mid X(\omega) < x\})$ savybes.

1 savybė. Jei $a < b$, tai

$$P(\{\omega : a \leq X(\omega) < b\}) = F(b) - F(a). \quad (2)$$

2 savybė. $F(x)$ yra nemažėjanti funkcija, t.y. jei $a < b$, tai $F(a) \leq F(b)$.

3 savybė. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.

4 savybė. $F(x)$ yra tolydi iš kairės.

Pirmąsias tris savybes įrodysime.

Kadangi

$$\{\omega \mid a \leq X(\omega) < b\} = \{\omega \mid X(\omega) < b\} \setminus \{\omega \mid X(\omega) < a\}$$

ir, be to, iš sąlygos $a < b$ išplaukia, kad

$$\{\omega \mid X(\omega) < a\} \subset \{\omega \mid X(\omega) < b\},$$

tai pagal tikimybinių mato savybę (žr. Teoremą 1 7-ajame skyrelyje) gauname formulę (2).

2 savybė įrodoma 1 savybės pagrindu:

$$F(b) - F(a) = P(\{\omega \mid a \leq X(\omega) < b\}) \geq 0.$$

3 savybės įrodymas akivaizdus, jei pastebėti, kad

$$F(-\infty) = P(X < -\infty) = P(\emptyset) = 0,$$

$$F(+\infty) = P(X < +\infty) = P(\Omega) = 1.$$

Pasirodo, kad yra teisingas atvirkščias teiginys. Jei bet kuri funkcija tenkina išvardytas savybes (pakanka 2, 3 ir 4 savybių), tai ji yra skirstinio funkcija. Suformuluosime tai be įrodymo.

Teorema. Skirstinio funkcija $F(x)$ tenkina tokias tris sąlygas:

1) $F(x)$ yra nemažėjanti tiesėje $(-\infty, \infty)$;

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$$

3) $F(x)$ yra tolydi iš kairės.

Ir atvirkščiai, jei $F(x)$ tenkina sąlygas 1), 2) ir 3), tai egzistuoja tokia tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ir joje apibrėžtas atsitiktinis dydis $X(\omega)$ toks, kad $X(\omega)$ skirstinio funkcija yra $F(x)$.

Klausimai ir užduotys

1. Ar skirstinio funkcija yra: (a) skaičius; (b) matas; (c) funkcija; (d) atsitiktinis dydis; (e) aibė; (f) tikimybinė erdvė? (g) realus kintamasis?
2. Kada egzistuoja tikimybė $P(X < x)$:
 - (a) kai P yra matas;
 - (b) kai P yra tikimybinis matas;
 - (c) kai $X = X(\omega)$ yra funkcija tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.
3. Turime realaus kintamojo x funkciją $F(x)$. Kokias sąlygas turi tenkinti ši funkcija, kad ji būtų skirstinio funkcija?

13. BERNULIO SCHEMA. DISKRETIJAI IR TOLYDIEJI SKIRSTINIAI. PAGRINDINIAI SKIRSTINIO FUNKCIJŲ TIPAI. TANKIO SAVYBĖS

Paprasčiausias uždavinys, išskylantis nepriklausomų eksperimentų serijoje, yra taip vadinama Bernulio schema.

Apibrėžimas. Bernulio schema vadinamas toks uždavinys: apskaičiuoti tikimybę $P_n(m)$ atsitiktinio įvykio, kad n eksperimentų serijoje įvykis A bus realizuotas m kartų, o likusius $n-m$ kartų bus realizuotas priešingasis įvykis $\bar{A}$.

Bernulio schema ypač svarbi tikimybių teorijoje todėl, kad jos apibendrinimas leido išspręsti eilę pagrindinių tikimybinių uždavinių.

Bernulio schemos analizė. Apskaičiuosime tikimybę, kad įvykis A tam tikrų m bandymų metu (pvz., bandymuose su numeriais $s_1, s_2, \dots, s_m$) įvyks, o kitų $n-m$ bandymų metu neįvyks.

Kadangi įvykiai (ir eksperimentai) nepriklausomi, tai ši tikimybė lygi

$$p^m q^{n-m} \quad (\text{čia } p = P(A), \quad q = 1 - p).$$

Ieškomoji tikimybė $P_n(m)$ lygi šių tikimybių sumai. Iš kombinatorikos žinoma, kad ši suma turės $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ narių. Tai reiškia, kad

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Tai tikimybė įvykio, kad n bandymų serijoje įvykis A bus realizuotas lygiai m kartų. Aišku, kad visos galimo įvykio A realizacijos galimos, kai $m = 0, 1, \dots, n$, todėl

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = 1.$$

Tai gali būti įrodyta ir kombinatoriškai:

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = (p + q)^n = 1^n = 1.$$

Pastebėsime, kad tikimybė $P_n(m)$ lygi binomo $(q + px)^n$ skleidinio koeficientui prie x^m . Tai sąlygoja tokį apibrėžimą.

Apibrėžimas. Tarkime, kad atsitiktinis dydis $X(n)$ gali įgyti tik reikšmes $0, 1, \dots, n$. Jei, be to,

$$P(X(n) = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1),$$

tai sakoma, kad $X(n)$ yra binominis atsitiktinis dydis, o jo skirstinio funkcija vadinama binominiu skirstiniu.

12-ajame skyrelyje mes buvome suformulavę būtinas ir pakankamas sąlygas tam, kad funkcija $F(x)$ būtų skirstinio funkcija. Skirstinio funkcijų įvairovė labai didelė, tačiau mes išskirsime tik dvi pagrindines skirstinio funkcijų klases: diskrečiuosius ir tolydžiuosius.

Apibrėžimas. Diskrečiaisiais vadiname tokius atsitiktinius dydžius, kurie gali įgyti tik baigtinę arba skaičiąją (suskaičiuojamą) aibę reikšmių, o jų skirstinio funkcijas – diskrečiaisiais skirstiniais.

Pastebime, kad jei diskretusis atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ su tikimybėmis $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, t.y.

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots,$$

tai skirstinio funkcija $F(x)$ šiuo atveju apibrėžiama taip:

$$F(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k.$$

Tai reiškia, kad $F(x)$ yra “laiptuota” su trūkiais dydžio p_k taškuose x_k .

Kita svarbi klasė – tolydieji skirstiniai.

Apibrėžimas. Jei atsitiktinio dydžio X skirstinio funkcija $F(x)$ turi tankį, t.y., jei egzistuoja neneigiama funkcija $p(x)$ tokia, kad visiems realiams x

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy,$$

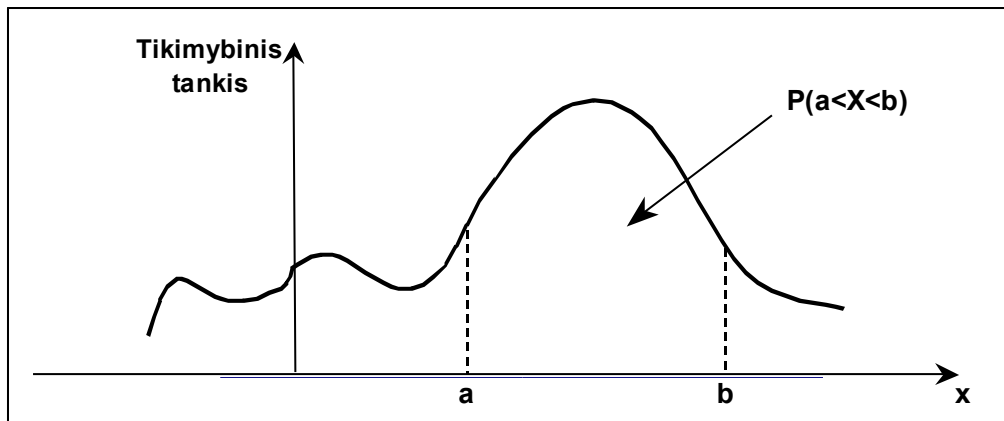
tai atsitiktinis dydis X vadinamas tolydžiuoju atsitiktiniu dydžiu, o $F(x)$ – tolydžiuoju skirstiniu.

Pastebime, kad tolydaus atsitiktinio dydžio X atveju

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X < a) = \int_{-\infty}^{b+0} p(y) dy - \int_{-\infty}^a p(y) dy = \\ &= \int_a^{b+0} p(y) dy. \end{aligned}$$

Paėmę $b = a$ gauname, kad $P(X = x) = 0$ bet kuriam realiam x .

Pastebime, kad plotas po atsitiktinio dydžio X tikimybinių tankio $p(x)$ kreive tarp a ir b lygus tikimybei $P(a \leq X < b)$ arba, kadangi $P(X = x) = 0$ bet kuriam realiam x , tikimybei $P(a \leq X \leq b)$ arba tikimybei $P(a < X < b)$:



Tikimybinių tankio savybės:

- 1) bendras plotas po tankio $p(x)$ kreivės lygus 1;
- 2) tikimybė $P(a \leq X \leq b)$ lygi plotui po tikimybinių tankio $p(x)$ kreivės tarp a ir b .
- 3) $p(x) \geq 0$ visiems $x \geq 0$.

Šių savybių įrodymą nesunku gauti iš tankio apibrėžimo.

Pagrindiniai skirstinio funkcijų tipai:

a) pagrindiniai diskrečiųjų skirstinių tipai –

- tai, visų pirma, jau išnagrinėti *išsigimės*, *dvitaškis* ir *binominis* skirstiniai. Šį sąrašą papildysime *Puasono* skirstiniu – tai atsitiktinio dydžio X , įgyjančio reikšmes $0, 1, 2, \dots$ su tikimybėmis $p_n = P(X = n) = \lambda^n e^{-\lambda} / n!$ (kur $\lambda > 0$ – konstanta), skirstinio funkcija;

b) pagrindiniai tolydžiųjų skirstinio funkcijų tipai –

- tai, visų pirma, jau išnagrinėtas *tolygusis* skirstinys, ir *normalusis* – tai skirstinio funkcija $\Phi(x)$, apibrėžiama formule

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(y-\mu)^2/(2\sigma^2)} dy,$$

kur $\sigma > 0$ ir μ - konstantos.

Sekančiame skyrelyje nagrinėsime dar vieną svarbų tolydžiųjų skirstinių tipą – eksponentinius skirstinius. Eksponentinis skirstinys $Exp(x)$ aprašomas tokia formule:

$$Exp(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & \text{jei } x \geq 0, \\ 0, & \text{jei } x < 0. \end{cases}$$

Čia λ – teigiamas parametras.

14. EKSPONENTINIO SKIRSTINIO CHARAKTERIZACIJOS TEOREMA

Tegu X yra bet koks neneigiamas atsitiktinis dydis, kurį galima interpretuoti kaip prietaiso gyvavimo laiką (pavyzdžiui, elektros lemputės tarnavimo laikotarpį) arba kaip aptarnavimo trukmę (pavyzdžiui, telefoninio pokalbio trukmės laiką).

Tada $P(X \geq x)$ yra tikimybė įvykio, kad „*prietaiso gyvavimo laikas yra ne mažesnis už x* “. Tarkime, kad prietaisas dirbo laiko tarpą y , ir nuo jo, šito laiko tarpo y , likęs prietaiso gyvavimo amžiaus (skaičiuojant nuo laiko momento $x + y$) nepriklauso, t.y.

$$P(X \geq x + y | X \geq y) = P(X \geq x). \quad (1)$$

Ši savybė anglų kalba vaizdžiai vadinama *lack of memory property* (pažodžiui verčiant – **atminties neturėjimo savybė**), o rusų kalba – *свойство отсутствия последдействия* (**veikimo be praeities poveikio savybė**).

Pasinaudojus sąlyginės tikimybės apibrėžimu lengva įsitikinti, kad eksponentinis skirstinys, apibrėžiamas formule

$$P(X < x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & \text{jei } x \geq 0, \\ 0, & \text{jei } x < 0, \end{cases}$$

($\lambda > 0$ yra parametras), tenkina sąryšį (1). Ar ši eksponentinių skirstinių klasė yra vienintelė klasė, kurios elementai turi šią savybę? Tai pagrindinis šio skyrelio klausimas, o teoremos, kuriose aprašoma (charakterizuojama) skirstinio funkcijų klasė nagrinėjamų atsitiktinių dydžių funkcijų savybėmis vadinamos *charakterizacijos teoremomis*.

