

**VILNIAUS PEDAGOGINIS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
ALGEBROS IR STATISTIKOS KATEDRA**

Romanas Januškevičius, Olga Januškevičienė

Elementarusis tikimybių ir statistikos kursas



informatikams

1 dalis. TIKIMYBIŲ TEORIJS ELEMENTAI

 **Leidykla**

Vilnius, 2006

**Vadovėlis VPU Matematikos ir informatikos fakulteto Tarybos 2006-05-07 sprendimu
(Protokolo Nr.5) pripažintas tinkamu naudoti VPU MIF bakalauro studijų programoje**

Recenzentai:

prof. hab. dr. Kęstutis Kubilius

doc. dr. Jonas Banyš

Metodinės priemonės redaktorius – profesorius hab. dr. Romanas Januškevičius

ISBN 9955-20-089-8 (bendras) elektroninis išteklius

ISBN 9955-20-087-1 (D.1)

ISBN 9955-20-088-X (D.2)

© Romanas Januškevičius, 2006

© Olga Januškevičienė, 2006

© Vilniaus pedagoginis universitetas, 2006

TURINYS

Tikimybių teorijos elementai.....	4
1. Ar egzistuoja atsitiktinių reiškinių dėsningumai?	4
2. Tikimybių teorijos ir statistikos objektas.....	9
3. Diskrečioji elementariųjų įvykių erdvė (aibė) ir jos mato savybės. Klasikinis tikimybės apibrėžimas.....	11
4. Klasikinio tikimybės apibrėžimo taikymas Merė uždavinyje. Paskalio sprendimas	17
5. Klasikinio metodo taikymai	19
6. Geometrinės tikimybės. Susitikimo uždavinys	23
7. Tikimybių teorijos ir statistikos aksiomų sistema (Kolmogorovo). Tikimybinė erdvė.....	25
8. Sąlyginių tikimybių empirinis suvokimas, apibrėžimas ir pavyzdžiai	30
9. Tikimybių daugybos teorema ir jos taikymo pavyzdys. Pilnos tikimybės formulė. Bajeso formulė	34
10. Nepriklausomi atsitiktiniai įvykiai. Teorema apie nepriklausomus ir nesutaikomus įvykius, jos taikymo pavyzdys	36
11. Atsitiktinis dydis kaip mačioji funkcija.....	39
12. Skirstinys. Trys skirstinių pavyzdžiai. Teorema apie skirstinių savybes	41
13. Diskretieji ir tolydieji skirstiniai. Pagrindiniai skirstinių tipai. Tankio savybės	45
14. Diskrečiojo dydžio vidurkis ir jo fizikinė interpretacija. Didžiųjų skaičių dėsnis	47
15. Statistinio stabilumo fenomenas. Draudimo modelis	51
16. Sankt-Peterburgo paradoksas	56
17. Dispersijos apibrėžimas. Dispersija kaip sklaidos matas	60
18. Centrinė ribinė teorema (empirinė interpretacija)	64
19. Tiesinis sąryšis. Postūmio ir krypties koeficientai. Tiesinės koreliacijos koeficientas	74
20. Koreliacijos koeficiento apskaičiavimas ir jo savybės. Regresijos tiesės parinkimas	79
Literatūra	85
Piešiniai ir nuotraukos	85
Testo klausimų atsakymai	87

TIKIMYBIŲ TEORIJOS ELEMENTAI

1. AR EGZISTUOJA ATSITIKTINIŲ REIŠKINIŲ DĖSNINGUMAI?

Kaip mokslinio pažinimo kategorija sąvoka „tikimybė“ atspindi ypatingą sąryšių, būdingų masiniams procesams, tipą. Ši kategorija yra ypatingų dėsningumų – statistinių dėsningumų – klasės pagrindas.

Lietuviškos tikimybininkų mokyklos pradininkas J. Kubilius apie tikimybės sąvoką rašė taip: „Iš karto atrodytų keista kalbėti apie atsitiktinių reiškinių dėsningumus. Ką galima pasakyti apie įvykius, kurie tai įvyksta, tai neįvyksta? Iš tikrųjų, kai susiduriame su *atskirais* atsitiktiniais įvykiais, apie kokius nors dėsningumus kalbėti sunku. Bet visiškai kitaip yra tada, kai reiškinys kartojasi daug kartų. Tačiau leiskime kalbėti pavyzdžiams.

Jauna šeima laukia pirmojo kūdikio. Nerimauja. Spėlioja. Žinoma, vyras nori sūnaus, žmona – dukros. Ir ką dabar žmogus gali žinoti, kas gims – dukra ar sūnus. Grynas atsitiktinumas.

Bet imkime visas šeimas, kurios tą patį mėnesį susilaukė naujagimio, ir pamatysime, kad gimė maždaug pusė berniukų ir pusė mergaičių. Vadinasi, kas buvo vienoje šeimoje tik atsitiktinis reiškinys, dideliame šeimų skaičiui yra dėsningumas. Ir įdomumo dėlei galėtume pasakyti, kad šeimos galva – vyras – turėjo daugiau galimybių sulaukti sūnaus, negu žmona dukros. Mat, kaip rodo pasaulinė statistika, bendrame naujagimių skaičiuje berniukų būna truputį daugiau kaip 51 nuošimtis“.

„Lietuvių kalbos žodynas“ aiškina taip: **tikimybė** – *tikimumo laipsnis, tikėtinumas, galimumas*. *Tikimybė yra tikimumo laipsnis, kuris gali būti matematiškai matuojamas. Pvz., kuo sudėtingesnė konstrukcija ir daugiau detalių, tuo didesnė gaminio sutrikimo tikimybė. Kai tikimybė laimėti yra maža, lošimas darosi beviltiškas. Po ievos sužydėjimo šalną tikimybė smarkiai sumažėja.*

Maždaug prieš 100 metų išleistame F. A. Brockhaus ir I. A. Efron enciklopediniame žodyne buvo rašoma taip: **Tikimybė** – 1) *filosof.*, didesnis artumas tiesai, o ne klydimui, kuris yra sąlygojamas tuo, kad teigiamų faktorių skaičius nagrinėjamo įvykio pasirodymo galimybės naudai

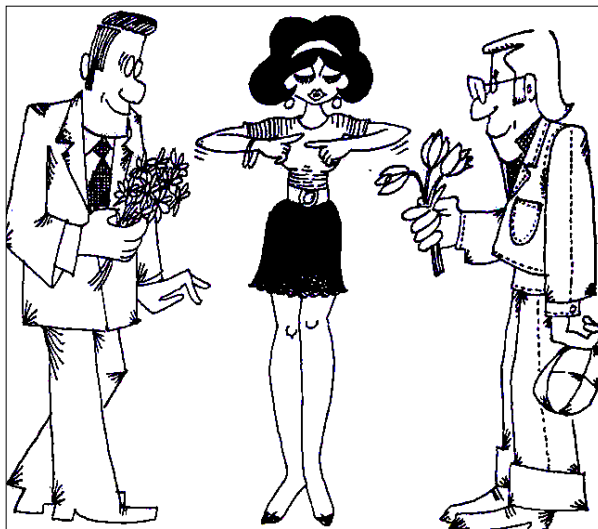
viršija neigiamų faktorių skaičių; 2) *matem.*, santykis visų atvejų, palankių nagrinėjamam įvykiui, su visais vienodai galimais atvejais; pavyzdžiui, tikimybė iš visos kortų kaladės ištraukti tūzą lygi 4:52.

O štai kaip „Didžiojoje tarybinėje enciklopedijoje“ rašė tikimybių teorijos aksiomatikos kūrėjas A. N. Kolmogorovas:

Tikimybė - tai tam tikro įvykio pasirodymo galimumo skaitinė charakteristika.

Šis įvykio pasirodymas, – tęsė A. N. Kolmogorovas, – nagrinėjamas esant tam tikroms sąlygoms, kurios gali būti pakartotos be galo daug kartų.

„Lietuvių kalbos žodyne“ rašoma taip: **atsitiktinis** – **1. nenumatytai pasitaikęs, atsitikęs. Pvz., mūsų susitikimas buvo atsitiktinis. 2. kuris retai, progomis, netikėtai pasitaiko, laikinas. Pvz., atsitiktinis uždarbis; moteris buvo jo kelionės atsitiktinė pažįstama; // nukrypęs nuo normos, neįprastas. Pvz., siuvant drabužius atsitiktinėms figūroms, kiekvienu atveju teks daryti atskirą brėžinį pagal gautus matų ėmimo duomenis 3. be pakankamo pagrindo, nepakankamai pagrįstas. Pvz., toks suskirstymas turi ir savo negerumų (neigiamumų) – jis kartais yra lyg atsitiktinis ar savavališkas (Jonas Jablonskis).**



Turbūt neįmanoma pateikti tikslaus apibrėžimo to, ką nusako žodis atsitiktinis

Tačiau garsus švedų matematikas Harald Cramer 1946-aisiais metais rašė, kad turbūt neįmanoma pateikti tikslaus apibrėžimo to, ką nusako žodis *atsitiktinis*, ir šio žodžio prasmę aiškina pavyzdžiu.

Jei ir daug kartų mestume paprasčiausią monetą, tai net labai stengiantis išsaugoti eksperimento sąlygas nepakitusias, mes vis tiek nepajėgsime pasakyti, ar konkretaus metimo atveju iškris herbas ar skaičius. Net jei mes sukonstruosime mašiną, kiekvieną kartą metančią monetą

visiškai vienodai, tai visgi neįtikėtina, kad mums pavyktų tiksliai nuspėti konkretaus metimo rezultatą.

Tai galima paaiškinti tuo, kad nežymūs stebimo objekto pradinių sąlygų pakitimai, kurių neįmanoma užfiksuoti mūsų „instrumentais“, gali žymiai nulemti galutinį rezultatą. Ir net jei tokie instrumentai būtų atrasti, dėl pradinių sąlygų užrašymo sudėtingumo parametrų praktinis apskaičiavimas ar net teorinis aprašymas gali būti neįmanomas.

Eksperimentus, kuriuos, esant vienodomis sąlygoms, galima pakartoti daugelį kartų ir kurių konkretaus rezultato negalima nuspėti iš anksto, vadiname stochastiniais (tikimybiniais) eksperimentais.

Netrukus įsitikinsime, kad visais tokiais atvejais tarp visų stochastinio eksperimento pradinių sąlygų pakitimų ir jo rezultatų svyravimų galima aptikti vieną dėsningumą, kuris ir yra matematinės statistikos pagrindas. Kalbėsime apie *statistinio stabilumo fenomeną*.

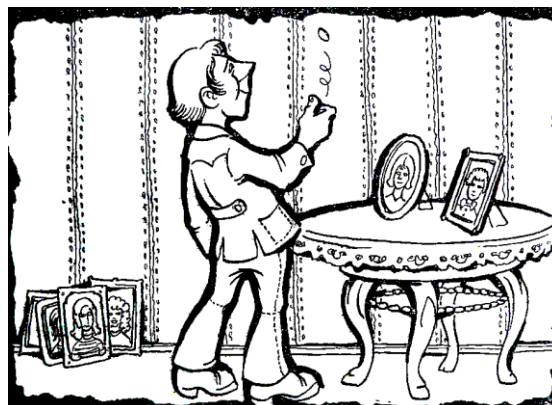
Taigi atliekant konkretų stochastinį eksperimentą yra neįmanoma nusakyti jo rezultato. Tačiau nuo konkretaus eksperimento perėjus prie stochastinių eksperimentų sekos, nagrinėjama situacija radikaliai pasikeičia.

Pastebėta, kad nors stochastinių eksperimentų konkretūs (individualūs, atskiri) rezultatai „elgiasi labai netaisyklingai“, šių eksperimentų rezultatai pakankamai ilgai juos kartojant yra stabilūs.

Kartosime mūsų stochastinį eksperimentą pakankamai daug kartų ir stebėsime, kiek kartų įvyko rezultatas A . Tegu pirmuosiuose n eksperimentų A įvyko m kartų. Tada statistinio stabilumo fenomenas galėtų būti formuluojamas taip:

Didėjant stochastinių eksperimentų skaičiui n , rezultato (įvykio) A santykinis dažnis m/n turi tendenciją įgyti pastovią reikšmę.

Ši „pastovi reikšmė“ ir yra vadinama įvykio A **tikimybe** ir žymima $P(A)$.



Stochastinis eksperimentas yra toks – metama simetrinė moneta

Šio statistinio stabilumo fenomeno iliustracija galėtų būti anksčiau aprašytas monetos mėtymo stochastinis eksperimentas. Pažymėkime H herbo pasirodymų skaičių po pirmų n bandymų. Jau XVIII a. (kai kuriais duomenimis, ir daug anksčiau) buvo pastebėta, kad santykis $v(H)/n$ yra stabilus ir apytiksliai lygus $1/2$:

Eksperimentatorius	Bandymų skaičius n	Herbo pasirodymų skaičius $v(H)$	$v(H) / n$
Ž. Biufonas (XVIII a.)	4040	2048	0.5080
K. Pirsonas (XIX a.)	12000	6019	0.5016
K. Pirsonas (XIX a.)	24000	12012	0.5005

Paseksime garbiųjų mokslo vyrų Ž. Biufono ir K. Pirsono pavyzdžiu ir atliksime monetos mėtymo stochastinį eksperimentą, o šio stochastinio eksperimento rezultatus apdorosime šiuolaikiškai – su Excel programa. Taigi išnagrinėsime pavyzdį.

PAVYZDYS. Monetą metam 50 kartų. Domina herbų pasirodymų skaičius. Statistinio stabilumo fenomeno veikimą pailiustruoti taškine ir stulpeline diagramomis.	Bandymų skaičius n	Monetos metimų rezultatai	Herbų pasirodymų skaičius $n(H)$	Santykinis dažnis $n(H)/n$	Bandymų skaičius n	Monetos metimų rezultatai	Herbų pasirodymų skaičius $n(H)$	Santykinis dažnis $n(H)/n$
	1	H	1	1,00	26	H	13	0,50
	2	S	1	0,50	27	S	13	0,48
	3	S	1	0,33	28	S	13	0,46
	4	H	2	0,50	29	H	14	0,48
	5	S	2	0,40	30	S	14	0,47
	6	S	2	0,33	31	S	14	0,45
	7	H	3	0,43	32	H	15	0,47
	8	H	4	0,50	33	S	15	0,45
	9	H	5	0,56	34	H	16	0,47
	10	S	5	0,50	35	H	17	0,49
	11	H	6	0,55	36	S	17	0,47
	12	H	7	0,58	37	H	18	0,49
	13	S	7	0,54	38	H	19	0,50
	14	S	7	0,50	39	S	19	0,49
	15	H	8	0,53	40	S	19	0,48
	16	S	8	0,50	41	H	20	0,49
	17	H	9	0,53	42	H	21	0,50
	18	H	10	0,56	43	S	21	0,49
	19	S	10	0,53	44	H	22	0,50
	20	S	10	0,50	45	S	22	0,49
	21	H	11	0,52	46	H	23	0,50
	22	S	11	0,50	47	S	23	0,49
	23	S	11	0,48	48	H	24	0,50
	24	S	11	0,46	49	S	24	0,49
	25	H	12	0,48	50	H	25	0,50

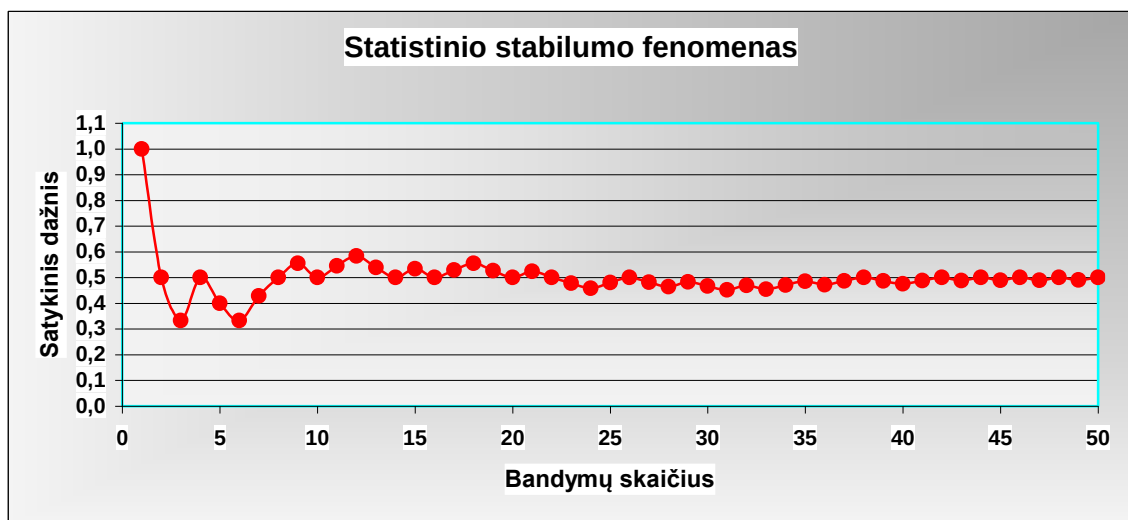
SPRENDIMAS. Eksperimentų duomenys surašomi į lenteles. Herbų pasirodymų skaičių paskaičiuojam panaudojant loginį sakinį **IF**.

Taškinę diagramą braižome meniu juostoje pasirinkus

Insert - Chart... - XY(Scatter)

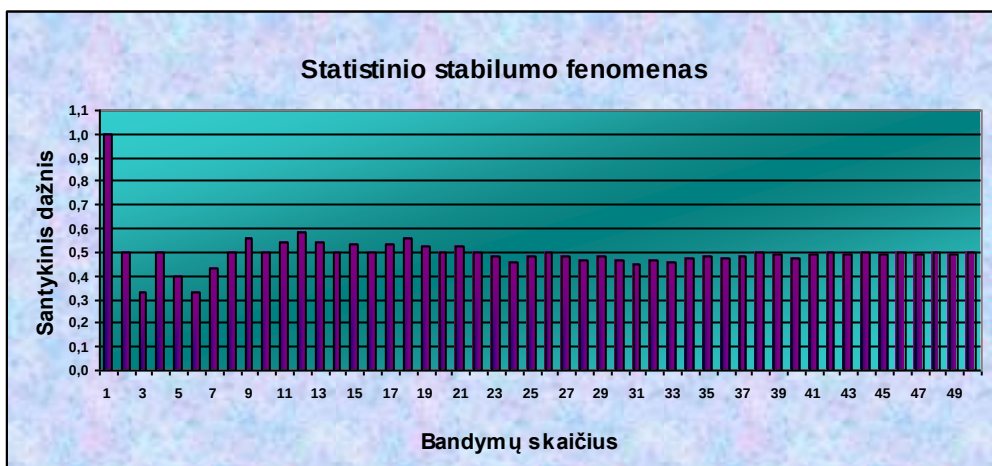
arba veiksmų juostoje paspaudę mygtuką  pasirenkam **XY(Scatter)** ir, pasirinkus tinkamiausią diagramos tipą, įvedam atitinkamus duomenis ir braižome taškinę diagramą.

Taškinė diagrama



Dabar braižysime stulpelinę diagramą. Meniu juostoje pasirenkame **Insert - Chart... - Column** arba veiksmų juostoje paspaudžiam mygtuką , pasirenkam **Column** ir, pasirinkus tinkamiausią diagramos tipą, įvedam atitinkamus duomenis ir braižome stulpelinę diagramą.

Stulpelinė diagrama



IŠVADA. Santykinis dažnis $n(H)/n$ turi tendenciją įgyti pastovią reikšmę, o santykio $n(H)/n$ riba egzistuoja ir apytiksliai lygi 0,5.

Klausimai ir užduotys

1. Ar galima iš anksto nusakyti konkretų stochastinio eksperimento rezultatą?
 - a) taip, jei stochastinio eksperimento baigčių skaičius yra baigtinis;
 - b) taip, jei stochastinio eksperimento baigčių skaičius yra begalinis;
 - c) ne, jei stochastinio eksperimento baigčių skaičius yra baigtinis;
 - d) taip, jei stochastinio eksperimento baigčių skaičius yra begalinis;
 - e) ne bet kuriuo atveju.
2. Ar galima nustatyti dėsningumą atsitiktinių reiškinių sekoje?
 - a) ne, jei stochastinių eksperimentų serija yra ilga;
 - b) taip, jei stochastinių eksperimentų serija yra ilga;
 - c) taip, jei stochastinių eksperimentų serija yra trumpa.
3. Didėjant stochastinių eksperimentų skaičiui n , rezultato (įvykio) A santykinis dažnis m/n turi tendenciją įgyti pastovią reikšmę. Ar tai reiškia, kad monetą metant 100 kartų, įvykis „100 kartų iškris herbas“ yra negalimas?
 - a) įvykis „100 kartų iškris herbas“ negali įvykti;
 - b) įvykis „100 kartų iškris herbas“ gali įvykti.
4. Suformuluokite statistinio stabilumo fenomeną.

2. TIKIMYBIŲ TEORIJS IR STATISTIKOS OBJEKTAS

1. Įvairiausiose praktinių ir teorinių tyrimų srityse dažnai sutinkami atvejai, kai eksperimentai arba stebėjimai, esant toms pačioms sąlygoms, gali būti pakartoti daugelį kartų.

Kiekvieną tokį kartą mes koncentruosime savo dėmesį į eksperimento (arba stebėjimo) rezultatą, išreikštą skaitine charakteristika.



Ivairiausiose srityse dažnai sutinkami atvejai, kai eksperimentai arba stebėjimai, esant toms pačioms sąlygoms, gali būti pakartoti daugelį kartų

2. Paprasčiausias stochastinio eksperimento pavyzdys – monetos metimas. Jo rezultatas aiškus – pasirodys arba herbas, arba skaičius. Jei herbo pasirodymą pažymėsime 1, o skaičiaus – 0, tai šio eksperimento rezultatus išreikšime skaičiais.

Santuokų ir ištuokų registravimas per metus valstybėje, apskrityje ar mieste – jau sudėtingesnio stochastinio eksperimento pavyzdys. Suskaičiavus santuokas ir ištuokas Lietuvoje, gauta, kad jų, pavyzdžiui, 1990-aisiais yra atitinkamai 36 310 ir 12 747, o po 10 metų, t.y. 2000-aisiais, – jau tik 16 906 ir 10 882. Šio eksperimento rezultatų dar po 10 metų, t.y. 2010-aisiais, aišku, negalima tiksliai nuspėti iš anksto, tačiau tendencijų prognozė yra svarbi.

3. Kiekviena stochastinių eksperimentų sekos rezultatų suvestinė sudaro *statistinių duomenų aibę*.

Pagrindinis statistikos objektas yra galimybių gauti patikimas išvadas statistinių duomenų pagrindu tyrimas ir metodų, leidžiančių pateikti šias išvadas, išplėtojimas. Šie metodai plėtojami, remiantis tikimybių teorija. Pagal ES klasifikatorių tikimybių teorija ir matematinė statistika yra priskiriami statistikai.

Kai kurie terminai apibrėžiami du kartus. Taip daroma Lietuvos standarto [5] pavyzdžiu, norint atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad

a) šių terminų **tikimybinių interpretacija** paremta teorinėmis konstrukcijomis, kurios nesusijusios su praktiniais taikymais;

b) šių terminų **statistinė interpretacija** paremta stebinio sąvoka, o terminų apibrėžimai yra taikomojo pobūdžio.

Klausimai ir užduotys

1. Koks yra tikimybių teorijos ir statistikos objektas?
 - a) galimybių gauti patikimas išvadas (statistinių duomenų pagrindu) tyrimas;
 - b) praktinių uždavinių sprendimas statistinių išvadų pagrindu.
2. Suformuluokite, kuo skiriasi terminų statistinė interpretacija nuo jų tikimybės interpretacijos?

3. DISKREČIOJI ELEMENTARIŲJŲ ĮVYKIŲ ERDVĖ (AIBĖ) IR JOS MATO SAVYBĖS. KLASIKINIS TIKIMYBĖS APIBRĖŽIMAS

1. Stochastinio eksperimento visų galimų rezultatų aibę Ω pavadinsime *elementariųjų įvykių erdve (aibe)*, o jos elementus ω_i – *elementariaisiais įvykiais* arba *elementariosiomis baigtimis*.

Išnagrinėkime kelis elementariųjų įvykių erdvės pavyzdžius.

1 PAVYZDYS. Stochastinio eksperimento, kurio metu vieną kartą metama moneta, elementariųjų įvykių erdvė yra $\Omega = \{H, S\}$, kur raide H pažymėtas herbo pasirodymas, o raide S – skaičiaus pasirodymas.