Perrašysime sąryšį (1) kita, mums patogesne forma.

Jei $P(X = 0) \neq 1$ (t.y., jei atsitiktinis dydis X yra neišsigimęs nulyje), tai egzistuoja toks skaičius $y_0 > 0$, kad $P(X \geq y_0) > 0$. Įrodysime, kad ir

$$P(X \geq ny_0) > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Įrodinėsime matematinės indukcijos metodu. Jau matėme, kad kai $n = 1$, tai (2) yra teisinga. Tegu ji yra teisinga tada, kai $n = k$. Tada iš (1), paėmę $x = ky_0$ ir $y = y_0$ gauname, kad

$$P(X \geq (k + 1)y_0) = P(X \geq ky_0)P(X \geq y_0) > 0.$$

Taigi, formulė (2) yra teisinga ir reikšmei $n = k + 1$, o tuo pačiu kiekvienam natūriniam n . O kadangi bet kuriam $y > 0$ egzistuoja n toks, kad

$$P(X \geq y) \geq P(X \geq ny_0),$$

tai $P(X \geq y) > 0$.

Todėl prisiminę sąlyginės tikimybės apibrėžimą, veiksmo be praeities poveikio savybę (1) galime perrašyti taip:

$$P(X \geq x + y) = P(X \geq x)P(X \geq y), \forall x \geq 0, \forall y \geq 0. \quad (3)$$

Analizės kurse funkcionalinė lygtis

$$f(x + y) = f(x)f(y), \forall (x, y) \in S \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

yra vadinama **Koši lygtimi**.

Paėmę $S = [0; \infty) \times [0; \infty)$ gauname, kad **veikimo be praeities poveikio savybė (1) yra ekvivalenti Koši lygčiai (4)**, jei $f(x) = P(X \geq x)$.

Pasirodo, kad eksponentinio dėsnio charakterizacijai pakanka veikimo be praeities poveikio savybės (3) išpildymo ne visuose taškuose $y \geq 0$, o tik dviejuose taip vadinamuose nebendramačiuose taškuose y_1 ir y_2 .

Apibrėžimas. Taškai y_1 ir y_2 vadinami nebendramačiais, jei jų santykis y_1 / y_2 yra iracionalus skaičius.

Charakterizacijos teorema. Jeigu funkcija $f(x)$ nėra konstanta ir bent dviejuose nebendramačiuose taškuose $0 < y_1 < y_2$ išpildyti sąryšiai $f(y_i) > 0$ ir šiuose taškuose tenkinama Koši lygtis, t.y.

$$f(x + y_i) = f(x)f(y_i), \forall x \geq 0, i = 1, 2,$$

tai egzistuoja $\lambda > 0$ toks, kad $f(x) = \exp(-\lambda x)$, $\forall x \geq 0$.

Įrodymas pateikiamas vadovėlyje [1] – paskaitų metu jo išnagrinėti mums nepakanka laiko. Naudinga tai atlikti savarankiškai ir pateikti klausimus.

15. STYLTJESO INTEGRALO APIBRĖŽIMAS IR SKAIČIAVIMAS TOLYDŽIŲJŲ IR DISKREČIŲJŲ SKIRSTINIŲ ATVEJAIS. SKIRSTINIO SPEKTRAS

Tarkime, kad intervale $[a; b]$ apibrėžta funkcija $f(x)$ ir funkcija $F(x)$ su aprėžta variacija⁵.

Priminsime, kad funkcijos $F(x)$ variacija $V_a^b(F)$ vadinama sumų

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})|$$

tiksli viršutinė riba, kur $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ yra bet kuri galima taškų iš intervalo $[a; b]$ sistema. Yra žinoma, kad $F(x)$ turi baigtinę variaciją $V_a^b(F)$ tada ir tik tada, kai ją galima užrašyti dviejų didėjančių (mažėjančių) intervale $[a; b]$ funkcijų $F_1(x)$ ir $F_2(x)$ skirtumu, t.y.

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x).$$

Tarkime, kad $F(x)$ tolydi iš kairės. Jei a ir b - baigtiniai, tai taškais $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ intervalą $[a; b]$ padalinkime į baigtinį skaičių dalinių intervalų $(x_{i-1}; x_i)$ ir sudarykime sumą

$$\sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})], \quad (1)$$

kur $\tilde{x}_i$ - bet koks taškas iš intervalo $(x_{i-1}; x_i)$.

Didinkime dalinių intervalų skaičių taip, kad maksimalus intervaliukų ilgis artėtų prie 0. Jei suma (1) tokiu atveju turi ribą, t.y. jei

$$\exists \quad J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})],$$

tai ši riba vadinama funkcijos $f(x)$ Stieltjeso integralu funkcijos F atžvilgiu ir žymima simboliu

$$\int_a^b f(x) dF(x). \quad (2)$$

⁵ Pats Th. J. Stieltjes savo 1894 m. darbe reikalavo, kad $F(x)$ būtų didėjanti “masių koncentracijos” funkcija, kurios trūkio taškai atitinka “masei, sukoncentruotai tame taške”.

Styltjeso integralas begaliniam intervalu apibrėžiamas įprastu būdu: nagrinėjamas integralas intervale $[a; b]$, o po to žiūrima, ar egzistuoja riba

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(x) dF(x). \quad (3)$$

Jei ši riba egzistuoja, tai ji vadinama funkcijos $f(x)$ Styltjeso integralu funkcijos F atžvilgiu ir žymima simboliu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x).$$

Galima įrodyti, kad jei $f(x)$ tolydi ir aprėžta, tai integralai (2) ir (3) egzistuoja. Tačiau tikimybių teorijoje šito maža, nes nagrinėjant taip vadinamus momentus $f(x)$ nėra aprėžta.

Čia ir toliau skaitysim, kad funkcijos $f(x)$ Styltjeso integralas F atžvilgiu egzistuoja tada ir tik tada, kai egzistuoja funkcijos $|f(x)|$ Styltjeso integralas F atžvilgiu.

Nagrinėjant Styltjeso integralus svarbu žinoti, ar įskaitomi intervalo galai. Toliau simbolis $a-0$ reiškia, kad a įskaitomas į integravimo intervalą, o $a+0$ reiškia, kad a neįskaitomas. Taigi,

$$\begin{aligned} \int_{a-0}^b f(x) dF(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] + \\ &\lim_{x_1 \downarrow x_0=a} f(\tilde{x}_1) [F(x_1) - F(x_0)] = \int_{a+0}^b f(x) dF(x) + f(a) [F(a+0) - F(a)] \end{aligned} \quad (4)$$

Iš čia matome, kad jei $f(a) \neq 0$ ir funkcija $F(x)$ turi šuolį taške $x = a$ ir yra jame tolydi iš kairės, tai $F(a) = F(a-0)$ ir iš (4) gauname, kad

$$\int_{a-0}^b f(x) dF(x) - \int_{a+0}^b f(x) dF(x) = f(a) [F(a+0) - F(a-0)].$$

Toliau susitarsime dešinę intervalo galą neįskaityti, o kairę įskaityti į integravimo režius. Be to skaitysim, kad $F(x)$ yra tolydi iš kairės. Šis susitarimas leis mums rašyti taip:

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a).$$

Iš tiesų, kadangi $x_0 = a$ ir dėl F tolydumo iš kairės $F(b) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(b - \varepsilon)$, tai

$$\int_a^b dF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(x_n) - F(x_0)] = F(b) - F(a). \quad (5)$$

Atskiru atveju, kai $F(x)$ yra atsitiktinio dydžio X skirstinio funkcija, iš (5) gauname, kad

$$\int_{-\infty}^b dF(x) = F(b) - F(a) = P(a \leq X < b),$$

$$\int_{-\infty}^b dF(x) = F(b) - F(-\infty) = F(b) = P(X < b).$$

Jei $F(x)$ yra tolydi skirstinio funkcija, kuri turi išvestinę, tai iš baigtinių prieauglių formulės

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = p(\tilde{x}_i)(x_i - x_{i-1}),$$

kur $x_{i-1} < \tilde{x}_i < x_i$, gauname, kad

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dF(x) &= \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i) p(\tilde{x}_i) (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \int_a^b f(x) p(x) dx. \end{aligned}$$

Taigi, šiuo atveju Stiltjeso integralo nagrinėjimas suvedamas į paprastąjį integralą.

Tegu dabar $F(x)$ yra bet kokia skirstinio funkcija.

Apibrėžimas. Taškas x^* vadinamas skirstinio funkcijos $F(x)$ augimo tašku, jei

$$F(x^* + \varepsilon) - F(x^* - \varepsilon) > 0$$

bet kuriam $\varepsilon > 0$.

Apibrėžimas. Skirstinio F spektru $S(F)$ vadinama visų šio skirstinio funkcijos augimo taškų aibė.

Apibrėžimas. Skirstinio F diskrečiuoju spektru $D(F)$ vadinama visų skirstinio funkcijos trūkio taškų aibė.

Teorema. Jei F - diskretusis skirstinys, tai

$$D(F) = S(F); \quad (6)$$

$$D(F) = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i^*) (F(x_i^* + 0) - F(x_i^* - 0)). \quad (7)$$

Įrodymas. Akivaizdu, kad bet kuriai skirstinio funkcijai F teisingas sąryšis

$$D(F) \subset S(F).$$

Iš kitos pusės, jei F - diskretus, tai $S(F)$ sudaryta iš izoliuotų taškų, o bet kuris izoliuotas $S(F)$ taškas priklauso $D(F)$, t.y. diskrečiojo skirstinio atveju $S(F) \subset D(F)$ ir sąryšis (6) pilnai įrodytas.

Sąryšio (7) įrodymui pastebėsime, kad jei $F(x)$ turi šuolį taške $x = x^*$, tai bet kuriame integravimo srities padalijime visada atsiras tokie du taškai x_k ir x_{k+1} , kad $x_k < x^* < x_{k+1}$. Todėl

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^k f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] + f(x^*) [F(x_{k+1}) - F(x_k)] + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=k+2}^n f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] \right\} = \int_{-\infty}^{x^*-0} f(x) dF(x) + f(x^*) (F(x^* + 0) - F(x^* - 0)) + \\ &+ \int_{x^*+0}^{\infty} f(x) dF(x). \end{aligned}$$

Atskiru atveju, kai $S(F) = D(F)$, t.y. funkcijos $F(x)$ kitimas vyksta tik taškuose $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots$, tai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i^*) [F(x_i^* + 0) - F(x_i^* - 0)]$$

t.y. Stiltjeso integralas virsta eilute.

Teorema įrodyta.

16. STYLTJESO INTEGRALO SAVYBĖS

Žemiau formuluojamos savybės lengvai įrodomos Stiltjeso integralo apibrėžimo pagrindu analogiškai, kaip tai buvo daroma Lebego ir Rymano integralų atvejais analizės kurse.

1 savybė. Jei $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$ ir $a = c_0$, $b = c_{n+1}$, tai

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \sum_{i=0}^n \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) dF(x).$$

2 savybė. Konstantą galima iškelti prieš integralo ženklą:

$$\int_a^b cf(x) dF(x) = c \int_a^b f(x) dF(x).$$

3 savybė. Funkcijų sumos integralas lygus šių funkcijų integralų sumai:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(x) dF(x) = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(x) dF(x).$$

4 savybė. Jei $F_1(x)$ ir $F_2(x)$ - monotoninės funkcijos su baigtine variacija, o c_1 ir c_2 - konstantos, tai

$$\int_a^b f(x) d(c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x)) = c_1 \int_a^b f(x) dF_1(x) + c_2 \int_a^b f(x) dF_2(x).$$

5 savybė. Jei $f(x) \geq 0$ ir $b > a$, o $F(x)$ - skirstinio funkcija, tai

$$\int_a^b f(x) dF(x) \geq 0.$$

6 savybė. Rymano integralas yra Stiltjeso integralo atskiras atvejis, kai $F(x) = x + C$, C – konstanta.

Šių savybių įrodymą studentai pajėgūs atlikti savarankiškai.