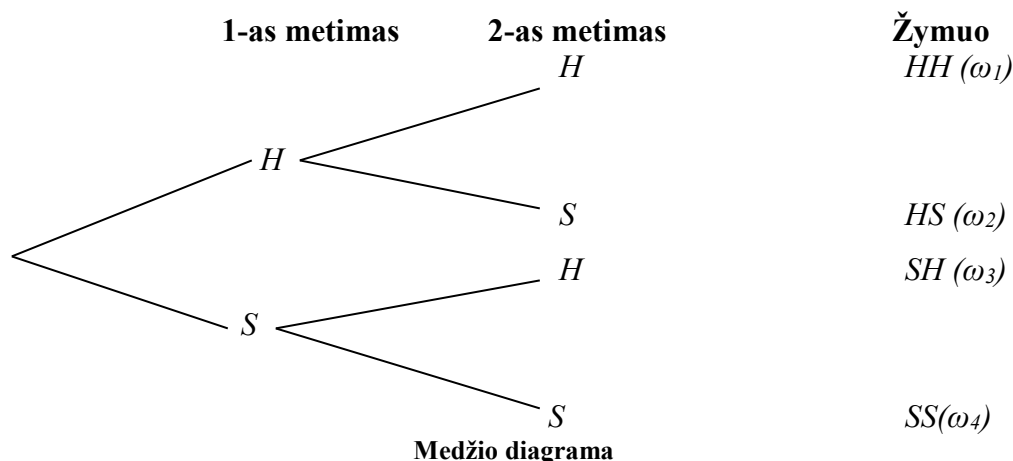
Jei eksperimento metu yra mėtomas lošimo kauliukas, tai

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2 PAVYZDYS. Atlikime kitą stochastinį eksperimentą – monetą meskime du kartus. Čia jau elementariųjų įvykių erdvė irgi yra kita:

$$\Omega = \{HH, HS, SH, SS\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

Šiuo atveju patogiu elementariusius įvykius ω_j vaizduoti *medžio diagrama*:



Išnagrinėtuose pavyzdžiuose Ω turėjo baigtinį elementų skaičių, t.y. elementariųjų įvykių aibė buvo baigtinė. Tačiau daugumoje statistikos uždavinių stochastinis eksperimentas turi be galo daug stebimų rezultatų. Išnagrinėsime porą tokių pavyzdžių.

3 PAVYZDYS. Atliekamas toks stochastinis eksperimentas – moneta metama iki herbo pirmojo pasirodymo. Tada $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\infty \}$, kur

$$\omega_n = S S \dots S H.$$

Čia elementarusis įvykis ω_n reiškia, kad herbas pirmą kartą pasirodys n -tojo metimo metu, o ω_∞ pažymėtas įvykis „herbas niekada nepasirodys“.

4 PAVYZDYS. Jonas ir Petras turi susitikti prie Vilniaus Katedros centrinio įėjimo laiko intervale $[T_1; T_2]$. Stochastinis eksperimentas yra toks: stebima, kada nurodytame intervale prie Katedros ateina Jonas ir kada – Petras. Tada

$$\Omega = \{ (x, y) \mid T_1 \leq x \leq T_2, T_1 \leq y \leq T_2 \}.$$

2. Įvykis, kuris būtinai įvyksta, atlikus stochastinį eksperimentą, vadinamas *būtinuoju įvykiu* ir žymimas Ω . Įvykis, apie kurį iš anksto žinoma, kad, atlikus stochastinį eksperimentą, jis neįvyks, vadinamas *negalimuoju įvykiu* ir žymimas $\emptyset$. Įvykis, kuris, atlikus stochastinį eksperimentą, gali įvykti, o gali ir neįvykti, vadinamas *atsitiktiniu įvykiu*.

Sakoma, kad *atsitiktinis įvykis* A įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta kuris nors iš elementariųjų įvykių, iš kurių sudaryta aibė A .

Aišku, kad atsitiktiniai įvykiai, susiję su nagrinėjamu stochastiniu eksperimentu, yra sudaryti iš erdvės Ω elementariųjų įvykių, t.y. yra aibės Ω poaibiai.



Įvykis, kuris, atlikus stochastinį eksperimentą, gali įvykti, o gali ir neįvykti, vadinamas atsitiktiniu įvykiu.

Dabar detaliau išnagrinėsime stochastinį eksperimentą su baigtine arba skaičiaja visų baigčių $\omega_1, \dots, \omega_i, \dots$ aibe Ω , t.y. $\Omega = \{ \omega_1, \dots, \omega_i, \dots \}$. Tokia aibė Ω vadinama **diskrečiąja elementariųjų įvykių erdve (aibe)**.

Tarkime, kad kiekvienam elementariajam įvykiui ω_i priskirtas “svoris” p_i (kurį pavadinsime elementariojo įvykio ω_i tikimybe) ir kad šie svoriai turi tokias savybes:

- 1) $p_i \geq 0$,
- 2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Tegu, be to, A - bet koks atsitiktinis įvykis, stebimas nagrinėjamame stochastiniame eksperimente, $A \subseteq \Omega$.

Apibrėžimas. Atsitiktinio įvykio A tikimybe $P(A)$ vadiname elementariųjų įvykių, sudarančių įvykį A , tikimybių sumą:

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i \quad (1)$$

3. Tokiu būdu įvesta tikimybė turi savybes, kurias suformuluosime kaip atskirą teoremą.

TEOREMA. Tegu Ω yra diskrečioji elementariųjų įvykių erdvė, kurioje tikimybė $P(A)$ yra apibrėžiama formule (1). Tada

- (a) $0 \leq P(A) \leq 1$,
- (b) $P(\Omega) = 1$,
- (c) jei $A \cap B = \emptyset$, $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$, tai $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Irodymas. Teoremos išvados (a) ir (b) yra elementarios, nes iš $\{p_i\}$ savybių 1) ir 2) gauname, kad

$$0 \leq P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

$$P(\Omega) = \sum_{i: \omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Kadangi $A \cap B = \emptyset$, tai

$$P(A \cup B) = \sum_{i: \omega_i \in A \cup B} p_i = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i + \sum_{i: \omega_i \in B} p_i = P(A) + P(B).$$

Teorema įrodyta.



Meteorologas: – Dėmesio, lietus!

(Tikimybės apibrėžimą galima siesti su įsitikinimo, kad įvykis įvyks, laipsniu. Kai įsitikinimo laipsnis didelis, tai tikimybė artima vienetui, todėl šįkart meteorologas tikrai neapsiriks!)

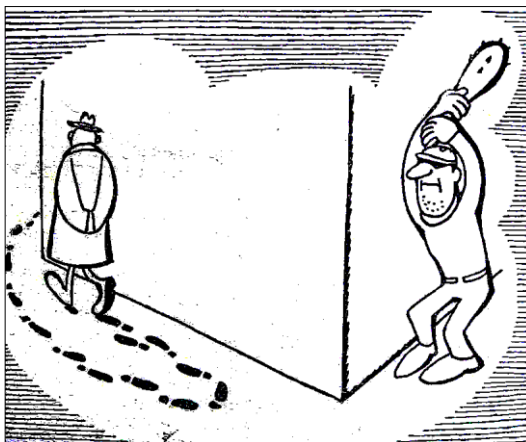
IŠVADA. $P(\emptyset)=0$,

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

Įrodymas trivialus, grindžiamas teoremos išvadomis (b) ir (c).

4. Diskrečiosios elementariųjų įvykių erdvės Ω poaibių $\{A\}$ funkcija $P(\cdot)$, turinti savybes (a), (b) ir (c), dar yra vadinama *tikimybinio matu*, o pats dvejetas (Ω, P) - diskrečiuoju tikimybiniu modeliu.

Šiame skyrelyje tikimybinis matas apibrėžtas teorinės konstrukcijos pagrindu ir matematiškai griežtai – kaip aibių funkcija. Koks gi šio apibrėžimo intuityvus pagrindimas? Ši tikimybės apibrėžimą galima siesti su įsitikinimo, kad įvykis įvyks, laipsniu. Kai įsitikinimo laipsnis didelis, pastebima standarte [5], tai tikimybė artima vienetui.



Būtinio įvykio tikimybė visada lygi 1, tačiau jei tikimybė atsitiktinio įvykio A lygi 1, tai šis įvykis A nebūtinai turi įvykti!

Tačiau, kaip matėme įvade, galimas kitoks tikimybės įvedimo būdas. Jis buvo grindžiamas statistinio stabilumo fenomenu, o įvykio tikimybė apibrėžiama kaip santykinio dažnio riba.

Taigi, tikimybę apibrėžti galima dviem būdais: kaip santykinio dažnio ribą ir kaip tikėtinumo laipsnį. Beje, pastarajam būdai priskirtinas ir taip vadinamas **klasikinis tikimybės apibrėžimas**.

Apibrėžimas. Jei stochastiniame eksperimente yra tik n vienodai galimų baigčių, t.y. jei diskrečioji elementariųjų įvykių erdvė sudaryta iš n vienodai galimų elementariųjų įvykių, tai įvykio A tikimybė vadinamas santykis

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

kur m – elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A , skaičius.

Kaip “teisingai” apibrėžti elementariųjų įvykių ω_i tikimybes p_i ? Šis uždavinys nepriklauso tikimybių teorijos sričiai. Nežinomų tikimybių įvertinimų metodai pagal stebėjimų rezultatus nagrinėjami matematinėje statistikoje.

5 PAVYZDYS. Stochastinis eksperimentas yra toks – metamas simetrinis kubiukas. Tada diskrečiąją elementariąją įvykių erdvę Ω natūralu apibrėžti, kaip jau matėme 1 pavyzdyje, taip:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\omega_i | \omega_i = i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Kadangi kubiukas yra simetrinis, tai kiekvienam elementariajam įvykiui $\omega_i = i$ priskirsime tikimybę $p_i = 1/6 (i = 1, 2, \dots, 6)$. Tai ir yra nagrinėjamo stochastinio eksperimento diskretusis tikimybinis modelis.

Tegu A yra įvykis, kuris reiškia, kad iškritęs skaičius dalijasi iš 3. Tada

$$A = \{\omega_3, \omega_6\},$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

6 PAVYZDYS. Išgirdusi per radiją redakcijos telefono numerį, Elena nutarė paskambinti. Pradėjusi rinkti numerį ji staiga suvokė, kad pamiršo du jo paskutiniuosius skaitmenis, tačiau prisiminė, kad jie yra skirtingi. Pasinaudodama šia informacija, Elena surinko numerį atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad ji surinko reikiamą telefono numerį?

SPRENDIMAS. Elementariųjų įvykių erdvė Ω – dviženkliai numeriai, tvarka svarbi, skaitmenys skirtingi. Akivaizdu, kad pirmoje pozicijoje galimi 10 variantų, antroje – 9 variantai:

$$n(\Omega) = 10 \cdot 9 = 90.$$

Aibė A – teisingas numeris, jis yra vienintelis:

$$m(A) = 1.$$

Todėl

$$P(A) = \frac{m(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{90}.$$

Klausimai ir užduotys

1. Kas yra atsitiktinio įvykio tikimybė?
 - a) skaičius tarp -1 ir 1;
 - b) baigtinė aibė;
 - c) atsitiktinis įvykis;
 - d) skaičius tarp 0 ir 1;
 - e) begalinė aibė.
2. Kas yra elementariųjų įvykių erdvė?
 - a) skaičius;
 - b) aibė;
 - c) atsitiktinis įvykis;

- d) vektorius.
3. Kas yra atsitiktinis įvykis?
- a) skaičius;
- b) bet kokia aibė;
- c) elementariųjų įvykių erdvės poaibis;
- d) elementariųjų įvykių erdvės elementas;
- e) vektorius.
4. Suformuluokite klasikinį tikimybės apibrėžimą.

4. KLASIKINIO TIKIMYBĖS APIBRĖŽIMO TAIKYMAS MERĖ UŽDAVINYJE. PASKALIO SPRENDIMAS

1. Matėme, kad klasikinis tikimybės apibrėžimas yra pagrįstas įvykių *vienodo galimumo*, arba *vienodo tikėtimumo* sąvoka. Jei, pavyzdžiui, loterijos prizų fonde yra 5 automobiliai ir 50 šaldytuvų, tai, aišku, išlošti šaldytuvą yra daugiau galimybių, negu automobilį.

Išnagrinėkime tokį stochastinį eksperimentą ir su juo susijusį uždavinį.

Merė (Ch. de Meray, XVII a.) uždavinys (žr. taip pat *J. Kubilius. Tikimybių teorija ir matematinė statistika. Vilnius, Mokslas, 1996*). Lošimo kubiukas metamas tris kartus, skaičiuojama iškritusių akučių suma. Kokia akučių suma dažniau iškris: 11 ar 12?

Merė hipotezė: vienodai dažnai.

Tačiau praktika rodė kitką, todėl Merė parašė Paskaliui ir pateikė jam savo skaičiavimus.

Merė sprendimas. 11 akučių sumą galima gauti šešiais skirtingais būdais: $6+4+1$, $6+3+2$, $5+5+1$, $5+4+2$, $5+3+3$, $4+4+3$. Tas pat dėl 12: $6+5+1$, $6+4+2$, $6+3+3$, $5+5+2$, $5+4+3$, $4+4+4$. Iš čia buvo daroma tokia išvada: sumų 11 ir 12 pasirodymo tikimybės yra lygios.

2. Paskalis nesutiko su šiuo sprendimu ir nurodė klaidą.

Paskalio atsakymas. **Merė nurodyti įvykiai nėra vienodai galimi**. Pvz., kombinacija $5+4+3$ pasirodo, kai turime rezultatus $(5,4,3)$, $(4,5,3)$, $(5,3,4)$, $(3,4,5)$, $(3,5,4)$, $(4,3,5)$, o kombinacija $4+4+4$ pasirodo tik vieną kartą.

Tai reiškia, kad Paskalis kombinacijas nagrinėjo ne kaip aibes, kuriose, kaip žinome, elementų tvarka yra nesvarbi, o kaip vektorius.

Paskalio sprendimas. Pažymėkime

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\},$$

kur ω_i yra i -tojo metimo kubiuko akučių skaičius. Tada iš viso elementariųjų įvykių yra $n = 6^3 = 216$ ir, kas ypač svarbu pabrėžti, visi jie yra vienodai galimi.

Tarp jų palankių pirmajam įvykiui (t.y. akučių suma lygi 11) elementariųjų įvykių yra 27:

$$\begin{aligned} &(6,4,1), (6,3,2), (6,2,3), (6,1,4), (5,5,1), (5,4,2), \\ &(5,3,3), (5,2,4), (5,1,5), (4,6,1), (4,5,2), (4,4,3), \\ &(4,3,4), (4,2,5), (4,1,6), (3,6,2), (3,5,3), (3,4,4), \\ &(3,3,5), (3,2,6), (2,6,3), (2,5,4), (2,4,5), (2,3,6), \\ &(1,6,4), (1,5,5), (1,4,6). \end{aligned}$$

Analogiškai, yra 25 elementarūs įvykiai, palankūs antrajam įvykiui (t.y. akučių suma lygi 12).

Pagal klasikinę tikimybės apibrėžimą, atitinkamos pirmojo ir antrojo įvykių tikimybės yra $\frac{27}{216}$ ir $\frac{25}{216}$. Tai reiškia, kad sumų 11 ir 12 pasirodymo tikimybės nėra lygios.

PAVYZDYS. Iš dėžės, kurioje yra 5 raudoni rutuliai ir 30 žalių, atsitiktinai išimti 3 rutuliai. Kokia tikimybė, kad jie visi yra žali?

1 SPRENDIMO BŪDAS. Sekdami Paskalio pavyzdžiu, kuris kombinacijas nagrinėjo ne kaip aibes, kuriose elementų tvarka yra nesvarbi, o kaip vektorius, kurių elementų tvarka yra svarbi. Tada elementariųjų įvykių erdvė Ω - rutulių trejetai, tvarka svarbi. Tada pirmoje šio trejeto pozicijoje gali atsidurti bet kuris 35 rutulių. Tarkime, kad taip ir atsitiko, t.y. pirmoje pozicijoje atsirado vienas rutulys. Tada antrojoje pozicijoje gali atsidurti bet kuris iš likusių 34 rutulių, o, analogiškai, trečiojoje – bet kuris iš likusių 33. Todėl elementariųjų įvykių erdvės Ω elementų skaičius $n(\Omega)$ apibūdinamas taip:

$$n(\Omega) = 35 \cdot 34 \cdot 33 = 39270.$$

Tegul A – žalių rutulių trejetų (kuriuose, aišku, elementų tvarka yra svarbi) aibė, o $m(A)$ yra šios aibės elementų skaičius. Tada

$$m(A) = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360, \quad P(A) = \frac{m(A)}{n(\Omega)} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{4 \cdot 29}{11 \cdot 17} = \frac{116}{187}.$$

Taigi, tikimybė ištraukti tris žalius rutulius mūsų stochastiniame eksperimente yra 116/187.

2 SPRENDIMO BŪDAS. Elementariųjų įvykių erdvės Ω pasirinkimas yra, kaip sakoma, procedūra tipo „freedom of choice“ (pasirinkimo laisvė). Tačiau, aišku, pasirinkimo laisvės procedūra netaikytina aibei A dėl labai paprastos priežasties – ši aibė A turi būti elementariųjų įvykių

erdvės poaibis. Taigi, dabar nagrinėsime sprendimo būdą, kurį sąlyginai galima pavadinti „tvarka nesvarbi“.

Tegu elementariųjų įvykių erdvė Ω' - aibių po tris rutulius komplektai, kuriuose tvarka nesvarbi. Tada

$$n(\Omega') = C_{35}^3 = 6545.$$

Tegu A' - atsitiktinis įvykis, kad trijų išimtų rutulių aibę sudaro tik žalios spalvos rutuliai. Tada

$$m(A') = C_{30}^3 = 4060, \quad P(A') = \frac{m(A')}{n(\Omega')} = \frac{4060}{6545} = \frac{116}{187}.$$

Atsakymą gavome, kaip ir reikėjo tikėtis, tą patį: tikimybė ištraukti tris žalius rutulius mūsų stochastiniame eksperimente yra 116/187.

Klausimai ir užduotys

1. Kodėl Merė sprendimas buvo klaidingas?
 - a) blogai apibrėžta elementariųjų įvykių erdvė;
 - b) elementarieji įvykiai nebuvo vienodai galimi;
 - c) klaidingai gautas elementariųjų įvykių erdvės elementų skaičius;
 - d) klaidingai gautas palankių elementariųjų įvykių elementų skaičius.
2. Kuo skiriasi *vienodo tikėtinumo* ir *vienodo galimumo* sąvokos ir ką jos reiškia?

5. KLASIKINIO METODO TAIKYMAI

Jei stochastiniame eksperimente yra tik n vienodai galimų baigčių, t.y. jei diskrečioji elementariųjų įvykių erdvė sudaryta iš n vienodai galimų elementariųjų įvykių, tai įvykio A tikimybė pagal klasikinę tikimybės apibrėžimą pavadiname santykį $P(A) = m/n$, kur m – elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A , skaičius.

Šitokios stochastinių eksperimentų su baigtiniu skaičiumi baigčių schemas, grindžiamos vienodo galimumo principu, teigiančiu, visos eksperimento baigtys yra vienodai galimos, dar yra vadinamos *klasikinėmis schemomis*, o metodas, kuriuo sudaromas tokios schemas matematinis modelis, – *klasikiniu metodu*.

Klasikinės schemas postulatai (**postulatas** – *sprendimas, kuris nėra savaime akivaizdus, bet vis dėlto priimamas pradiniu teiginiu be įrodymo; prielaida*):

- elementariųjų įvykių erdvė $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ yra baigtinė;

- elementarieji įvykiai yra vienodai galimi (vienodai tikėtini):

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = 1/n.$$

Panagrinėsime klasikinio metodo taikymą pavyzdžius. Uždavinių sąlygos paimtos iš R. Razmos, J. Teišerskio, V. Vitkaus „Matematikos uždavinyno“ [13].

1 PAVYZDYS. Kortelėse surašyti sveikieji skaičiai nuo 1 iki 20 imtinai. Atsitiktinai ištrauktos dvi kortelės. Kokia tikimybė, kad jose parašytų skaičių suma lygi 10?

SPRENDIMAS. Elementariųjų įvykių erdvė Ω – kortelių poros, kortelių tvarka poroje yra svarbi. Pirmoje pozicijoje galimi 20 variantų, antroje - viena mažiau (nes pirmoje pozicijoje jau yra viena kortelė). Todėl:

$$n(\Omega) = 20 \cdot 19 = 380.$$

Aibė A - kortelių poros (tvarka svarbi), kurių skaičių suma lygi 10:

$$A = \{(1,9), (9,1), (2,8), (8,2), (3,7), (7,3), (4,6), (6,4)\}.$$

Taigi, $m(A) = 8, \quad P(A) = \frac{m(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{380} = \frac{2}{95}.$

2 PAVYZDYS. Iš 30 egzamino bilietų klausimų moksleivis išmoko 25. Kokia tikimybė, kad jis ištrauks bilietą, kurio abu klausimus bus išmokęs?



Pataria išmokti ne 25, o visus 30 egzamino bilietų klausimų!

1 SPRENDIMO BŪDAS (tvarka svarbi). Elementariųjų įvykių erdvė Ω – klausimų poros, kuriuose tvarka yra svarbi. Tada

$$n(\Omega) = 30 \cdot 29 = 870.$$

Tegul A – atsitiktinis įvykis, kad moksleivis ištrauks klausimų porą (tvarka svarbi), kurią jis išmoko. Tada $m(A) = 25 \cdot 24 = 600$, $P(A) = \frac{m(A)}{n(\Omega)} = \frac{600}{870} = \frac{20}{29}$.

2 SPRENDIMO BŪDAS (tvarka nesvarbi). Elementariųjų įvykių erdvė Ω' – klausimų poros, kuriose tvarka yra nesvarbi. Tada $n(\Omega') = C_{30}^2 = \frac{870}{2} = 435$.

Tegul A' – atsitiktinis įvykis, kad moksleivis ištrauks bilietą, kurio klausimus yra išmokęs. Tada:

$$m(A') = C_{25}^2 = 300, \quad P(A') = \frac{m(A')}{n(\Omega')} = \frac{300}{435} = \frac{20}{29}.$$

3 PAVYZDYS. Atsitiktinai pasirenkama viena žodžio *matematika* raidė. Kokia tikimybė, kad ji bus a ?

SPRENDIMAS. Elementariųjų įvykių erdvę Ω apibrėžkime taip:

$$\Omega = \{m_1, a_1, t_1, e, m_2, a_2, t_2, i, k, a_3\}.$$

Pastebime, kad $n(\Omega) = 10$. Tegul A - atsitiktinis įvykis, kad ištrauktoji raidė yra a . Tada $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

$$\text{Taigi } P(A) = \frac{m(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

4 PAVYZDYS. Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, ištrauktos 6 kortos. Kokia tikimybė, kad

- tarp jų bus vienas tūzas?
- tarp jų bus bent vienas tūzas?
- tarp jų bus du tūzai?

SPRENDIMAS. Elementariųjų įvykių erdvė Ω – aibė komplektų po 6 kortas, kuriuose tvarka nesvarbi. Kadangi skaičius C_{36}^6 nusako, kiek aibė iš 36 elementų turi poaibių po 6 elementus, tai $n(\Omega) = C_{36}^6$.

Kokia tikimybė atsitiktinio įvykio A , kad ištrauktame komplekte bus lygiai vienas tūzas? Tai klausimas, kurį būtina patikslinti. Kokia tikimybė atsitiktinio įvykio A , kad ištrauktame komplekte bus vienas tūzas ir penki ne tūzai? Kadangi tūzų 4, o ne tūzų 32, tai $n(A) = C_4^1 \cdot C_{32}^5$.

Tada

$$P(A) = \frac{m(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^5}{C_{36}^6}.$$

Pereiname prie sekančio klausimo. Kokia tikimybė atsitiktinio įvykio B , kad ištrauktame komplekte bus bent vienas tūzas? Tokio tipo uždaviniuose su žodeliu *bent* dažnai patogiausia pradėti nuo priešingo įvykio tikimybės paieškos. Aišku, kad šis priešingas atsitiktiniam įvykiui B įvykis $\bar{B}$ – tai atsitiktinis įvykis, kad ištrauktame komplekte nebus nei vieno tūzo. Kadangi be tūzų yra 32 kortos, tai

$$m(\bar{B}) = C_{32}^6, \quad P(B) = 1 - \frac{C_{32}^6}{C_{36}^6}.$$

Pagaliau, pereiname prie paskutinio klausimo. Kokia tikimybė atsitiktinio įvykio C , kad ištrauktame komplekte bus lygiai du tūzai? Tiksliname: kokia tikimybė atsitiktinio įvykio C , kad ištrauktame komplekte bus du tūzai ir keturi ne tūzai? Akivaizdu, kad:

$$m(C) = C_4^2 \cdot C_{32}^4, \quad P(C) = \frac{m(C)}{n(\Omega)} = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^4}{C_{36}^6}.$$

Klausimai ir užduotys

Prieš varžybas dviratininkai gauna dviženklus numerius. Numeris, kuriame pasitaiko aštuonetas, skaitomas nelaimingu, nes jis panašus į sulamdytą dviračio ratą, dar vadinamą „aštuoniuke“. Reikia apskaičiuoti tikimybę įvykio gauti nelaimingą numerį. Tuo tikslu –

1. Apibrėžkite elementariųjų įvykių erdvę Ω ir nustatykite jos elementų skaičių n :

a) Ω - visi dviženkliai skaičiai: $\Omega = \{10, 11, 12, 13, \dots, 19, 21, 22, \dots, 99\}$, $n = 9 \cdot 10 = 90$;

b) Ω - visi dviženkliai numeriai: $\Omega = \{01, 02, \dots, 09, 10, 11, 12, 13, \dots, 19, 21, 22, \dots, 99\}$, $n = 10 \cdot 10 - 1 = 99$ (numerio 00 nebūna!).

2. Apibrėžkite nelaimingų elementariųjų įvykių aibę A ir nustatykite jos elementų skaičių m :

a) A – visi dviženkliai numeriai, turintys aštuntuką, $A = \{08, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89\}$, $m = 10 + 10 = 20$;

b) A – visi dviženkliai numeriai, turintys aštuntuką, $A = \{08, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89\}$, $m = 10 + 9 = 19$;

c) A – visi dviženkliai skaičiai, turintys aštuntuką, $A = \{18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89\}$, $m = 9 + 9 = 18$.