17. DISKREČIOJO DYDŽIO VIDURKIS IR JO FIZIKINĖ INTERPRETACIJA. DRAUDIMO MODELIS

Skirstinio funkcija, jei ji žinoma, yra pilniausia atsitiktinio dydžio charakteristika, nes atspindi ne tik tai, kokias reikšmes įgyja nagrinėjamas atsitiktinis dydis, bet ir šių reikšmių įgijimo tikimybes.

Tačiau skirstinio funkcijos radimas - gana sunkus uždavinys, dažnai atsitinka, kad apie nagrinėjamą atsitiktinį dydį visiškai nebūtina turėti tokią detalią informaciją. Dažnai pakanka žinoti tik tam tikras skaitines charakteristikas - vidurkį (matematinę viltį), dispersiją, momentus. Pirmiausia išnagrinėkime vidurkio sąvoką.

Pradėkime nuo paprasčiausio statistinio duomenų rinkimo. Tuo tikslu 20 kartų meskime lošimo kauliuką. Šių eilučių autorius gavo tokius duomenis:

3	6	3	5	4	1	2	4	4	2
3	4	6	5	1	3	6	6	3	1

Šių stebinių *aritmetinis vidurkis* $\bar{x}$, dar vadinamas *imties vidurkiu*, apskaičiuojamas taip:

$$\bar{x} = \frac{\text{stebinių reikšmių suma}}{\text{stebinių skaičius}} = \frac{72}{20} = 3,6$$

Tačiau šį vidurkį mes galėjome apskaičiuoti kitaip. O būtent, galėjome apskaičiuoti kiekvienos kubiuko pusės pasirodymo dažnį ir, apskaičiavę santykinį dažnį, vidurkį gauname taip:

$$\bar{x} = 1 \cdot \left(\frac{3}{20}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2}{20}\right) + 3 \cdot \left(\frac{5}{20}\right) + 4 \cdot \left(\frac{4}{20}\right) + 5 \cdot \left(\frac{2}{20}\right) + 6 \cdot \left(\frac{4}{20}\right) = 3,6.$$

Šį skaičiavimo būdą galima iliustruoti tokia formule:

$$\text{Imties vidurkis } \bar{x} = \sum (\text{stebinio reikšmė} \times \text{santykinis dažnis})$$

Įsivaizduokime, kad kubiuką mes mėtome ne 20, o labai daug kartų. Tada santykinis dažnis artės prie vienos kubiuko sienelės pasirodymo tikimybės, t.y. prie 1/6. Vidurkis tokiu atveju apskaičiuojamas taip:

$$1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \dots + 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \sum (\text{reikšmė} \times \text{tikimybė}) = 3,5.$$

Šio pavyzdžio ir statistinio stabilumo fenomeno pagrindu natūralu *atsitiktinio dydžio X vidurkį* apibrėžti taip:

$$\text{atsitiktinio dydžio } X \text{ vidurkis} = \sum (\text{reikšmė} \times \text{tikimybė}) \text{ arba } \sum x_i P(X = x_i),$$

kur x_i pažymėtos skirtingos atsitiktinio dydžio X reikšmės.

Atsitiktinio dydžio X vidurkis dar yra vadinamas **populiacijos vidurkiu** arba **matematine viltimi** ir žymimas μ arba EX .

O štai Lietuvos standarto apibrėžimas:

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X , įgyjančio reikšmes x_i su tikimybėmis p_i , vidurkis (kai jis egzistuoja) yra

$$\mu = EX = \sum x_i p_i;$$

čia sumuojama pagal visas X įgyjamas reikšmes x_i , o $p_i = P(X = x_i)$.

Apibendrinkime kubiuko mėtymo eksperimentą, pasirinkdami bet kokį stochastinį eksperimentą. Kartokime jį daug kartų, kaskart skaičiuodami jo stebinių aritmetinį vidurkį $\bar{x}$. Galima įsitikinti, kad ši apskaičiuotoji reikšmė $\bar{x}$ po daugelio eksperimento kartojimų yra artima teoriniam vidurkiui μ . Tai taip vadinamas *didžiųjų skaičių dėsnis*. Suformuluokime jį atskirai.

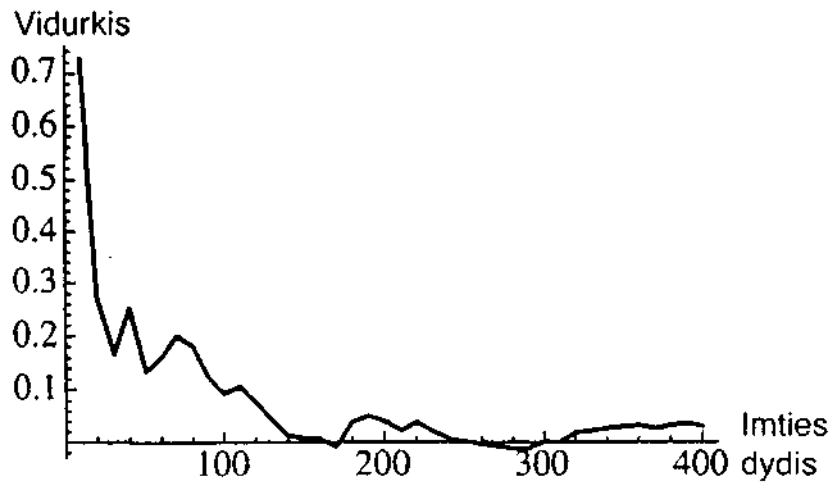
Didžiųjų skaičių dėsnis (empirinis variantas). *Praktiškai neabejotina, kad didelio skaičiaus nepriklausomų populiacijos stebinių aritmetiniai vidurkliai artėja prie šios populiacijos vidurkio μ .*

Norėdami iliustruoti šio dėsnio veikimą, atlikime tokį eksperimentą. Modeliuokime 400 atsitiktinio dydžio su nuliniu vidurkiu populiacijos stebinių. Kiekvieną kartą, gavę 10 naujų stebinių, iš naujo apskaičiuokime *visos imties* vidurkį. Tai reiškia, kad skaičiuojamos šios reikšmės:

$$\bar{x}_{10} = (x_1 + \dots + x_{10})/10, \quad \bar{x}_{20} = (x_1 + \dots + x_{20})/20, \quad \dots,$$

$$\bar{x}_{400} = (x_1 + \dots + x_{400})/400.$$

Įrašę konkrečias stebinių reikšmes, gauname tokį arba panašų grafiką:



Standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio populiacijos stebinių modeliavimo rezultatai, iliustruojantys didžiųjų skaičių dėsnio veikimą

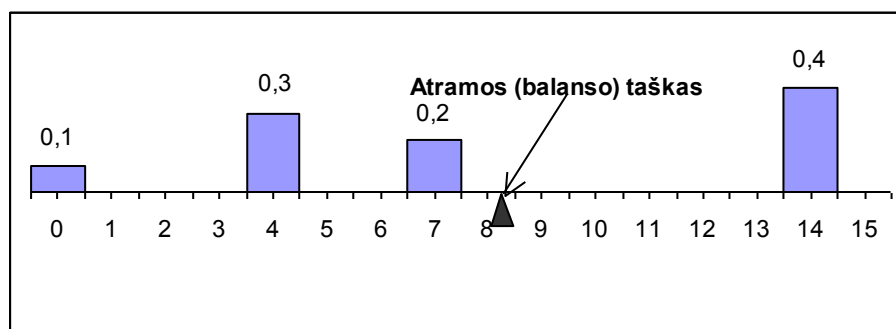
Išvada aiški: didėjant stebinių skaičiui, jų aritmetinis vidurkis artėja į nulį, t.y. į populiacijos vidurkį $\mu = 0$.

Fizikinė vidurkio interpretacija. Vidurkį galima interpretuoti kaip atsitiktinio dydžio "svorio centrą". Įsivaizduokime svorius, kurių skaitinė išraiška kilogramais lygi diskrečiojo atsitiktinio dydžio įgyjamų reikšmių tikimybėms. Išdėliokime juos ant svertinių sūpuoklių atstumais, proporcingais įgyjamoms reikšmėms. Norint, kad tokios sūpuoklės įgytų pusiausvyrą, atramos tašką reikia lokalizuoti tiksliai toje vietoje, kurios koordinatė lygi atsitiktinio dydžio vidurkiui.

Pailiustruosime tai pavyzdžiu. Tegu atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes 0, 4, 7 ir 14 su tikimybėmis 0,1; 0,3; 0,2 ir 0,4. Tada

$$\mu = EX = 0 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 7 \cdot 0,2 + 14 \cdot 0,4 = 8,2,$$

o svertines sūpuokles su svoriais 0,1; 0,3; 0,2 ir 0,4 grafiškai galima pavaizduoti taip:



Draudimo modelis. Daugelis tikimybinių sąvokų, įskaitant vidurkio arba matematinės vilties idėją, kilo studijuojant azartinius lošimus. Palaipsniui šios sąvokos ir idėjos buvo taikomos tose srityse, kuriose ženklia įtaką turėjo rizikos faktorius. Pirmiausia, vystantis prekybai, jos rado pritaikymą paprasčiausiuose draudimo modeliuose. Vieno tokio modelio pavyzdį išnagrinėsime dabar.

Draudimo kompanija išmoka klientui 5 000 Lt sumą, jei kruizo metu jis apvagiamas arba patiria kitus nuostolius. Jei šių nuostolių rizika įvertinama santykiu 1:250, tai kokia turi būti kliento draudimo įmoka?

Pirmiausia pastebėsime, jog tikimybė, kad kompanijai teks išmokėti 5 000 Lt sumą, yra $1/250=0,004$. Tegu X yra atsitiktinis dydis, reiškiantis kompanijos išmokos x klientui sumą. Tada reikšmės x_i šis dydis įgyja su tikimybėmis p_i ($i=1, 2$), kurios aprašomos tokia lentele:

Išmoka x_i	Tikimybė p_i
5000 Lt	0,004
0 Lt	0,996

Apskaičiuojame vidurkį:

$$EX = 5000 \times 0,004 + 0 \times 0,996 = 20 \text{ Lt}.$$

Taigi, vidutinė suma, kurią kompanija išmoka klientui, yra 20 Lt. O tai reiškia, kad būtų pagrįsta iš kliento prašyti 20 Lt didumo draudimo įmoką. Suprantama, realiame modelyje ši įmoka būtų didesnė – prisidėtų administravimo išlaidos, mokesčiai, išlaidos draudimo kompanijos pelno portfeliui.

18. MATEMATINIO VIDURKIO APIBRĖŽIMAI. NORMALIOJO, TOLYGIOJO IR PUASONO SKIRSTINIŲ VIDURKIAI

Sugriežtinsime sąvokas, išnagrinėtas praeitame skyrelyje.

Apibrėžimas. Tegu diskretusis atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ su tikimybėmis $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$. Jeigu eilutė $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ konverguoja absoliučiai, tai jos suma vadinama atsitiktinio dydžio X matematiniu vidurkiu arba matematine viltimi ir žymima EX .

Natūralu šį apibrėžimą apibendrinti tolygiesiems atsitiktiniams dydžiams taip:

Apibrėžimas. Jei tolydusis atsitiktinis dydis X turi tankį $p(x)$, tai integralas

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (1)$$

vadinamas šio atsitiktinio dydžio matematine viltimi (vidurkiu), jei egzistuoja integralas

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)dx.$$

Ir, pagaliau, bendras atvejis.

Apibrėžimas. Tegu atsitiktinis dydis X turi skirstinio funkciją $F(x)$. Styltjeso integralas

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (2)$$

vadinamas atsitiktinio dydžio X matematine viltimi, jei jis konverguoja absoliučiai.

Vietoje termino *atsitiktinio dydžio X matematinė viltis* kartais vartojamas jo sinonimas *skirstinio $F(x)$ matematinė viltis*, jei $F(x)$ yra atsitiktinio dydžio X skirstinio funkcija.

Išnagrinėsime konkrečius pavyzdžius.

1 pavyzdys. Apskaičiuoti normaliojo atsitiktinio dydžio Z , turinčio tankį

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

matematinę viltį.