3. Pritaikykite klasikinį metodą ieškomajai tikimybei $P(A)$ apskaičiuoti:

a) $P(A)=18/90=1/5=0,2$;

b) $P(A)=20/99$;

c) $P(A)=19/99$.

6. GEOMETRINĖS TIKIMYBĖS. SUSITIKIMO UŽDAVINYS

1. Jau pačioje tikimybių teorijos vystymosi pradžioje buvo paskelbti klasikinio tikimybės apibrėžimo trūkumai. Tai, visų pirma, nagrinėjamos diskrečiosios elementariųjų įvykių erdvės elementų skaičius n turi būti baigtinis. O kaip nagrinėti tuos atvejus, kai elementariųjų įvykių be galo daug?

Pirmasis žingsnis šia linkme – geometrinės tikimybės sąvokos įvedimas. Jis taip pat grindžiamas įvykių *vienodo galimumo* arba *vienodo tikėtimumo* principu.

Klasikinio tikimybės apibrėžimo išplėtimas vyksta taip. Tegu, pavyzdžiui, plokštumoje turime sritį G su plotu $mes\ G$, kurioje patalpinta kita sritis g su plotu $mes\ g$. Į sritį G atsitiktinai metamas taškas ir klausiama, kam lygi tikimybė įvykio, kad taškas pateks į sritį g .

2. Sąvokai “į sritį G atsitiktinai metamas taškas” suteikiama tokia prasmė:

- mestas taškas gali pataikyti į bet kurią srities G tašką;
- tikimybė pataikyti į kokią nors srities G dalį g proporcinga šiam plotui ir nepriklauso nuo jos padėties ir formos.

Tai reiškia, kad taško pataikymo į sritį g tikimybė p apibrėžiama taip:

$$p = \frac{mes\ g}{mes\ G}.$$

4. Išnagrinėsime pavyzdį – susitikimo uždavinį.

SUSITIKIMO UŽDAVINYS. Marytė ir Petriukas susitarė susitikti kavinėje tarp 9 ir 10 valandos vakaro. Kiekvienas, atėjęs į kavinę, laukia kito 15 minučių, o po to išeina. Apskaičiuoti tikimybę tokių įvykių: 1) Marytė ir Petriukas susitiko;

2) Marytė ir Petriukas ateis vienu metu.



*Susitikimo ažiavimas:
– Atleiskite, ar čia neužima?*

SPRENDIMAS. *Atvejis 1).* Pastebime, kad

$$G = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 60, \quad 0 \leq v \leq 60\}$$

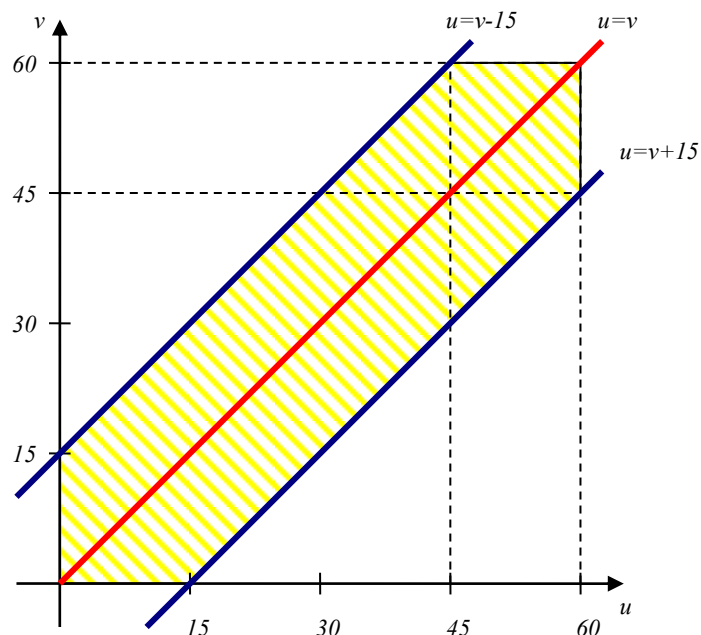
$$g = \{(u, v) \mid |u - v| \leq 15, \quad 0 \leq u \leq 60, \quad 0 \leq v \leq 60\}$$

$$\text{mes } G = 60^2,$$

$$\text{mes } g = 60^2 - 45^2 = 60^2 \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right) = \frac{7}{16} \cdot 60^2$$

$$P(g) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G} = \frac{7}{16}$$

Piešinyje tai galima pavaizduoti taip:



Atvejis 2). Šiuo atveju sritis g , kuria išreiškiama Jono ir Petro atėjimo vienu metu aibė, yra atkarpa:

$$g = \{(u, v) \mid u = v, 0 \leq u \leq 60, 0 \leq v \leq 60\}.$$

Kadangi $\text{mes } g = 0$, tai antruoju atveju

$$P(g) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G} = \frac{0}{\text{mes } G} = 0.$$

Klausimai ir užduotys

1. Dėl kokio klasikinio tikimybės apibrėžimo trūkumo yra naudinga įvesti geometrinės tikimybės apibrėžimą:

a) klasikiniame tikimybės apibrėžime elementariųjų įvykių erdvės elementų skaičius n turi būti baigtinis;

b) klasikiniame tikimybės apibrėžime elementariųjų įvykių erdvės elementų skaičius n turi būti begalinis.

2. Kokiu principu grindžiamas geometrinės tikimybės sąvokos įvedimas:

a) statistinio stabilumo fenomenu;

b) tikimybinės interpretacijos principu;

c) vienodo tikėtumo principu.

3. Apibrėžkite sąvoką “į sritį G atsitiktinai metamas taškas” ir pateikite geometrinės tikimybės apibrėžimą.

7. TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR STATISTIKOS AKSIOMŲ SISTEMA (KOLMOGOROVO). TIKIMYBINĖ ERDVĖ

1. Pagal tarptautinių žodžių žodyną,

aksioma - tai pradinis išeities teiginys, sudarantis kitų teiginių (teoremų) įrodymų pagrindą mokslinėje teorijoje, kurios ribose priimamas be įrodymo.

Vaizdžiai kalbant, *aksiomų sistema* – tai nagrinėjamos teorijos fundamentas. Šiame skyrelyje išnagrinėsime tikimybių teorijos (o tuo pačiu ir statistikos) fundamentą, ant kurio ir yra statomas didžiulis statistikos rūmas.



Akademikas Andrejus Kolmogorovas (1903-1987) – šiuolaikinės matematikos klasikas

Nagrinėjimui pasirinksimė bet koki stochastinį eksperimentą. Tegu Ω - šio stochastinio eksperimento *elementariųjų įvykių erdvė*. Tarkime, kad Ω poaibių sistema F yra σ -algebra. Tai reiškia, kad

$$(F1) \quad \Omega \in F;$$

$$(F2) \quad \text{Jei } A \in F, \text{ tai } \bar{A} = \Omega \setminus A \in F;$$

$$(F3) \quad \text{Jei } A_i \in F, i = 1, 2, \dots, \text{ tai ir } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F.$$

Aibės iš F vadinamos *atsitiktiniais įvykiais*, o dvejetas (Ω, F) *mačiąja erdve*:

Apibrėžimas. *Jei Ω yra bet kokia aibė, o F – bet kokia jos poaibių σ -algebra, tai dvejetas (Ω, F) vadinamas mačiąja erdve.*

Jau pats šios erdvės pavadinimas sufleruoja, kad viskas paruošta tikimybinio mato sąvokos įvedimui.

Apibrėžimas. Funkcija P , apibrėžta σ -algebroje F ir įgyjanti reikšmes iš intervalo $[0;1]$, vadinama **tikimybinio matu** mačiojoje erdvėje (Ω, F) , jei:

$$(P1) \quad P(A) \geq 0 \quad \forall A \in F;$$

$$(P2) \quad P(\Omega) = 1;$$

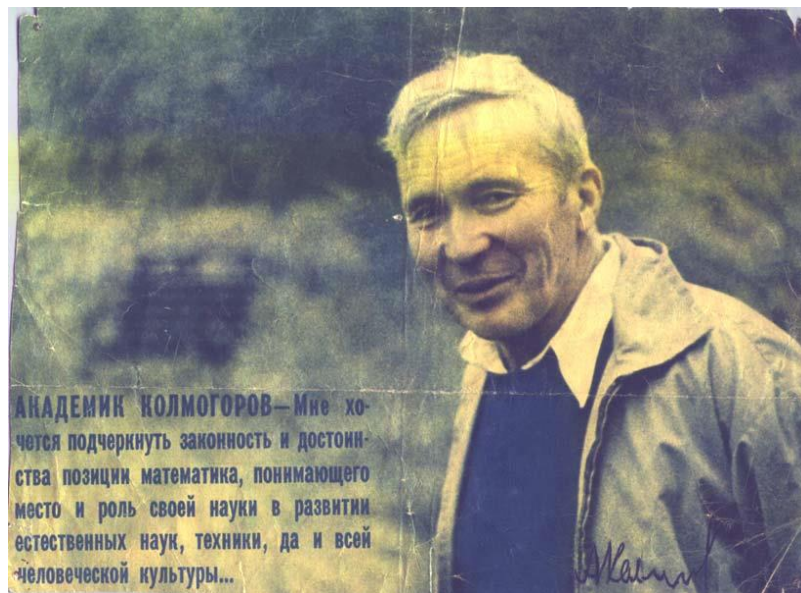
$$(P3) \quad \forall A_i \in F \text{ tokiems, kad } A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j),$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

2. Šioje erdvėje (Ω, F) kiekvienam atsitiktiniam įvykiui A (t.y. aibei iš klasės F) priskirsime skaičių $P(A)$, kuris vadinamas *atsitiktinio įvykio A tikimybe*, taip, kad būtų patenkintos sąlygos (P1), (P2) ir (P3).

Apibrėžimas. Teiginiai (F1), (F2), (F3) ir (P1), (P2), (P3) vadinami *tikimybių teorijos ir statistikos aksiomų sistema*.

Tokiu pavidalu šią sistemą pirmasis suformulavo rusų matematikas A.N. Kolmogorovas, todėl dažnai ji vadinama *Kolmogorovo aksiomų sistema*.



Tikimybių teorijos ir statistikos aksiomų sistemos tėvas – A. Kolmogorovas (žurnalo „Ogoniok“ puslapio nuotrauka iš interneto svetainės

<http://www.pms.ru/images/kolmogorov-ogonek.jpg>)

Aksiomos (P1) ir P(3) reiškia, kad funkcija $P(\cdot)$, apibrėžta σ -algebroje F , yra *matas*. Kadangi šis matas tenkina dar vieną sąlygą – sąlygą (P2), - tai jis vadinamas *normuotu* (arba *tikimybiniu*) matu.

Apibrėžimas. Trejetas (Ω, F, P) , kuriame F pažymėta aibės Ω poaibių sistemos σ -algebra, o $P(\cdot)$ - tikimybinis matas σ -algebroje F , yra vadinamas *tikimybine erdve*. Be to, σ -algebros F elementai vadinami *atsitiktiniais įvykiais*.

3. Išnagrinėkime paprasčiausias tikimybinio mato savybes.

1 TEOREMA. Tegu A ir B – atsitiktiniai įvykiai, t.y. $A \in F$ ir $B \in F$. Tegu, be to, $A \subset B$. Tada

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A). \quad (1)$$

Įrodymas. Pagal tikimybinės erdvės apibrėžimą matas $P(\cdot)$ yra apibrėžtas tik σ -algebroje F , todėl pirmiausia reikia įrodyti, kad $B \setminus A \in F$. Tuo tikslu pastebėsime, kad $B \setminus A = \bar{A} \cap B$. Pagal aksiomą (F2) turime, kad $\bar{A} \in F$. Įrodysime, kad dviejų σ -algebros F elementų (mūsų atveju tai aibės $\bar{A}$ ir B) sankirta vėl priklauso F . Pagal de Morgano dėsnį,

$$\begin{aligned} \overline{\bar{A} \cap B} &= \overline{\bar{A}} \cup \bar{B}, \\ \bar{A} \cap B &= \overline{\overline{\bar{A} \cap B}} = \overline{A \cup \bar{B}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Pagal aksiomą (F2) $\bar{B} \in F$, todėl pagal aksiomą (F3) $A \cup \bar{B} \in F$. Tada vėl pasinaudoję aksioma (F2) gauname, kad $\overline{A \cup \bar{B}} \in F$. Iš čia ir iš (2) turime, kad $\bar{A} \cap B \in F$. O tai reiškia, kad

$$B \setminus A = \bar{A} \cap B \in F.$$

Toliau, kadangi $A \subset B$, tai

$$B = A \cup (B \setminus A), \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Pagal aksiomą (P3) iš čia gauname, kad

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Teorema įrodyta.

4. Pateiksime kai kurias šios teoremos išvadas.

1 IŠVADA. *Priešingojo įvykiui A įvykio $\bar{A}$ tikimybė yra $1-P(A)$, t.y.*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Įrodymas akivaizdus – formulėje (1) pakanka paimti $B = \Omega$.

2 IŠVADA. *Negalimo įvykio $\emptyset$ tikimybė yra lygi nuliui, t.y.*

$$P(\emptyset) = 0.$$

Norint įsitikinti šios išvados teisingumu, formulėje (1) pakanka paimti $B = A$.

3 IŠVADA. *Jei $A \subset B$, tai $P(A) \leq P(B)$.*

Įrodymas. Iš tiesų, pagal aksiomą (P1), $P(B \setminus A) \geq 0$. Pasinaudoję (1) iš čia gauname, kad

$$P(B) - P(A) \geq 0, \text{ t.y. } P(A) \leq P(B).$$

Išvada pilnai įrodyta.

Pastarojoje formulėje paėmę $B = \Omega$, iš aksiomos (P2) gauname tokį teiginį:

4 IŠVADA. *Jei A yra atsitiktinis įvykis, t.y. $A \in F$, tai $P(A) \leq 1$.*

5. Skyrelio pabaigoje suformuluosime ir įrodysime taip vadinamą įvykių *sumos teoremą*.

2 TEOREMA. *Tegu $A \in F$ ir $B \in F$. Tada*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Įrodymas. Pagal aksiomą (F3), $A \cup B \in F$. Be to, kadangi σ -algebra yra uždara pjūvio operacijos atžvilgiu, tai ir $A \cap B \in F$. Taigi, yra prasmė kalbėti apie šių aibių matus $P(A \cup B)$ ir $P(A \cap B)$.

Pastebėsime, kad aibę $A \cup B$ galima suskaidyti į trijų nesikertančių aibių sumą:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

Todėl iš aksiomos (P3) ir teoremos 1 gauname, kad

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(A \setminus (A \cap B)) + P(B \setminus (A \cap B)) = \\ &= P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Teorema įrodyta.

Klausimai ir užduotys

1. Kuriame amžiuje A. Kolmogorovas sukūrė savo aksiomų sistemą:
a) XIX a.; b) XX a.; c) XXI a.
2. Kelios aksiomos sudaro Kolmogorovo aksiomų sistemą?
a) šešios; b) trys; c) keturios.
3. Suformuluokite Kolmogorovo aksiomų sistemą.
4. Suformuluokite ir įrodykite teoremą apie dviejų atsitiktinių įvykių sumą.

8. SĄLYGINIŲ TIKIMYBIŲ EMPIRINIS SUVOKIMAS, APIBRĖŽIMAS IR PAVYZDŽIAI

1. Jei norime apskaičiuoti tikimybę įvykio, apie kurį turima papildomos informacijos, paprastai susiduriame su sąlyginėmis tikimybėmis.

Tarkime, pavyzdžiui, kad kasmet apie 20% dienų metuose Helsinkyje sninga. Tai reiškia, kad jei mes atsitiktinai pasirinktume kalendorinę dieną metuose, tai tikimybė, kad tą dieną snigs, yra 0,2.

Dabar tarkime, kad atsitiktinai pasirinkta diena priklauso žiemos periodui. Turėdami šią papildomą informaciją (papildomą sąlygą), mes galime tvirtinti, kad tikimybė, jog šią dieną snigs, yra žymiai didesnė.

Analogiškai, jei žinoma, kad atsitiktinai pasirinkta diena priklauso vasaros periodui, tai galime tvirtinti, kad tikimybė, jog tokią dieną snigs, ≈ 0 .

2. Abiem atvejais papildoma informacija apie metų laiką leidžia mums ženkliai patikslinti tikimybę, kad tą metų laiko dieną snigs, skaičiavimus. Išnagrinėsime dar kelis pavyzdžius.

1 PAVYZDYS. Tarkime, kad sporto klube yra 35 nariai, iš kurių 20 yra suaugę ir 15 paaugliai. Tarp suaugusių yra 8 krepšininkai, tarp paauglių – 5 krepšininkai. Tai galima pavaizduoti lentele taip:

	Suaugęs	Paauglys	Viso
Krepšininkas	8	5	13
Nežaidžia krepšinio	12	10	22
Viso	20	15	35

Tarkime, kad atsitiktinai pasirinktas asmuo yra krepšinio žaidėjas, t.y. krepšininkas. Turint šią informaciją, mums reikia apskaičiuoti tikimybę įvykio, kad šis atsitiktinai pasirinktas asmuo yra suaugęs.

SPRENDIMAS. Pažymėkime šiuos įvykius raidėmis:

A : asmuo yra suaugęs; B : asmuo yra krepšininkas.

Simboliu $P(A|B)$ priimta žymėti “tikimybę įvykio A , kai yra įvykęs įvykis B ” arba “įvykio A tikimybė su sąlyga B ”.

Mūsų pavyzdyje ši sąlyga reiškia, kad pasirinktasis asmuo yra krepšininkas, o jų yra 13. Iš jų tik 8 – suaugę (žr. lentelę). Todėl

$$P(A|B) = \frac{8}{13} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}, \quad (1)$$

kur $n(A)$, kaip paprastai, žymimas aibės A elementų skaičius. Perrašome formulę (1):

$$P(A|B) = \frac{8/35}{13/35} = \frac{n(A \cap B)/n(\Omega)}{n(B)/n(\Omega)}.$$

O kadangi

$$\frac{n(A \cap B)/n(\Omega)}{n(B)/n(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

tai $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.

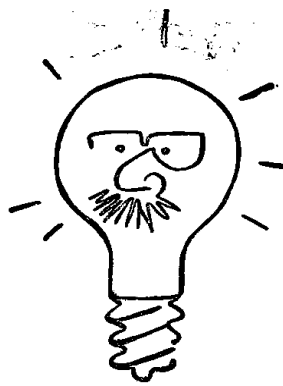
Apibrėžimas. Tikimybė įvykio A su sąlyga B apibrėžiama taip:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ jei } P(B) \neq 0.$$

$P(A|B)$ neapibrėžta, jei $P(B) = 0$.

3. Pratęsime pavyzdžių nagrinėjimą.

2 PAVYZDYS. Yra žinoma, kad tikimybė įvykio, jog elektros lemputė tarnaus virš 100 valandų, yra 0,7, o tikimybė įvykio, kad lemputė degs virš 150 valandų, yra 0,28. Žinoma, kad lemputė degė virš 100 val. Kokia tikimybė įvykio, kad elektros lemputė tarnaus virš 150 valandų.



*Kokia tikimybė įvykio, kad tarnausiu virš 150 valandų,
jei žinau, kad jau degiau virš 100 val.?*

SPRENDIMAS. Tegu L_{100} – įvykis, kad lemputė tarnaus virš 100 val., o L_{150} – virš 150 valandų. Tada

$$P(L_{150}|L_{100}) = \frac{P(L_{150} \cap L_{100})}{P(L_{100})} = \frac{P(L_{150})}{P(L_{100})} = \frac{0,28}{0,7} = 0,4.$$

3 PAVYZDYS. Individas yra atsitiktinai parenkamas iš 52 atletų grupės. Šioje grupėje yra 26 moterys ir 6 iš jų plaukikės. Tarp vyrų yra 10 plaukikų. Užduotis tokia:

(A) Žinant, kad atsitiktinai parinktas individas yra moteris, apskaičiuoti tikimybę, kad ji yra plaukikė.

(B) Žinant, kad atsitiktinai parinktas individas yra plaukikas, apskaičiuoti tikimybę, kad jis yra vyras.

SPRENDIMAS. Sudarome lentelę:

	Moterys	Vyrai	Viso
Plaukikai	6	10	16
Neplaukia	20	16	36
Viso	26	26	52

Pažymėkime šiuos atsitiktinius įvykius:

B – asmuo yra moteris,

A – asmuo yra plaukikas.

Pastebime, kad atveju (A):

$$P(AB) = \frac{6}{52}; \quad P(B) = \frac{26}{52}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{6 \cdot 52}{52 \cdot 26} = \frac{3}{13}.$$

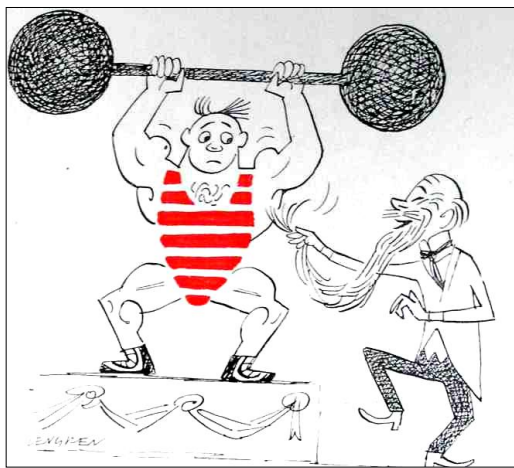
Skaiciavimus galima buvo atlikti ir tiesiogiai:

$$P(A|B) = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}.$$

Atveju (B) raide C pažymėkime įvykį, kad asmuo yra plaukikas, o raide D - kad asmuo yra vyras.

Tada

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)},$$



Šis atletas nėra plaukikas, o tikimybė, kad jis neišlaikys stangą, nėra lygi nuliui

$$P(C) = \frac{16}{52}; \quad P(D \cap C) = \frac{10}{52}; \quad P(D|C) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

Klausimai ir užduotys

1. Ar sąlyginė tikimybė yra: (a) sąlyga; (b) asmuo; (c) skaičius, nelygus nuliui; (d) neneigiamas skaičius, mažesnis už 1; (e) neneigiamas skaičius, nedidesnis už 1; (f) sąlyginis įvykis.
2. Studentas neturi supratimo apie sąlygines tikimybes. Su kokia tikimybe jis atspės 1 klausimą: (a) 1/4; (b) 1/5; (c) 1/6; (d) 1/7; (e) 5/1; (f) 2/3.
3. Kokio įvykio tikimybė yra didžiausia: A - įvykis, kad lemputė degs virš 140 valandų; B - įvykis, kad lemputė degs virš 140 valandų, jei yra žinoma, kad ji jau degė virš 100 valandų; C - įvykis, kad lemputė degs virš 150 valandų, jei yra žinoma, kad ji jau degė virš 100 valandų.
4. Pateikite sąlyginės tikimybės apibrėžimą ir savais žodžiais paaiškinkite, kaip jį suprantate.

9. TIKIMYBIŲ DAUGYBOS TEOREMA IR JOS TAIKYMO PAVYZDYS. PILNOS TIKIMYBĖS FORMULĖ. BAJESO FORMULĖ

1 TEOREMA (Daugybės formulė). Jei $P(A) > 0$ ir $P(B) > 0$, tai

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

Irodymas akivaizdus ir betarpiškai seka iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo.

PAVYZDYS. Tikimybė, kad akcijos fondų biržoje kils pirmadienį, yra 0,6. Tikimybė, kad jų kursas kils antradienį, jei kilo pirmadienį, yra 0,3. Apskaičiuokite tikimybę, kad jis kils ir pirmadienį, ir antradienį.

SPRENDIMAS. Raidėmis M ir T pažymėkime šiuos atsitiktinius įvykius:

M : kursas kils pirmadienį;

T : kursas kils antradienį.

Turime, kad:

$$P(M) = 0,6, \quad P(T|M) = 0,3, \quad P(T \cap M) = P(M)P(T|M) = 0,6 \times 0,3 = 0,18.$$

Apibrėžimas. Atsitiktinių įvykių $H_1, \dots, H_n$ rinkinys sudaro pilną įvykių grupę, jei

$$1 \quad H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega; \quad (1)$$

$$2 \quad H_i \cap H_j = \emptyset, \text{ kai } i \neq j. \quad (2)$$

2 TEOREMA. (Pilnos tikimybės formulė). Jei $H_1, \dots, H_n$ - pilna įvykių grupė, ir $P(H_i) > 0$, kai $i = 1, 2, \dots, n$, tai bet kuriam atsitiktiniam įvykiui A

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i).$$

Įrodymas. Iš (1) išplaukia, kad

$$A = A \cap \Omega = \bigcup_{i=1}^n (H_i \cap A).$$

Iš (2) išplaukia, kad atsitiktiniai įvykiai $H_i \cap A$ neturi sankirtos, t.y. bendrų taškų, todėl iš mato P adityvumo savybės (P3) gauname, kad

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i \cap A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i), \quad (3)$$

ką ir reikėjo įrodyti.

3 TEOREMA. (Bajeso formulė). Tegu išpildomos sąlygos (1) ir (2). Tada

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)}. \quad (4)$$

Įrodymas. Iš daugybės formulės turime, kad

$$P(H_j A) = P(A)P(H_j|A) = P(H_j)P(A|H_j).$$

Iš čia gauname, kad

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)}.$$

Pritaikę vardikliui pilnos tikimybės formulę (3), gauname (4). Teorema (Bajeso formulė) įrodyta.

Klausimai ir užduotys

1. Kam yra lygi tikimybė įvykiui A įvykti, jei yra žinoma, kad šis įvykis A yra įvykęs:
(a) 0; (b) 0.5; (c) 1.
2. Ar galima tvirtinti, kad atsitiktinių įvykių $H_1, \dots, H_n$ rinkinys sudaro pilną įvykių grupę, jei (a) $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$; (b) $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, tačiau aibės H_j nesikerta, t.y. neturi bendrų taškų; (c) $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, o aibės H_j turi tik po vieną bendrą tašką; (d) aibės $H_1, \dots, H_n$ bendrų taškų neturi.
3. Pateikite Pilnos tikimybės formulę ir savais žodžiais paaiškinkite, kada ji gali būti naudinga.

10. NEPRIKLAUSOMI ATSTITIKTINIAI ĮVYKIAI. TEOREMA APIE NEPRIKLAUSOMUS IR NESUTAIKOMUS ĮVYKIUS, JOS TAIKymo PAVYZDYS

Dažnai pasitaiko situacija, kai, pavyzdžiui, $P(A|B) = P(A)$. Tokiu atveju

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A).$$

Tada $P(AB) = P(A)P(B)$.

Apibrėžimas. Atsitiktiniai įvykiai A ir B vadinami nepriklausomais, jei

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Jei įvykiai nėra nepriklausomi, tai jie vadinami priklausomais.

Apibrėžimas. Atsitiktiniai įvykiai A ir B vadinami nesutaikomais, jei $A \cap B = \emptyset$, t.y. jeigu jie negali įvykti kartu.

TEOREMA. Jei du atsitiktiniai įvykiai A ir B su teigiamomis tikimybėmis yra nepriklausomi, tai jie negali būti nesutaikomi, ir atvirkščiai.

Įrodymas. Jei A ir B yra nesutaikomi, tai

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0. \quad (1)$$

Jei jie yra nepriklausomi su teigiamomis tikimybėmis, tai

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0. \quad (2)$$

Kadangi sąryšis (1) yra teisingas tada ir tik tada, kai neteisingas (2), tai teoremos teisingumas yra akivaizdus.

1 PAVYZDYS. Lankomumo registracija parodė, jog tikimybė įvykio, kad valdybos pirmininkas atvyks į posėdį, yra 0,65, tarybos prezidento atvykimo į posėdį tikimybė yra 0,8, o tikimybė, kad jie abu atvyks į posėdį, yra 0,6. Ar galime tvirtinti, kad pirmininkas ir prezidentas atvyksta į posėdį nepriklausomai?

SPRENDIMAS. Panagrinėkime šiuos atsitiktinius įvykius:

V : valdybos pirmininkas atvyks į posėdį;

T : tarybos prezidentas atvyks į posėdį.

Kadangi

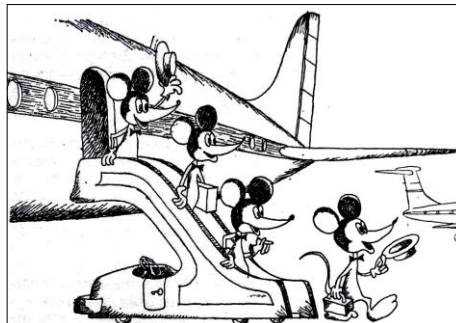
$$P(V \cap T) = 0,6, \quad P(V)P(T) = (0,65) \times (0,8) = 0,52,$$

tai

$$P(V \cap T) \neq P(V)P(T).$$

Todėl atsitiktiniai įvykiai V ir T yra priklausomi.

2 PAVYZDYS. Viktoras skrenda iš San Francisko į Niujorką per Čikagą. Iš San Francisko į Čikagą jis skrenda α aviakompanijos lėktuvu, o iš Čikagos į Niujorką - β aviakompanijos lėktuvu. Tikimybė, kad α aviakompanijos lėktuvai saugiai pasiekia tikslą, yra 0,9995, o tikimybė, kad β aviakompanijos lėktuvai saugiai pasiekia tikslą, yra 0,9998. Apskaičiuokite tikimybes sekančių įvykių:



Kokia tikimybė, kad Viktoras su bendrakeleiviais atskris saugiai?

- (a) Viktoras saugiai atskris į Čikagą ir Niujorką;
 (b) Viktoras saugiai atskris į Čikagą, bet patirs nelaimę kelyje į Niujorką.

SPRENDIMAS. Panagrinėkime šiuos atsitiktinius įvykius:

A – Viktoras saugiai pasiekia Čikagą iš San Francisko.

B – Viktoras saugiai pasiekia Niujorką iš Čikagos.

Kadangi įvykiai yra nepriklausomi, tai

- (a) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,9995 \times 0,9998 = 0,9993$;
 (b) $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = 0,9995 \times 0,0002 = 0,0002$.

3 PAVYZDYS. Iš skaitmenų 1, 2, ..., 9 atsitiktinai pasirenkamas vienas skaičius. Taip pat metama moneta ir kauliukas. Apskaičiuoti tikimybę įvykio, kad pasirinktas nelyginis skaičius, iškris herbas ir kad akučių skaičius dalosi iš 3, t.y. tikimybę tokio įvykio: $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, kur A_1 – pasirinktas nelyginis skaičius, A_2 – iškris herbas, A_3 – akučių skaičius dalosi iš 3.

SPRENDIMAS.

$$P(A_1) = \frac{5}{9}, P(A_2) = \frac{1}{2}, P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{54}.$$

Klausimai ir užduotys

1. Kuris iš šių trijų teiginių yra teisingas:

- (a) Nepriklausomi įvykiai yra nesutaikomi; (b) Nesutaikomi įvykiai yra nepriklausomi;
 (c) Teiginiai (a) ir (b) yra klaidingi.

2. Kuris iš šių trijų teiginių yra teisingas:

- (a) Nepriklausomų atsitiktinių įvykių apibrėžimui matas nereikalingas;
 (b) Nesutaikomų atsitiktinių įvykių apibrėžimui matas nereikalingas;
 (c) Teiginiai (a) ir (b) yra klaidingi.

3. Pateikite tris nepriklausomų atsitiktinių įvykių pavyzdžius.

11. ATSITIKTINIS DYDIS KAIP MAČIOJI FUNKCIJA

1. Paprasčiausiu atveju atsitiktinis dydis (a.d.) – tai funkcija, suteikianti kiekvienai stochastinio eksperimento baigčiai skaitinę reikšmę. Tai reiškia, kad a.d. X galima nagrinėti kaip įgyjančią realias reikšmes funkciją $X=X(\omega)$, apibrėžtą elementariųjų įvykių erdvėje Ω .

Pateiksime kelis atsitiktinių dydžių pavyzdžius.

1 PAVYZDYS. Kosminių dalelių, papuolančių į pasirinktą žemės paviršių pasirinktame laiko intervale, skaičius labai kinta ir priklauso nuo daugelio atsitiktinių aplinkybių.

2 PAVYZDYS. Abonentų iškvietimų, ateinančių į telefono stotį, skaičius per tam tikrą laiko tarpą taip pat yra atsitiktinis dydis, įgyjantis vieną ar kitą reikšmę priklausomai nuo atsitiktinių aplinkybių.

3 PAVYZDYS. Dujų molekulės greitis kinta priklausomai nuo susidūrimų su kitomis molekulėmis. Šių susidūrimų labai daug per labai trumpą laiko tarpą. Net jei žinomas molekulės greitis duotuoju laiko momentu, negalima tiksliai nustatyti šio greičio reikšmę po 0,01 ar, tarkime, po 0,001 sek. Dujų molekulės greičio kitimas yra atsitiktinis dydis.

Matematiškai šie pavyzdžiai turi vieną bendrą savybę: kiekvienas iš aprašytų fizikinių dydžių, įtakojamas atsitiktinių aplinkybių, gali įgyti skirtingas reikšmes. Negalima iš anksto nurodyti, kokią reikšmę įgijo dydis, nes jis kinta atsitiktinai, stochastinius eksperimentas atliekant vieną po kito.

Taigi, norint aprašyti atsitiktinį dydį būtina žinoti reikšmes, kurias jis įgyja. Tačiau šito nepakanka!

Iš tiesų, jei, pavyzdžiui, nagrinėti dujų stovį kintant temperatūrai, tai molekulių greičių reikšmių aibė nesikeis, nors dujų stovis ženkliai keisis.

Taigi, svarbu žinoti ne tik tai, kokias reikšmes įgis atsitiktinis dydis, bet ir kaip dažnai jis jas įgis, t.y. su kokia tikimybe atsitiktinis dydis šias reikšmes įgis.

Atsitiktinio dydžio įgyjamų reikšmių aibės gali būti labai įvairios: baigtinės, skaičiosios ir neskaičiosios; reikšmės gali būti išdėstytos **diskrečiai** arba užpildyti intervalą **tolygiai** ir pan.

2. Tikimybių teorijoje yra parodoma, jog atsitiktinis dydis $X(\omega)$ pilnai nusakomas aibėmis $\{\omega | X(\omega) < x\}$, kur $x \in R^1$. Šios aibės tikimybiniame erdvėje (Ω, F, P) yra “informatyvios” tik tuo atveju, jei jas galima išmatuoti. O išmatuoti jas šioje erdvėje galima tik tada, kai bet kuriam realiam x

$$\{\omega | X(\omega) < x\} \in F, \quad (1)$$

nes pagal tikimybės erdvės apibrėžimą matas P yra apibrėžtas σ -algebroje F .

3. Suformuluosime pagrindinį šio skyrelio apibrėžimą.

Apibrėžimas. Reali funkcija $X = X(\omega)$, apibrėžta aibėje Ω , vadinama **atsitiktiniu dydžiu** tikimybiniame erdvėje (Ω, F, P) , jei bet kuriam realiam x tenkinamas sąryšis (1), t.y.

$$\{\omega | X(\omega) < x\} \in F.$$

Funkcijos, tenkinančios sąryšį (1), funkcijų teorijoje vadinamos **mačiosiomis** atžvilgiu σ -algebros F funkcijoms.

Pateiksime tokios funkcijos pavyzdį.

4 PAVYZDYS. Stochastinį eksperimentą apibrėžkime tokiu būdu: moneta metama vieną kartą. Tada $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, kur ω_1 - herbo pasirodymo elementarus įvykis, o ω_2 - skaičiaus pasirodymo elementarusis įvykis. Tarkime, kad F – visų galimų Ω poaibių aibė ir $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$.

Funkciją $X(\omega)$ apibrėžkime taip:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \omega = \omega_1, \\ 0, & \text{kai } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Pastebėsime, kad

$$\{\omega | X(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{kai } x \leq 0, \\ \{\omega_2\}, & \text{kai } 0 < x \leq 1, \\ \Omega, & \text{kai } 1 < x. \end{cases}$$

Tai reiškia, kad $\{\omega | X(\omega) < x\} \in F$ bet kuriam realiam x , t.y. kad $X(\omega)$ yra atsitiktinis dydis nagrinė

Klausimai ir užduotys

1. Ar atsitiktinis dydis yra: (a) skaičius; (b) matas; (c) kažkas, nesuprasi kas; (d) funkcija; (e) aibė; (f) tikimybinė erdvė?

2. Kuris iš šių trijų teiginių yra teisingas:

(a) Jei X yra atsitiktinis dydis tikimybinėje erdvėje (Ω, F, P) , tai $\{\omega | X(\omega) < x\} \in F$ bet kuriam realiam x ;

(b) Jei X yra atsitiktinis dydis tikimybinėje erdvėje (Ω, F, P) , tai X yra atsitiktinis dydis ir bet kurioje kitoje tikimybinėje erdvėje (Ω, F^*, P) ;

(c) Teiginiai (a) ir (b) yra klaidingi.

3. Pateikite atsitiktinio dydžio apibrėžimą ir tris naujus atsitiktinio dydžio pavyzdžius.

12. SKIRSTINYS. TRYS SKIRSTINIŲ PAVYZDŽIAI. TEOREMA APIE SKIRSTINIŲ SAVYBES

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio X skirstinio funkcija (arba, sutrumpintai, skirstiniu) vadinama realaus kintamojo x funkcija $F(x)$,

$$F(x) = P(X < x) = P(\{\omega | X(\omega) < x\})$$

Panagrinėkime skirstinio funkcijų pavyzdžius – tris svarbias skirstinių klases. Tai tolygusis, dvitaškis ir išsigimęs skirstiniai.

1 PAVYZDYS. Stochastinis eksperimentas yra toks: į intervalą $[a; b]$ atsitiktinai metamas taškas. Skaitoma, kad bet kuri taško padėtis šiame intervale yra vienodai galima.

Šiuo atveju $\Omega = [a; b]$, F apibrėžkime pusiau atvirų iš dešinės intervalų $[\alpha; \beta) \subset [a; b]$ taip vadinamą Borelio σ - algebrą, o tikimybinių matą P įveskime tokiu būdu:

$$P([\alpha; \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}, \text{ jei } [\alpha; \beta] \subset [a; b].$$

Funkciją $X = X(\omega)$ apibrėžiame taip: $X(\omega) = \omega$, jei $\omega \in [a; b]$. Tada

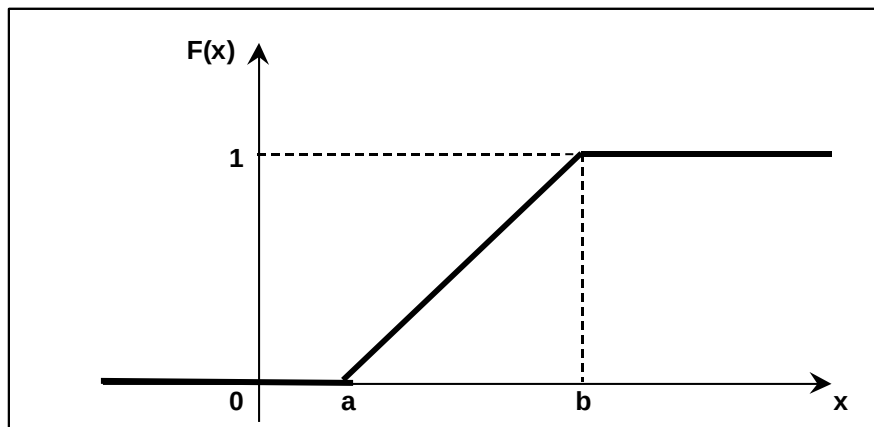
$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{jei } x \leq a, \\ [a; x], & \text{jei } a < x \leq b, \\ \Omega = [a; b], & \text{jei } x > b. \end{cases}$$

Iš čia darome išvadą, kad $\{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ bet kuriam realiam x , t.y. funkcija $X(\omega)$ yra mačioji funkcija tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. O tuo pačiu ji yra ir atsitiktinis dydis šioje erdvėje.

Šio atsitiktinio dydžio skirstinys yra taip vadinamas **tolygusis skirstinys**:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \leq a, \\ \frac{x - a}{b - a}, & \text{jei } a < x \leq b, \\ 1, & \text{jei } x > b. \end{cases}$$

Tolygiojo skirstinio grafikas yra toks:



2 PAVYZDYS. Stochastinis eksperimentas yra toks: moneta metama vieną kartą. Apskaičiuosime skirstinio funkciją atsitiktinio dydžio X , kuris šio stochastinio eksperimento pagrindu yra apibrėžiamas taip:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \omega = \omega_1 (= H), \\ 0, & \text{kai } \omega = \omega_2 (= S). \end{cases}$$

Čia raide H pažymėtas elementarusis įvykis, reiškiantis herbo pasirodymą, o raide S – skaičiaus pasirodymą. Nesunku pastebėti, kad tokiu atveju

$$\{\omega \mid X(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{kai } x \leq 0, \\ \{\omega_2\}, & \text{kai } 0 < x \leq 1, \\ \Omega, & \text{kai } 1 < x. \end{cases}$$

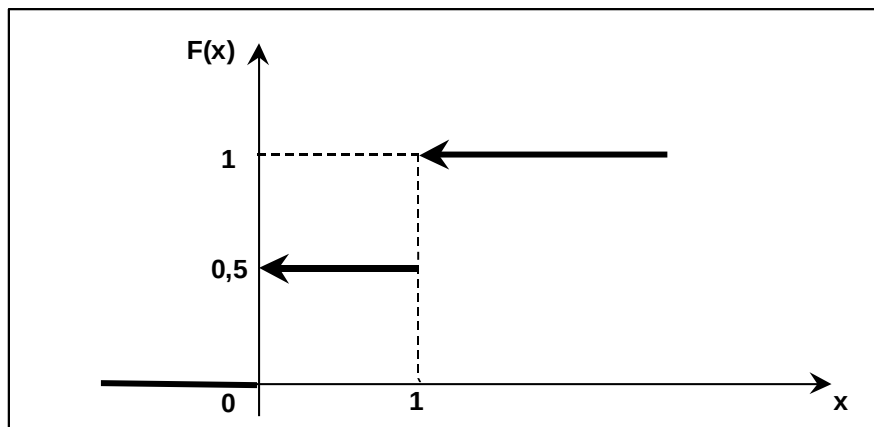
Kadangi

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/2$$

ir visada $P(\emptyset)=0$, $P(\Omega)=1$, tai

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{kai } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{kai } 1 < x. \end{cases}$$

Ši funkcija $F(x)$ vadinama **dvitaškiu skirstiniu**, o jos grafikas yra toks:

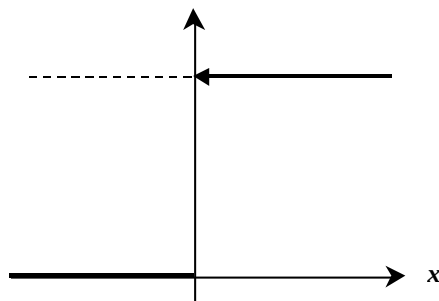


3 PAVYZDYS. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X yra beveik konstanta šia prasme:

$$P(X=a)=1.$$

Tada jo skirstinys vadinamas **išsigimusiu taške a skirstiniu**.

Nesunku įsitikinti, kad šio skirstinio grafikas (kai $a=0$) yra toks:



Ar skirstinio funkcijos apibrėžimas yra korektiškas, t.y. ar tikimybė $P(X < x)$ visada egzistuoja?

Atsakymas teigiamas tuo atveju, jei aibė $\{\omega \mid X(\omega) < x\}$ yra atsitiktinis įvykis, t.y. jei ji priklauso σ -algebrai F . O taip bus tada, kai X yra atsitiktinis dydis tikimybinėje erdvėje (Ω, F, P) , t.y., kai X yra mačioji funkcija atžvilgiu σ -algebros F .

Panagrinėsime paprasčiausias atsitiktinio dydžio $X = X(\omega)$ tikimybinėje erdvėje (Ω, F, P) skirstinio funkcijos $F(x) = P(\{\omega \mid X(\omega) < x\})$ savybes.

1 savybė. Jei $a < b$, tai

$$P(\{\omega : a \leq X(\omega) < b\}) = F(b) - F(a). \quad (2)$$

2 savybė. $F(x)$ yra nemažėjanti funkcija, t.y. jei $a < b$, tai $F(a) \leq F(b)$.

3 savybė. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.

4 savybė. $F(x)$ yra tolydi iš kairės.

Pirmąsias tris savybes įrodysime.

Kadangi

$$\{\omega \mid a \leq X(\omega) < b\} = \{\omega \mid X(\omega) < b\} \setminus \{\omega \mid X(\omega) < a\}$$

ir, be to, iš sąlygos $a < b$ išplaukia, kad

$$\{\omega \mid X(\omega) < a\} \subset \{\omega \mid X(\omega) < b\},$$

tai pagal tikimybinio mato savybę gauname formulę (2).

2 savybė įrodoma 1 savybės pagrindu:

$$F(b) - F(a) = P(\{\omega \mid a \leq X(\omega) < b\}) \geq 0.$$

3 savybės įrodymas akivaizdus, jei pastebėti, kad

$$F(-\infty) = P(X < -\infty) = P(\emptyset) = 0,$$

$$F(+\infty) = P(X < +\infty) = P(\Omega) = 1.$$

Pasirodo, kad yra teisingas atvirkščias teiginys. Jei bet kuri funkcija tenkina išvardytas savybes (pakanka 2, 3 ir 4 savybių), tai ji yra skirstinio funkcija. Suformuluosime tai be įrodymo.

TEOREMA. Skirstinio funkcija $F(x)$ tenkina tokias tris sąlygas:

1) $F(x)$ yra nemažėjanti tiesėje $(-\infty, \infty)$;

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;

3) $F(x)$ yra tolydi iš kairės.

Ir atvirkščiai, jei $F(x)$ tenkina sąlygas 1), 2) ir 3), tai egzistuoja tokia tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir joje apibrėžtas atsitiktinis dydis $X(\omega)$ toks, kad $X(\omega)$ skirstinio funkcija yra $F(x)$.

Klausimai ir užduotys

1. Ar skirstinys yra: (a) skaičius; (b) matas; (c) funkcija; (d) atsitiktinis dydis; (e) aibė; (f) tikimybinė erdvė? (g) realus kintamasis?
2. Kada egzistuoja tikimybė $P(X < x)$: (a) kai P yra matas; (b) kai P yra tikimybinių matas; (c) kai $X = X(\omega)$ yra funkcija tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; (d) aibė $\{\omega \mid X(\omega) < x\}$ yra atsitiktinis įvykis.
3. Turime realaus kintamojo x funkciją $F(x)$. Kokias sąlygas turi tenkinti ši funkcija, kad ji būtų skirstinys?

13. DISKRETIEJI IR TOLYDIEJI SKIRSTINIAI. PAGRINDINIAI SKIRSTINIŲ TIPAI. TANKIO SAVYBĖS

Skirstinių funkcijų įvairovė labai didelė, tačiau mes išskirsime tik dvi pagrindines skirstinių funkcijų klases: diskrečiuosius skirstinius ir tolydžiuosius skirstinius.

Apibrėžimas. Diskrečiaisiais vadiname tokius atsitiktinius dydžius, kurie gali įgyti tik baigtinę arba skaičiųją (suskačiuojamą) aibę reikšmių, o jų skirstinių funkcijas – diskrečiaisiais skirstiniais.

Pastebime, kad jei diskretusis atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ su tikimybėmis $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, t.y.

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots,$$

tai skirstinys $F(x)$ šiuo atveju apibrėžiamas taip:

$$F(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k.$$

Tai reiškia, kad $F(x)$ yra “laiptuota” su trūkiais dydžio p_k taškuose x_k .

Kita svarbi klasė – tolydieji skirstiniai.

Apibrėžimas. Jei atsitiktinio dydžio X skirstinio funkcija $F(x)$ turi tankį, t.y., jei egzistuoja neneigiama funkcija $p(x)$ tokia, kad visiems realiems x

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy,$$

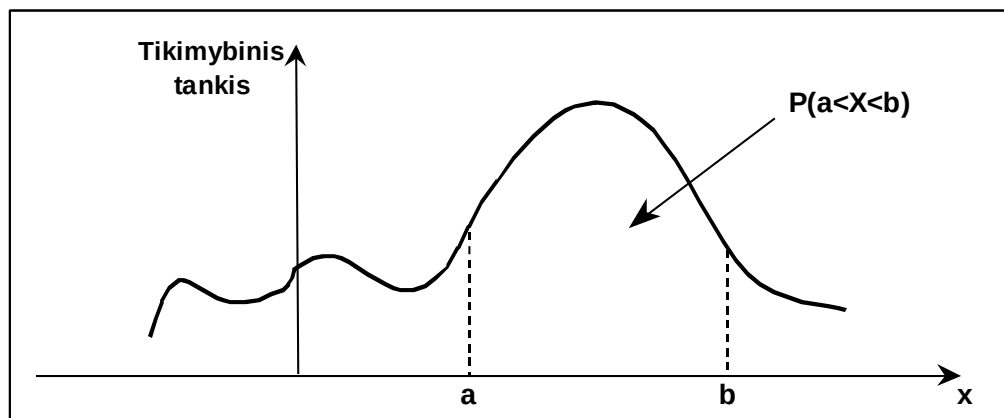
tai atsitiktinis dydis X vadinamas tolydžiuoju atsitiktiniu dydžiu, o $F(x)$ – tolydžiuoju skirstiniu.

Pastebime, kad tolydaus atsitiktinio dydžio X atveju

$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = \int_{-\infty}^b p(y) dy - \int_{-\infty}^a p(y) dy = \int_a^b p(y) dy.$$

Paėmę $b = a$ gauname, kad $P(X = x) = 0$ bet kuriam realiam x .

Pastebime, kad plotas po atsitiktinio dydžio X tikimybinių tankio $p(x)$ kreive tarp a ir b lygus tikimybei $P(a \leq X < b)$ arba, kadangi $P(X = x) = 0$ bet kuriam realiam x , tikimybei $P(a \leq X \leq b)$ arba tikimybei $P(a < X < b)$:



Tikimybinių tankio savybės:

- 1) bendras plotas po tankio $p(x)$ kreivės lygus 1;
- 2) tikimybė $P(a \leq X \leq b)$ lygi plotui po tikimybinių tankio $p(x)$ kreivės tarp a ir b .
- 3) $p(x) \geq 0$ visiems $x \geq 0$.

Šių savybių įrodymą nesunku gauti iš tankio apibrėžimo.