Sprendimas. Iš formulės (1) turime, kad

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Atlikę kintamųjų pakeitimą $u = \frac{x-a}{\sigma}$ gauname

$$EZ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + a) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Sumos dešinėje pirmąjį integralą apskaičiuoti lengva, jei atlikti tokį kintamųjų pakeitimą $-u=v$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} v e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\int_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} = 0.$$

Antrasis integralas apskaičiuojamas prisiminus analizės kurso medžiagą

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}.$$

Taigi,

$$EZ = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = a.$$

Išvada. Normaliojo skirstinio parametras a yra lygus šio skirstinio matematinei vilčiai (ir dažnai žymimas raide μ).

2 pavyzdys. Apskaičiuoti tolygiojo intervale $(a;b)$ skirstinio matematinę viltį.

Sprendimas. Priminsime tolygiojo skirstinio apibrėžimą:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{jei } a < x \leq b, \\ 1, & \text{jei } x > b. \end{cases}$$

Iš formulės (2) turime, kad

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{a+b}{2}.$$

Išvada. Tolygiojo intervale $(a;b)$ skirstinio matematinė viltis sutampa su šio intervalo vidurio tašku.

3 pavyzdys. Apskaičiuoti diskrečiojo atsitiktinio dydžio ξ , turinčio Puasono skirstinį, matematinę viltį.

Sprendimas. Kadangi atsitiktinis dydis ξ turi Puasono skirstinį, tai

$$p_j = P(\xi = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Iš čia turime, kad

$$E\xi = \sum_{j=0}^{\infty} x_j p_j = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Išvada. Puasono skirstinio parametras λ yra lygus šio skirstinio matematinei vilčiai.

19. MATEMATINIO VIDURKIO SAVYBĖS

Teorema 1. *Konstantos matematinis vidurkis lygus pačiai konstantai, t.y.*

$$EC = C.$$

Irodymas. Konstantą C galime nagrinėti kaip diskretinį atsitiktinį dydį X , kuris gali įgyti tik vieną reikšmę C su tikimybe 1, t.y. kaip išsigimusį taške C atsitiktinį dydį X . Todėl pagal diskrečiojo atsitiktinio dydžio matematinės vilties formulę turime, kad

$$EC = EX = C \cdot P(X = C) = C \cdot 1 = C.$$

Teorema įrodyta.

Teorema 2. *Atsitiktinių dydžių sumos matematinis vidurkis lygus jų matematinių vidurkių sumai, t.y.*

$$E(X + Y) = EX + EY.$$

Irodymą pateiksime tik diskrečiųjų atsitiktinių dydžių X ir Y atveju. Tegu

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1;$$

$$P(Y = y_j) = q_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \sum_{j=1}^{\infty} q_j = 1.$$

Tada atsitiktiniai dydžiai $X + Y$ įgyja pavidalo $x_i + y_j$ reikšmes, kur $i, j = 1, 2, \dots$. Pažymėkime p_{ij} tikimybę įvykio, kad X įgis reikšmę x_i , o Y - reikšmę y_j . Kadangi pagal pilnos įvykių grupės $\{H_j\}$ formulę

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A \cap H_j),$$

tai pažymėję $H_j = \{\omega : Y(\omega) = y_j\}$ turime, kad

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}. \quad (1)$$

Analogiškai,

$$q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} . \quad (2)$$

Pagal matematinio vidurkio apibrėžimą ir iš (1) bei (2)

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i + y_j) p_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i + \sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j = EX + EY, \end{aligned}$$

ką ir reikėjo įrodyti.

Išvada. Baigtinio dėmenų skaičiaus atsitiktinių dydžių sumos matematinis vidurkis lygus šių atsitiktinių dydžių vidurkių sumai.

Įrodymas. Pagal ką tik įrodytą teoremą,

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= EX_1 + E(X_2 + \dots + X_n) = \\ &= EX_1 + EX_2 + E(X_3 + \dots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n. \end{aligned}$$

Išvada įrodyta.

Apibrėžimas. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y vadinami nepriklausomais, jei bet kurioms Borelio aibėms B_1, B_2 teisinga lygybė

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1) \cdot P(Y \in B_2)$$

Teorema 3. Nepriklausomų atsitiktinių dydžių X ir Y sandaugos vidurkis lygus šių atsitiktinių dydžių vidurkių sandaugai, t.y.

$$EXY = EX \cdot EY.$$

Įrodymas. Nagrinėsime tik diskrečiųjų atsitiktinių dydžių atvejį, pažymėdami

$$\begin{aligned} p_i &= P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots \\ q_j &= P(Y = y_j), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Pastebėsime, kad dėl atsitiktinių dydžių X ir Y nepriklausomumo,

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_i q_j,$$

todėl

$$\begin{aligned} EXY &= \sum_{i,j} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j p_i q_j = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j p_i q_j = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j \right) = EX \cdot EY, \end{aligned}$$

ką ir reikėjo įrodyti.

Teorema 4. *Konstantą galima iškelti prieš matematinio vidurkio ženklą, t.y.*

$$ECX = CEX.$$

Irodymas. Bet kuriam atsitiktiniam dydžiui X porą X ir C galime nagrinėti kaip nepriklausomus atsitiktinius dydžius. Tada iš teoremos 1 ir teoremos 3 gauname, kad

$$ECX = ECEX = CEX,$$

ką ir reikėjo įrodyti.

20. TEOREMA APIE ATSITIKTINIO DYDŽIO FUNKCIJOS VIDURKĮ. AUKŠTESNIŲ EILIŲ, CENTRINIAI IR ABSOLIUTIEJI MOMENTAI

Teorema. Jei $F(x)$ - atsitiktinio dydžio X skirstinys, o $f(x)$ - tolydi funkcija, tai

$$Ef(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x).$$

Irodymas. Sekdami B. Gnedenkos [7] pavyzdžiu, šią teoremą įrodysime tik paprasčiausiam atvejui, kai $f(x) = (x-a)^k$, $k \in \mathbf{N}$, a - konstanta. Pažymėkime

$$Y = (X-a)^k, \quad G(x) = P(Y < x).$$

Tada pagal matematinio vidurkio apibrėžimą,

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} xdG(x) = E(X-a)^k. \quad (1)$$

Jei k - nelyginis skaičius, tai

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y < x) = P((X-a)^k < x) = P(X-a < \sqrt[k]{x}) = P(X < a + \sqrt[k]{x}) = \\ &= F(a + \sqrt[k]{x}) \end{aligned} \quad (2)$$

Taigi, nelyginio k atveju iš (1) ir (2) turime, kad

$$E(X-a)^k = \int_{-\infty}^{\infty} xdG(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(a + \sqrt[k]{x})$$

Atlikę kintamųjų pakeitimą $y = a + \sqrt[k]{x}$ gauname, kad

$$E(X-a)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (y-a)^k dF(y),$$

t.y. $Ef(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x)$, jei $f(x) = (x-a)^k$, ką ir reikėjo įrodyti.

Tegu dabar k – lyginis. Tada Y - neneigiamas atsitiktinis dydis, todėl jo skirstinio funkcija $G(x)$ lygus 0, kai $x \leq 0$. Jei $x > 0$, tai

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y < x) = P((X-a)^k < x) = P(a - \sqrt[k]{x} < X < a + \sqrt[k]{x}) = \\ &= F(a + \sqrt[k]{x}) - F(a - \sqrt[k]{x} + 0) \end{aligned} \quad (3)$$

Taigi, lyginio k atveju iš (1) ir (3) turime, kad

$$E(X-a)^k = \int_{-\infty}^{\infty} x dG(x) = \int_0^{\infty} x dF(a + \sqrt[k]{x}) - \int_0^{\infty} x dF(a - \sqrt[k]{x} + 0) \quad (4)$$

Pirmajame integrale atlikę kintamųjų pakeitimą $y = a + \sqrt[k]{x}$, o antrajame pažymėję $u = a - \sqrt[k]{x} + 0$, šiuos integralus perrašome taip:

$$\int_0^{\infty} x dF(a + \sqrt[k]{x}) = \int_a^{\infty} (y-a)^k dF(y), \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} x dF(a - \sqrt[k]{x} + 0) = \int_a^{-\infty} (u-a)^k dF(u) = - \int_{-\infty}^a (u-a)^k dF(u). \quad (6)$$

Kadangi, apibrėždami Stiltjeso integralą, buvome susitarę neįskaityti į integravimo režius dešinį intervalo galą, o kairį įskaityti, tai iš (4), (5) ir (6) turime, kad

$$E(X-a)^k = \int_a^{\infty} + \int_{-\infty}^a = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k dF(x). \quad (7)$$

Teorema įrodyta.

Apibrėžimas (pagal B.Gnedenko [7]). *Atsitiktinio dydžio X k -tuoju momentu vadinamas atsitiktinio dydžio $(X-a)^k$ matematinis vidurkis:*

$$\nu_k(a) = E(X-a)^k.$$

Pagal ką tik įrodytą formulę (7),

$$\nu_k(a) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k dF(x),$$

kur F – atsitiktinio dydžio X skirstinio funkcija.

Tačiau labiau paplitusi tradicija k -tosios eilės (arba tiesiog k -tuoju) momentu vadinti dydį $\nu_k(0)$, o dydis $\nu_k(EX)$ vadinamas k -tosios eilės **centrinio momentu**. Dydis $\nu_k(0)$ dar kartais vadinamas **pradiniu momentu**.

Apibrėžimas (pagal J.Kubilių [3]). *Atsitiktinio dydžio X k -osios eilės, arba tiesiog k -uoju, momentu (k – sveikas neneigiamas skaičius) vadiname jo k -tojo laipsnio vidurkį*

$$EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x).$$

Kaip žinome, funkcija x^k yra integruojama tada ir tik tada, kai jos absoliutusias didumas yra integruojamas, t.y. kai integralas

$$E|X|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x)$$

yra baigtinis.

Pastarasis integralas yra vadinamas atsitiktinio dydžio X k -osios eilės, arba tiesiog k -uoju, **absoliučiuoju momentu**.

21. DISPERSIJOS APIBRĖŽIMAS IR JOS APSKAIČIAVIMAS. NORMALIOJO, TOLYGIOJO IR PUASONO SKIRSTINIŲ DISPERSIJOS

Matėme, kad ypatingas vaidmuo tikimybių teorijoje tenka pirmos eilės pradiniam momentui – tai matematinis vidurkis (matematinė viltis). Ypatingas vaidmuo tenka ir antros eilės centriniam momentui – dispersijai (nuo lotynų kalbos žodžio *dispergere* – išsklaidyti, išbarstyti). Apie tai bus kalbama sekančiame skyrelyje.

Dabar pateiksime dispersijos apibrėžimus diskretaus ir tolydaus atsitiktinio dydžio atvejams ir apskaičiuosime tolygiojo, normaliojo ir Puasono skirstinių dispersijas.

Atsitiktinio dydžio X **dispersija** vadinama X nuokrypio nuo EX kvadrato matematinis vidurkis. Paprastai ji žymima simboliu DX .

Apibrėžimas. Tegu diskretusis atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ su tikimybėmis $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, o μ yra šio atsitiktinio dydžio matematinis vidurkis. Jeigu egzistuoja šio atsitiktinio dydžio antrasis centrinis momentas, tai jis vadinamas dispersija ir žymimas

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i. \quad (1)$$

Bendru atveju atsitiktinio dydžio dispersija apibrėžiama taip:

$$DX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 dF(x),$$

kur $F(x) = P(X < x)$. Iš čia tolydžiojo atsitiktinio dydžio atveju turime, kad

$$DX = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx. \quad (2)$$

Teorema. Jei egzistuoja atsitiktinio dydžio X dispersija, tai

$$DX = EX^2 - (EX)^2,$$

$$DX = \min_{-\infty < u < \infty} E(X - u)^2.$$

Irodymas. Pasinaudoję teoremomis 1, 2 ir 4 apie vidurkio savybes gauname, kad

$$\begin{aligned} DX &= E(X - \mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = EX^2 - 2\mu EX + \mu^2 = \\ &= EX^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = EX^2 - \mu^2 = EX^2 - (EX)^2. \end{aligned}$$

Analogiškai,

$$\begin{aligned} E(X - u)^2 &= EX^2 + (u^2 - 2uEX) = EX^2 + (u^2 - 2uEX + (EX)^2) - (EX)^2 = \\ &= EX^2 + (u - EX)^2 - (EX)^2. \end{aligned}$$

Iš čia pastebėsime, kad $E(X - u)^2$ minimumas gaunamas tada, kai $u = EX$, todėl

$$\min_{-\infty < u < \infty} E(X - u)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

Teorema įrodyta.