Pagrindiniai skirstinių tipai:

b) *pagrindiniai diskrečiųjų skirstinių tipai* –

- tai, visų pirma, jau išnagrinėti *išsigimęs* ir *dvitaškis* skirstiniai. Šį sąrašą papildysime *Puasono* skirstiniu - tai atsitiktinio dydžio X , įgyjančio reikšmes $0, 1, 2, \dots$ su tikimybėmis $p_n = P(X = n) = \lambda^n e^{-\lambda} / n!$ (kur $\lambda > 0$ - konstanta), skirstinys;

c) *pagrindiniai tolydžiųjų skirstinių tipai* –

- tai, visų pirma, jau išnagrinėtas *tolygusis* skirstinys, ir *normalusis* - tai skirstinys $\Phi(x)$, apibūdinamas formule

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(y-\mu)^2/(2\sigma^2)} dy,$$

kur $\sigma > 0$ ir μ - konstantos.

Klausimai ir užduotys

1. Plotas po atsitiktinio dydžio X tikimybinių tankio $p(x)$ kreivę tarp a ir b lygus:

- (A) tikimybei $P(a \leq X < b)$; (B) tikimybei $P(a \leq X \leq b)$; (C) tikimybei $P(a < X < b)$;
(D) tikimybei $P(a \leq X \leq b)$; (F) kiekvienai iš išvardytų tikimybių.

Kuris iš pateiktų atsakymų yra išsamiausias?

2. Yra žinoma, kad $P(X = x) = 0$ bet kuriam realiam x . Kuris teiginys yra teisingas:

- (a) atsitiktinis dydis X yra tolydus; (b) atsitiktinis dydis X yra diskretus; (c) atsitiktinis dydis X yra išsigimęs nulyje, t.y. $X=0$ su tikimybe 1; (c) atsitiktinis dydis X yra konstanta, kuri lygi nuliui.

3. Kokias žinote pagrindines skirstinių klases?

4. Pateikite diskretaus ir tolydaus atsitiktinio dydžio apibrėžimus.

14. DISKREČIOJO DYDŽIO VIDURKIS IR JO FIZIKINĖ INTERPRETACIJA. DIDŽIŲJŲ SKAIČIŲ DĖSNIS

1. Skirstinio funkcija, jei ji žinoma, yra pilniausia atsitiktinio dydžio charakteristika, nes atspindi ne tik tai, kokias reikšmes įgyja nagrinėjamas atsitiktinis dydis, bet ir šių reikšmių įgijimo tikimybės.

Tačiau skirstinio funkcijos radimas - gana sunkus uždavinys, dažnai atsitinka, kad apie nagrinėjamą atsitiktinį dydį visiškai nebūtina turėti tokią detalią informaciją. Dažnai pakanka žinoti tik tam tikras skaitines charakteristikas - vidurkį (matematinę viltį), dispersiją, momentus. Pirmiausia išnagrinėkime vidurkio sąvoką.

2. Grįžkime prie kurso pradžioje išnagrinėto pavyzdžio, kai 20 kartų mėtėme lošimo kauliuką. Buvo gauti tokie duomenys:

3	6	3	5	4	1	2	4	4	2
3	4	6	5	1	3	6	6	3	1

Šių stebinių *aritmetinis vidurkis* $\bar{x}$, dar vadinamas *imties vidurkiu*, apskaičiuojamas taip:

$$\bar{x} = \frac{\text{stebinių reikšmių suma}}{\text{stebinių skaičius}} = \frac{72}{20} = 3,6.$$

3. Tačiau šį vidurkį mes galėjome apskaičiuoti kitaip. O būtent, galėjome apskaičiuoti kiekvienos kubiuko pusės pasirodymo dažnį ir, apskaičiavę santykinį dažnį, vidurkį gauname taip:

$$\bar{x} = 1 \cdot \left(\frac{3}{20}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2}{20}\right) + 3 \cdot \left(\frac{5}{20}\right) + 4 \cdot \left(\frac{4}{20}\right) + 5 \cdot \left(\frac{2}{20}\right) + 6 \cdot \left(\frac{4}{20}\right) = 3,6.$$

Šį skaičiavimo būdą galima iliustruoti tokia formule:

$$\text{Imties vidurkis } \bar{x} = \sum (\text{stebinio reikšmė} \times \text{santykinis dažnis})$$

4. Įsivaizduokime, kad kubiuką mes mėtome ne 20, o labai daug kartų. Tada santykinis dažnis, kaip matėme, artės prie vienos kubiuko sienelės pasirodymo tikimybės, t.y. prie 1/6. Vidurkis tokiu atveju apskaičiuojamas taip:

$$1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \dots + 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \sum (\text{reikšmė} \times \text{tikimybė}) = 3,5.$$

Šio pavyzdžio ir statistinio stabilumo fenomeno pagrindu natūralu *atsitiktinio dydžio X vidurkį* apibrėžti taip:

$$\text{Atsitiktinio dydžio } X \text{ vidurkis} = \sum (\text{reikšmė} \times \text{tikimybė}) \text{ arba } \sum x_i P(X = x_i),$$

kur x_i pažymėtos skirtingos atsitiktinio dydžio X reikšmės.

5. Atsitiktinio dydžio X vidurkis dar yra vadinamas **populiacijos vidurkiu** arba **matematine viltimi** ir žymimas μ arba EX .

O štai Lietuvos standarto apibrėžimas:

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X , įgyjančio reikšmes x_i su tikimybėmis p_i , vidurkis (kai jis egzistuoja) yra

$$\mu = EX = \sum x_i p_i;$$

čia sumuojama pagal visas X įgyjamas reikšmes x_i , o $p_i = P(X = x_i)$.

6. Apibendrinkime kauliuko mėtymo eksperimentą, pasirinkdami bet kokį stochastinį eksperimentą. Kartokime jį daug kartų, kaskart skaičiuodami jo stebinių aritmetinį vidurkį $\bar{x}$. Galima įsitikinti, kad ši apskaičiuotoji reikšmė $\bar{x}$ po daugelio eksperimento kartojimų yra artima teoriniam vidurkiui μ . Tai taip vadinamas *didžiųjų skaičių dėsnis*. Suformuluokime jį atskirai.

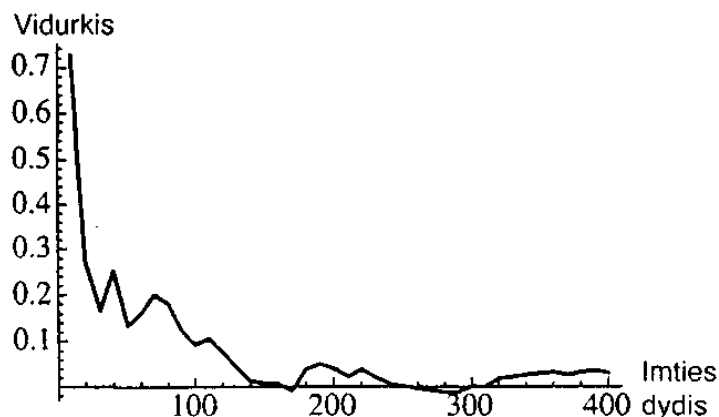
Didžiųjų skaičių dėsnis (empirinis variantas). *Praktiškai neabejotina, kad didelio skaičiaus nepriklausomų populiacijos stebinių aritmetiniai vidurkiai $\bar{x}$ artėja prie šios populiacijos vidurkio μ .*

Norėdami iliustruoti šio dėsnio veikimą, atlikime tokį eksperimentą. Modeliuokime 400 atsitiktinio dydžio su nuliniu vidurkiu populiacijos stebinių. Kiekvieną kartą, gavę 10 naujų stebinių, iš naujo apskaičiuokime visos imties vidurkį. Tai reiškia, kad skaičiuojamos šios reikšmės:

$$\bar{x}_{10} = (x_1 + \dots + x_{10})/10, \quad \bar{x}_{20} = (x_1 + \dots + x_{20})/20, \quad \dots,$$

$$\bar{x}_{400} = (x_1 + \dots + x_{400})/400.$$

Irašę konkrečias stebinių reikšmes, gauname tokį arba panašų grafiką:



Standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio populiacijos stebinių modeliavimo rezultatai, iliustruojantys didžiųjų skaičių dėsnio veikimą

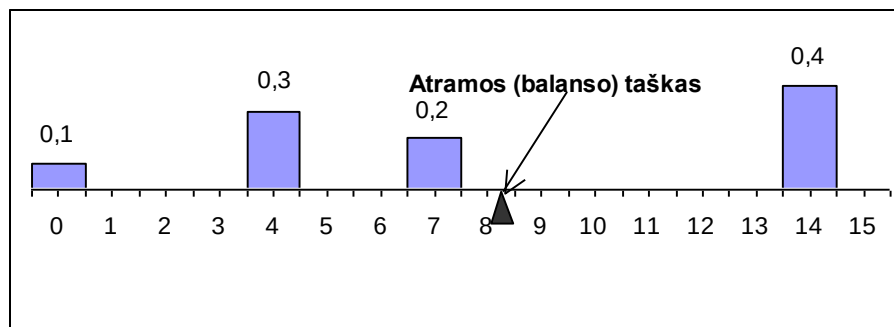
Išvada aiški: didėjant stebinių skaičiui, jų aritmetinis vidurkis artėja į nulį, t.y. į populiacijos vidurkį $\mu = 0$.

7. Fizikinė vidurkio interpretacija. Vidurkį galima interpretuoti kaip atsitiktinio dydžio "svorio centrą". Įsivaizduokime svorius, kurių skaitinė išraiška kilogramais lygi diskrečiojo atsitiktinio dydžio įgyjamų reikšmių tikimybėms. Išdėliokime juos ant svertinių sūpuoklių atstumais, proporcingais įgyjamoms reikšmėms. Norint, kad tokios sūpuoklės įgytų pusiausvyrą, atramos tašką reikia lokalizuoti tiksliai toje vietoje, kurios koordinatė lygi atsitiktinio dydžio vidurkiui.

Pailiustruosime tai pavyzdžiu. Tegu atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes 0, 4, 7 ir 14 su tikimybėmis 0,1; 0,3; 0,2 ir 0,4. Tada

$$\mu = EX = 0 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 7 \cdot 0,2 + 14 \cdot 0,4 = 8,2,$$

o svertines sūpuokles su svoriais 0,1; 0,3; 0,2 ir 0,4 grafiškai galima pavaizduoti taip:



Klausimai ir užduotys

1. Kas yra pilniausia atsitiktinio dydžio charakteristika: (a) vidurkis; (b) skirstinio funkcija; (c) matematinė viltis; (d) dispersija.
2. Didžiųjų skaičių dėsnis aprašo: (a) nepriklausomų populiacijos stebinių aritmetiniai vidurkiai $\bar{x}$ artėja prie šios populiacijos vidurkio; (b) didelio skaičiaus nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų skirstiniai artėja prie ribinio skirstinio; (c) didelio skaičiaus nepriklausomų populiacijos stebinių aritmetiniai vidurkiai $\bar{x}$ artėja prie šios populiacijos vidurkio; (d) didelio skaičiaus populiacijos stebinių aritmetiniai vidurkiai $\bar{x}$ artėja prie šios populiacijos vidurkio. Pasirinkite tiksliausią variantą.
3. Paaiškinkite savais žodžiais ir iliustruokite savo pavyzdžiu teiginį: „Vidurkį galima interpretuoti kaip atsitiktinio dydžio "svorio centrą““.

15. STATISTINIO STABILUMO FENOMENAS. DRAUDIMO MODELIS

Su Didžiųjų skaičių dėsnio tamptariai susijęs šio kurso pradžioje minėtas Statistinio stabilumo fenomenas.

STATISTINIO STABILUMO FENOMENAS

Atsitiktinio įvykio A santykinis dažnis $n(A)/n$ n stochastinių eksperimentų serijoje turi tendenciją, esant pakankamai dideliui n , artėti prie pastovios reikšmės, kuri žymima $P(A)$.

Išnagrinėsime konkretų pavyzdį.



Iš 36 kortų kaladės atsitiktinai ištraukiama 18 kortų

PAVYZDYS. Iš kortų kaladės, kurioje yra 36 kortos, atsitiktinai ištraukiama 18 kortų, t.y. puskaladė. Mus domina įvykis A , kad šioje puskaladėje yra 9 raudonos spalvos kortos ir 9 juodos spalvos kortos.

Tegu $n(A)$ - tai dydis, reiškiantis, kad n eksperimentų serijoje $n(A)$ kartų pasirodė 9 juodos kortos, o $n(A)/n$ - santykinis dažnis. Buvo gauta tokia lentelė (pateikiama pagal B. Gnedenko [7]):

Eksp. eilės Nr.	Raudonų kortų skaičius puskala- dėje	$n(A)$	$n(A)/n$	Eksp. eilės Nr.	Raudonų kortų skaičius puskala- dėje	$n(A)$	$n(A)/n$
1	8	0	0,00	51	9	13	0,25
2	9	1	0,50	52	8	13	0,25
3	11	1	0,33	53	7	13	0,25

4	9	2	0,50	54	9	14	0,26
5	11	2	0,40	55	7	14	0,26
6	8	2	0,33	56	9	15	0,27
7	11	2	0,29	57	9	16	0,28
8	9	3	0,38	58	11	16	0,28
9	8	3	0,33	59	8	16	0,27
10	7	3	0,30	60	8	16	0,27
11	12	3	0,27	61	8	16	0,26
12	10	34	0,25	62	10	16	0,26
13	9	4	0,31	63	12	16	0,25
14	13	4	0,29	64	9	17	0,27
15	12	4	0,27	65	11	17	0,26
16	8	4	0,25	66	12	17	0,26
17	11	4	0,23	67	11	17	0,26
18	10	4	0,22	68	8	17	0,25
19	8	4	0,21	69	10	17	0,25
20	11	4	0,20	70	8	17	0,24
21	12	4	0,19	71	7	17	0,24
22	10	4	0,18	72	9	18	0,25
23	10	4	0,17	73	10	18	0,25
24	9	5	0,21	74	8	18	0,24
25	9	6	0,24	75	11	18	0,24
26	14	6	0,23	76	8	18	0,24
27	9	7	0,26	77	9	19	0,25
28	10	7	0,25	78	9	20	0,26
29	10	7	0,24	79	5	20	0,26
30	7	7	0,23	80	8	20	0,25
31	10	7	0,22	81	7	20	0,25
32	7	7	0,22	82	10	20	0,24
33	8	7	0,21	83	9	21	0,25
34	10	7	0,21	84	6	21	0,25
35	9	8	0,23	85	10	21	0,25
36	9	9	0,25	86	10	21	0,24

37	10	9	0,24	87	9	22	0,25
38	10	9	0,24	88	7	22	0,25
39	8	9	0,23	89	7	22	0,25
40	7	9	0,22	90	10	22	0,24
41	9	10	0,24	91	8	22	0,24
42	10	10	0,24	92	8	22	0,24
43	10	10	0,23	93	10	22	0,24
44	9	11	0,25	94	8	22	0,23
45	8	11	0,24	95	11	22	0,23
46	7	11	0,24	96	9	23	0,24
47	12	11	0,23	97	9	24	0,25
48	9	12	0,25	98	10	24	0,24
49	6	12	0,25	99	7	24	0,24
50	7	12	0,24	100	7	24	0,24

Norėdami gauti formulėje (1) esantį skirtumą $\frac{n(A)}{n} - p$, kur $p = P(A)$, pirmiausia apskaičiuosime šį p .

Iš 36 kortų išrinkti 18 kortų galima C_{36}^{18} būdais. Palankūs yra visi tie atvejai, kai iš 18 raudonų kortų išrenkamos 9 ir iš 18 juodų kortų išrenkamos 9 juodos. Taigi, iš viso yra $C_{18}^9 \cdot C_{18}^9$ palankių atvejų, o ieškoma tikimybė p yra tokia:

$$p = \frac{C_{18}^9 \cdot C_{18}^9}{C_{36}^{18}} = \frac{(18!)^4}{36!(9!)^4}.$$

Ši trupmena tikrai skatina manyti, kad toliau laukia darbelis ne iš maloniųjų darbų sąrašo. Tačiau neskubėkime taip manyti, nes įveikti ją galima net dviem būdais – elementariosios ir aukštosios matematikos metodais. Pradėsime nuo paprasčiausio:

$$p = \frac{C_{18}^9 \cdot C_{18}^9}{C_{36}^{18}} = \frac{(18!)^4}{36!(9!)^4} = \frac{(10 \cdot \dots \cdot 18)^4}{36!} = \frac{(10 \cdot \dots \cdot 18)^3}{9! \cdot 19 \cdot 20 \cdot \dots \cdot 36} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot (10 \cdot \dots \cdot 18)}{9! \cdot 3 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 35} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2}{3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31} = \frac{2149004}{8250123} = 0,2604814...$$

Taigi, $P(A) = p \approx 0,26$.

Aukštosios matematikos metodus naudoja B. Gnedenko [7] ir ką tik mūsų išnagrinėtus skaičiavimus atlieka kitaip. Jis pastebi, kad skaičiuojant faktorialus, patogiau naudotis ***Stirlingo formule***:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

Iš šios formulės gauname, kad

$$18! \approx 18^{18} e^{-18} \sqrt{2\pi \cdot 18},$$

$$9! \approx 9^9 e^{-9} \sqrt{2\pi \cdot 9},$$

$$36! \approx 36^{36} e^{-36} \sqrt{2\pi \cdot 36},$$

taigi,

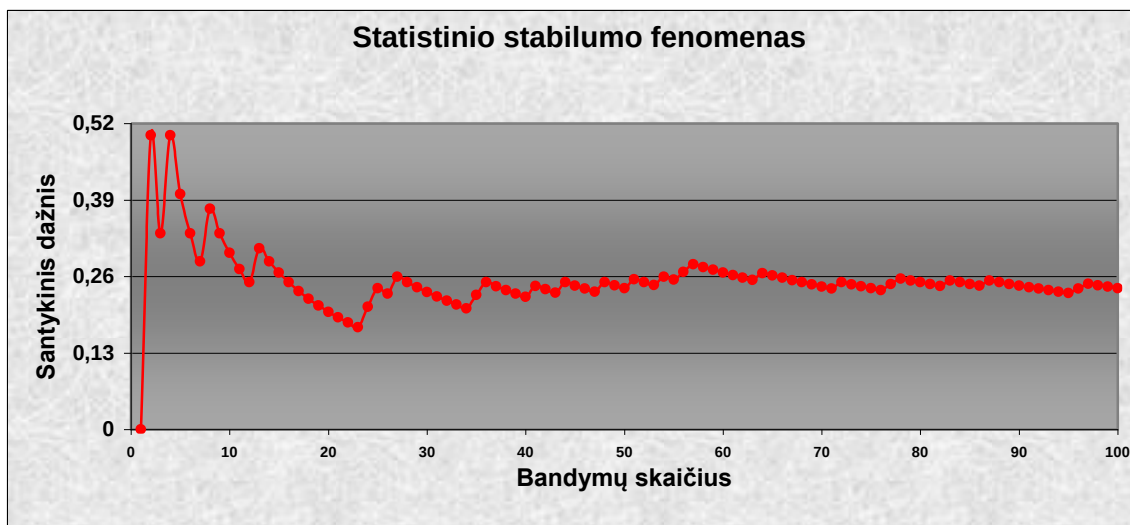
$$p \approx \frac{(\sqrt{2\pi \cdot 18} \cdot 18^{18} e^{-18})^4}{\sqrt{2\pi \cdot 36} \cdot 36^{36} e^{-36} (\sqrt{2\pi \cdot 9} \cdot 9^9 e^{-9})^4},$$

Iš čia nesunkiai gauname tą patį, ką gavome pirmuoju būdu:

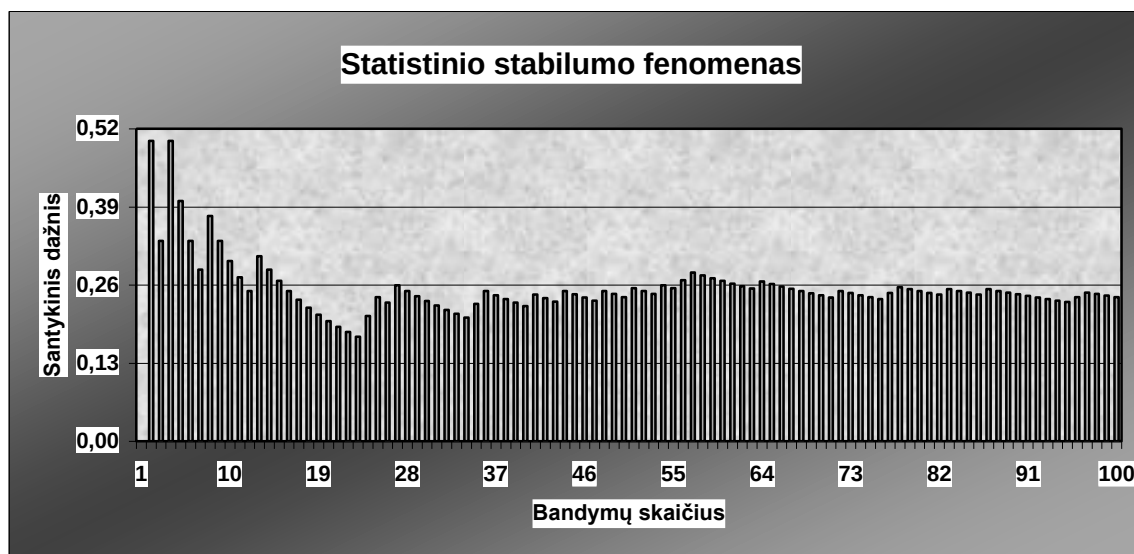
$$P(A) = p \approx \frac{2}{\sqrt{18\pi}} \approx \frac{4}{15} \approx 0,26.$$

Stochastinio eksperimento duomenis iš lentelės pavaizdavę grafiškai ir palyginę juos su ką tik gautu teoriniu rezultatu, turėtume gauti vaizdžią statistinio stabilumo fenomeno veikimo iliustraciją. Įsitikinsime, kad taip iš tikro yra.

Tuo tikslu lentelėje gautus duomenis pailiustruokime taškine ir stulpeline diagramomis. Taškinę diagramą braižome meniu juostoje pasirinkus **Insert - Chart... - XY(Scatter)** arba veiksmų juostoje paspaudžiam mygtuką , pasirenkam **XY(Scatter)** ir, pasirinkus tinkamiausią diagramos tipą, įvedam atitinkamus duomenis ir braižome taškinę diagramą:



Dabar braižysime stulpelinę diagramą. Meniu juostoje pasirenkame **Insert - Chart... - Column** arba veiksmų juostoje paspaudžiam mygtuką , pasirenkam **Column** ir, pasirinkus tinkamiausią diagramos tipą, įvedam atitinkamus duomenis ir braižome stulpelinę diagramą:



IŠVADA. Santykinis dažnis $n(R)/n$ turi tendenciją įgyti pastovią reikšmę, o santykio $n(R)/n$ riba egzistuoja ir apytiksliai lygi 0,26.

DRAUDIMO MODELIS. Daugelis tikimybinių sąvokų, įskaitant vidurkio arba matematinės vilties idėją, kilo studijuojant azartinius lošimus. Palaipsniui šios sąvokos ir idėjos buvo taikomos tose srityse, kuriose ženkliai įtaką turėjo rizikos faktorius. Pirmiausia, vystantis prekybai, jos rado pritaikymą paprasčiausiuose draudimo modeliuose. Vieno tokio modelio pavyzdį išnagrinėsime dabar.

Draudimo kompanija išmoka klientui 5 000 Lt sumą, jei kruizo metu jis apvagiamas arba patiria kitus nuostolius. Jei šių nuostolių rizika įvertinama santykiu 1:250, tai kokia turi būti kliento draudimo įmoka?

Pirmiausia pastebėsime, jog tikimybė, kad kompanijai teks išmokėti 5 000 Lt sumą, yra $1/250=0,004$. Tegu X yra atsitiktinis dydis, reiškiantis kompanijos išmokos x klientui sumą. Tada reikšmės x_i šis dydis įgyja su tikimybėmis p_i ($i=1, 2$), kurios aprašomos tokia lentele:

Išmoka x_i	Tikimybė p_i
5000 Lt	0,004
0 Lt	0,996

Apskaičiuojame vidurkį:

$$EX = 5000 \times 0,004 + 0 \times 0,996 = 20 \text{ Lt.}$$

Taigi, vidutinė suma, kurią kompanija išmoka klientui, yra 20 Lt. O tai reiškia, kad būtų pagrįsta iš kliento prašyti 20 Lt didumo draudimo įmoką. Suprantama, realiaame modelyje ši įmoka būtų didesnė – prisidėtų administravimo išlaidos, mokesčiai, išlaidos draudimo kompanijos pelno portfeliui.

Klausimai ir užduotys

1. Stochastinio eksperimento baigčių aibė yra baigtinė. Ar galima tokiame eksperimente taikyti Statistinio stabilumo fenomeną? Nurodykite tiksliausią atsakymą: (a) ne, nes fenomeno formuluotėje kalbama apie pakankamai didelį n ; (b) ne, nes esant baigtiniam n netenka kalbėti apie santykinio dažnio $n(A)/n$ ribą; (c) taip, nes statistinio stabilumo fenomene n yra stochastinių eksperimentų skaičius; (d) taip, nes statistinio stabilumo fenomene n nėra baigčių skaičius, o tik reikalaujama, kad stochastinių eksperimentų skaičius n būtų pakankamai didelis.

2. Draudimo modelio pagrindas – matematinio vidurkio sąvoka. Pateikite savo pavyzdį, sutinkamą realiaame gyvenime, kuriame būtų naudojama ši sąvoka.

16. SANKT-PETERBURGO PARADOKSAS

Pateiksime praktinių pavyzdžių iš tikimybių teorijos problemų ir paradoksų formulavimų ir jų sprendimų istorijos. Konkretus praktinis tokių paradoksų sprendimas leis mums apčiuopiamiau suvokti tokias fundamentalias sąvokas, kaip matematinė viltis, atsitiktinis dydis, elementariųjų įvykių erdvė ir pan.

Pagal „Lietuvių kalbos žodyną“,

paradòksas sm. (2) ТрпŽ **1.** *neįprasta, keista mintis, lyg ir prieštaraujanti sveikam protui.*

2. *moksle – netikėtas reiškinys, neatitinkantis įprastų pažiūrų:* Reliatyvumo teorijos paradoksai stebina tol, kol jų neišsiaiškiname sp. Žmogus iš tiesų stebuklingas paradoksas rš.

Tikimybių teorija, kuri pradžioje tyrinėjo tik azartinių žaidimų rezultatus, vystėsi į universalią teoriją, kuri rado pritaikymus daugybėje gyvenimiškų sričių. Todėl visai nestebina, kad beveik visi didieji mokslo žurnalai pasekė anglų žurnalo „Filosofijos darbai“ pavyzdžiu ir pradėjo reguliariai spausdinti tikimybių teorijos straipsnius. Daugėjo mokslininkų, manančių, kad tikimybių teorija – tai ne kas kita, o gyvenimo kelrodis, ar net sveikas protas, išreikštas skaičiais. Tačiau XVIII a. pr. Sankt-Peterburgo mokslo akademija išspausdino straipsnį, kurį perskaičius atrodė, kad matematinis mąstymas ir skaičiavimai prieštarauja sveikam protui. Straipsnį parašė D. Bernulis, kurio dėka Peterburgo paradoksas išgarsėjo. Tačiau pirmąkart šią problemą iškėlė jo pusbrolis N. Bernulis ir užsiminė apie paradoksą 1713 metų rugsėjį, laiške Monmorui.

PARADOKSO FORMULAVIMAS

Peterburgo žaidimą trumpai būtų galima aprašyti taip. Žaidėjas mēto monetą tol, kol neatsiverčia skaičius – tada žaidimas baigiamas. Jei tai įvyksta r -tuoju metimu, tai žaidėjas iš banko gauna 2^r dolerių. Tokiu būdu su kiekvienu metimu laimėjimas dvigubėja. Išskyla, atrodytų, labai paprastas klausimas: kiek turi sumokėti bankui žaidimo pradžioje žaidėjas, kad bankui šis žaidimas „vidutiniškai“ (matematinio vidurkio prasme) nebūtų nuostolingas? O paradoksas, sprendžiant šį „paprastą“ klausimą, slypi štai čia: kokį pradinį įnašą besumokėtų žaidėjas, tiek „teoriškai“ šito nepakaks! Mat, žaidėjui sumokėjus bet kokią baigtinę sumą, tikimybė jam aplošti banką yra didesnė už nulį. Toks teorinis rezultatas akivaizdžiai prieštaravo tuo metu egzistavusiai šio Peterburgo žaidimo praktikai ir todėl atrodė, kad tikimybių teorijos metodai yra niekiniai.

SPRENDIMAS

Taigi, kiek turi sumokėti bankui žaidimo pradžioje žaidėjas, kad bankui šis žaidimas nebūtų nuostolingas?

Kadangi žaidėjas mēto monetą tol, kol neatsiverčia skaičius (t.y. metimai yra nutraukiami, kai metimų serijoje po herbų h pasirodymų serijos pagaliau pirmąkart pasirodo skaičius s), tai elementariųjų įvykių erdvę Ω galima apibrėžti taip:

$$\Omega = \left\{ \omega_i \mid \omega_1 = s, \omega_2 = hs, \omega_3 = hhs, \dots, \omega_r = \underbrace{hhh\dots h}_{r-1 \text{ kartų}} s, \dots \right\}.$$

Dabar apibrėšime kiekvieno elementariojo atsitiktinio įvykio ω_i tikimybę p_i :

$$p_i = 1/2^i. \quad (1)$$

Žinoma, teoriškai toks apibrėžimas yra korektiškas, nes tenkina abi diskrečiosios elementariųjų įvykių erdvės aksiomas:

$$p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Tačiau iškyla nemažiau svarbus klausimas, ar apibrėžimas (1) yra korektiškas nagrinėjamo praktinio modelio kontekste. Norėdami įsitikinti šiuo korektiškumu, pažymėkime raide A atsitiktinį įvykį, kad iškrito skaičius ir žaidimas pasibaigė po pirmojo metimo, o simboliu $\bar{A}$ – jam priešingą atsitiktinį įvykį, t.y. kad iškrito herbas. Tada $P(A) = 1/2$, o $P(\bar{A}) = 1 - 1/2 = 1/2$.

Tegu, toliau, A_r – atsitiktinis įvykis, kad žaidimas pasibaigė r -tuoju metimu (t.y. pirmus $r-1$ kartus iškrito herbas, o r -tąjį kartą iškrito skaičius). Tada

$$P(A_r) = \underbrace{P(A) \cdot P(A) \cdot \dots \cdot P(A)}_{r-1} \cdot P(\bar{A}) = \underbrace{1/2 \cdot 1/2 \cdot \dots \cdot 1/2}_{r-1} \cdot 1/2 = 1/2^r.$$

Palyginę gautą rezultatą su formule (1) lengvai įsitikiname, kad apibrėžimas (1) yra korektiškas ne tik teoriškai, bet empiriškai, t.y. korektiškas ir nagrinėjamo praktinio modelio kontekste.

Tegu atsitiktinis dydis $X(\omega_i)$ išreiškia galimą žaidėjo laimėjimą i -tojo metimo metu. Nesunku įsitikinti, kad $X(\omega_i) = 2^i$.

Apskaičiuosime šio atsitiktinio dydžio matematinę viltį (kitai sakant, žaidimo savikainą).

Sudarome lentelę:

Stochastinio eksperimento baigtis ω_i	s	hs	hhs	...	$\underbrace{hhh\dots hs}_{i-1 \text{ kartų}}$	...
Atsitiktinio dydžio X reikšmė $x_i = X(\omega_i) = 2^i$	2	4	8	...	2^i	...
Tikimybė $p_i = P(X = x_i = 2^i)$	1/2	1/4	1/8	...	$1/2^i$	...

Dabar nesunku apskaičiuoti atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX :

$$EX = \sum x_i p_i = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^i \cdot \frac{1}{2^i} + \dots = \underbrace{1+1+\dots+1}_i + \dots = \infty.$$

Iš čia ir matome, kad žaidėjui sumokėjus bet kokią baigtinę sumą, teoriškai jis turėtų aplošti banką. Tačiau iš tos pat teorijos matome, kad praktiškai tokia situacija gali įvykti su tikimybe, lygia

apytiksliai nuliui net tuo atveju, kai buvo žaidžiama tik r kartų ir, tarkime, r yra mažas, pavyzdžiui, $r=10$:

$$p_r = P(X = x_r = 2^r) = 1/2^r = 2^{-10} = 1/1024 \approx 0.$$

Taigi, praktiniai rezultatai neprieštarauja teoriniams, jei pastaruosius tinkamai interpretuosime praktiniuose taikymuose.

Dar daugiau, atsižvelgiant į gautus teorinius rezultatus, praktinį žaidimo modelį būtų galima organizuoti taip. Žaidimo pradžioje žaidėjas paskelbia, kokį maksimalų skaičių kartų n jis ketina mesti monetą, visos kitos žaidimo sąlygos lieka nepakitusios. Tai yra, žaidėjas mēto monetą tol, kol neatsiverčia skaičius (bet ne daugiau kaip n kartų) – tada žaidimas baigiamas. Jei tai įvyksta r -tuoju metimu ($r \leq n$), tai žaidėjas iš banko gauna 2^r dolerių. Tokiu būdu su kiekvienu metimu laimėjimas dvigubėja. Iškyla natūralus klausimas: kiek turi sumokėti bankui žaidimo pradžioje žaidėjas, kad vidutiniškai bankui šis žaidimas nebūtų nuostolingas?

Tokiu atveju elementariųjų įvykių erdvę Ω galima apibrėžti taip:

$$\Omega = \left\{ \omega_i \mid \omega_1 = s, \omega_2 = hs, \omega_3 = hhs, \dots, \omega_n = \underbrace{hhh\dots h}_{n-1 \text{ kartų}} s, \omega_n^* = \underbrace{hhh\dots h}_{n \text{ kartų}} \right\}.$$

Tegu, kaip ir anksčiau, atsitiktinis dydis $X(\omega_i)$ išreiškia galimą žaidėjo laimėjimą i -tojo metimo metu. Nesunku įsitikinti, kad $X(\omega_i) = 2^i$, $i=1,2,\dots,n$; $X(\omega_n^*) = 0$.

Apskaičiuosime šio atsitiktinio dydžio matematinę viltį (kitai sakant, žaidimo savikainą).

Sudarome lentelę:

Stochastinio eksperimento baigtis	s	hs	hhs	...	$\underbrace{hhh\dots h}_{n-1 \text{ kartų}} s$	$\underbrace{hhh\dots h}_{n \text{ kartų}}$
Atsitiktinio dydžio X reikšmė x_i	2	4	8	...	2^n	0
Tikimybė p_i	1/2	1/4	1/8	...	1/2 ⁿ	1/2 ⁿ

Dabar nesunku apskaičiuoti šio atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX :

$$EX = \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_i = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} + 0 \cdot \frac{1}{2^n} = \underbrace{1+1+\dots+1}_n = n.$$

Iš čia matome, kiek turi sumokėti bankui žaidimo pradžioje žaidėjas, kad „vidutiniškai“ bankui šis žaidimas nebūtų nuostolingas – n dolerių.

Klausimai ir užduotys

1. Kiek turi sumokėti bankui Peterburgo žaidimo pradžioje žaidėjas, kad bankui šis žaidimas „vidutiniškai“ nebūtų nuostolingas? Nurodykite, kuris iš išvardintų atsakymų variantų teisingas: (a) n dolerių, jei žaidėjas planuoja atlikti n metimų; (b) n dolerių, jei žaidėjas n -ajame metime išlošia; (c) 2^n dolerių, jei žaidėjas planuoja atlikti n metimų; (d) 2^n dolerių, jei žaidėjas n -ajame metime išlošia.
2. Paaiškinkite, kaip jūs suprantate sąvoką „žaidimas „vidutiniškai“ nėra nuostolingas abiem jame dalyvaujančiom šalim“.

17. DISPERSIJOS APIBRĖŽIMAS. DISPERSIJA KAIP SKLAIDOS MATAS

Matėme, kad ypatingas vaidmuo tikimybių teorijoje tenka pirmos eilės pradiniam momentui – tai matematinis vidurkis (matematinė viltis). Ypatingas vaidmuo tenka ir antros eilės centriniam momentui – dispersijai (nuo lotynų kalbos žodžio *dispergere* – išsklaidyti, išbarstyti). Apie tai bus kalbama sekančiame skyrelyje.

Dabar pateiksime dispersijos apibrėžimus diskretaus ir tolydaus atsitiktinio dydžio atvejams ir apskaičiuosime tolygiojo, normaliojo ir Puasono skirstinių dispersijas.

Atsitiktinio dydžio X **dispersija** vadinama X nuokrypio nuo EX kvadrato matematinis vidurkis. Paprastai ji žymima simboliu DX .

Apibrėžimas. Tegu diskretusis atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ su tikimybėmis $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, o μ yra šio atsitiktinio dydžio matematinis vidurkis. Jeigu egzistuoja šio atsitiktinio dydžio antrasis centrinis momentas, tai jis vadinamas dispersija ir žymimas

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i$$

Minėjome, kad antros eilės centrinis momentas buvo pavadintas *dispersija*, o šis pavadinimas kilęs nuo lotynų kalbos žodžio *dispergere* – išsklaidyti, išbarstyti. Įsitikinsime, kad dispersija iš tiesų gali būti nagrinėjama kaip *sklaidos matas*.

Tarkime, kad $x_1, x_2, \dots, x_n$ yra stochastinio eksperimento stebinių reikšmės. Šios *imties vidurkiu* pavadiname jos reikšmių aritmetinį vidurkį $\bar{x}$,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

"Matematikos terminų žodyne" $\bar{x}$ vadinamas *empiriniu vidurkiu*. Matėme, kad tai centro matas, kurio fizikinė interpretacija - svorio centras.

Tačiau be duomenų centro nustatymo, bet kuri duomenų aprašomoji analizė privalo turėti kitimo (sklaidos) apie šį centrą skaitinę išraišką, t.y. **kitimo (sklaidos) matą**. Dvi stebinių aibės gali turėti tas pačias centro pozicijas, bet skirtingą sklaidos apie šį centrą pavidalą. Pavyzdžiui, panagrinėkime dvi imtis:

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{4, 6, 9, 12, 14\}; \quad \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} = \{7, 8, 9, 10, 11\}.$$

Šių imčių centrai c_1 ir c_2 sutampa:

$$c_1 = \bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{45}{5} = 9, \quad c_2 = \bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{45}{5} = 9.$$

Matome, kad taškai pirmojoje imtyje yra daugiau išsklaidyti, negu taškai antrojoje, nors jų centras yra tas pats.

Kuo tai galima paaiškinti? Apibrėžus i -tojo stebinio nuokrypį formule

$$\text{Nuokrypis } \Delta_i = i\text{-tasis stebinis} - (\text{Imties vidurkis}).$$

gauname dvi nuokrypių sekas:

$$-5, -3, 0, 3, 5;$$

$$-2, -1, 0, 1, 2.$$

Susumavę šiuos nuokrypius, abiem atvejais gauname vieną ir tą patį rezultatą:

$$\sum \Delta_i = 0.$$

Matome, kad teigiamus nuokrypius "atsveria" neigiami nuokrypiai. Pasirodo, kad ir bendru atveju galima įrodyti, jog

$$\text{visų nuokrypių } \Delta_i \text{ suma visada lygi nuliui.}$$

IŠVADA. Norėdami gauti sklaidos matą, turime pašalinti neigiamų nuokrypių Δ_i ženklus, prieš juos sudedant.

Vienas iš tokių ženklų pašalinimo būdų - pakelti nuokrypius kvadratu.

Taigi, pakėlus nuokrypius kvadratu, juos susumavus ir padauginus iš normavimo koeficiento $1/(n-1)$ (dažnai normavimo koeficientu pasirenkamas $1/n$) gaunamas *sklaidos ir kitimo matas*, kuris vadinamas *imties dispersija* (angl. *sample variance*, rus. *выборочная дисперсия*) arba *empirine dispersija*:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Statistikoje naudinga ir *empirinio standarto nuokrypio* sąvoka:

$$s = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Apskaičiuosime empirinę dispersiją ir empirinį standartinį nuokrypį pateiktame pavyzdyje:

Stebiniai x_i	Nuokrypai $x_i - \bar{x}$	(Nuokrypai) ² $(x_i - \bar{x})^2$	Stebiniai y_i	Nuokrypai $y_i - \bar{y}$	(Nuokrypai) ² $(y_i - \bar{y})^2$
4	-5	25	7	-2	4
6	-3	9	8	-1	1
9	0	0	9	0	0
12	3	9	10	1	1
14	5	25	11	2	4
Iš viso	0	64	Iš viso	0	10

Kadangi $n-1=4$, tai iš lentelės gauname, kad

$$s_x^2 = 64/4 = 16; \quad s_x = \sqrt{16} \approx 4,00;$$

$$s_y^2 = 10/4 = 2,5; \quad s_y = \sqrt{2,5} \approx 1,58.$$

Perėjimas nuo imties dispersijos apibrėžimo prie atsitiktinio dydžio dispersijos apibrėžimo analogiškas perėjimui nuo imties vidurkio apibrėžimo prie atsitiktinio dydžio vidurkio apibrėžimo, todėl jo detaliau nekartosime.



Kai tyrinėtojas analizuoja statistinius duomenis, jis paprastai daro išvadas dviejų charakteristikų pagrindu. Šios charakteristikos – tai empirinis vidurkis $\bar{x}$ ir empirinis kvadratinis nuokrypis s .

Rusų matematikas P.L. Čebyševs (1821-1894) įrodė, kad minimalus procentas stebinių, kurie patenka į intervalą $(\bar{x} - ks; \bar{x} + ks)$, kur k - natūrinis skaičius, yra $(1 - 1/k^2) \cdot 100$. Detalizuosime šį teiginį labiausiai paplitusiems praktikoje atvejams $k = 2$ ir $k = 3$.

Empirinė Čebyševs taisyklė. *Mažiausiai 75% stebinių patenka į intervalą $(\bar{x} - 2s; \bar{x} + 2s)$.
Mažiausiai 89% stebinių patenka į intervalą $(\bar{x} - 3s; \bar{x} + 3s)$.*

Klausimai ir užduotys

1. Dispersija – tai

- (a) išsklaidymo matas; (b) išbarstymo matas; (c) sklaidos matas;
- (d) antros eilės centrinis momentas; (e) visi iš išvardintųjų (a), (b), (c) ir (d);
- (f) nei vienas iš išvardintųjų (a), (b), (c) ar (d).

Kuris iš išvardintų variantų pilniausiai atspindi dispersijos sąvoką?

2. Atliekant statistinių duomenų preliminarą analizę, tyrėjas paprastai daro išvadas skaitinių charakteristikų pagrindu. Nurodykite, kuris iš išvardintų atsakymų variantų tiksliausias:

- (a) empirinis vidurkis ir empirinis kvadratinis nuokrypis;
- (b) empirinis vidurkis;
- (c) empirinis kvadratinis nuokrypis;
- (d) empirinė kvadratinė dispersija ir empirinis skirstinys.

3. Suformuluokite empirinę Čebyševs taisyklę ir savo žodžiais paaiškinkite, kaip ją suprantate ir kam ji gali būti reikalinga.

18. CENTRINĖ RIBINĖ TEOREMA (EMPIRINĖ INTERPRETACIJA)

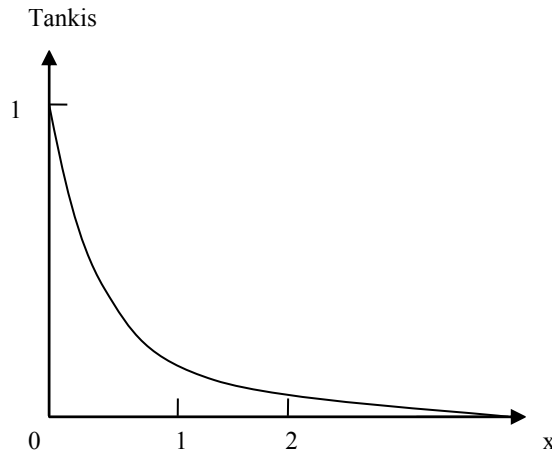
Ankstesnėse paskaitose nagrinėjome Didžiųjų skaičių dėsnį ir matėme, kad *didelio skaičiaus nepriklausomų populiacijos stebinių aritmetiniai vidurkiai $\bar{X}$ artėja prie šios populiacijos vidurkio μ* . Šioje paskaitoje žengsime toliau – nagrinėsime $\bar{X}$ skirstinio funkciją, nes, žinodami atsitiktinio dydžio skirstinio funkciją, turime visą informaciją ir apie patį atsitiktinį dydį.

Kadangi $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_n) / n$, tai $\bar{X}$ skirstinio funkcija, atrodytų, turi labai priklausyti nuo atsitiktinių dydžių $X_1, \dots, X_n$ skirstinio funkcijos. Žodžio „atrodytų“ pastarajame sakinyje išvis neturi būti, kai n yra mažas. Nesunku tuo įsitikinti, apskaičiuojant $\bar{X}$ skirstinio funkciją tiesiogiai, kai populiacija sudaryta, pavyzdžiui, iš dviejų ar keturių elementų.

Toks tiesioginis $\bar{X}$ skirstinio funkcijos radimas bendru atveju, suprantama, nėra paprastas uždavinys. Todėl tikrai nuostabia ir svarbia galima pavadinti teoremą, kuri tvirtina, kad jei n yra pakankamai didelis, tai $\bar{X}$ skirstinio funkcija yra artima normaliajam skirstiniui. Tai centrinė ribinė teorema. Suformuluosime ją tokioje formoje, kuri yra suprantama kiekvienam, taikančiam statistikos rezultatus praktikoje.

1 TEOREMA (CENTRINĖ RIBINĖ TEOREMA). Tegu $X_1, \dots, X_n$ - *praktiškai bet kokia atsitiktinė imtis su vidurkiu μ ir standartiniu nuokrypiu σ* . Tada empirinio vidurkio $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_n) / n$ skirstinio funkcija gali būti pakankamai gerai aproksimuota normaliuoju skirstiniu su vidurkiu μ ir standartiniu nuokrypiu $\sigma / \sqrt{n}$, jei tik n yra pakankamai didelis.

Norėdami pailiustruoti plačią centrinės ribinės teoremos veikimo sritį, išnagrinėsime pavyzdį, kai ėmimas atliekamas iš populiacijos, kurios skirstinys yra tolygus, nesimetris ir kurio tankis $p(x)$ gerokai skiriasi nuo normaliojo:



Centrinės ribinės teoremos praktinio „patikrinimo“ pavyzdyje tankis parinktas taip, kad gerokai skirtųsi nuo normaliojo tankio

Kaip matyti iš brėžinio, pasirinktas tankis yra eksponentinė funkcija, $p(x) = \exp(-x)$, kai $x > 0$, ir $p(x)=0$, kai $x \geq 0$. Tokiu atveju pati populiacija turi taip vadinamą *eksponentinį skirstinį* su vidurkiu $\mu=1$ ir dispersija $\sigma^2=1$. Kompiuteriu galima sumodeliuoti šio skirstinio 200 imčių, kurių kiekvienos dydis $n = 30$. Tuo tikslu sudarome imtį iš tolygiai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio, pasinaudoję funkcija **Rand()**, kuri generuoja tolygiai pasiskirsčiusius skaičius intervale $[0;1]$ (jei turėtume intervalą $[a;b]$, tai parinktume funkciją **Rand()*(b-a)+a**). Tokiu būdu gauname tolygiai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio imtį, kurios dydis $n=6000$. Taupydami vietą, vietoj dydžio $30*200$ lentelės čia pateikiame tik dalį šios imties, pavaizduotos lentelė $9*55$:

0,1848	0,5884	0,9343	0,5968	0,3787	0,9962	0,6601	0,1009	0,8611
0,9809	0,3992	0,6729	0,1115	0,2547	0,9836	0,9846	0,0436	0,7444
0,1779	0,8850	0,7969	0,7468	0,1343	0,9232	0,1752	0,7817	0,7374
0,4483	0,0437	0,6268	0,3809	0,2029	0,4648	0,7252	0,6661	0,5845
0,7989	0,6252	0,7368	0,4835	0,0827	0,8756	0,4727	0,0855	0,8238
0,4545	0,6063	0,1165	0,4562	0,1183	0,6384	0,0790	0,9254	0,2254
0,4522	0,6392	0,2291	0,2740	0,4409	0,3070	0,3317	0,5011	0,6566
0,3763	0,8566	0,8234	0,9647	0,4779	0,1511	0,1381	0,4753	0,4268
0,4456	0,6118	0,2645	0,4698	0,1219	0,1761	0,0277	0,2396	0,9257
0,0698	0,2685	0,2580	0,4153	0,3913	0,2975	0,5761	0,4770	0,1334
0,6911	0,0751	0,7834	0,3483	0,9069	0,6413	0,2500	0,7879	0,7520
0,8746	0,8832	0,0102	0,2672	0,1574	0,6592	0,1365	0,5699	0,9378
0,5236	0,3453	0,3768	0,0795	0,3218	0,3571	0,0610	0,6356	0,6832
0,1576	0,1484	0,2992	0,1377	0,2754	0,4657	0,3804	0,1663	0,5077
0,2043	0,6136	0,4338	0,1351	0,6138	0,8221	0,9097	0,0794	0,1298
0,6572	0,1213	0,6135	0,1865	0,3641	0,6217	0,5492	0,6387	0,7271
0,6119	0,4362	0,6467	0,0011	0,7645	0,6331	0,0244	0,5215	0,4576
0,4762	0,8751	0,2525	0,0701	0,7115	0,4065	0,3076	0,1496	0,1818
0,1549	0,3011	0,8877	0,2521	0,3054	0,4839	0,7612	0,9736	0,5039
0,3966	0,7289	0,8006	0,2530	0,8133	0,7498	0,7054	0,0986	0,9062