1 pavyzdys. Apskaičiuoti normaliojo atsitiktinio dydžio Z , turinčio tankį

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

dispersiją.

Sprendimas. Anksčiau buvome įrodę, kad $EZ = a$. Todėl pagal formulę (2) gauname tokį sąryšį:

$$DZ = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 p(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Atlikę kintamųjų pakeitimą

$$y = \frac{x-a}{\sigma}$$

turime, kad

$$DZ = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy. \quad (3)$$

Integruojame dalimis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = -\int_{-\infty}^{\infty} y de^{-y^2/2} = -ye^{-y^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi} \quad (4)$$

Iš (3) ir (4) gauname, kad

$$DZ = \sigma^2.$$

Ištyrėme antrojo normaliojo skirstinio parametro tikimybinę prasmę – tai normaliojo atsitiktinio dydžio dispersija.

Išvada. *Normalusis skirstinys pilnai apibūžiamas jo matematiniu vidurkiu ir dispersija.*

2 pavyzdys. Apskaičiuoti tolygiojo intervale $(a;b)$ skirstinio dispersiją.

Sprendimas. Prisiminę tolygiojo skirstinio apibrėžimą nesunkiai pastebime, kad

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

Buvome apskaičiavę, kad $EX = \frac{a+b}{2}$. Todėl iš formulės $DX = EX^2 - (EX)^2$ turime:

$$DX = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Išvada. *Tolygiojo skirstinio dispersija priklauso tik nuo intervalo ilgio ir yra šio ilgio monotoniškai didėjanti funkcija. Kuo labiau išsklaidžiusios atsitiktinio dydžio reikšmės, tuo didesnė dispersija.*

3 pavyzdys. Apskaičiuoti diskrečiojo atsitiktinio dydžio X , turinčio Puasono skirstinį, dispersiją.

Sprendimas. Priminsime, kad

$$p_j = P(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Buvome apskaičiavę, kad $EX = \lambda$. Taigi, analogiškai (1),

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} x_j^2 p_j = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} (1 + (j-1)) \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} + \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^{j-2}}{(j-2)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

Kadangi $DX = EX^2 - (EX)^2$ ir $EX = \lambda$, tai ir $DX = \lambda$.

Išvada. Puasono skirstinio matematinis vidurkis ir dispersija sutampa ir yra lygūs šio skirstinio parametro reikšmei λ .

22. TEOREMOS APIE DISPERSIJOS SAVYBES

Teorema 1. Konstantos dispersija lygi nuliui: $DC = 0$.

Irodymas. Kadangi $EC = C$, tai $DC = E(C - EC)^2 = E(C - C)^2 = E0 = 0$.

Teorema įrodyta.

Teorema 2. Jei C - konstanta, tai

$$DCX = C^2 DX.$$

Irodymas. Kadangi $ECX = CEX$, tai

$$\begin{aligned} DCX &= E(CX - ECX)^2 = E(CX - CEX)^2 = EC^2(X - EX)^2 = \\ &= C^2 E(X - EX)^2 = C^2 DX. \end{aligned}$$

Teorema įrodyta.

Teorema 3. Nepriklausomų atsitiktinių dydžių X ir Y sumos dispersija lygi šių atsitiktinių dydžių dispersijų sumai, t.y.

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

Irodymas. Kadangi $E(X + Y) = EX + EY$, tai

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= E(X + Y - E(X + Y))^2 = E((X - EX) + (Y - EY))^2 = \\ &= DX + DY + 2E((X - EX)(Y - EY)). \end{aligned}$$

Kadangi atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai nepriklausomi yra ir atsitiktiniai dydžiai $X - EX$ bei $Y - EY$. Todėl

$$E((X - EX)(Y - EY)) = E(X - EX) \cdot E(Y - EY) = (EX - EX) \cdot (EY - EY) = 0.$$

Teorema įrodyta.

Išvada. Baigtinio skaičiaus sumos poromis nepriklausomų atsitiktinių dydžių dispersija lygi šių atsitiktinių dydžių dispersijų sumai.

Įrodymas. Pastebime, kad

$$\begin{aligned} D(X_1 + \dots + X_n) &= E\left\{\sum_{k=1}^n (X_k - EX_k)\right\}^2 = E\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (X_k - EX_k)(X_j - EX_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_k - EX_k)(X_j - EX_j) = \sum_{k=1}^n DX_k + \sum_{k \neq j} E(X_k - EX_k)(X_j - EX_j). \end{aligned}$$

Kadangi nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra poromis nepriklausomi, tai visiems k ir j tokiems, kad $k \neq j$

$$E(X_k - EX_k)(X_j - EX_j) = 0.$$

Išvada įrodyta.

Teorema 4. *Nepriklausomų atsitiktinių dydžių X ir Y skirtumo dispersija lygi šių atsitiktinių dydžių dispersijų sumai, t.y.*

$$D(X - Y) = DX + DY.$$

Įrodymas. Iš teoremų 2 ir 3 gauname, kad

$$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = DX + D(-Y) = DX + (-1)^2 DY = DX + DY.$$

Teorema įrodyta.

Teorema 5. *Jei Y yra normuotas atsitiktinio dydžio X nuokrypis, t.y.*

$$Y = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}},$$

tai $DY = 1$.

Įrodymas. Kadangi EX yra konstanta, tai X ir EX galime nagrinėti kaip nepriklausomus atsitiktinius dydžius, todėl iš teoremų 1, 2 ir 4 gauname, kad

$$D\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}\right) = \frac{1}{DX} D(X - EX) = \frac{1}{DX} (DX + 0) = 1.$$

Teorema įrodyta.

Apibrėžimas. Dydis $\sqrt{DX}$ vadinamas atsitiktinio dydžio X standartiniu nuokrypiu ir paprastai žymimas raide σ .

23. DISPERSIJA KAIP SKLAIDOS MATAS

Minėjome, kad antros eilės centrinis momentas buvo pavadintas *dispersija*, o šis pavadinimas kilęs nuo lotynų kalbos žodžio *dispergere* – išsklaidyti, išbarstyti. Įsitikinsime, kad dispersija iš tiesų gali būti nagrinėjama kaip *sklaidos matas*.

Tarkime, kad $x_1, x_2, \dots, x_n$ yra stochastinio eksperimento stebinių reikšmės. Šios imties vidurkiu pavadiname jos reikšmių aritmetinį vidurkį $\bar{x}$,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

"Matematikos terminų žodyne" $\bar{x}$ vadinamas *empiriniu vidurkiu*. Matėme, kad tai centro matas, kurio fizikinė interpretacija - svorio centras.

Tačiau be duomenų centro nustatymo, bet kuri duomenų aprašomoji analizė privalo turėti kitimo (sklaidos) apie šį centrą skaitinę išraišką, t.y. **kitimo (sklaidos) matą**. Dvi stebinių aibės gali turėti tas pačias centro pozicijas, bet skirtingą sklaidos apie šį centrą pavidalą. Pavyzdžiui, panagrinėkime dvi imtis:

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{4, 6, 9, 12, 14\}$$

$$\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} = \{7, 8, 9, 10, 11\}.$$

Šių imčių centrai c_1 ir c_2 sutampa:

$$c_1 = \bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{45}{5} = 9,$$

$$c_2 = \bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{45}{5} = 9.$$

Matome, kad taškai pirmojoje imtyje yra daugiau išsklaidyti, negu taškai antrojoje, nors jų centras yra tas pats.

Kuo tai galima paaiškinti? Apibrėžus i -tojo stebinio nuokrypį formule

Nuokrypis $\Delta_i = i$ -tasis stebiny - (Imties vidurkis).

gauname dvi nuokrypių sekas:

$$-5, -3, 0, 3, 5;$$

$$-2, -1, 0, 1, 2.$$

Susumavę šiuos nuokrypius, abiem atvejais gauname vieną ir tą patį rezultatą:

$$\sum \Delta_i = 0.$$

Matome, kad teigiamus nuokrypius "atsveria" neigiami nuokrypiai. Pasirodo, kad ir bendru atveju galima įrodyti, jog

visų nuokrypių Δ_i suma visada lygi nuliui.

Išvada. Norėdami gauti sklaidos matą, turime pašalinti neigiamų nuokrypių Δ_i ženklus, prieš juos sudedant.

Vienas iš tokių ženklų pašalinimo būdų - pakelti nuokrypius kvadratu.

Taigi, pakėlus nuokrypius kvadratu, juos susumavus ir padauginus iš normavimo koeficiento $1/(n-1)$ (dažnai normavimo koeficientu pasirenkamas $1/n$) gaunamas *sklaidos ir kitimo matas*, kuris vadinamas *imties dispersija* (angl. *sample variance*, rus. *выборочная дисперсия*) arba *empirine dispersija*:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Statistikoje naudinga ir *empirinio standarto nuokrypio* sąvoka:

$$s = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Apskaičiuosime empirinę dispersiją ir empirinį standartinį nuokrypį pateiktame pavyzdyje:

Stebiniai x_i	Nuokrypiai $x_i - \bar{x}$	(Nuokrypiai) ² $(x_i - \bar{x})^2$	Stebiniai y_i	Nuokrypiai $y_i - \bar{y}$	(Nuokrypiai) ² $(y_i - \bar{y})^2$
4	-5	25	7	-2	4
6	-3	9	8	-1	1
9	0	0	9	0	0
12	3	9	10	1	1
14	5	25	11	2	4
Iš viso	0	68	Iš viso	0	10

Kadangi $n - 1 = 4$, tai iš lentelės gauname, kad

$$s_x^2 = 68/4 = 17; \quad s_x = \sqrt{17} \approx 4,123;$$

$$s_y^2 = 10/4 = 2,5; \quad s_y = \sqrt{2,5} \approx 1,58.$$

Perėjimas nuo imties dispersijos apibrėžimo prie atsitiktinio dydžio dispersijos apibrėžimo analogiškas perėjimui nuo imties vidurkio apibrėžimo prie atsitiktinio dydžio vidurkio apibrėžimo, todėl jo detaliau nekartosime.



Kai tyrinėtojas analizuoja statistinius duomenis, jis paprastai daro išvadas dviejų charakteristikų pagrindu. Šios charakteristikos – tai empirinis vidurkis $\bar{x}$ ir empirinis kvadratinis nuokrypis s .

Rusų matematikas P.L. Čebyševs (1821-1894) įrodė, kad minimalus procentas stebinių, kurie patenka į intervalą $(\bar{x} - ks; \bar{x} + ks)$, kur k - natūrinis skaičius, yra $(1 - 1/k^2) \cdot 100$. Detalizuosime šį teiginį labiausiai paplitusiems praktikoje atvejams $k = 2$ ir $k = 3$.

Empirinė Čebyševo taisyklė. *Mažiausiai 75% stebinių patenka į intervalą $(\bar{x} - 2s; \bar{x} + 2s)$. Mažiausiai 89% stebinių patenka į intervalą $(\bar{x} - 3s; \bar{x} + 3s)$.*

24. ČEBYŠEVO NELYGYBĖ. DIDŽIŲJŲ SKAIČIŲ DĖSNIS

Nagrinėdami Stiltjeso integralo savybes matėme, kad jei X - atsitiktinis dydis su skirstinio funkcija $F(x)$, tai

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b dF(x).$$

Analogiškai,

$$\begin{aligned} P(|X| \geq a) &= P(X \geq a) + P(X \leq -a) = P(a \leq X < \infty) + P(-\infty < X \leq -a) = \\ &= \int_a^{\infty} dF(x) + \int_{-\infty}^{-a+0} dF(x) = \int_{|x| \geq a} dF(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Šio sąryšio mums pakaks Čebyšovo nelygybei įrodyti, tačiau naudodamiesi proga pastebėsime, kad ir bet kuriai Borelio aibei A

$$P(X \in A) = \int_A dF(x).$$

Teorema (Čebyšovo nelygybė). *Jeigu egzistuoja atsitiktinio dydžio X baigtinė dispersija DX , tai bet kuriam $\varepsilon > 0$ teisinga nelygybė*

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Irodymas. Pažymėkime $Y = X - EX$, o $G(x)$ - atsitiktinio dydžio Y skirstinio funkciją. Tada iš (1)

$$P(|Y| \geq \varepsilon) = \int_{|x| \geq \varepsilon} dG(x).$$

Kadangi integravimo srityje $\{x \mid |x| \geq \varepsilon\}$ visada

$$\frac{|x|}{\varepsilon} \geq 1,$$

tai

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} dG(x) = \int_{|x| \geq \varepsilon} 1 \cdot dG(x) \leq \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2} dG(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 dG(x).$$

Mes tik sustiprinsime nelygybę, išplėsdami integravimo sritį:

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} dG(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG(x) = \frac{EY^2}{\varepsilon^2}.$$

Dabar belieka pastebėti, kad

$$EY^2 = E(X - EX)^2 = DX,$$

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = P(|Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{EY^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Teorema įrodyta.



Žmonijos sukaupta didžiulė praktinė patirtis moko mus, kad reiškiniai, kurių realizacijos tikimybė artima vienetui, beveik visada įvyksta.

Lygiai taip pat įvykiai, kurių realizacijos tikimybė artima nuliui, įvyksta labai retai.

Šios išvados - tai tikimybių teorijos ir statistikos praktinių taikymų pagrindas, todėl kad įvykiai su mažomis tikimybėmis skaitomi *praktiškai negalimais*, o įvykiai, kurių realizacijos tikimybės artimos vienetui, skaitomi *praktiškai būtinais* (rus. *достоверными*).

Štai kodėl vienas iš pagrindinių tikimybių teorijos ir statistikos uždavinių - tai dėsningumų, vykstančių su tikimybėmis, artimomis vienetui arba nuliui, nustatymas.

Ypatingas vaidmuo čia tenka dėsningumams, atsirandantiems didelio skaičiaus nepriklausomų arba silpnai priklausomų atsitiktinių faktorių sąveikos dėka.

Vienas iš tokių svarbiausių tikimybių teorijos dėsningumų yra taip vadinamas Didžiųjų skaičių dėsnis, prie kurio formulavimo mes dabar ir pereiname.

Apibrėžimas. Sakome, kad atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal tikimybę į atsitiktinį dydį X , jei kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

Kitaip tariant, atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal tikimybę į atsitiktinį dydį X , jei su tikimybe, kiek norima artima 1, X_n nuo X skiriasi dydžiu, mažesniu už ε , kai n yra pakankamai didelis.

Apibrėžimas. Tegu $\{X_n\}$ - atsitiktinių dydžių, turinčių vidurkius $\{EX_n\}$, seka.

Didžiųjų skaičių dėsniais vadinamos teoremos, kuriose teigiama, kad skirtumas

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_j$$

konverguoja į nulį pagal tikimybę.

Mes detalai išnagrinėsime Didžiųjų skaičių dėsnį Čebyšovo teoremos formoje ir pateiksime svarbius šios teoremos atskirus atvejus - Bernulio ir Puasono teoremas bei Markovo teoremą, įrodomą Čebyšovo nelygybės pagrindu.

Didžiųjų skaičių dėsnis (Čebyšovo teorema). Jei $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ yra poromis nepriklausomų atsitiktinių dydžių su dispersijomis, tenkinančiomis sąlygą

$$DX_1 \leq C, DX_2 \leq C, \dots, DX_n \leq C, \dots, \quad (2)$$

seka, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_j\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad (3)$$

t.y.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_j\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (4)$$

Irodymas. Kadangi atsitiktiniai dydžiai yra poromis nepriklausomi, tai iš dispersijos savybių gauname, kad

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n DX_j.$$

Iš (2) išplaukia, kad

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) \leq \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Iš Čebyšovo nelygybės gauname, kad

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_j\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}, \quad (5)$$

o tuo pačiu, perėję prie ribos kai $n \rightarrow \infty$, gauname ir sąryšį (3).

Iš (5) pastebime, kad

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n EX_j\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

t.y.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n EX_j\right| < \varepsilon\right) \geq 1.$$

O kadangi tikimybė negali būti didesnė už 1, tai iš čia gauname teoremos teiginį (4).

Teorema įrodyta.

25. BERNULIO TEOREMA. SANTYKINIS DAŽNIS. STATISTINIO STABILUMO FENOMENAS

Bernulio teorema. Tarkime, kad n nepriklausomų bandymų (eksperimentų) serijoje įvykis A yra realizuojamas $n(A)$ kartų, o p yra šio įvykio pasirodymo tikimybė kiekviename bandyme. Tada bet kuriam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{n(A)}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (1)$$

Irodymas. Įveskime naujus atsitiktinius dydžius X_k , kurie įgyja reikšmes, lygias įvykio A pasirodymų skaičiui k -tojo bandymo metu, t.y. reikšmes 1 arba 0 priklausomai nuo to, ar k -ajame bandyme A pasirodė ar ne. Tada

$$n(A) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Kadangi X_i - dvitaškis atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmę 1 su tikimybe p ir reikšmę 0 su tikimybe $1-p$, tai pagal vidurkio ir dispersijos apibrėžimus diskrečiojo atsitiktinio dydžio atvejui turime, kad

$$EX_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p,$$

$$\begin{aligned} DX_i &= (1 - EX_i)^2 \cdot p + (0 - EX_i)^2 \cdot (1-p) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = \\ &= (1-p)^2 \cdot p + p^2(1-p) = p(1-p)(1-p+p) = p(1-p) \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Iš Čebyšovo teoremos gauname, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - p\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{n(A)}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Teorema įrodyta.

Santykis $n(A)/n$ formulėje (1) statistikoje vadinamas *santykiniu dažniu*.

Apibrėžimas. Dažnis - tai tam tikro tipo atsitiktinių įvykių skaičius stochastinių eksperimentų serijoje.

Bernulio teoremoje dažnis - tai dydis $n(A)$.

Statistikoje jau XVII-XVIII a. buvo paskelbtas statistinio stabilumo fenomenas, kurį mes formuluosime Bernulio teoremos pagrindu:

Statistinio stabilumo fenomenas. *Didėjant stochastinių eksperimentų skaičiui n , rezultato (įvykio) A santykinis dažnis $n(A)/n$ turi tendenciją įgyti pastovią reikšmę.*

Galima šią formuluotę konkretizuoti tokiu būdu:

Atsitiktinio įvykio A santykinis dažnis $n(A)/n$ n stochastinių eksperimentų serijoje turi tendenciją, esant pakankamai dideliam n , artėti prie pastovios reikšmės, kuri žymima $P(A)$.

Išnagrinėsime konkretų pavyzdį.

Pavyzdys. Iš kortų kaladės, kurioje yra 36 kortos, atsitiktinai ištraukiama 18 kortų, t.y. puskaladė. Mus domina įvykis A , kad šioje puskaladėje yra 9 raudonos spalvos kortos ir 9 juodos spalvos kortos.

Tegu $n(A)$ - tai dydis, reiškiantis, kad n eksperimentų serijoje $n(A)$ kartų pasirodė 9 juodos kortos, o $n(A)/n$ - santykinis dažnis. Buvo gauta tokia lentelė (pateikiama pagal B. Gnedenko [7]):

Eksp. eilės Nr.	Raudonų kortų skaičius puskala- dėje	$n(A)$	$n(A)/n$	Eksp. eilės Nr.	Raudonų kortų skaičius puskala- dėje	$n(A)$	$n(A)/n$
1	8	0	0,00	51	9	13	0,25
2	9	1	0,50	52	8	13	0,25
3	11	1	0,33	53	7	13	0,25
4	9	2	0,50	54	9	14	0,26
5	11	2	0,40	55	7	14	0,26
6	8	2	0,33	56	9	15	0,27
7	11	2	0,29	57	9	16	0,28
8	9	3	0,37	58	11	16	0,28
9	8	3	0,33	59	8	16	0,27
10	7	3	0,30	60	8	16	0,27

11	12	3	0,27	61	8	16	0,26
12	10	34	0,25	62	10	16	0,26
13	9	4	0,31	63	12	16	0,25
14	13	4	0,29	64	9	17	0,27
15	12	4	0,27	65	11	17	0,26
16	8	4	0,25	66	12	17	0,26
17	11	4	0,23	67	11	17	0,26
18	10	4	0,22	68	8	17	0,25
19	8	4	0,21	69	10	17	0,25
20	11	4	0,20	70	8	17	0,25
21	12	4	0,19	71	7	17	0,24
22	10	4	0,18	72	9	18	0,25
23	10	4	0,17	73	10	18	0,25
24	9	5	0,21	74	8	18	0,24
25	9	6	0,24	75	11	18	0,24
26	14	6	0,23	76	8	18	0,24
27	9	7	0,26	77	9	19	0,25
28	10	7	0,25	78	9	20	0,26
29	10	7	0,24	79	5	20	0,26
30	7	7	0,23	80	8	20	0,25
31	10	7	0,22	81	7	20	0,25
32	7	7	0,22	82	10	20	0,24
33	8	7	0,21	83	9	21	0,25
34	10	7	0,21	84	6	21	0,25
35	9	8	0,23	85	10	21	0,25
36	9	9	0,25	86	10	21	0,24
37	10	9	0,24	87	9	22	0,25
38	10	9	0,24	88	7	22	0,25
39	8	9	0,23	89	7	22	0,25
40	7	9	0,22	90	10	22	0,24
41	9	10	0,24	91	8	22	0,24
42	10	10	0,24	92	8	22	0,24
43	10	10	0,23	93	10	22	0,24

44	9	11	0,25	94	8	22	0,23
45	8	11	0,24	95	11	22	0,23
46	7	11	0,24	96	9	23	0,24
47	12	11	0,23	97	9	24	0,25
48	9	12	0,25	98	10	24	0,25
49	6	12	0,25	99	7	24	0,24
50	7	12	0,24	100	7	24	0,24

Norėdami gauti formulėje (1) esantį skirtumą $\frac{n(A)}{n} - p$, kur $p = P(A)$, pirmiausia apskaičiuosime šį p .

Iš 36 kortų išrinkti 18 kortų galima C_{36}^{18} būdais. Palankūs yra visi tie atvejai, kai iš 18 raudonų kortų išrenkamos 9 ir iš 18 juodų kortų išrenkamos 9 juodos. Taigi, iš viso yra $C_{18}^9 \cdot C_{18}^9$ palankių atvejų, o ieškoma tikimybė p yra tokia:

$$p = \frac{C_{18}^9 \cdot C_{18}^9}{C_{36}^{18}} = \frac{(18!)^4}{36!(9!)^4}.$$

Skaičiuojant faktorialus, patogiau naudotis **Stirlingo formule**:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

Iš šios formulės gauname, kad

$$\begin{aligned} 18! &\approx 18^{18} e^{-18} \sqrt{2\pi \cdot 18}, \\ 9! &\approx 9^9 e^{-9} \sqrt{2\pi \cdot 9}, \\ 36! &\approx 36^{36} e^{-36} \sqrt{2\pi \cdot 36}, \end{aligned}$$

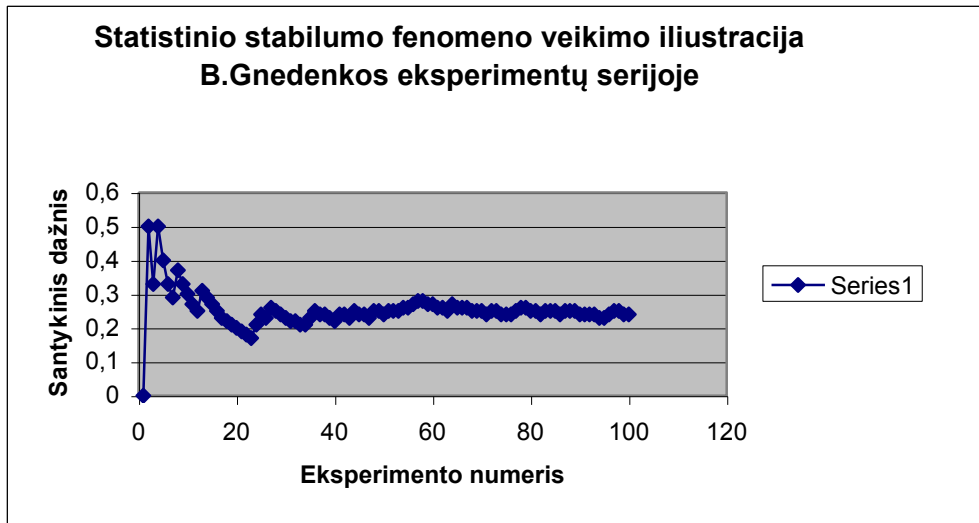
taigi,

$$p \approx \frac{(\sqrt{2\pi \cdot 18} \cdot 18^{18} e^{-18})^4}{\sqrt{2\pi \cdot 36} \cdot 36^{36} e^{-36} (\sqrt{2\pi \cdot 9} \cdot 9^9 e^{-9})^4},$$

Iš čia nesunkiai gauname, kad

$$P(A) = p \approx \frac{2}{\sqrt{18\pi}} \approx \frac{4}{15} \approx 0,26.$$

Stochastinio eksperimento duomenis iš lentelės pavaizdavę grafiškai ir palyginę juos su ką tik gautu teoriniu rezultatu gauname vaizdžią statistinio stabilumo fenomeno veikimo iliustraciją:



26. PUASONO TEOREMA. MATAVIMO PAKLAIDŲ EMPIRINIO VIDURKIO KONVERGAVIMAS. CHINČINO IR MARKOVO TEOREMOS

Puasono teorema apibendrina Bernulio teoremą, nes joje įvykio A pasirodymo tikimybė kiekviename bandyme gali būti skirtinga.

Puasono teorema. Tarkime, kad n nepriklausomų bandymų (eksperimentų) serijoje įvykis A yra realizuojamas $n(A)$ kartų, o p_k yra šio įvykio pasirodymo tikimybė k -tajame bandyme. Tada bet kuriam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Irodymas. Įveskime naujus atsitiktinius dydžius X_k , kurie įgyja reikšmes, lygias įvykio A pasirodymų skaičiui k -tojo bandymo metu, t.y. reikšmes 1 arba 0 priklausomai nuo to, ar k -tajame bandyme įvykis A pasirodė ar ne. Tada

$$n(A) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Kadangi X_k - dvitaškis atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmę 1 su tikimybe p_k ir reikšmę 0 su tikimybe $1 - p_k$, tai

$$EX_k = 1 \cdot p_k + 0 \cdot (1 - p_k) = p_k,$$

$$\begin{aligned} DX_k &= (1 - EX_k)^2 \cdot p_k + (0 - EX_k)^2 \cdot (1 - p_k) = (1 - p_k)^2 \cdot p_k + (0 - p_k)^2 \cdot (1 - p_k) = \\ &= (1 - p_k)^2 \cdot p_k + p_k^2 \cdot (1 - p_k) = p_k \cdot (1 - p_k) \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Iš Čebyšovo teoremos gauname, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{n(A)}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

o tai ir reikėjo įrodyti.



Tarkime dabar, kad atliekami fizinio objekto (pvz., plieninio dujotiekio vamzdžio), kurio ilgis yra a , matavimai. Vienodom sąlygom atlikęs n matavimų, matuotojas gauna n matavimų rezultatų $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Atlikę kitų n matavimų seriją, gautume kitą skaičių rinkinį, ir t.t.

Šie skaičių rinkiniai - tai atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, \dots, X_n$ realizacijos, o skirtumas $X_j - a$ yra vadinamas (j -tojo) *matavimo paklaida*.

Skaitysime, kad, atliekant matavimus, nedarome sistemingos paklaidos, t.y.

$$E(X_1 - a) = E(X_2 - a) = \dots = E(X_n - a) = 0. \quad (1)$$

Kadangi matavimo paklaida - dydis aprėžtas ir mažas, tai nesunku rasti konstantą C tokią, kad

$$DX_1 \leq C, DX_2 \leq C, \dots, DX_n \leq C. \quad (2)$$

Ar galima atsitiktinių dydžių $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ empirinį vidurkį skaityti pakankamai gera fizikinio objekto ilgio a aproksimacija, t.y. ar galima tvirtinti, kad daromų matavimo paklaidų aritmetinis vidurkis apytiksliai lygus nuliui?

Matematiškai šį klausimą galima performuluoti taip: ar dydis

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - a = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - a)$$

yra pakankamai mažas, kai n yra pakankamai didelis?

Prisiminus Čebyšovo teoremą, iš sąlygų (1) ir (2) nesunku gauti teigiamą atsakymą:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - a\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - a)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

bet kuriam $\varepsilon > 0$.



Didžiųjų skaičių dėsnis Čebyšovo formoje reikalavo dispersijų aprėžtumo. Pasirodo, kad nuo šios sąlygos galima atsisakyti, jei yra žinoma, kad nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra vienodai pasiskirstę, t.y. turi tą pačią skirstinio funkciją. Tokių atsitiktinių dydžių pavyzdys - ką tik išnagrinėtos matavimo paklaidos.

Pateiksime Didžiųjų skaičių dėsnį Chinčino formoje.

Chinčino teorema. *Jei nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ turi baigtinį matematinį vidurkį $EX_i = a$, tai*

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - a\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1, \quad (3)$$

kai $n \rightarrow \infty$.

Irodymas. Teorema įrodoma taip vadinamu *nupjovimo metodu*, kuris dažnai naudojamas šiuolaikinėje tikimybių teorijoje ir statistikoje.

Naujus atsitiktinius dydžius η_k ir ς_k apibrėžkime taip ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$\eta_k = \begin{cases} X_k, & \text{jei } |X_k| < \delta n; \\ 0, & \text{jei } |X_k| \geq \delta n; \end{cases}$$

$$\varsigma_k = \begin{cases} 0, & \text{jei } |X_k| < \delta n; \\ X_k, & \text{jei } |X_k| \geq \delta n; \end{cases}$$

čia $\delta > 0$ - bet koks fiksuotas skaičius, kurį pasirinksimė įrodymo pabaigoje.

Akivaizdu, kad bet kuriam k , $k = 1, 2, \dots, n$,

$$X_k = \eta_k + \varsigma_k.$$

Atsitiktiniai dydžiai η_k turi baigtinį ne tik matematinį vidurkį, bet ir dispersiją:

$$a_n = E\eta_k = \int_{-\delta n}^{\delta n} x dF(x),$$

$$D\eta_k = \int_{-\delta n}^{\delta n} x^2 dF(x) - a_n^2 \leq \delta n \int_{-\delta n}^{\delta n} |x| dF(x) \leq \delta b n,$$

kur

$$b = \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) = E|X_k|,$$

o $F(x)$ yra atsitiktinio dydžio X_k skirstinio funkcija.

Pastebime, kad kai $n \rightarrow \infty$, tai

$$a_n \rightarrow a,$$

todėl bet kuriam $\varepsilon > 0$ ir pakankamai dideliems n

$$|a_n - a| < \varepsilon. \quad (4)$$

Iš Čebyšovo nelygybės gauname, kad

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k - a_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{k=1}^n D\eta_k}{n^2 \varepsilon^2} \leq \frac{\delta b n \cdot n}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{\delta b}{\varepsilon^2}.$$

Iš čia ir iš (4) seka, kad

$$\begin{aligned}
 P\left(\omega \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k - a \right| \geq 2\varepsilon\right) &= P\left(\omega \left| \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k - a \geq 2\varepsilon \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k - a \leq -2\varepsilon \right\} \right| \right) = \\
 &= P\left(\omega \left| \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k \geq a + 2\varepsilon \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k \leq a - 2\varepsilon \right\} \right| \right) \leq \\
 &\leq P\left(\omega \left| \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k \geq a_n - \varepsilon + 2\varepsilon \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k \leq a_n + \varepsilon - 2\varepsilon \right\} \right| \right) = \\
 &= P\left(\omega \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k - a_n \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\delta b}{\varepsilon^2}.
 \end{aligned}$$

Taigi,

$$P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k - a \right| \geq 2\varepsilon\right) \leq \frac{\delta b}{\varepsilon^2}, \quad (5)$$

kai n pakankamai didelis.

Dabar pastebėsime, kad

$$\begin{aligned}
 P(\zeta_k \neq 0) &= P(|X_k| \geq \delta n) = \int_{|x| \geq \delta n} dF(x) \leq \frac{1}{\delta n} \int_{|x| \geq \delta n} |x| dF(x), \\
 P\left(\sum_{k=1}^n \zeta_k \neq 0\right) &\leq \sum_{k=1}^n P(\zeta_k \neq 0) \leq \frac{1}{\delta} \int_{|x| \geq \delta n} |x| dF(x).
 \end{aligned}$$

Kadangi egzistuoja baigtinis matematinis vidurkis, tai egzistuoja ir $E|X|$, todėl pakankamai dideliems n

$$\begin{aligned}
 \int_{|x| \geq \delta n} |x| dF(x) &\leq \delta^2, \\
 P\left(\sum_{k=1}^n \zeta_k \neq 0\right) &\leq \frac{1}{\delta} \delta^2 = \delta.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Tarkime dabar, kad Y_1 ir Y_2 - bet kokie du atsitiktiniai dydžiai, o Y yra jų suma, t.y. $Y = Y_1 + Y_2$.

Kadangi

$$|Y_1 - a + Y_2| \leq |Y_1 - a| + |Y_2|,$$

tai

$$\begin{aligned}
 \{\omega \mid |Y - a| \geq 2\varepsilon\} &= \{\omega \mid |Y_1 - a + Y_2| \geq 2\varepsilon\} \subset \{\omega \mid |Y_1 - a| + |Y_2| \geq 2\varepsilon\} \subset \\
 &\subset \{\omega \mid |Y_1 - a| \geq 2\varepsilon\} \cup \{\omega \mid Y_2 \neq 0\}.
 \end{aligned}$$

Paėmę

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad Y_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_i,$$

iš (5) ir (6) turime, kad

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a\right| \geq 2\varepsilon\right) \leq P(|Y_1 - a| \geq 2\varepsilon) + P(Y_2 \neq 0) \leq \frac{b\delta}{\varepsilon^2} + \delta. \quad (7)$$

Tegu dabar Δ - bet koks kiek norima mažas skaičius. Formulėje (7) paėmę

$$\delta = \Delta / (1 + b / \varepsilon^2)$$

gauname, kad

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a\right| \geq 2\varepsilon\right) \leq \Delta,$$

t.y. kai $n \rightarrow \infty$ yra teisingas sąryšis (3).

Teorema įrodyta.



Pagaliau, pateiksime Didžiųjų skaičių dėsnį Markovo formoje.

Markovo teorema. Tarkime, kad atsitiktinių dydžių seka $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ tenkina sąlygą

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \rightarrow 0, \text{ kai } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Tada bet kuriam teigiamam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n EX_k\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Įrodymas labai paprastas – pakanka prisiminti Čebyšovo nelygybę:

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n EX_k\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0,$$

kai $n \rightarrow \infty$.

Teorema įrodyta.

27. CHARAKTERISTINĖS FUNKCIJOS IR JŲ SAVYBĖS. CENTRINĖ RIBINĖ TEOREMA

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X charakteristine funkcija $f(t)$ vadinamas atsitiktinio dydžio $\exp(itX)$, įgyjančio kompleksines reikšmes, matematinis vidurkis:

$$f(t) = E \exp(itX) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in R^1;$$

čia $F(x)$ - atsitiktinio dydžio X skirstinio funkcija.

Charakteristinių funkcijų taikymas tikimybių teorijoje ir statistikoje ženkliai dalimi grindžiamas tokia jų savybe.

Teorema 1. Dviejų nepriklausomų atsitiktinių dydžių X ir Y sumos charakteristinė funkcija lygi šių atsitiktinių dydžių charakteristinių funkcijų sandaugai:

$$E \exp it(X+Y) = E \exp itX \cdot E \exp itY.$$

Irodymas. Kadangi atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai nepriklausomi yra ir atsitiktiniai dydžiai $\exp itX$ bei $\exp itY$. Tačiau pagal vidurkio savybes (3 teorema) nepriklausomų atsitiktinių dydžių sandaugos vidurkis lygus vidurkių sandaugai, todėl

$$E e^{it(X+Y)} = E e^{itX} \cdot E e^{itY},$$

ką ir reikėjo įrodyti.

Išvada. Jei

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

ir kiekvienas dėmuo nepriklausomas nuo likusių dėmenų sumos, tai atsitiktinio dydžio X charakteristinė funkcija lygi dėmenų $X_1, X_2, \dots, X_n$ charakteristinių funkcijų sandaugai.

Irodymas akivaizdus.

Teorema 2. Jei $f(t)$ - charakteristinė funkcija, tai

$$f(0)=1, |f(t)|\leq 1 \quad (-\infty < t < \infty).$$

Irodymas. Iš charakteristinės funkcijos apibrėžimo turime, kad

$$f(0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i0x} dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} 1 dF(x)=1,$$

$$|f(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)\right|\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} dF(x)=1.$$

Teorema įrodyta.

Teorema 3. Jei $Y = aX + b$, kur a ir b - konstantos, tai

$$f_Y(t) = e^{ibt} f_X(at),$$

kur $f_X(t)$ ir $f_Y(t)$ yra atitinkamai atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y charakteristinės funkcijos.

Irodymas. Pakanka pastebėti, kad

$$f_Y(t) = Ee^{itY} = Ee^{it(aX+b)} = e^{itb} Ee^{itaX} = e^{itb} f_X(at).$$

Teorema įrodyta.

Teorema 4. Jei atsitiktinis dydis X turi n -tos eilės absoliutųjį momentą, tai atsitiktinio dydžio X charakteristinė funkcija yra n kartų diferencijuojama ir bet kuriam $k \leq n$

$$f^{(k)}(0) = i^k EX^k.$$

Irodymas. Formaliai k kartų diferencijuodami charakteristinę funkciją $f(t)$ gauname, kad

$$f^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} dF(x) \quad (1)$$

Pastebime, kad

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} dF(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x),$$

o pagal teoremos sąlygas šis dydis yra baigtinis.

Iš čia gauname, kad integralas (1) egzistuoja, o atliktas diferencijavimas yra teisėtas.

Formulėje (1) paėmę $t = 0$ gauname, kad

$$f^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot 1 dF(x) = i^k EX^k,$$

ką ir reikėjo įrodyti.



Apibrėžimas. Sakoma, kad atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ silpnai konverguoja į atsitiktinį dydį X , jei jų skirstinio funkcijų seka $\{F_n\}$ konverguoja į atsitiktinio dydžio X skirstinio funkciją $F(x)$ visuose jo tolydumo taškuose. Tai žymima $X_n \Rightarrow X$ arba $F_n \Rightarrow F$.

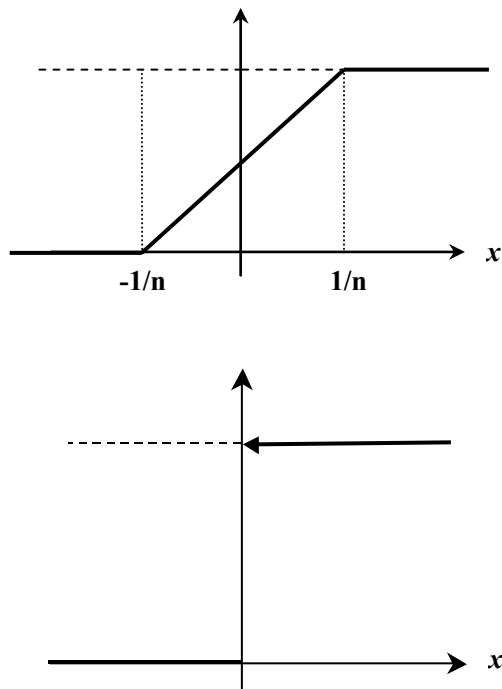
Kodėl pasirinktas *silpno konvergavimo* terminas? Gal todėl, kad vartojant vien terminą *konvergavimas*, paprastai turima galvoje konvergavimą *tolygioje metrikoje* ρ :

$$\rho(F, G) = \sup_x |F(x) - G(x)|.$$

Kadangi nesunku sukonstruoti skirstinio funkcijų $\{F_n\}$ seką, silpnai konverguojančią į kažkokį skirstinio funkciją F_∞ , bet diverguojančią tolygiojoje metrikoje, tai pastaroji kažkuria prasme yra "*stipresnė*", o pirmoji ne tokia "*griežta*", "*silpnesnė*".

Pateiksime tokios sekos pavyzdį.

Iš tiesų, tegu $F_n(x)$ - tolygusis intervale $[-1/n, 1/n]$ skirstinys (žr. pirmąjį piešinėlį žemiau), o $F_\infty(x)$ - išsigimęs taške $x = 0$ skirstinys (žr. antrąjį piešinėlį žemiau):



Akivaizdu, kad visiems natūriniais n

$$\rho(F_n, F_\infty) = 1/2.$$

Taigi, sąryšis

$$\rho(F_n, F_\infty) \rightarrow 0$$

yra neteisingas, bet užtat

$$F_n \Rightarrow F_\infty.$$

Pastebėsime, kad galima įrodyti, jog iš sekos konvergavimo pagal tikimybę išplaukia šios sekos silpnas konvergavimas.

Remiantis bendromis analizės koncepcijomis taip pat galima įrodyti, kad jei charakteristinių funkcijų seka $\{f_n(t)\}$ konverguoja į charakteristinę funkciją $f(t)$, tai atitinkama skirstinio funkcijų seka $\{F_n(x)\}$ konverguoja į skirstinio funkciją F jo tolydumo taškuose, t.y. $F_n \Rightarrow F_\infty$, ir atvirkščiai.

Centrinė ribinė teorema. Tegu $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka. Tegu, be to, $EX_1 = 0$ ir $DX_1 = 1$. Tada

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_n) / \sqrt{n} \Rightarrow Z,$$

kur Z - standartinis normalusis atsitiktinis dydis.

Teorema įrodoma charakteristinių funkcijų metodu (žr. [6]).



BAIGIAMASIS ŽODIS

„Mokantis matematikos, ugdomas sugebėjimas analizuoti, argumentuoti, klasifikuoti, kelti hipotezes, jas paneigti arba įrodyti.

Matematika gali žymiai prisidėti ne tik prie bendro asmenybės ugdymo, bet ir prie charakterio bei dorinių nuostatų formavimo“.

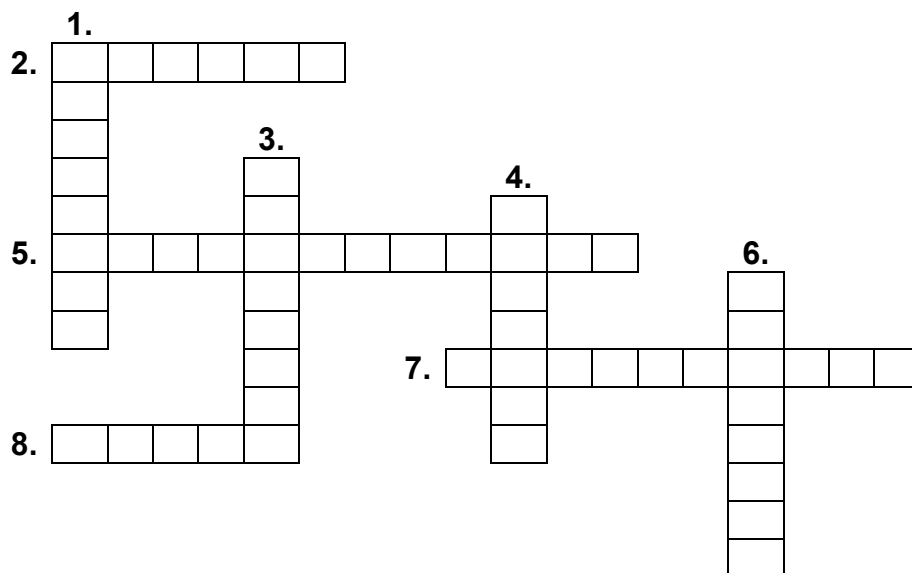
Tai citata iš „Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklos Bendrųjų programų“.

Gerbiamieji būsimieji mokytojai, būsimieji matematikos bakalaurai!

Neišduokite jūsų ir mūsų maitintojos matematikos! Mokykite vaikus ne tik skaičiuoti, bet, svarbiausia, mąstyti. Kitaip liksite be darbo, nes kasos aparatai ir kompiuteriai skaičiuoja geriau už jus ir jūsų mokiniams tai anksčiau ar vėliau taps aišku. O tai, kai jie taps ministrais, labai pavojinga! Jie nemokės mąstyti! Jie nesupras, kam reikalinga matematika!!

Ir dar. Gyvenimas – sudėtingas dalykas. Iš tiesų, pamėgink nustatyti, ar myli Marytė Joniuką, ar ne. O štai matematikoje viskas paprasta, jei žinai jos pagrindus. Mokykimės pagrindų ir gal pamatysime, kad ne tik matematika yra paprasta...

Na o kad gyvenimas būtų linksmesnis, pateikiame pabaigai kryžiažodį, kurio autoriai – studentai, šio tikimybių teorijos kurso klausytojai:



1. Dydis, kurį gauname, kai visų skaičių sumą padalijame iš jų bendro kiekio.
2. Maudymosi „indas“, kurio pagalba dažnai sprendžiame ir kombinatorikos uždavinius.

3. Pagrindiniai statistikos elementai.
4. Močiutės bibliotekoje yra įvairių knygų („Auksinis raktelis“, „Haris Poteris“, „Šimtas grožio paslapčių“, „Tikimybių teorija“, „Raudonkepuraitė“, „Sniego karalienė“), eilėraščių rinkinių (Maironis, Mačernis). Kiek yra galimybių pasirinkti vienai knygai ir vienam eilėraščių rinkiniui?
5. Tikimybių teorijos tėvas.
6. Junginiai, kurie sudaryti iš n elementų po k elementų, kurie skiriasi vienas nuo kito bent vienu nauju elementu (išdėstymo tvarka nesvarbi).
7. Vienas iš duomenų vaizdavimo būdų.
8. Skaičius, kuris yra lygus negalimo įvykio tikimybei.

REKOMENDUOJAMA LITERATŪRA

1. R. Januškevičius. Statistikos įvadas. Vilnius, VPU, 2000, 172 psl.
2. V. Čekanavičius, G. Murauskas. Statistika ir jos taikymai. I, Vilnius, TEV, 2000, 239 psl.
3. J. Kubilius. Tikimybių teorija ir matematinė statistika. Vilnius, Mokslas, 1996, 439 psl.
4. R. Khazanie. Statistics in a world of applications. – New York, HarperCollins, 1996, 887 psl.
5. K.J. Hastings. Probability and statistics. – New York, Addison-Wesley, 1997, 414 psl.
6. Под ред. Ю. Д. Максимова. Вероятностные разделы математики. Санкт-Петербург, «Иван Федоров», 2001, 589 psl.
7. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М: “УРСС”, 2001, 318 psl.
8. Lietuvos standartas LST ISO 3534-1. Statistika. I dalis. Tikimybių ir bendrieji statistikos terminai, 1996, 65 psl.



Romanas Januškevičius, Olga Januškevičienė

Tikimybės: vadovėlis. Vilnius: Vilniaus pedagoginio universiteto leidykla. 103 p.

Kaip mokslinio pažinimo kategorija sąvoka „tikimybė“ atspindi ypatingą sąryšių, būdingų masiniams procesams, tipą. Ši kategorija yra ypatingų – statistinių – dėsningumų klasės pagrindas. Vadovėlyje sistemingai pagal matematikos bakalauro (modulio kodas P160B004) mokymo programą „Tikimybių teorija ir statistika“ išdėstyti tikimybių teorijos pagrindai.

ISBN 978-9955-20-506-7

Redagavo Romanas Januškevičius
Maketavo Romanas Januškevičius
Viršelio autorė Dalia Raicevičiūtė

SL 605. 6,38 sp.1. Tir. 20 (laisva prieiga <http://www.mif.vpu.lt/algebros.php>). Užsak. Nr.10-034
Išleido ir spausdino Vilniaus pedagoginio universiteto leidykla
T. Ševčenkos g. 31, LT-03111 Vilnius
Tel. +370 5 233 3593, el. p. spaustuve@vpu.lt
www.leidykla.vpu.lt