0,0883	0,7576	0,3063	0,4595	0,8528	0,3373	0,4714	0,3723	0,4310
0,1993	0,6136	0,1047	0,3598	0,0848	0,0819	0,8196	0,1658	0,2214
0,2985	0,5242	0,2362	0,1812	0,2935	0,3351	0,3513	0,9679	0,3593
0,0911	0,9051	0,7366	0,1916	0,9752	0,9983	0,0326	0,5830	0,0141
0,7861	0,1182	0,3392	0,1543	0,4009	0,7796	0,2837	0,6622	0,0102
0,8214	0,1417	0,9744	0,7900	0,5323	0,2949	0,9544	0,3784	0,8211
0,7365	0,7748	0,8747	0,2146	0,3661	0,4558	0,3432	0,0020	0,5919
0,4457	0,2446	0,8448	0,7630	0,8132	0,9687	0,8012	0,9633	0,4490
0,4403	0,6281	0,8385	0,9378	0,2016	0,7254	0,4173	0,3963	0,6271
0,0131	0,3305	0,2467	0,9281	0,8595	0,3999	0,4040	0,4337	0,9836
0,2245	0,9347	0,1200	0,7809	0,1275	0,9317	0,5802	0,2221	0,5296
0,1624	0,9421	0,6284	0,0303	0,6450	0,4629	0,9073	0,3521	0,3317
0,0017	0,0924	0,4456	0,5151	0,2379	0,4136	0,2015	0,9983	0,9461
0,1701	0,5218	0,6622	0,4383	0,8144	0,7883	0,4805	0,1943	0,2660
0,1057	0,7485	0,7670	0,7946	0,3014	0,4042	0,7470	0,4728	0,1723
0,6903	0,4732	0,4750	0,0880	0,0587	0,3575	0,9885	0,9885	0,0424
0,2328	0,9316	0,1737	0,6832	0,4493	0,3114	0,6168	0,8243	0,1277
0,1451	0,8157	0,0936	0,3008	0,4418	0,7476	0,7874	0,8226	0,6597
0,4500	0,0046	0,9128	0,5105	0,1310	0,7634	0,1718	0,1905	0,3882
0,6941	0,3364	0,8584	0,2038	0,2581	0,4928	0,1689	0,9654	0,2088
0,1359	0,8183	0,0228	0,1635	0,8739	0,2101	0,1720	0,4419	0,1833
0,9165	0,4892	0,2917	0,3606	0,8208	0,8108	0,9470	0,3016	0,3511
0,1595	0,1237	0,2992	0,8862	0,3070	0,3265	0,5729	0,4943	0,6831
0,4939	0,7874	0,3405	0,6984	0,1327	0,9340	0,9796	0,5831	0,1517
0,8024	0,5238	0,3393	0,3764	0,9579	0,9153	0,4777	0,6485	0,1557
0,8466	0,4157	0,7718	0,7439	0,1403	0,8430	0,2017	0,1164	0,3008
0,5256	0,9122	0,0275	0,5367	0,9605	0,0975	0,7564	0,1410	0,7695
0,3912	0,9736	0,3206	0,5103	0,7130	0,7694	0,0913	0,8799	0,5372
0,0915	0,8347	0,4535	0,5445	0,0779	0,5935	0,3626	0,6729	0,1046
0,8742	0,5031	0,9562	0,6532	0,3621	0,2947	0,0595	0,7414	0,2501
0,3404	0,6940	0,4474	0,4028	0,0119	0,4649	0,4518	0,4930	0,5552
0,6815	0,8447	0,8425	0,9822	0,4709	0,3410	0,1181	0,5333	0,6111
0,0105	0,2626	0,6580	0,0813	0,0675	0,9684	0,5077	0,5114	0,4117
0,4189	0,1671	0,7071	0,0002	0,7018	0,9622	0,8712	0,4407	0,7201
0,3008	0,7519	0,2910	0,5667	0,3060	0,1070	0,7975	0,3967	0,5941

Apskaičiuojame gautos imties vidurkį, dispersiją ir standartinį nuokrypį atitinkamai pasinaudoję funkcijomis **AVERAGE**, **VAR**, **STDEV**. Rezultatai pateikti lentelėje:

Vidurkis	0,4983
Dispersija	0,0831
Standartinis nuokrypis	0,2883

Apskaičiuosime teorinį vidurkį, dispersiją ir standartinį nuokrypį tikslu palyginti, ar šie teoriniai parametrai yra artimi empiriniui vidurkiui, dispersijai ir standartiniam nuokrypiui. Taigi, kadangi tolygusis skirstinys šiuo atveju apibrėžtas intervale $[0;1]$, tai teorinis vidurkis dispersija ir standartinis nuokrypis apskaičiuojami taip:

$$EX = \int_0^1 x dF(x) = \int_0^1 x dx = \frac{1-0}{2} = 0,5$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 dF(x) = \int_0^1 (x - 0,5)^2 dx = \frac{1}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{DX} = 0,2887.$$

Surašome gautus rezultatus į lentelę:

Vidurkis	0,5
Dispersija	0,0833
Standartinis nuokrypis	0,2887

Pastebim, kad šie rezultatai yra artimi empiriniam vidurkiui, dispersijai ir standartiniam nuokrypiui. Pailiustruosime grafiškai - histogramų pagalba - Centrinės ribinės teoremos (CRT) veikimą. Tuo tikslu apskaičiuojame kiekvienos duomenų eilutės (paimtos iš dydžio 30*200 lentelės, kurią aukščiau pateikėme sumažintą iki dydžio 9*55), sudarytos iš 30 elementų, aritmetinį vidurkį, tuo tikslu pasinaudodami funkcija **AVERAGE**, ir gautus duomenis (o jų, aišku, yra 200) užrašome lentelėje, kurią vėl dėl vietos stokos pateikiame perpus sumažintą:

Numeris i	$\bar{X}_i(30)$	Numeris i	$\bar{X}_i(30)$	Numeris i	$\bar{X}_i(30)$	Numeris i	$\bar{X}_i(30)$
1	0,4884	26	0,5858	51	0,4660	76	0,4465
2	0,5266	27	0,4609	52	0,4616	77	0,4581
3	0,5253	28	0,6148	53	0,4590	78	0,4443
4	0,4973	29	0,5900	54	0,5050	79	0,5339
5	0,4588	30	0,5488	55	0,4802	80	0,4891
6	0,4019	31	0,4424	56	0,4391	81	0,5362
7	0,4539	32	0,5008	57	0,5532	82	0,5262
8	0,4436	33	0,5004	58	0,5237	83	0,4527
9	0,4346	34	0,4670	59	0,5244	84	0,5073
10	0,4350	35	0,5128	60	0,4817	85	0,4963
11	0,5175	36	0,5080	61	0,4808	86	0,4444
12	0,5189	37	0,5094	62	0,5714	87	0,4538
13	0,4651	38	0,5353	63	0,5519	88	0,5408
14	0,3987	39	0,4570	64	0,4578	89	0,4203
15	0,4649	40	0,4294	65	0,5128	90	0,4552
16	0,4247	41	0,5010	66	0,5351	91	0,5898

17	0,4959	42	0,5238	67	0,5011	92	0,4547
18	0,4236	43	0,4737	68	0,4746	93	0,4809
19	0,5329	44	0,4932	69	0,4591	94	0,5093
20	0,4750	45	0,5333	70	0,4994	95	0,5613
21	0,4603	46	0,5274	71	0,6738	96	0,6440
22	0,3949	47	0,4972	72	0,5388	97	0,4079
23	0,5346	48	0,4388	73	0,5909	98	0,5453
24	0,5456	49	0,5490	74	0,6041	99	0,4966
25	0,4568	50	0,5343	75	0,5707	100	0,4756

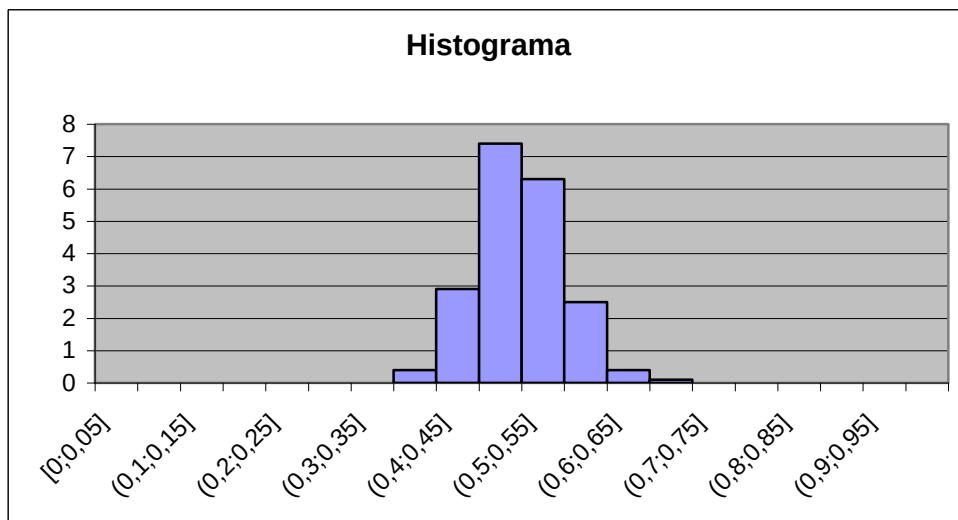
Svarbu pabrėžti, kad kalba eina apie CRT, o ne apie Didžiųjų skaičių dėsnį (DSD). Taigi, norime pailiustruoti, kad empirinio vidurkio $\bar{X}(n)$ tankis artimas normaliajam tankiui. Kaip tai darom? Sudarėme imtį iš tolygiai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio. Pasirinkome $n=30$. Apskaičiuojame $\bar{X}_1(n)$. Paimame kitą imtį su tuo pačiu $n=30$. Apskaičiuojame $\bar{X}_2(n)$. Ir tęsiame taip toliau iki pat $\bar{X}_{200}(n)$. Taigi, turime 200 empirinio vidurkio reikšmių, kai imtys buvo imamos vieno ir to paties dydžio, o būtent, $n=30$. Šių 200 empirinio vidurkio reikšmių pagrindu sudarysime histogramą. Pagal CRT, ši histograma turi būti pakankamai gerai aproksimuojama normaliuoju tankiu su $\mu=0.5$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.2887}{\sqrt{30}} = 0.052709$. Čia μ ir σ - populiacijos vidurkis ir kvadratinis nuokrypis, t.y. teoriniai parametrai, kuriuos ką tik aukščiau apskaičiavome analitiškai. Mūsų užduotis – palyginti histogramą ir normaliojo tankio su šiais teoriniais parametrais grafiką.

Pereiname prie histogramos sudarymo. Tuo tikslu sudarome lentelę, kurioje paskaičiuojame gautų aritmetinių vidurkių intervalinius santykinius dažnius. Reikšmių diapazonu pasirenkame 0,1. Gauname tokia $\bar{X}$ skirstinio tankių lentelę:

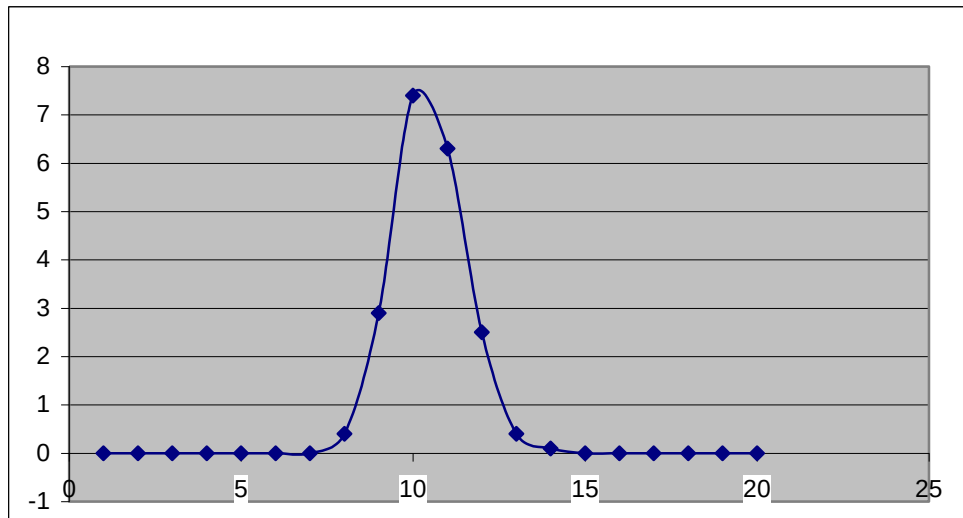
Intervalas	Dažnis	Santykinis dažnis	Histogr. stulp. aukštis	Intervalo vidurio taškas	Normaliojo tankio reikšmė
[0;0,05]	0	0	0	0,025	1,755E-17
(0,05;0,1]	0	0	0	0,075	5,7737E-14
(0,1;0,15]	0	0	0	0,125	7,7239E-11
(0,15;0,2]	0	0	0	0,175	4,2017E-08
(0,2;0,25]	0	0	0	0,225	9,2941E-06
(0,25;0,3]	0	0	0	0,275	0,00083598

(0,3;0,35]	0	0	0	0,325	0,03057651
(0,35;0,4]	4	0,02	0,4	0,375	0,45475876
(0,4;0,45]	29	0,145	2,9	0,425	2,75027733
(0,45;0,5]	74	0,37	7,4	0,475	6,76354207
(0,5;0,55]	63	0,315	6,3	0,525	6,76354207
(0,55;0,6]	25	0,125	2,5	0,575	2,75027733
(0,6;0,65]	4	0,02	0,4	0,625	0,45475876
(0,65;0,7]	1	0,005	0,1	0,675	0,03057651
(0,7;0,75]	0	0	0	0,725	0,00083598
(0,75;0,8]	0	0	0	0,775	9,2941E-06
(0,8;0,85]	0	0	0	0,825	4,2017E-08
(0,85;0,9]	0	0	0	0,875	7,7239E-11
(0,9;0,95]	0	0	0	0,925	5,7737E-14
(0,95;1]	0	0	0	0,975	1,755E-17
Viso	200	1			

Šios lentelės pagrindu sudarome histogramą:



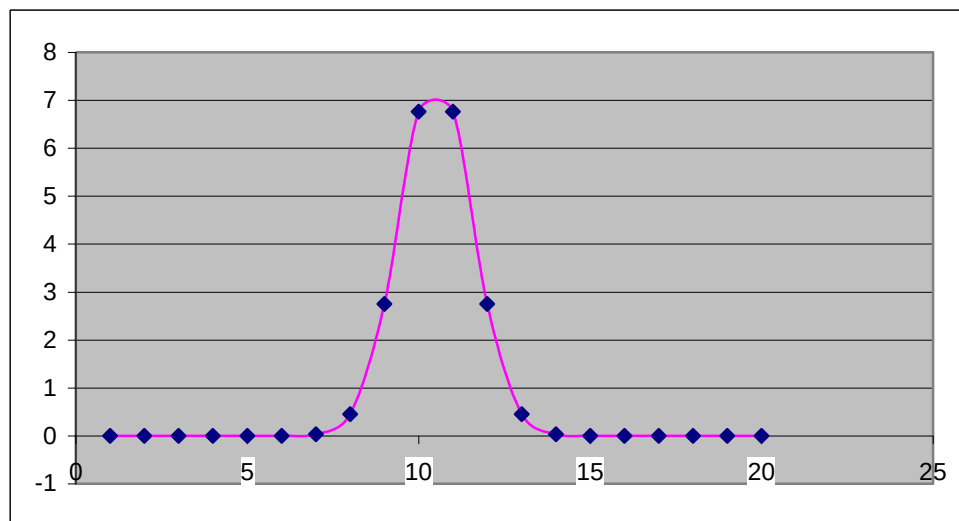
Braižome taškinę diagramą pagal histogramos intervalų vidurio taškus:



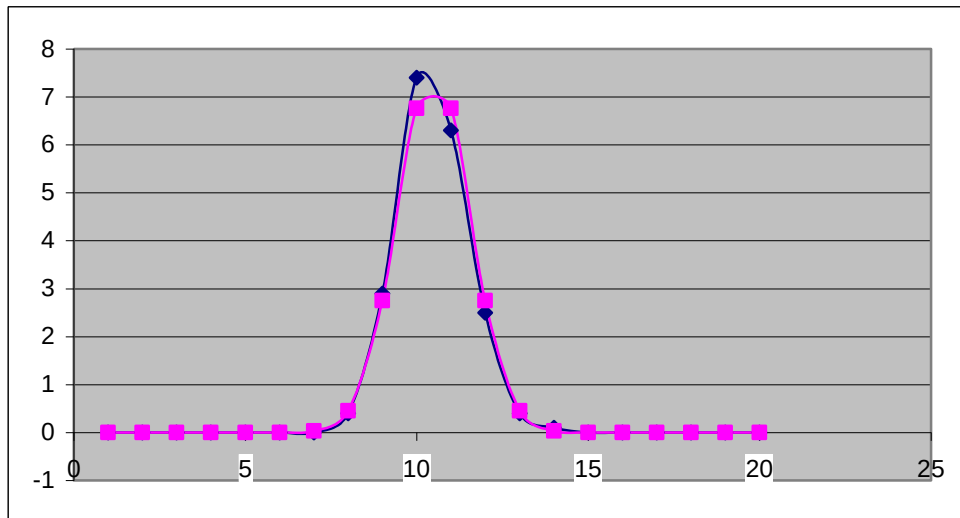
Tuose pat vidurio taškuose skaičiuojame normaliojo tankio

NORMDIST(vid.taškas;0,5;0,052709;false)

reikšmes ir pagal jas sudarome taškinę diagramą:



Pagaliau palyginame abi taškines diagramas:



IŠVADA. Nagrinėjamo atveju histograma pakankamai gerai aproksimuojama normaliuoju tankiu.

Patogi kita centrinės ribinės teoremos forma, leidžianti ją trumpai suformuluoti taip:

2 TEOREMA. (Centrinės ribinės teoremos sutrumpinta forma) *Jei imties dydis n yra pakankamai didelis, tai bet kuriems realiems a ir b*

$$P\left(a < \bar{X} < b\right) \approx P\left(\frac{a - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right),$$

t.y. $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ skirstinio funkcijos yra pakankamai gerai aproksimuojamos standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio Z skirstiniu.

Centrinėje ribinėje teoremoje yra prielaida, kad imties didumas n būtų pakankamai didelis. Bet kokią n skaityti pakankamai dideliu?

Jei populiacijos skirstinys yra simetrinis, tai aproksimacija normaliuoju skirstiniu daugeliu atvejų pakankamai tiksli jau kai $n = 10$.

Bendru atveju aproksimacija normaliuoju skirstiniu yra pakankamai gera, imties dydžiui n pasiekus skaičių 30. Žinoma, kuo imties dydis n yra didesnis, tuo tikslesnė yra aproksimacija normaliuoju skirstiniu.

1 PAVYZDYS. Lemputės egzistavimo laikotarpis skaičiuojamas valandomis yra atsitiktinis dydis, kurio vidurkis yra 500, o standartinis nuokrypis yra 35. Kokia tikimybė, kad atsitiktinė imtis, sudaryta iš 49 elementų, turės vidurkį tarp 488 ir 505?

SPRENDIMAS. Turime, kad $\mu = 500$, $\sigma = 35$, $n = 49$. Taigi, $\mu_{\bar{X}} = 500$ ir

$$\sigma_{\bar{X}} = 35 / \sqrt{49} = 5.$$

Mus domina tikimybė $P(488 < \bar{X} < 505)$:

$$P(488 < \bar{X} < 505) \approx P\left(\frac{488-500}{5} < Z < \frac{505-500}{5}\right) = P(-2,4 < Z < 1) = 0,31413 + 0,4918 = 0,8331.$$

Čia mes pasinaudojome standartinio normaliojo skirstinio reikšmių lentelėmis ir toliau trumpai pakomentuosime gautą rezultatą.

Taigi tarkime, kad mes atsitiktinai renkamės lemputes iš elektros lempučių aibės, kaskart pasirinkdami 49 lempučių rinkinį. Apskaičiavę šių lempučių veikimo trukmę, gauname konkrečiąją imtį, kurios dydis $n = 49$. Kiekvienai tokiai imčiai apskaičiuojame empirinį vidurkį. Tada apytiksliai 83% iš nagrinėjamų empirinių vidurkių turės reikšmes tarp 488 ir 505 valandų.

2 PAVYZDYS. Agentūros tyrimas parodė, kad vidutinės JAV studento išlaidos 1999-aisiais metais sudarė 8000\$, o išlaidų standartinis nuokrypis sudarė 800\$. Apskaičiuoti apytiksliai tikimybę, kad atsitiktinai parinktų 64 studentų išlaidos:

- a) Viršys 7820\$;
- b) Bus tarp 7800\$ ir 8120\$.

SPRENDIMAS. Turime, kad $\mu = 8000$, $\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n} = 800 / \sqrt{64} = 100$.

- a) Norime rasti $P(\bar{X} > 7820)$. Standartizuojuame:

$$P(\bar{X} > 7820) \approx P\left(Z > \frac{7820-8000}{100}\right) = P(Z > -1.8) = 0,9641.$$

- b) Norime apskaičiuoti $P(7800 < \bar{X} < 8120)$. Standartizuojuame:

$$P(7800 < \bar{X} < 8120) \approx P\left(\frac{7800-8000}{100} < Z < \frac{8120-8000}{100}\right) = P(-2 < Z < 1.2) = 0,3849 + 0,4772 = 0,8621.$$

Interpretacija: jei nagrinėsime didelį skaičių imčių, kurių kiekvienoje bus po 64 studentus, apytiksliai 86,2% iš šių imčių turės vidurkį tarp 7800\$ ir 8120\$.

3 PAVYZDYS. Komercinei reklamai skirtas laiko kiekis (minutėmis) TV kanalo pusvalandinėje laidoje yra atsitiktinis dydis, kurio vidurkis yra apytiksliai 6,3 min. Ir kurio standartinis nuokrypis yra 0,866 min. Kokia yra apytikslė tikimybė įvykio, kad asmuo, kuris žiūri 36-erias pusvalandines laidas, bus priverstas virš 220 min. žiūrėti reklamą?

SPRENDIMAS. Čia $\mu = 6.3$, $\sigma = 0.866$, $n = 36$ (pusvalandinių programų skaičius). Tarkime, kad $n = 36$ – pakankamai didelis skaičius, todėl $\bar{X}$ skirstinį galima aproksimuoti normaliuoju skirstiniu (čia $\bar{X}$ - vidurkis reklamai skirto laiko per pusvalandį).

Kadangi įvykis asmuo per 36 laidas bus priverstas > 220 min. žiūrėti reklamą ekvivalentus įvykiui „ $36 \bar{X} > 220$ “ t.y. mums reikia rasti $P(\bar{X} > 220/36 = 6,111\text{min})$, kur

$$\mu_{\bar{X}} = 6.3, \sigma_{\bar{X}} = 0.866/\sqrt{36} = 0.1443.$$

$$\text{Todėl: } P(\bar{X} > 6,111) \approx P\left(Z > \frac{6,111-6.3}{0.1443}\right) = P(Z > -1.31) = 0.9049.$$

pasinaudosime tokia išvada:

CRT IŠVADA	
Atsitiktinių dydžių sumos $\sum X_i$ skirstinys yra apytiksliai normalus su vidurkiu $n\mu$ ir standartiniu nuokrypiu $\sigma\sqrt{n}$, jei n pakankamai didelis: $P\left(a < \sum X_i < b\right) \approx P\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < Z < \frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad (*)$	

Pritaikius šią išvadą paskutiniam, 3 pavyzdžiui, turime:

$$P\left(\sum X_i > 220\right) \approx P\left(Z > \frac{220-36 \times 6,3}{0,8666 \times \sqrt{36}}\right) = P(Z > -1.31) = 0.9049.$$

4 PAVYZDYS. Sunkvežimio vairuotojas, vežantis 900 dėžių su knygomis, turės mokėti baudą, jei krovinio svoris viršys 36450 svarų. Jei atsitiktinio dydžio, išreiškiančio dėžės svorį, vidurkis yra 40 svarų, o standartinis nuokrypis yra 6, tai apskaičiuoti tikimybę, kad vairuotojui teks mokėti baudą.

SPRENDIMAS. Formulėje (*) turime: $\mu = 40$, $\sigma = 6$, $a = 36450$, $b = +\infty$. Tada

$$P\left(\sum_{i=1}^{900} X_i > 36450\right) = P\left(Z > \frac{36450 - 900 \times 40}{6 \cdot \sqrt{900}}\right) = P(Z > 2.5) = 0,0062.$$

Klausimai ir užduotys

1. Centrinėje ribinėje teoremoje kalbama apie:
 - (a) atsitiktinių dydžių sumos skirstinių konvergavimą;
 - (b) atsitiktinių dydžių vidurkių sumos konvergavimą;
 - (c) atsitiktinių dydžių vidurkių sumos konvergavimą ir atsitiktinių dydžių sumos skirstinių konvergavimą.
2. Centrinėje ribinėje teoremoje kalbama apie:
 - (a) aproksimaciją tolygiuoju skirstiniu;
 - (b) aproksimaciją normaliuoju skirstiniu;
 - (c) aproksimaciją Puasono skirstiniu.
3. Suformuluokite CRT sutrumpintoje formoje.

19. TIESINIS SĄRYŠIS. POSTŪMIO IR KRYPTIES KOEFICIENTAI. TIESINĖS KORELIACIJOS KOEFICIENTAS



Realiaame gyvenime yra labai daug dydžių, kurie tarpusavyje yra vienaip ar kitaip susiję, t.y. priklausomi

1. Realiam gyvenime yra labai daug dydžių, kurie tarpusavyje yra vienaip ar kitaip susiję, t.y. priklausomi. Paprasčiausia iš šių priklausomybių yra tiesinis sąryšis. Šio sąryšio nagrinėjimą pradėsime tokiu pavyzdžiu.

Tarkime, kad kelionė taksi kainuoja 0,9 Lt už vieną pravažiuotą su keleiviu kilometrą. Jei keleivis pravažiavo taksi x km, tai ši jo kelionė kainuos y Lt,

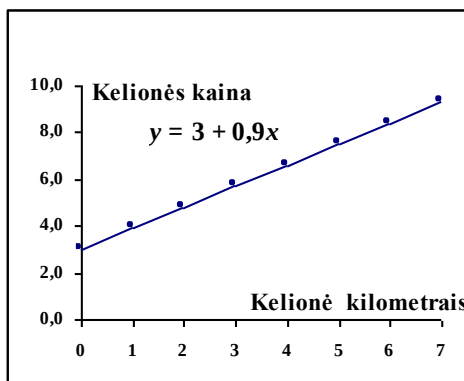
$$y = 0,9x$$

Tarkime dabar, kad už įlaipinimą imamas 3 Lt papildomas mokestis. Tada, akivaizdu,

$$y = 3 + 0,9x.$$

Konkrečius duomenis nesunku pavaizduoti lentele ir grafiškai (tiesė kyla iš kairės į dešinę - žr. pav.).

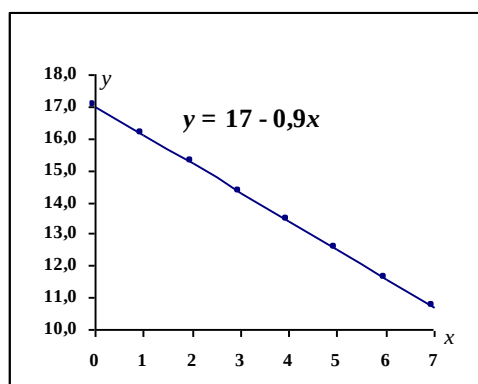
Kelionė kilometrais x	Kelionės kaina litais y
0	3,0
1	3,9
2	4,8
3	5,7
4	6,6
5	7,5
6	8,4
7	9,3



Pav. Paprasčiausias dydžių tarpusavio priklausomybės atvejis - tiesinis sąryšis

2. Tarkime toliau, kad keleivis, įsėdamas į taksi, turėjo 20 Lt. Tada po x km kelionės jo piniginėje liks $y = 20 - (3 + 0,9x) = 17 - 0,9x$ litų. Konkrečius y priklausomybės nuo x duomenis pateiksime lentele ir grafiškai (tiesė leidžiasi iš kairės į dešinę):

Kelionė kilometrais x	Likutis litais y
0	17,0
1	16,1
2	15,2
3	14,3
4	13,4
5	12,5
6	11,6
7	10,7



Pav. Tiesinis sąryšis, kuriame krypties koeficientas yra neigiamas

3. Bendru atveju *tiesinis sąryšis* tarp kintamųjų x ir y matematiškai išreiškiamas tiesine lygtimi

$$y = a + bx,$$

kur koeficientai a ir b yra parametrai, nusakantys tiesės vietą ir kryptį.

Jeigu b , koeficientas prie x , yra teigiamas, tai tiesė kyla iš kairės į dešinę, o jei b yra neigiamas, tai tiesė leidžiasi iš kairės į dešinę. Abi situacijas buvome pavaizdavę grafiškai atvejams $b = 0,9$ ir $b = -0,9$.

Norėdami apskaičiuoti parametą b , suteikime kintamajam x vienetinį prieauglį, t.y. pakeiskime x į $x + 1$. Atitinkamai y pasikeis į y_1 . O kadangi

$$y = a + bx, \quad y_1 = a + b(x + 1),$$

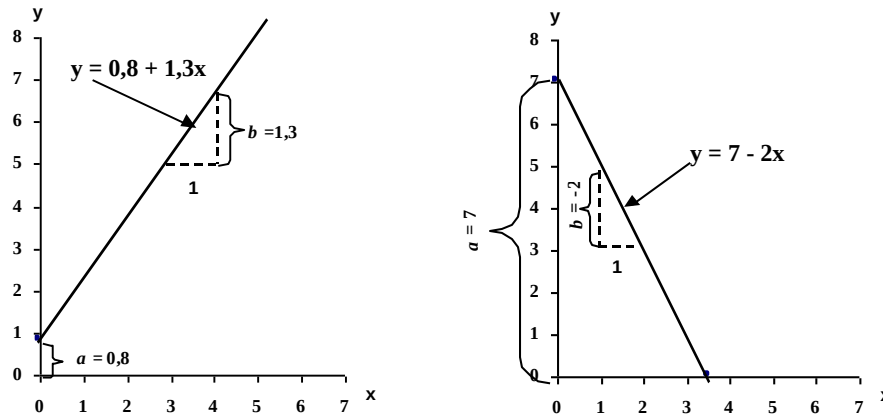
tai atimdami gauname, kad

$$y_1 - y = b.$$

Taigi b reprezentuoja y pokytį, x įgijus vienetinį prieauglį, ir yra vadinamas tiesės **krypties koeficientu**.

Kai $x = 0$, tai $y = a$. Parametras a yra vadinamas **postūmio koeficientu**.

Postūmio ir krypties koeficientai pavaizduoti šiuose dviejuose grafikuose:



Pav. Krypties koeficientas reprezentuoja y pokytį, x įgijus vienetinį prieauglį

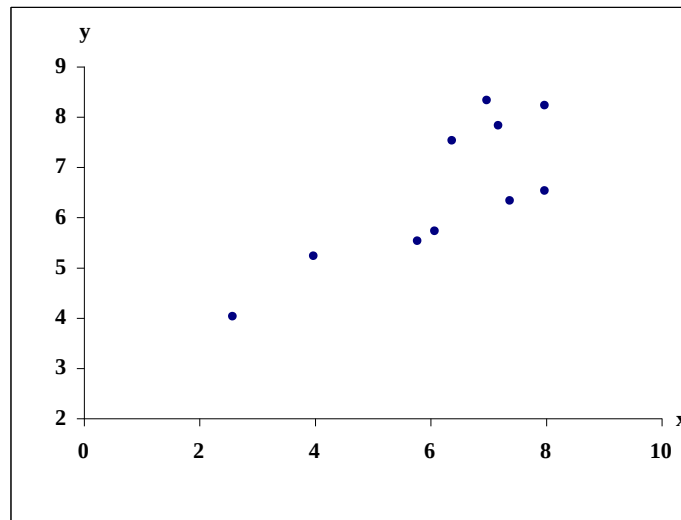
4. Režiumuosime tai, kas buvo išdėstyta šiame skyrelyje.

Tiesinio sąryšio lygtis užrašoma forma $y = a + bx$, kurioje postūmio koeficientas a parodo y reikšmę taške $x = 0$, o krypties koeficientas b išreiškia tiesės nuolydį, kuris prilyginamas y pokyčiui, kai x įgyja vienetinį prieauglį. Jei b yra teigiamas, tai y auga, kai auga x ; jei b yra neigiamas, tai y mažėja, kai auga x . Jei, pagaliau, $b = 0$, tai y yra konstanta ir $y = a$.

5. Universitete buvo atliktas tyrimas, kurio tikslas buvo nustatyti, ar egzistuoja priklausomybė (sąryšis) tarp studentų darbo rezultatų viso semestro metu ir egzamino metu. Tuo tikslu buvo atitinkamai pasirinkti 10 studentų. Jų namų darbų rezultatai bei apklausa pratybų metu fiksuojami viso semestro metu, o po to išvestas vidurkis, kuris buvo lyginamas su egzamino rezultatais. Egzamino įvertinimas - tai pažymio už atsakymą žodžiu ir pažymio už uždavinio sprendimą raštu vidurkis. Buvo gauta tokia lentelė ir tokia diagrama:

Apskaita (pažymiai) semestro metu x	Apskaita (pažymiai) sesijos metu y
5,8	5,5
6,4	7,5
8,0	8,2
7,4	6,3

4,0	5,2
7,0	8,3
7,2	7,8
2,6	4,0
8,0	6,5
6,1	5,7



Pav. Sąryšio tarp studentų darbo rezultatų viso semestro metu ir egzamino metu tyrimo rezultatai

6. Tokio tipo diagramos dar yra vadinamos **sklaidos diagramomis**. Išanalizavę šią diagramą ir duomenis lentelėje darome išvadą, kad tie studentai, kurie gavo aukštesnius pažymius semestro metu, gavo aukštus pažymius ir egzamino metu. Atvirkščiai, tie studentai, kurie gavo mažus pažymius semestro metu, gavo mažus pažymius ir egzamino metu. Tokio tipo sąryšis tarp x ir y vadinamas **teigiamu sąryšiu**.

Iš kitos pusės, jei didelėms x reikšmėms atitinka mažos y reikšmės, o mažoms x reikšmėms atitinka didelės y reikšmės, tai toks sąryšis tarp x ir y vadinamas **neigiamu** (arba **atvirkštinu**) **sąryšiu**. Neigiamo sąryšio pavyzdžiu galėtų būti sąryšis tarp automobilio kainos ir jo eksploatacijos metų skaičiaus.

7. Iš diagramos matome, kad taškai (x_i, y_i) išdėstyti ne atsitiktinai, ne bet kaip, o išsisklaidę tam tikru būdu aplink tiesę, daugiau ar mažiau su ja susieti nagrinėjamu sąryšiu.

Matas, charakterizuojantis sąryšio artumą šiai tiesei, yra vadinamas tiesinės koreliacijos koeficientu arba tiesiog koreliacijos koeficientu:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

kur

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$$

Klausimai ir uždavys

1. Kuris iš šių teiginių yra teisingas:
 - (a) krypties koeficientas b išreiškia tiesės nuolydį, kuris prilyginamas x pokyčiui, kai y įgyja vienetinį prieauglį;
 - (b) krypties koeficientas b išreiškia tiesės nuolydį, kuris prilyginamas y pokyčiui, kai x įgyja vienetinį prieauglį;
 - (c) Tiesinio sąryšio lygtis užrašoma forma $y = a + bx$, kurioje postūmio koeficientas a išreiškia tiesės nuolydį.
2. Kuris iš atsakymų yra ne tik teisingas, bet ir geriausiai atspindi *tiesinės koreliacijos koeficiento* sąvoką: (a) tai matas; (b) tai yra tikimybinis matas, charakterizuojantis sąryšio artumą tiesei; (c) tai yra matas, charakterizuojantis sąryšio artumą tiesei.
3. Pateikite pavyzdžių dydžių, kurie tarpusavyje yra vienaip ar kitaip susiję, t.y. priklausomi; pateikite tiesinės priklausomybės pavyzdžių.

20. KORELIACIJOS KOEFICIENTO APSKAIČIAVIMAS IR JO SAVYBĖS. REGRESIJOS TIESĖS PARINKIMAS

1. Koreliacijos koeficiento praktiniam skaičiavimui yra patogi tokia taisyklė.

Taškų $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ koreliacijos koeficientu yra vadinamas skaičius r ,

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)(n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2)}}$$

2. Apskaičiuosime koreliacijos koeficientą praeitame skyrelyje išnagrinėtame pavyzdyje apie sąryšį tarp studentų darbo rezultatų viso semestro metu ir egzamino metu. Šiame pavyzdyje $n = 10$ ir buvo gauta 10 taškų porų: (5,8; 5,5); (6,4; 7,5); (8,0; 8,2); (7,4; 6,3); (4,0; 5,2); (7,0; 8,3); (7,2; 7,8); (2,6; 4,0); (8,0; 6,5); (6,1; 5,7). Sudarome lentelę:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
5,8	5,5	33,64	30,25	31,90
6,4	7,5	40,96	56,25	48,00
8,0	8,2	64,00	67,24	65,60
7,4	6,3	54,76	39,69	46,62
4,0	5,2	16,00	27,04	20,80
7,0	8,3	49,00	68,89	58,10
7,2	7,8	51,84	60,84	56,16
2,6	4,0	6,76	16,00	10,40
8,0	6,5	64,00	42,25	52,00
6,1	5,7	37,21	32,49	34,77
Suma: 62,5	65,0	418,17	440,94	424,35

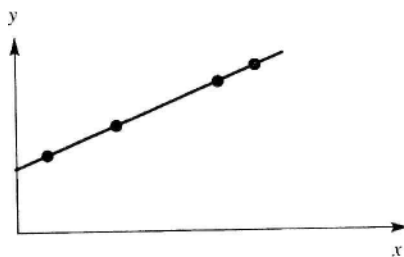
Iš koreliacijos koeficiento r formulės gauname, kad

$$r = \frac{10 \cdot 424,35 - 62,5 \cdot 65}{\sqrt{(10 \cdot 418,17 - (62,5)^2)(10 \cdot 440,94 - (65)^2)}} = 0,803.$$

3. Koreliacijos koeficiento savybės

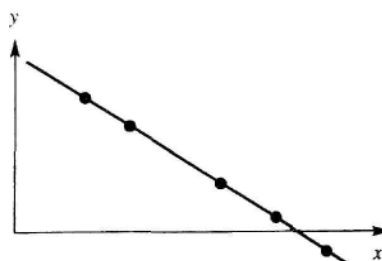
1°. Koreliacijos koeficiento reikšmės yra tarp -1 ir 1.

2°. Atvejis $r = 1$ reiškia, kad tarp y ir x yra tikslus teigiamas tiesinis sąryšis, o jo sklaidos diagramoje visi taškai išdėstyti tiesėje, kuri kyla iš kairės į dešinę:



(a) $r = 1$, teigiamas tiesinis sąryšis

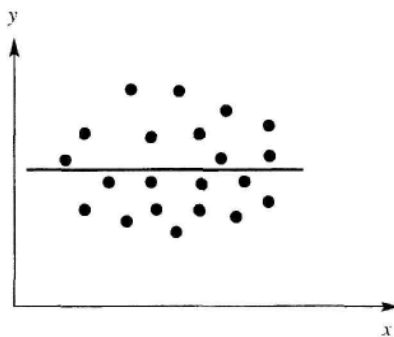
3°. Atvejis $r = -1$ reiškia, kad tarp y ir x yra tikslus neigiamas tiesinis sąryšis, o jo sklaidos diagramoje visi taškai išdėstyti tiesėje, kuri leidžiasi iš kairės į dešinę:



(b) $r = -1$, neigiamas tiesinis sąryšis

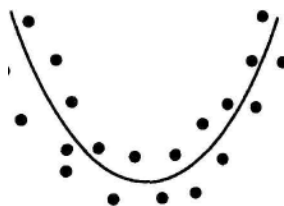
4°. Atvejis, kai r yra arti nulio, reiškia, kad yra galimas vienas iš dviejų variantų:

4.1°. Nagrinėjami dydžiai nėra arba beveik nėra susiję. Paveiksliuke žemiau pavaizduota nepriklausomų dydžių sklaidos diagrama. Tokiu atveju sąryšis tarp x ir y gali būti pavaizduotas horizontalia tiese. Dydžiai beveik nėra susiję.



(c) r arti nulio. Dydžiai beveik nėra susiję

4.2°. Nagrinėjami dydžiai yra susiję, bet ne tiesiniu sąryšiu, o, pavyzdžiui, taip, kaip yra pavaizduota paveiksliuke žemiau. Šiame piešinyje r yra arti nulio.



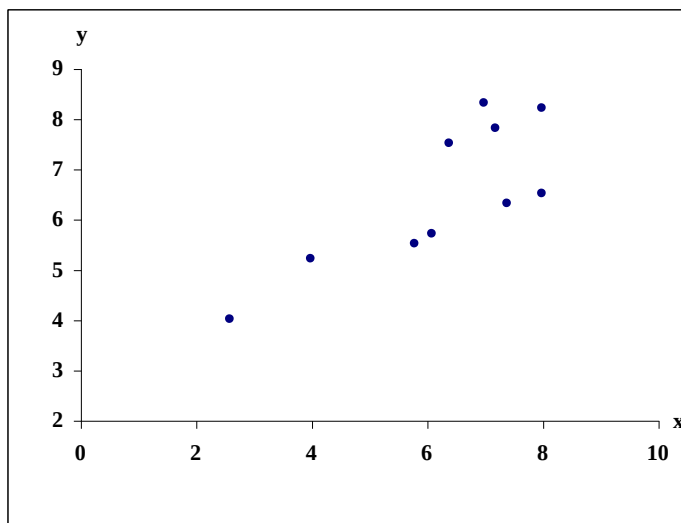
(d) r arti nulio. Dydžiai yra susiję, bet ne tiesiniu sąryšiu

4. Regresijos tiesės parinkimas

Žinodami, kad $|r| = 1$, mes galime tvirtinti, kad abu nagrinėjami dydžiai yra susiję tiesiniu sąryšiu. Dar daugiau, jei $|r|$ yra artimas vienetui, tai nagrinėjamas sąryšis yra artimas tiesiniam. Tačiau koreliacijos koeficientas r neteikia informacijos, koks yra tas tiesinis sąryšis, kokie yra postūmio ir krypties koeficientai. Šie klausimai yra nagrinėjami *regresinėje analizėje*.

Joje yra priimta nepriklausomą kintamąjį žymėti raide x , o jo reikšmės grafike atidėti horizontaliojoje x ašyje. Priklausomas kintamasis žymimas raide y , o jo reikšmės, kaip įprasta, fiksuojamos vertikalioje ašyje.

Išnagrinėjome tyrimo rezultatus apie priklausomybę tarp studentų darbo rezultatų viso semestro metu ir egzamino metu. Šio tyrimo sklaidos diagrama jau buvo pateikta:



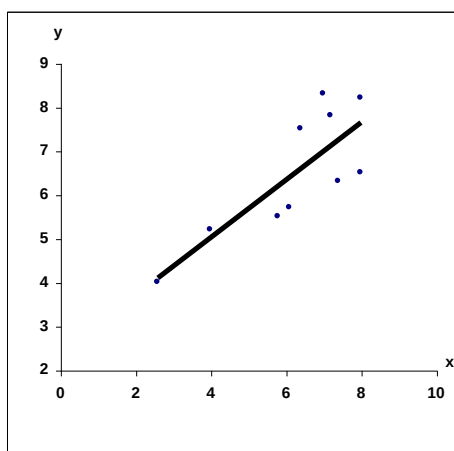
Pav. Sąryšio tarp studentų darbo rezultatų viso semestro metu ir egzamino metu tyrimo rezultatai

Ši diagrama leidžia daryti išvadą, kad nagrinėjamas sąryšis yra artimas tiesiniam. Jei visi taškai būtų išdėstyti vienoje tiesėje, rasti šios tiesės postūmio ir krypties koeficientus nebūtų sudėtinga, nes jie nusakomi vienareikšmiškai šios tiesės vieta plokštumoje. Tačiau nagrinėjamu

atveju taškai nėra sukoncentruoti vienoje tiesėje, o per juos pačius teoriškai galima nubrėžti be galo daug tiesių.

Taigi, iškyla toks uždavinys. Nubrėžti tiesę, kuri sklaidos diagramoje *geriausiai* atspindėtų taškų išdėstymo tiesiškumo tendenciją, t.y. *tiesinį trendą*.

Tačiau ką reiškia geriausiai? Detalizuojant šią sąvoką ir patį principą, leidžiantį nubrėžti tiesę, kuri geriausiai atspindėtų taškų išdėstymą, dažniausiai vadovaujamosi taip vadinamu Ležandro mažiausių kvadratų metodu. Šiuo metodu vadovavosi ir Excelio paketo kūrėjai. Exceliu nesunku nubrėžti tiesę, kuri sklaidos diagramoje geriausiai atspindėtų taškų išdėstymo tiesiškumo tendenciją, t.y. *tiesinį trendą* ir kuri yra vadinama **regresijos tiese**:



Baigus susipažinimą su tikimybių teorijos pradmenimis (pagrindinė kalno dalis) ir prieš pradedant aprašomąją statistiką (sekantis kurso žingsnelis), galima ir nusišypsoti:



— Oi, o toliau aš bijau!

Klausimai ir užduotys

1. Kuris iš atsakymų yra teisingas: (a) Koreliacijos koeficiento reikšmės yra tarp 0 ir 1;
(b) Koreliacijos koeficiento reikšmės yra tarp -1 ir 1;
(c) Koreliacijos koeficiento reikšmės yra tarp $-\pi$ ir π .
2. Nurodykite teisingą ir pilną atsakymą į tokį klausimą: *ką reiškia atvejis, kai r yra arti nulio?*
(a) nagrinėjami dydžiai nėra arba beveik nėra susiję;
(b) nagrinėjami dydžiai yra susiję, bet ne tiesiniu sąryšiu;
(c) nagrinėjami dydžiai nėra susiję, beveik nėra susiję arba yra susiję, bet ne tiesiniu sąryšiu.
3. Paaiškinkite savo žodžiais, kaip suprantate sąvokas *tiesinis trendas* ir *regresijos tiesė*.

LITERATŪRA

1. Aksomaitis. Tikimybių teorija ir statistika. Kaunas, Technologija, 2002, 347 psl.
2. V. Čekanavičius, G. Murauskas. Statistika ir jos taikymai. I, Vilnius, TEV, 2000, 239 psl.
3. K.J. Hastings. Probability and statistics. – New York, Addison-Wesley, 1997, 414 pages
4. R. Januškevičius. Statistikos įvadas. Vilnius, VPU, 2000, 172 psl.
5. Richard A. Johnson, Gouri K. Bhattacharyya. Statistics: Principles and Methods, 5th Edition, [John Wiley & Sons](#), 2005, 736 pages
6. Richard A. Johnson, Gouri K. Bhattacharyya. Statistics: Principles and Methods, third Edition, [John Wiley & Sons](#), 1996, 720 pages
7. J. Kubilius. Tikimybių teorija ir matematinė statistika. Vilnius, Mokslas, 1996, 439 psl.
8. R. Khazanie. Statistics in a world of applications. – New York, HarperCollins, 1996, 887 pages
9. Lietuvių kalbos žodynas, <http://www.lkz.lt>
10. Lietuvos standartas LST ISO 3534-1. Statistika. I dalis. Tikimybių ir bendrieji statistikos terminai, 1996, 65 psl.
11. Под ред. Ю. Д. Максимова. Вероятностные разделы математики. Санкт-Петербург, «Иван Федоров», 2001, 589 psl.
12. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М: “УРСС”, 2001, 318 psl.
13. R. Razmas, J. Teišerskis, V. Vitkus. Matematikos uždavinynas XI-XII klasei, 4-asis papild. leid., Kaunas, Šviesa, 1999, 181 psl.

PIEŠINIAI IR NUOTRAUKOS

1. Akademiko A. Kolmogorovo nuotraukos iš <http://www.kolmogorov.pms.ru/>
2. Dailininkų Г. Бойко, И. Шалито piešiniai iš serijos „Eureka“ knygos Л. Бобров “Фундамент оптимизма”, Москва, Молодая Гвардия, 1976, 208 стр.
3. Dailininkų А. Колли, И. Чураков piešiniai iš serijos „Eureka“ knygos Л. Бобров “По следам сенсаций”, Москва, Молодая Гвардия, 1966, 272 стр.
4. Dailininkų А. Колли, И. Чураков piešiniai iš serijos „Eureka“ knygos В. Португал “Беседы об АСУ”, Москва, Молодая Гвардия, 1977, 208 стр.
5. Dailininkų А. Колли, И. Чураков piešiniai iš serijos „Eureka“ knygos Я. Коломинский “Беседы о тайнах психики”, Москва, Молодая Гвардия, 1976, 208 стр.

6. Dailininko K. Мошкин piešiniai iš serijos „Eureka“ knygos Л. Растрингин, П. Граве “Кибернетика как она есть”, Москва, Молодая Гвардия, 1975, 208 стр.
7. Dailininko K. Мошкин piešiniai iš serijos „Eureka“ knygos Р. Петров “Беседы о новой иммунологии”, Москва, Молодая Гвардия, 1976, 224 стр.
8. Dailininko В. Ковынев piešiniai iš serijos „Eureka“ knygos А. Шилейко, Т. Шилейко “Информация или интуиция?”, Москва, Молодая Гвардия, 1983, 208 стр.
9. Ленгрен. 100 юмористических рисунков, RSW “Prasa”, Warszawa, 1957, 130 s.

PADĖKA

Autoriai nuoširdžiai dėkoja šiuos magistrantus (dauguma iš jų šiandien jau yra magistrai), aktyviai talkinusius, rengiant šį leidinį ar atskiras jo dalis:

- Kristiną Aldošina,
- Virginiją Baranauskaitę,
- Olgą Gluchovskają.
- Remigijų Paulavičių,
- Sigitą Pedzevičienę,
- Dalių Pumputį,
- Joną Bučelį.

TESTO KLAUSIMŲ ATSAKYMAI

1 skyrelis: 1e), 2b), 3b)

2 skyrelis: 1a)

3 skyrelis: 1d), 2b), 3c)

4 skyrelis: 1b)

5 skyrelis: 1b), 2b), 3c)

6 skyrelis: 1a), 2c)

7 skyrelis: 1b), 2a)

8 skyrelis: 1e, 2c, 3B)

9 skyrelis: 1c, 2b)

10 skyrelis: 1c, 2b)

11 skyrelis: 1d, 2a)

12 skyrelis: 1c, 2d)

13 skyrelis: 1F, 2a)

14 skyrelis: 1b, 2c)

15 skyrelis: 1d)

16 skyrelis: 1a)

17 skyrelis: 1e, 2a)

18 skyrelis: 1a, 2b)

19 skyrelis: 1b, 2c)

20 skyrelis: 1b, 2c)

Romanas Januškevičius, Olga Januškevičienė
ELEMENTARUSIS TIKIMYBIŲ IR STATISTIKOS KURSAS
INFORMATIKAMS

1 dalis. Tikimybių teorijos elementai

METODINĖ PRIEMONĖ

Maketavo Romanas Januškevičius
Už redagavimą atsakingi autoriai

Išleido Vilniaus pedagoginis universitetas, Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius