VILNIAUS UNIVERSITETAS

LAURA ŽVINYTĖ

DISKRETUS TOLYGUSIS RIBINIS DĖSNIS ADITYVIOSIOMS FUNKCIJOMS

Daktaro disertacija
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2017

Disertacija rengta 2011-2017 metais Vilniaus universitete

Mokslinis vadovas - prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Turinys

Žymėjimai

$\mathbb{N}$	natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{P}$	pirminių skaičių aibė
$\mathbb{R}$	realiųjų skaičių aibė
m, n	natūralieji skaičiai
$q, p, p_1, p_2, ...$	pirminiai skaičiai
$[x]$	skaičiaus x sveikoji dalis
f_x	$(x \geqslant 2)$ stipriai adityviųjų funkcijų seka
$\pi(x)$	skaičius pirminių skaičių, ne didesnių už realųjį teigiamą skaičių x
$\varphi(x)$	Oilerio funkcija
$\varepsilon(x)$	nykstanti funkcija
$\omega(n)$	skaičiaus n pirminių daliklių skaičius
$a \ll b$	ekvivalentu nelygybei $\|a\| \leqslant cb$
$\nu_x(n \leqslant x, \ldots)$	natūraliųjų skaičių, neviršijančių x ir tenkinančių sąlygą, esančią daugtaškio vietoje, dažnis

$f(x) \sim g(x)$ reiškia, kad $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$F_x(u) \Rightarrow F(u)$ skirstinių $F_x(u)$ silpnasis konvergavimas į pasiskirstymo funkciją $F(u)$, kai $x \to \infty$

$$A(n) = \sum_{p \leqslant n} \frac{f(p)}{p}$$

$$B(n) = \Big(\sum_{p \leqslant n} \frac{f^2(p)}{p} \Big)^{1/2}$$

$$G(u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2/2} dx$$

$\Pi(u, \lambda)$ Puasono skirstinys su parametru $\lambda > 0$:

$$\Pi(u, \lambda) := \sum_{\substack{k=0,1,\ldots \\ k<u}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}$$

$\mathbb{B}(u, \gamma, N)$ binominis skirstinys su parametrais $\gamma \in (0,1)$ ir $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{B}(u, \gamma, N) := \sum_{\substack{k=0,1,\ldots,N \\ k<u}} \binom{N}{k} \gamma^k (1-\gamma)^{N-k}$$

$\mathcal{U}(u, L)$ diskretus tolygusis skirstinys su parametru $L \in \mathbb{N}$, $L \geqslant 2$:

$$\mathcal{U}(u, L) := \frac{1}{L} \sum_{\substack{k=0,1,\ldots,L-1 \\ k<u}} 1$$

Įvadas

Disertacijoje pristatomos gautos būtinos ir pakankamos sąlygos stipriai adityviųjų funkcijų sekų skirstinių

$$\nu_x(p \leqslant x, f_x(p+1) < u),$$

$$\nu_x(n \leqslant x, f_x(n) + g_x(n+1) < u),$$

$$\nu_x(p \leqslant x, f_x(p+1) + g_x(p+2) < u)$$

silpnajam konvergavimui į diskretų tolygųjį skirstinį.

1 apibrėžimas. *Aritmetinė funkcija f vadinama adityviąja, jei su bet kokia pora tarpusavyje pirminių skaičių m ir n teisinga lygybė $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$.*

2 apibrėžimas. *Jei adityvioji funkcija $f(n)$ tenkina sąlygą $f(p^k) = f(p)$, kiekvienam $k \in \mathbb{N}$ ir kiekvienam pirminiam p, tai $f(n)$ vadinama stipriai adityviąja funkcija.*

Darbe nagrinėjamos stipriai adityviųjų funkcijų sekos $f_x(p)$ įgyjančios reikšmes 0 arba 1 bet kuriam pirminiam skaičiui p. Tuomet

$$f_x(n) = \sum_{p|n} f_x(p) = \sum_{\substack{p|n \\ f_x(p)=1}} 1 =: \sum_{p|n}^{f} 1.$$

Aktualumas

Darbo tyrimų objektas yra stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais, adityviųjų funkcijų sekų sumų bei sumų su paslinktais pirminiais silpnas konvergavimas į ribinį dėsnį. Tyrimo objektas ir sprendžiami uždaviniai priskirtini tikimybinei skaičių teorijai. Idėja nagrinėti stipriai adityviųjų funkcijų su skirtingais argumentais ribinį elgesį nėra nauja.

P.D.T.A. Elliott'o ir J. Kubiliaus monografijose [5], [6], [18] galima rasti daugumą klasikinių rezultatų ir jų istorinį kontekstą. Adityviųjų funkcijų ribinių teoremų pirmieji rezultatai buvo gauti P. Erdős'o ir A. Wintner'io [12] (1939) bei P. Erdős'o ir M. Kac'o [11] (1940). Adityviųjų funkcijų sumų ribinio elgesio pirmieji rezultatai yra gauti W.J. LeVeque'o [19] (1949). Bendresni rezultatai vėliau yra gauti J. Kubiliaus [18], G. Halász'o [13], I. Kátai [17], A. Hildebrand'o [14], P.D.T.A. Elliott'o [5]–[8] ir kitų autorių (žr. [20], [22], [23], [34], [36], [42]). Jų darbuose yra nagrinėjamos adityviųjų funkcijų skirtingos klasės.

Adityviųjų funkcijų su paslinktais pirminiais atvejus yra nagrinėję M.B. Barban'as, A.I. Vinogradov'as ir B.V. Levin'as [1], I. Kátai [15] ir kiti autoriai (žr. [3], [4], [6], [16], [33], [35], [40], [41]).

Šie silpnojo konvergavimo rezultatai buvo įrodyti remiantis skirtingais metodais. Buvo naudoti elementarusis, rėčio, charakteristinių funkcijų, faktorialinių momentų metodai bei Kubiliaus modelis.

Adityviųjų funkcijų sekų skirstinių silpną konvergavimą į ribinį Puasono skirstinį nagrinėjo J. Šiaulys ir G. Stepanauskas straipsniuose [27]–[29], [33]–[36]. Suformuluotiems teiginiams įrodyti buvo naudotas faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodai.

Bernulio, geometrinis, binominis, diskretus tolygusis pasiskirstymai kaip ribiniai dėsniai buvo nagrinėti straipsniuose [37]–[39].

Stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais, sumų su paslinktais argumentais bei sumų su paslinktais pirminiais skirstinių silpnas konvergavimas į diskretų tolygųjį skirstinį nebuvo nagrinėtas. Gauti rezultatai apibūdina adityviųjų funkcijų sekų skirstinių ribinį elgesį ir gali būti taikomi matematiniuose tyrimuose, kuriuose reikia žinių apie adityviųjų funkcijų skirstinių asimptotikas.

Tikslas ir uždaviniai

Darbo tikslas – ištirti stipriai adityviųjų funkcijų sekų skirstinių silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį dėsnį atvejus. Tikslui pasiekti buvo sprendžiami šie uždaviniai:

- suformuluoti ir įrodyti stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį skirstinį būtinas ir pakankamas sąlygas;
- suformuluoti ir įrodyti stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais argumentais pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį skirstinį būtinas ir pakankamas sąlygas;
- suformuluoti ir įrodyti stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais pirminiais pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį skirstinį būtinas ir pakankamas sąlygas.

Metodai

Disertacijoje suformuluotoms teoremos įrodyti buvo naudoti faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodai.

Mokslinis naujumas

Disertacijoje pateikti rezultatai yra nauji. Jie yra teorinio pobūdžio. Iki šiol diskretus tolygusis ribinis dėsnis stipriai adityviųjų funkcijų sekoms buvo mažai nagrinėtas (žr. [39]). Diskretus tolygusis pasiskirstymas kaip ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekų su paslinktas pirminiais, adityviųjų funkcijų sekų sumoms su paslinktais argumentais bei sumoms su paslinktais pirminiais nebuvo nagrinėtas.

Aprobacija

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šeštojoje tarptautinėje konferencijoje "Analitic and Probabilistic Methods in Number Theory" (Palanga, Lietuva, 2016), taip pat Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2014, 2015, 2016).

Publikacijos

1. G. Stepanauskas, L. Žvinytė, Discrete uniform limit law for additive functions on shifted primes, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **21**(4):437-447, 2016.

2. G. Stepanauskas, L. Žvinytė, Discrete uniform distribution for a sum of additive functions, *Lith. Math. J*, **57**(3):391-400, 2017.

3. J. Šiaulys, G. Stepanauskas, L. Žvinytė, Discrete uniform limit law for a sum of additive functions on shifted primes, *Lith. Math. J.*, 2017, įteiktas spaudai.

Padėka

Ypatingą padėką skiriu savo moksliniam vadovui prof. dr. G. Stepanauskui už pagalbą visų studijų metu, už suteiktas žinias ir įžvalgas. Jos buvo labai naudingos rašant disertaciją. Taip pat dėkoju savo šeimai už moralinį palaikymą.

1 Literatūros apžvalga

Šiame skyriuje pristatomi tikimybinės skaičių teorijos uždaviniai – adityviųjų funkcijų $f(n)$ ribinio skirstinio egzistavimo problemos bei jų istorinis kontekstas. Apžvelgiami gauti ribiniai rezultatai šių adityviųjų funkcijų skirstinių:

1. $\nu_x(n \leqslant x, f(n) < u)$;
2. $\nu_x(n \leqslant x, \frac{f(n)-\alpha(x)}{\beta(x)} < u)$;
3. $\nu_x(p \leqslant x, \frac{f(p+1)-\alpha(x)}{\beta(x)} < u)$;
4. $\nu_x\{n \leqslant x, f_1(n) + f_2(n+1) - \alpha(x) < u\}$;
5. $\nu_x\Big\{n \leqslant x, \sum_{j=1}^{s} \frac{f_j(n+a_j)-A_j(x)}{B_j(x)} < u\Big\}$.

Taip pat pristatomi gauti ribiniai rezultatai šių stipriai adityviųjų funkcijų sekų skirstinių:

1. $\nu_x(n \leqslant x, f_x(n) < u)$;
2. $\nu_x\{p \leqslant x, f_x(p+1) < u\}$;
3. $\nu_x\{n \leqslant x, f_x(n) + g_x(n+1) < u\}$;
4. $\nu_x\{p \leqslant x, f_x(p+1) + g_x(p+2) < u\}$.

1.1 Istorinis kontekstas, klasikiniai rezultatai

Pirmieji sprendžiami uždaviniai buvo adityviųjų funkcijų $f(n)$ skirstinių

$$\nu_x(n \leqslant x, f(n) < u)$$

silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį būtinų ir pakankamų sąlygų formulavimas ir įrodymas.

Pirmieji rezultatai buvo gauti P. Erdős'o ir A. Wintner'io [12] (1939).

1.1 teorema (Erdős-Wintner, 1939)**.** *Adityvioji funkcija $f(n)$ turi ribinį skirstinį tada ir tik tada, kai šios eilutės*

$$\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{f(p)}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{f^2(p)}{p}$$

konverguoja. Kai šios sąlygos yra patenkintos, ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$\prod_p \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{itf(p^m)}}{p^m}\Big).$$

Ribinis skirstinys yra gryno tipo ir yra tolydus tada ir tik tada, kai eilutė

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p}$$

diverguoja.

Vėliau buvo sprendžiamas bendresnis tikimybinės skaičių teorijos uždavinys – apibrėžti kada egzistuoja funkcijos $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ ir $\beta(x) > 0$, $x \to \infty$, kad adityviųjų funkcijų $f(n)$ skirstiniai

$$\nu_x\Big(n \leqslant x, \frac{f(n)-\alpha(x)}{\beta(x)} < u\Big) \tag{1.1}$$

silpnai konverguotų į ribinį dėsnį.

Šiuo atveju P. Erdős'o ir A. Wintner'io teoremoje $\alpha(x) = 0$ ir $\beta(x) = 1$.

Atskiru atveju, kai

$$\alpha(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ |f(p)|\leqslant 1}} \frac{f(p)}{p}, \qquad \beta(x) = 1$$

gauta P.Erdős'o teorema.

1.2 teorema (P.Erdős, 1938)**.** *Tegul*

$$\alpha(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ |f(p)|\leqslant 1}} \frac{f(p)}{p}.$$

Jeigu eilutės

$$\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{f^2(p)}{p}$$

konverguoja, tai skirstinys

$$\nu_x(n \leqslant x, f(n) - \alpha(x) < u)$$

silpnai konverguoja į ribinį dėsnį. Ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$\prod_{|f(p)|>1} \Bigl(1 + g(p)\Bigr) \prod_{|f(p)|\leqslant 1} (1 + g(p))e^{-itf(p)/p},$$

čia

$$g(p) = -\frac{1}{p} + \Bigl(1 - \frac{1}{p}\Bigr) \sum_{m=1}^{\infty} p^{-m} e^{-itf(p^m)}.$$

Ribinis skirstinys yra gryno tipo ir yra tolydus tada ir tik tada, kai eilutė

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p}$$

diverguoja.

Svarbus rezultatas davęs naują postūmį adityviųjų aritmetinių funkcijų skirstinių asimptotinių savybių tyrimams yra P. Erdős'o ir M. Kac'o teorema [11]. Taip pat ji svarbi tikimybinėje skaičių teorijoje kaip centrinė ribinė teorema adityviosioms funkcijoms.

Pažymėkime

$$\alpha(x) = A(x) := \sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)}{p},$$

$$\beta(x) = B(x) := \Bigl(\sum_{p\leqslant x} \frac{f^2(p)}{p}\Bigr)^{1/2}.$$

1.3 teorema (Erdős-Kac, 1940)**.** *Tegul $f(n)$ stipriai adityvioji funkcija, kuriai $|f(p)| \leqslant 1$ visiems pirminiams p. Jeigu $B(x) \to \infty$, kai $x \to \infty$, tai*

$$\nu_x(n \leqslant x, \frac{f(n) - A(x)}{B(x)} < u) \Rightarrow G(u),$$

čia $G(u)$ – standartinis normalusis skirstinys.

P. Erdős'o ir A. Wintner'io bei P. Erdős'o ir M. Kac'o teoremos yra pirmieji adityviųjų funkcijų ribinių teoremų pavyzdžiai, turėję didelę įtaką tikimybinės skaičių teorijos raidai.

Vėliau P. Erdős'o ir M. Kac'o metodą išplėtė J. Kubilius (1954-1955). J. Kubiliaus darbai yra svarus indėlis tikimybinėje skaičių teorijoje. Jo monografijoje [18] galima rasti klasikinius rezultatus ir pagrindinius tikimybinės skaičių teorijos uždavinius. J. Kubilius yra apibrėžęs jo vardu pavadintą klasę H. Sakoma, kad stipriai adityvioji funkcija f priklauso Kubiliaus H klasei, jeigu $B(n) \to \infty$, kai $n \to \infty$, ir egzistuoja neaprėžtai didėjanti funkcija $r = r(n)$, kuriai

$$\frac{\ln r(n)}{\ln n} \to 0 \qquad \text{ir} \qquad \frac{B(r(n))}{B(n)} \to 1.$$

Suformuluota ir įrodyta J. Kubiliaus teorema (1.1) skirstiniams, kai funkcija $f(n)$ priklauso Kubiliaus H klasei.

1.4 teorema (Kubilius, 1954)**.** *Tarkime $f(n)$ stipriai adityvioji funkcija, priklausanti klasei H. Pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x(n \leqslant x, \frac{f(n) - A(x)}{B(x)} < u)$$

silpnai konverguoja į ribinį skirstinį, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai egzistuoja nemažėjanti funkcija $K(v)$, kad visuose funkcijos tolydumo taškuose

$$\frac{1}{B^2(x)} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) < vB(x)}} \frac{f^2(p)}{p} \to K(v),$$

kai $x \to \infty$. Kai ši sąlyga yra patenkinta, ribinio dėsnio charakteristinė funkcija $\phi(t)$ gaunama iš Kolmogorovo formulės

$$\ln \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itv} - 1 - itv) \frac{1}{v^2} dK(v), \tag{1.2}$$

ribinio dėsnio vidurkis lygus 0, o dispersija lygi 1.

1971 m. nepriklausomai P.D.T.A. Elliott'as ir C. Ryavec'as [10] bei B.V. Levin'as ir N.M. Timofeev'as [43] gavo pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(n \leqslant x, f(n) - \alpha(x) < u)$$

silpnojo konvergavimo į ribinį skirstinį būtinas ir pakankamas sąlygas.

1.5 teorema. *Tegul $f(n)$ reali adityvioji aritmetinė funkcija, $\alpha(x)$ realioji funkcija, apibrėžta, kai $x \geqslant 1$. Pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x(n \leqslant x, f(n) - \alpha(x) < u)$$

konverguoja į ribinį skirstinį, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia konstanta c, su kuria $f(n) = c \log n + h(n)$, ir eilutės

$$\sum_{|h(p)|>1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|h(p)|\leqslant 1} \frac{h^2(p)}{p}$$

konverguoja. Be to, kai šios sąlygos yra patenkintos, funkcija $\alpha(x)$ yra apibrėžiama taip

$$\alpha(x) = c \log x + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |h(p)|\leqslant 1}} \frac{h(p)}{p}.$$

Ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$\frac{1}{1+ict} \prod_{|h(p)|>1} w_p(t) \prod_{|h(p)|\leqslant 1} w_p(t) e^{-it\frac{h(p)}{p}},$$

čia

$$w_p(t) = \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ith(p^k)}}{p^k}\Big).$$

Ribinis skirstinys yra gryno tipo ir yra tolydus tada ir tik tada, kai eilutė

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p}$$

diverguoja.

Analogiški uždaviniai buvo nagrinėti ir paslinktų pirminių skaičių aibėse, t. y. pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x\Big(p \leqslant x, \frac{f(p+1)-\alpha(x)}{\beta(x)} < u\Big) \tag{1.3}$$

silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį būtinų ir pakankamų sąlygų formulavimas ir įrodymas.

Analogiškai 1.1, 1.2 ir 1.5 teoremoms buvo gautos stipriai adityviųjų funkcijų su paslinktais pirminiais skirstinių silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį sąlygos [44], [6].

1.6 teorema (Timofeev, 1991)**.** *Tarkime, $f(n)$ reali stipriai adityvioji funkcija. Pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x(p \leqslant x, f(p+1) < u)$$

turi ribinį dėsnį tada ir tik tada, kai eilutės

$$\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{f(p)}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{f^2(p)}{p}$$

konverguoja.

1.7 teorema (Elliott, 1980)**.** *Tegul $f(n)$ reali stipriai adityvioji funkcija, kuriai eilutės*

$$\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{\varphi(p)}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{f^2(p)}{\varphi(p)}$$

konverguoja. Tegul

$$\alpha(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x \\ |f(p)|\leqslant 1}} \frac{f(p)}{\varphi(p)}.$$

Tuomet pasiskirstymo funkcijos

$$\nu_x(p \leqslant x, f(p+1) - \alpha(x) < u)$$

silpnai konverguoja į ribinį dėsnį, kai $x \to \infty$.

1.8 teorema (Timofeev, 1991)**.** *Tegul $f(n)$ reali stipriai adityvioji funkcija, apibrėžta tokiu būdu $f(n) = c\log n + h(n)$. Pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x(p \leqslant x, f(p+1) - \alpha(x) < u)$$

silpnai konverguoja į ribinį skirstinį, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia konstanta c, su kuria eilutės

$$\sum_{|h(p)|>1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|h(p)|\leqslant 1} \frac{h^2(p)}{p}$$

konverguoja. Be to, kai šios sąlygos yra patenkintos, funkcija $\alpha(x)$ yra apibrėžiama taip

$$\alpha(x) = c\log x + \sum_{\substack{p\leqslant x\\ |h(p)|\leqslant 1}} \frac{h(p)}{p}.$$

Analogiškai 1.4 teoremai buvo suformuluotos ir įrodytos stipriai adityviųjų funkcijų su paslinktais pirminiais paskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos [1].

1.9 teorema (Barban-Vinogradov-Levin, 1965)**.** *Tegul $f(n)$ stipriai adityvioji funkcija, priklausanti klasei H. Pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x(p \leqslant x, \frac{f(p+1) - \alpha(x)}{\beta(x)} < u)$$

silpnai konverguoja į ribinį skirstinį, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia pasiskirstymo funkcija $K(v)$, kad

$$\frac{1}{B^2(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f(p)<vB(x)}} \frac{f^2(p)}{p} \to K(v),$$

kai $x \to \infty$.

Kai ši sąlyga yra patenkinta, ribinio dėsnio charakteristinė funkcija $\phi(t)$ gaunama iš Kolmogorovo (1.2) *formulės, ribinio dėsnio vidurkis lygus* 0*, o dispersija lygi* 1.

Buvo nagrinėtas dar vienas tikimybinės skaičių teorijos uždavinys – adityviųjų funkcijų sumų ribinio skirstinio egzistavimas. Pirmieji rezultatai šioje srityje yra gauti W.J. LeVeque'o [19] (1949).

1.10 teorema (LeVeque, 1949)**.** *Tegul $f(n)$ stipriai adityvioji funkcija, $|f(p)| \leqslant 1$ visiems pirminiams p, o eilutė $\sum_p \frac{f^2(p)}{p}$ diverguoja. Tada*

$$\nu_x\Big(n \leqslant x, \frac{f(n)-A(x)}{B(x)} < u_1, \frac{f(n+1)-A(x)}{B(x)} < u_2\Big) \Rightarrow G(u_1)G(u_2).$$

Ši teorema yra svarbi tikimybinėje skaičių teorijoje kaip centrinė ribinė teorema adityviųjų funkcijų sumoms. Iš jos išplaukia

$$\nu_x\Big(n \leqslant x, \frac{\omega(n)-\omega(n+1)}{\sqrt{2\log\log x}} < u\Big) \Rightarrow G(u).$$

Bendresnius rezultatus vėliau yra gavę J. Kubilius [18], G. Halász'as [13], I. Kátai [17], A. Hildebrand'as [14], P.D.T.A. Elliott'as [5]–[8], N.M. Timofeev'as ir H.H. Usmanov'as [42] ir kt.

A. Hildebrand'as [14] (1988) pritaikė Erdős'o-Wintner'io teoremos principus adityviųjų funkcijų skirtumo ribiniam rezultatui gauti. Teoremos įrodymui buvo taikytas charakteristinių funkcijų metodas.

1.11 teorema (Hildebrand, 1988)**.** *Tegul f stipriai adityvioji funkcija. Pasiskirstymo funkcijos*

$$\nu_x\{n \leqslant x, f(n+1)-f(n) < u\}$$

silpnai konverguoja į ribinį skirstinį, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai egzistuoja realusis skaičius c toks, kad funkcijai $h(n) = f(n) - c\log n$ eilutės

$$\sum_{|h(p)|\leqslant 1} \frac{|h(p)|^2}{p}, \qquad \sum_{|h(p)|>1} \frac{1}{p}$$

konverguoja.

Jei šios sąlygos yra patenkintos, tai ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$\prod_p \Big(1 - \frac{2}{p} + 2\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) Re \sum_{m \geqslant 1} \frac{e^{ith(p^m)}}{p^m}\Big).$$

Dar po keleto metų N.M. Timofeev'as ir H.H. Usmanov'as [42] (1992) gavo stipriai adityviųjų funkcijų f_1, f_2 skirstinių

$$\nu_x\{n \leqslant x, f_1(n) + f_2(n+1) - \alpha(x) < u\} \tag{1.4}$$

silpnojo konvergavimą į ribinį dėsnį būtinas ir pakankamas sąlygas.

1.12 teorema (Timofeev-Usmanov, 1992)**.** *Tegul f_1, f_2 stipriai adityviosios funkcijos. Tam, kad* (1.4) *pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguotų į ribinį dėsnį, būtina ir pakankama, kad egzistuotų tokie realieji skaičiai c_1, c_2, su kuriais eilutė*

$$\sum_p \frac{1}{p}(\min\{1, {h_1}^2(p)\} + \min\{1, {h_2}^2(p)\})$$

konverguotų, čia funkcija $h_j(p) = f_j(p) - c_j \log p, \quad j = 1, 2$. Be to, kai šios sąlygos yra patenkintos, funkcija $\alpha(x)$ turi pavidalą

$$\alpha(x) = (c_1 + c_2)\log x + \sum_{p \leqslant x} \frac{{h_1}^*(p) + {h_2}^*(p)}{p},$$

čia

$$h^* = \begin{cases} h, & kai\ |h| \leqslant 1, \\ 1, & kai\ |h| > 1, \end{cases}$$

ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$\frac{1}{1 + it(c_1 + c_2)} \prod_p \Big(1 - \frac{2}{p} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^m}(e^{ith_1(p^m)} + e^{ith_2(p^m)}) \times \\ \times \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big) e^{-\frac{it}{p}({h_1}^*(p) + {h_2}^*(p))}.$$

J. Kubilius monografijoje [18] įrodė bendrąjį skirstinių

$$\nu_x\Big\{n \leqslant x, \frac{f_1(n+a_1)-A_1(x)}{B_1(x)} + \ldots + \frac{f_s(n+a_s)-A_s(x)}{B_s(x)} < u\Big\} \tag{1.5}$$

silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį atveją. Čia f_i, $i = 1, \ldots, s$, stipriai adityviosios funkcijos, kurios priklauso klasei H.

1.13 teorema (Kubilius, 1964)**.** *Tegul $f_1(n), \ldots, f_s(n)$ stipriai adityviosios funkcijos, priklausančios klasei H, ir $a_1, \ldots, a_s$ skirtingi fiksuoti natūralieji skaičiai.* (1.5) *pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinį skirstinį su dispersija s, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai egzistuoja nemažėjanti funkcija $K(v)$ tokia, kad*

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{B_j^2(x)} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f_j(p) < vB_j(x)}} \frac{f_j^2(p)}{p} \to K(v), \qquad x \to \infty$$

visuose funkcijos $K(v)$ tolydumo taškuose. Ribinio dėsnio charakteristinės funkcijos logaritmas apibrėžtas (1.2) *lygybe.*

Atskiras šios teoremos atvejis yra stipriai adityviųjų funkcijų sumų konvergavimas į standartinį normalųjį skirstinį.

1.14 teorema (Kubilius, 1964)**.** *Tegul $a_1, \ldots, a_s$ skirtingi natūralieji skaičiai ir $f_1(n), \ldots, f_s(n)$ realios stipriai adityviosios funkcijos. Jeigu kiekvienam $\epsilon > 0$*

$$\frac{1}{B_j^2(x)} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |f_j(p)| > \epsilon B_j(x)}} \frac{f_j^2(p)}{p} \to 0, \qquad (j = 1, ..., s),$$

kai $x \to \infty$, tai

$$\nu_x\Big\{n \leqslant x, \sum_{j=1}^{s} \frac{f_j(n+a_j)-A_j(x)}{\sqrt{s}B_j(x)} < u\Big\} \Rightarrow G(u),$$

kai $x \to \infty$.

Ir vėliau gauta nemažai rezultatų apie adityviųjų funkcijų sumų pasiskirstymus. Šiuos uždavinius sprendė I. Kátai, N.M. Timofeev'as,
G. Stepanauskas ir kiti autoriai.

1.2 Stipriai adityviųjų funkcijų sekų skirstinių $\nu_x(n \leqslant x, f_x(n) < u)$ ribiniai rezultatai

Pastaraisiais metais buvo gautos stipriai adityviųjų funkcijų sekų f_x, $x \geqslant 2$, skirstinių silpnojo konvergavimo į konkrečius ribinius dėsnius būtinos ir pakankamos sąlygos. Tirti atvejai, kai $f_x(p)$ įgyja reikšmę 0 arba 1 bet kuriam pirminiam skaičiui p.

Nagrinėtas stipriai adityviųjų funkcijų sekų pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(n \leqslant x, f_x(n) < u) \tag{1.6}$$

silpnas konvergavimas į šiuos ribinius dėsnius: Puasono, Bernulio, geometrinį, binominį, diskretų tolygųjį (žr. [37]–[39]).

(1.6) pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į tam tikrą dėsnį sąlygos nusakytos šioje J. Šiaulio įrodytoje teoremoje [30].

1.15 teorema (Šiaulys, 1999)**.** *Tegul f_x, $x \geqslant 2$, yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad $f_x(p) \in \{0, 1\}$ visiems pirminiams p. Pasiskirstymo funkcijos $\nu_x(n \leqslant x, f_x(n) < u)$ silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją tada ir tik tada, kai riba*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p_1p_2\ldots p_l \leqslant x \\ p_i \neq p_j, i\neq j}}^{f} \frac{1}{p_1p_2\ldots p_l} = g_l$$

egzistuoja kiekvienam fiksuotam natūraliajam skaičiui l. Be to, ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g_l}{l!} \left(e^{it} - 1\right)^l . \tag{1.7}$$

Toms (1.6) pasiskirstymo funkcijoms, kurių ribinis skirstinys turi baigtinę atramą, silpnojo konvergavimo į ribinį dėsnį sąlygos buvo gautos J. Šiaulio straipsnyje [31].

1.16 teorema (Šiaulys, 2000)**.** *Tegul f_x, $x \geqslant 2$, yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė, $f_x(p) \in \{0, 1\}$ visiems pirminiams p. Pasiskirstymo funkcijos*

$\nu_x(f_x(n) < u)$ silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją $F_\xi(u)$, čia ξ – atsitiktinis dydis su baigtine atrama $\{0, 1, 2, \ldots, L-1\}, L \geqslant 2$, tada ir tik tada, kai egzistuoja konstanta $D \geqslant 2$ tokia, kad

$$\lim_{x\to\infty} \sup \#\{p \leqslant D : f_x(p) = 1\} \leqslant L,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum\nolimits^{f}_{D<p\leqslant x^{1/(L+1)}} \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{L} \sum\nolimits^{f}_{\substack{p_1,\ldots,p_k\leqslant D, p_i\neq p_j, i\neq j\\ x^{1/(L+1)}<p_{k+1},\ldots,p_{L+1}\leqslant x\\ p_1p_2\cdots p_{L+1}\leqslant x}} \frac{1}{p_1p_2\ldots p_{L+1}} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \left\{ \sum\nolimits^{f}_{\substack{p_1,p_2,\ldots,p_l\leqslant D\\ p_i\neq p_j, i\neq j}} \frac{1}{p_1p_2\ldots p_l} + \sum\nolimits^{f}_{\substack{x^{1/(L+1)}<p_1,p_2,\ldots,p_l\leqslant x\\ p_1p_2\cdots p_l\leqslant x}} \frac{1}{p_1p_2\ldots p_l} \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{l-1} \binom{l}{k} \sum\nolimits^{f}_{\substack{p_1,\ldots,p_k\leqslant D, p_i\neq p_j, i\neq j\\ x^{1/(L+1)}<p_{k+1},\ldots,p_l\leqslant x\\ p_1p_2\cdots p_l\leqslant x}} \frac{1}{p_1p_2\ldots p_l} \right\} = g_l,$$

$l = 1, 2, \ldots, L$. Be to, ribinio skirstinio charakteristinė funkcija nusakoma (1.7) *formule.*

1.15 ir 1.16 teoremos yra teorinis pagrindas (1.6) pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į konkrečius ribinius dėsnius būtinų ir pakankamų sąlygų suradimui.

(1.6) pasiskirstymo funkcijų silpnojo konvergavimo į Puasono dėsnį su parametru λ sąlygos gautos J. Šiaulio [32] (2002).

1.17 teorema (Šiaulys, 2002)**.** *Tegul f_x, $x \geqslant 2$, yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad $f_x(p) \in \{0, 1\}$ visiems pirminiams p. Pasiskirstymo funkcijos $\nu_x(f_x(n) < u)$ silpnai konverguoja į Puasono dėsnį su parametru λ tada ir tik tada, kai yra teisingos šios trys sąlygos:*

$$\lim_{x\to\infty} \max_{p\leqslant x}{}^{f} \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p\leqslant x}{}^{f} \frac{1}{p} = \lambda,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{p\leqslant x}{}^{f} \frac{\log p}{p} = 0.$$

Du skirtingus šios teoremos įrodymus galima rasti [26], [32] straipsniuose . Straipsnyje [26] teorema įrodyta remiantis tikimybiniu, analiziniu ir momentų metodais. Paprastesnis teoremos įrodymas pateiktas straipsnyje [32]. Čia įrodymas paremtas faktorialinių momentų metodu.

Stipriai adityviųjų funkcijų sekų silpnojo konvergavimo į binominį ribinį dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos buvo gautos J. Šiaulio ir G. Stepanausko straipsnyje [38].

1.18 teorema (Šiaulys-Stepanauskas, 2011)**.** *Tegul f_x, $x \geqslant 2$, yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad $f_x(p) \in \{0,1\}$ visiems pirminiams p. Pasiskirstymo funkcijos $\nu_x(f_x(n) < u)$ silpnai konverguoja į ribinį binominį dėsnį $\mathcal{B}(u,\gamma,N)$ su parametrais $\gamma \notin \{1/p, p \in \mathbb{P}\}$ ir $N \in \mathbb{N}$, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{N+1}}}{}^{f} \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{x^{\frac{1}{N+1}}<p_1\leqslant x}{}^{f} \cdots \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N+1}}<p_l\leqslant x \\ p_1p_2\cdots p_l\leqslant x}}{}^{f} \frac{1}{p_1p_2\dots p_l} = \frac{N!}{(N-l)!}\gamma^l,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N+1}}<p_1p_2\cdots p_l\leqslant x \\ p_1p_2\cdots p_l\leqslant x}}{}^{f} \frac{1}{p_1p_2\dots p_l} = \frac{N!}{(N-l)!}\gamma^l,$$

kiekvienam fiksuotam $l = 1, 2, \dots, N$.

1.19 teorema (Šiaulys-Stepanauskas, 2011)**.** *Tegul f_x, $x \geqslant 2$, yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad $f_x(p) \in \{0,1\}$ visiems pirminiams p.*

Pasiskirstymo funkcijos $\nu_x(f_x(n) < u)$ *silpnai konverguoja į ribinį binominį dėsnį* $\mathcal{B}(u, \gamma, N)$ *su parametrais* $\gamma = 1/q,\ q \in \mathbb{P}$, *ir* $N \in \mathbb{N}$, *kai* $x \to \infty$, *tada ir tik tada, kai kiekvienam pakankamai dideliam* x *galioja viena iš dviejų sąlygų:*

1)

$$\lim_{x\to\infty} f_x(q) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{N+1}}}^{f} \frac{1}{p} = 0$$

ir kiekvienam fiksuotam $l = 1, 2, \dots, N$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{x^{\frac{1}{N+1}}<p_1\leqslant x}^{f} \dots \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N+1}}<p_l\leqslant x \\ p_1p_2\cdots p_l\leqslant x}}^{f} \frac{1}{p_1p_2\dots p_l} = \frac{N!}{(N-l)!}\Big(\frac{1}{q}\Big)^l,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N+1}}<p_1p_2\cdots p_l\leqslant x \\ p_1p_2\cdots p_l\leqslant x}}^{f} \frac{1}{p_1p_2\dots p_l} = \frac{N!}{(N-l)!}\Big(\frac{1}{q}\Big)^l$$

arba

2)

$$\lim_{x\to\infty} f_x(q) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{N}}, p\neq q}^{f} \frac{1}{p} = 0$$

ir kiekvienam fiksuotam $l = 1, 2, \dots, N-1$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{x^{\frac{1}{N}}<p_1\leqslant x}^{f} \dots \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N}}<p_l\leqslant x \\ p_1p_2\cdots p_l\leqslant x}}^{f} \frac{1}{p_1p_2\dots p_l} = \frac{(N-1)!}{(N-1-l)!}\Big(\frac{1}{q}\Big)^l,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{x^{\frac{1}{N}}<p_1p_2\cdots p_l\leqslant x \\ p_1p_2\cdots p_l\leqslant x}}^{f} \frac{1}{p_1p_2\dots p_l} = \frac{(N-1)!}{(N-1-l)!}\Big(\frac{1}{q}\Big)^l.$$

Taip pat buvo gautos stipriai adityviųjų funkcijų sekų silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį ribinį dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos [39].

1.20 teorema (Šiaulys-Stepanauskas, 2012)**.** *Tegul* f_x, $x \geqslant 2$, *yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad* $f_x(p) \in \{0, 1\}$ *visiems pirminiams* p. *Pasiskirstymo funkcijos* $\nu_x(f_x(n) < u)$ *silpnai konverguoja į ribinį diskretų* *tolygųjį dėsnį $\mathcal{U}(u, L)$, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai $L = 2$ ir kiekvienam pakankamai dideliam x galioja viena iš dviejų sąlygų:*

$$f_x(2) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \sum_{2<p\leqslant x}^{f} \frac{1}{p} = 0 \tag{1.8}$$

arba

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p\leqslant x^{1/2}}^{f} \frac{1}{p} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \sum_{x^{1/2}<p\leqslant x}^{f} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}. \tag{1.9}$$

Pastarosios teoremos buvo įrodytos remiantis faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodais.

Silpnojo konvergavimo į konkrečius ribinius dėsnius pavyzdžius galima rasti straipsnyje [37].

1.3 Stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais argumentais skirstinių ribiniai dėsniai

Plačiai tirtas stipriai adityviųjų funkcijų skirstinių silpnasis konvergavimas į Puasono dėsnį. Straipsniuose [33]–[35] yra gautos būtinos ir pakankamos sąlygos skirstinių

$$\nu_x(p \leqslant x, f_x(p+1) < u),$$

$$\nu_x(n \leqslant x, f_x(n) + g_x(n+1) < u),$$

$$\nu_x(p \leqslant x, f_x(p+1) + g_x(p+2) < u)$$

silpnajam konvergavimui į Puasono dėsnį.

1.21 teorema (Šiaulys-Stepanauskas, 2007). *Tegul f_x, $x \geqslant 2$, yra stipriai adityviųjų funkcijų aibė tokia, kad $f_x(p) \in \{0, 1\}$ visiems pirminiams p ir*

$$\lim_{x\to\infty} \log x \sum_{x^{\gamma}<q\leqslant x}^{f} \frac{1}{q} = 0$$

kiekvienam $\gamma \in (0,1)$. *Pasiskirstymo funkcijos* $\nu_x(f_x(p+1) < u)$ *silpnai konverguoja į Puasono dėsnį su parametru* λ, *kai* $x \to \infty$, *tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{x\to\infty} \max_{q\leqslant x}{}^{f} \frac{1}{q} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{q\leqslant x}{}^{f} \frac{1}{q} = \lambda.$$

1.22 teorema (Šiaulys-Stepanauskas, 2007)**.** *Tegul* f_x *ir* g_x, $x \geqslant 2$, *yra dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad* $f_x(p),\ g_x(p) \in \{0,1\}$ *visiems pirminiams* p *ir*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x}\Big(\sum_{p\leqslant x}{}^{f} \frac{\log p}{p} + \sum_{p\leqslant x}{}^{g} \frac{\log p}{p}\Big) = 0.$$

Pasiskirstymo funkcijos $\nu_x(n \leqslant x, f_x(n)+g_x(n+1) < u)$ *silpnai konverguoja į Puasono dėsnį su parametru* λ, *kai* $x \to \infty$, *tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\max_{p\leqslant x}{}^{f} \frac{1}{p} + \max_{p\leqslant x}{}^{g} \frac{1}{p}\Big) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\sum_{p\leqslant x}{}^{f} \frac{1}{p} + \sum_{p\leqslant x}{}^{g} \frac{1}{p}\Big) = \lambda.$$

1.23 teorema (Šiaulys-Stepanauskas, 2007)**.** *Tegul* f_x *ir* g_x, $x \geqslant 2$, *yra dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad* $f_x(p),\ g_x(p) \in \{0,1\}$ *visiems pirminiams* p *ir*

$$\lim_{x\to\infty} \log x\Big(\sum_{x^\alpha<q\leqslant x}{}^{f} \frac{1}{q} + \sum_{x^\alpha<q\leqslant x}{}^{g} \frac{1}{q}\Big) = 0$$

kiekvienam $\alpha \in (0,1)$. *Pasiskirstymo funkcijos* $\nu_x(p \leqslant x, f_x(p+1)+g_x(p+2) < u)$ *silpnai konverguoja į Puasono dėsnį su parametru* λ, *kai* $x \to \infty$, *tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\max_{q\leqslant x}{}^{f} \frac{1}{q} + \max_{q\leqslant x}{}^{g} \frac{1}{q}\Big) = 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} \Big(\sum_{q \leqslant x}^{f} \frac{1}{q} + \sum_{q \leqslant x}^{g} \frac{1}{q} \Big) = \lambda.$$

2 Diskretus tolygusis ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekoms su paslinktais pirminiais

Šiame skyriuje pateikiamos stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(p \leqslant x, f_x(p+1) < u) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f_x(p+1) < u}} 1 \tag{2.1}$$

silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį skirstinį

$$\mathcal{U}(u, L) := \sum_{\substack{k=0,1,\ldots,L-1 \\ k<u}} \frac{1}{L}, \tag{2.2}$$

čia $L \in \mathbb{N},\ L \geqslant 2$, būtinos ir pakankamos sąlygos. Teorema buvo įrodyta remiantis faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodais. Taip pat buvo įvesta sąlyga, apribojanti adityviųjų funkcijų elgseną dideliems pirminiams skaičiams ((H) sąlyga). Galbūt ši problema yra išsprendžiama kitais metodais (pvz. Kubiliaus modelis ar kt.). Tačiau ir šiais atvejais iškils didelių pirminių skaičių problema.

2.1 Pagrindinis rezultatas ir papildomos lemos

2.1 teorema. *Tegul f_x, $x \geqslant 2$, stipriai adityviųjų funkcijų aibė. Tarkime $f_x(p) \in \{0, 1\}$ visiems pirminiams p ir*

$$\lim_{x\to\infty} \log x \sideset{}{^f}\sum_{x^\gamma < p \leqslant x} \frac{1}{p} = 0 \tag{H}$$

kiekvienam $\gamma \in (0, 1)$. (2.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinį diskretų tolygųjį dėsnį $\mathcal{U}(u, L)$, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai $L = 2$ ir

$$f_x(3) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \neq 3}} \frac{1}{p} = 0. \tag{2.3}$$

Teoremos įrodymas remiasi žemiau pateiktomis lemomis. 2.3−2.5 lemos apibūdina paskirstymo funkcijų $\nu_x(f_x(p+1) < u)$ faktorialinių momentų ribinę elgseną.

2.2 lema ([9])**.** *Kiekvienai adityviajai, įgyjančiai realiąsias reikšmes funkcijai h, visiems realiesiems b ir sveikiesiems a teisingas įvertis*

$$\nu_x(\ h(p+a)=b) \ll \left(4+\sum_{\substack{p\le x\\ h(p)\ne 0}}\frac{1}{p}\right)^{-1/2}.$$

2.3 lema. *Tegul f_x, $x \geqslant 2$, aibė stipriai adityviųjų funkcijų, kurioms $f_x(p) \in \{0,1\}$ visiems pirminiams p. Jeigu* (2.1) *pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją $F(u)$ su šuoliu taške $u=0$, kai $x\to\infty$, tai dydis*

$$\beta(l,x) := \frac{1}{\pi(x)}\sum_{p\leqslant x} f_x(p{+}1)(f_x(p{+}1){-}1)\dots(f_x(p{+}1){-}l{+}1), \quad l=1,2,\dots$$

turi baigtinę ribą

$$\lim_{x\to\infty}\beta(l,x)=g_l, \tag{2.4}$$

čia g_l yra ribinio dėsnio l-asis faktorialinis momentas.

2.4 lema ([33], Lema 2)**.** *Jeigu stipriai adityviųjų funkcijų aibė f_x tenkina* 2.1 *teoremos sąlygas ir*

$$\sum_{p\leqslant x}{}^{f}\frac{1}{p}\ll 1, \tag{2.5}$$

tai

$$\beta(l,x)=\sum_{\substack{p_1,p_2,\dots,p_l\leqslant x\\ p_i\ne p_j,\, i\ne j}}{}^{f}\frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_l-1)}+\varepsilon_l(x), \quad l=1,2,\dots.$$

Iš šio teiginio ir (2.4) lygybės skirstinių $\nu_x(f_x(p+1)<u)$ konvergavimo atveju turime, kad

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{\substack{p_1,p_2,\dots,p_l\leqslant x\\ p_i\ne p_j,\, i\ne j}}{}^{f}\frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_l-1)}=g_l \tag{2.6}$$

kiekvienam $l\in\{1,2,\dots\}$.

2.5 lema. *Tegul f_x, $x \geqslant 2$, aibė stipriai adityviųjų funkcijų, kurioms $f_x(p) \in \{0,1\}$ visiems pirminiams p ir patenkinta sąlyga (H). Jeigu* (2.1) *pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją F_ξ, čia ξ-atsitiktinis dydis su baigtine atrama $\{0,1,\ldots,L-1\}$, $L \geqslant 2$, tai egzistuoja konstanta $D \geqslant 2$ tokia, kad*

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) = 1\} \leqslant L-1, \tag{2.7}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{D<p\leqslant x^{1/L}} \frac{1}{p} = 0, \tag{2.8}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_l\leqslant D\\ p_i\neq p_j,\, i\neq j}} \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_l-1)} = g_l, \tag{2.9}$$

$l = 1,2,\ldots,L-1$. Be to, ribinio skirstinio charakteristinė funkcija yra

$$1 + \sum_{l=1}^{L-1} \frac{g_l}{l!}(\mathrm{e}^{it}-1)^l.$$

Iš 2.1 teoremos gauname šį pavyzdį.

2.1 pavyzdys. *Tegul*

$$f_x(p) = \begin{cases} 1, & \textit{jei } p = 3,\\ 1, & \textit{jei } x^\alpha \leqslant p < x^{\alpha+\varepsilon_x},\\ 0 & \textit{kitais atvejais,} \end{cases}$$

čia $\varepsilon_x > 0$ ir $\varepsilon_x \log x \to 0$, kai $x \to \infty$. Tuomet

$$\nu_x(f_x(p+1) < u) \Rightarrow \mathcal{U}(u,2), \qquad x \to \infty.$$

2.2 Lemų įrodymai

2.3 lemos įrodymas

Tarkime, kad (2.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinę pasiskirstymo funkciją $F(u)$ su šuoliu taške $u = 0$. Iš silpnojo konvergavimo išplaukia, kad

$$\lim_{x\to\infty} \nu_x(f_x(p+1) = 0) = F(0+) - F(0) \geqslant c > 0.$$

Naudojant šį įvertį, straipsnyje [33] ((10) nelygybė) buvo įrodyta, kad

$$\beta(l,x) \ll_l 1, \quad l \geqslant 1. \tag{2.10}$$

Pasinaudoję šiuo įverčiu gauname, kad

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x \\ f_x(p+1)=k}} 1 &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x \\ f_x(p+1)=k}} \frac{k(k-1)\dots(k-l-1)}{k(k-1)\dots(k-l-1)} \\ &\leqslant \frac{1}{k(k-1)\dots(k-l-1)}\beta(l+2,x) \ll_l \frac{1}{k(k-1)\dots(k-l-1)}\end{aligned}$$

visiems $k \geqslant l+2$. Taigi,

$$F(k+) - F(k) = \lim_{x\to\infty} \nu_x(f_x(p+1)=k) \ll_l \frac{1}{k(k-1)\dots(k-l-1)}$$

visiems $k \geqslant l+2$.

Fiksuokime $l \in \mathbb{N}$ ir pasirinkime $K > l+2$. Naudojant (2.10) įvertį analogiškai kaip [33] gauname

$$\begin{aligned}\beta(l,x) &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x \\ 1\leqslant f_x(p+1)\leqslant K}} f_x(p+1)(f_x(p+1)-1)\dots(f_x(p+1)-l+1) \\ &+ \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x \\ f_x(p+1)>K}} f_x(p+1)(f_x(p+1)-1)\dots(f_x(p+1)-l+1)\,\frac{f_x(p+1)-l}{f_x(p+1)-l} \\ &= \sum_{k=l}^{K} k(k-1)\dots(k-l+1)\,\frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x \\ f_x(p+1)=k}} 1 + O\left(\frac{\beta(l+1,x)}{K-l}\right) \\ &= \sum_{k=l}^{K} k(k-1)\dots(k-l+1)(F(k+)-F(k-)) + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K-l}\right) \\ &= g_l - \sum_{k=K+1}^{\infty} k(k-1)\dots(k-l+1)(F(k+)-F(k-)) + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K-l}\right) \\ &= g_l + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(k-l)(k-l-1)}\right) + O_l\left(\frac{1}{K}\right) \\ &= g_l + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K}\right).\end{aligned}$$

Perėjus prie ribos, kai $x \to \infty$ ir tada $K \to \infty$, gauname (2.4) lygybę. 2.3 lema įrodyta.

2.5 lemos įrodymas

Šios lemos įrodymas panašus į 4 išvados iš [31] būtinumo įrodymą. Iš lemos sąlygų turime, kad egzistuoja toks $k \in \{0, 1, \ldots, L-1\}$, kuriam

$$\lim_{x\to\infty} \nu_x(f_x(p+1) = k) = F_\xi(k+) - F_\xi(k) \geqslant c > 0.$$

Iš 2.2 lemos turime, kad

$$\nu_x(f_x(p+1) = k) \ll \left(4 + \sum_{p\leqslant x}^{f} \frac{1}{p}\right)^{-1/2}. \tag{2.11}$$

Taigi, gauname (2.5) nelygybę.

Tada pagal 2.4 lemą, galioja (2.6) lygybė. Tegul $d \geqslant 2$ fiksuotas natūralusis skaičius. Jeigu $x/d^{L-1} > d$, iš (2.6) lygybės turime, kad

$$g_L \geqslant \limsup_{x\to\infty} \sum_{\substack{p_1, p_2, \ldots, p_L \leqslant d \\ p_i \neq p_j, i\neq j}}^{f} \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_L-1)}.$$

Tardami, kad

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant d : f_x(p) \neq 0\} \geqslant L,$$

gauname prieštarą sąlygai $g_L = 0$. Taigi,

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant d : f_x(p) \neq 0\} \leqslant L-1$$

visiems fiksuotiems natūraliesiems d.

Imkime

$$a_d = \limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant d : f_x(p) \neq 0\}.$$

Seka a_d ($d \geqslant 2$) įgyja sveikąsias reikšmes, yra nemažėjanti ir aprėžta. Taigi, egzistuoja toks natūralusis skaičius $D \geqslant 2$, kuriam

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) \neq 0\} = a_d,$$

kai $d \geqslant D$. Kadangi $a_d \leqslant L-1$ visiems natūraliesiems d, tai gauname, kad yra išpildyta (2.7) sąlyga.

Kita vertus, iš šių samprotavimų išplaukia, kad

$$\lim_{x\to\infty} f_x(p) = 0$$

visiems fiksuotiems pirminiams $p > D$. Todėl gauname, kad

$$\lim_{x\to\infty} \max_{D<p\leqslant x}{}^{f} \frac{1}{p} = 0.$$

Kadangi kiekvienai porai i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant L$,

$$\sum_{\substack{D<p_1,\dots,p_L\leqslant x^{1/L}\\ p_i=p_j}}^{f} \frac{1}{(p_1-1)\dots(p_L-1)}$$

$$\leqslant \max_{D<p\leqslant x}{}^{f} \frac{1}{p-1} \left(\sum_{p\leqslant x}^{f} \frac{1}{p-1} \right)^{L-1} \to 0, \qquad x \to \infty,$$

tai (2.6) lygybė rodo, kad

$$g_L \geqslant \limsup_{x\to\infty} \left(\sum_{D<p\leqslant x^{1/L}}^{f} \frac{1}{p-1} \right)^{L}.$$

Taigi, iš sąlygos $g_L = 0$ gauname (2.8). Paskutinė lemos (2.9) sąlyga išplaukia iš (2.6), (2.8) lygybės ir (H) sąlygos. 2.5 lema įrodyta.

2.3 Pagrindinio rezultato įrodymas

Būtinumas. Tarkime, kad

$$\nu_x(f_x(p+1) < u) \Rightarrow \mathcal{U}(u, L), \tag{2.12}$$

kai $x \to \infty$, su parametru $L \geqslant 2$. Iš 2.3 lemos gauname, kad

$$\lim_{x\to\infty} \beta(x, l) = \frac{(L-1)!}{(L-1-l)!\,(l+1)},$$

kai $l = 1, 2, \dots, L-1$. Reikšmės g_l yra ribinio skirstinio faktorialiniai momentai. Diskretaus tolygiojo skirstinio atveju išplaukia, kad

$$g_1 = \frac{L-1}{2}, \quad g_2 = \frac{(L-1)(L-2)}{3},$$

$$g_k = \frac{(L-1)(L-2)\dots(L-k)}{k+1}, \quad k = 3, 4, \dots, L-1,$$

$$g_k = 0, \quad k = L, L+1, \dots .$$

Iš (2.12) turime, kad

$$\lim_{x\to\infty} \nu_x(f_x(p+1) = 0) = \mathcal{U}(0+, L) - \mathcal{U}(0, L) = \frac{1}{L} > 0.$$

Taigi, (2.5) nelygybė išplaukia iš (2.11) nelygybės, kai $k = 0$. Dabar taikysime 2.4 lemą. Reikšmės g_l yra ribinio skirstinio faktorialiniai momentai. Akivaizdu, kad

$$g_l \leqslant g_{l-k} g_k$$

visiems $l = 2, 3, \dots$ ir visiems $k = 1, 2, \dots, l-1$. Konkrečiu atveju

$$g_2 \leqslant g_1^2.$$

Todėl

$$\frac{(L-1)(L-2)}{3} \leqslant \left(\frac{L-1}{2}\right)^2.$$

Išsprendus pastarąją nelygybę gauname, kad $L \leqslant 5$. Atskirai nagrinėkime atvejus $L = 2, 3, 4, 5$.

Tegul $L = 2$. Šiuo atveju

$$g_1 = \frac{1}{2}, \quad g_2 = g_3 = \dots = 0.$$

Naudojant 2.5 lemą egzistuoja $D \geqslant 2$, kad

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) = 1\} = \kappa \leqslant 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{D<p\leqslant x^{1/2}}^{f} \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p\leqslant D}^{f} \frac{1}{p-1} = \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

Jei $\kappa = 1$, tai iš šių samprotavimų ir (H) sąlygos gauname, kad yra galimas tik vienas atvejis

$$f_x(3) = 1$$

dideliems x ir

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p\neq 3}}^{f} \frac{1}{p} = 0.$$

Jei $\kappa = 0$, tai $f_x(p) = 0$ kiekvienam fiksuotam p ir pakankamai dideliems x. Šiuo atveju (2.13) lygybė nėra teisinga. Iš to išplaukia, kad atvejis $\kappa = 0$ nėra galimas.

Tegul $L = 3$. Tada

$$g_1 = 1, \quad g_2 = \frac{2}{3}, \quad g_3 = g_4 = \cdots = 0.$$

Iš 2.5 lemos turime, kad egzistuoja $D \geqslant 2$, su kuriuo teisingos šios sąlygos:

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) = 1\} = \kappa \leqslant 2,$$
$$\lim_{x\to\infty} \sum_{D<p\leqslant x^{1/3}}^{f} \frac{1}{p} = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p\leqslant D}^{f} \frac{1}{p-1} = 1, \tag{2.14}$$
$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant D\\ p_1\neq p_2}}^{f} \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)} = \frac{2}{3}. \tag{2.15}$$

Visų pirma, tarkime, kad $\kappa = 2$. Iš (2.14) ir (H) sąlygos turime, kad

$$f_x(p_1) = f_x(p_2) = 1$$

dideliems x ir

$$\frac{1}{p_1-1} + \frac{1}{p_2-1} = 1$$

fiksuotiems pirminiams p_1, p_2, kai $p_1 < p_2$. Kadangi pastaroji lygybė nėra teisinga jokioms skirtingų pirminių p_1, p_2 poroms, tai atvejis $\kappa = 2$ nėra galimas.

Iš (2.15) lygybės išplaukia, kad atvejai $\kappa = 1$, $\kappa = 0$ taip pat negalimi.

Tegul $L = 4$. Tada

$$g_1 = \frac{3}{2}, \quad g_2 = 2, \quad g_3 = \frac{3}{2}, \quad g_4 = g_5 = \cdots = 0.$$

Pagal 2.5 lemą egzistuoja tokia konstanta $D \geqslant 2$, kuriai

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) = 1\} = \kappa \leqslant 3, \tag{2.16}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{D<p\leqslant x^{1/4}} \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{p\leqslant D} \frac{1}{p-1} = \frac{3}{2}\,, \tag{2.17}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant D\\ p_1\neq p_2}} \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)} = 2,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{\substack{p_1,p_2,p_3\leqslant D\\ p_i\neq p_j,\, i\neq j}} \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)} = \frac{3}{2}\,. \tag{2.18}$$

Iš (2.18) išplaukia, kad κ negali būti $0, 1$ ir 2.

Tarkime, kad $\kappa = 3$. Tuomet iš (2.16) ir (2.17) lygybių matyti, kad egzistuoja tokie fiksuoti pirminiai $p_1 < p_2 < p_3$, kuriems $f_x(p_1) = f_x(p_2) = f_x(p_3) = 1$ dideliems x ir

$$\frac{1}{p_1-1} + \frac{1}{p_2-1} + \frac{1}{p_3-1} = \frac{3}{2}\,. \tag{2.19}$$

Tačiau nėra tokių pirminių, kuriems galiotų (2.19) lygybė. Taigi, atvejis $\kappa = 3$ taip pat nėra įmanomas.

Tarkime, kad $L = 5$. Tuomet

$$g_1 = 2, \quad g_2 = 4, \quad g_3 = 6, \quad g_4 = \frac{24}{5}\,, \quad g_5 = g_6 = \cdots = 0.$$

Pagal 2.5 lemą egzistuoja tokia konstanta $D \geqslant 2$, kuriai

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) = 1\} = \kappa \leqslant 4,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{D<p\leqslant x^{1/5}} \frac{1}{p} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{p\leqslant D} \frac{1}{p-1} = 2, \tag{2.20}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant D\\ p_1\neq p_2}} \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)} = 4,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{\substack{p_1,p_2,p_3\leqslant D\\ p_i\neq p_j,\, i\neq j}} \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)} = 6,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{\substack{p_1,p_2,p_3,p_4\leqslant D\\ p_i\neq p_j,\, i\neq j}} \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(p_4-1)} = \frac{24}{5}\,. \tag{2.21}$$

Iš (2.21) lygybės gauname, kad κ negali būti lygus $0, 1, 2$ ir 3.

Tarkime, kad $\kappa = 4$. Tuomet iš (2.20) išplaukia, kad egzistuoja tokie pirminiai $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$, kuriems $f_x(p_1) = f_x(p_2) = f_x(p_3) = f_x(p_4) = 1$ dideliems x ir

$$\frac{1}{p_1-1} + \frac{1}{p_2-1} + \frac{1}{p_3-1} + \frac{1}{p_4-1} = 2.$$

Tačiau

$$\frac{1}{p_1-1} + \frac{1}{p_2-1} + \frac{1}{p_3-1} + \frac{1}{p_4-1} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} < 2.$$

Taigi, atvejis $\kappa = 4$ taip pat neįmanomas.

Pakankamumas. Tarkime, kad tenkinama teoremos (2.3) sąlyga bei papildoma (H) sąlyga. (2.5) įvertis išplaukia iš (2.3) sąlygos. Tuomet naudojant 2.4 lemą gauname, kad

$$\lim_{x\to\infty} \beta(l,x) = \lim_{x\to\infty} \sideset{}{^f}\sum_{\substack{p_1,p_2,\ldots,p_l\leqslant x\\ p_i\neq p_j,\, i\neq j}} \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_l-1)} = 0,$$

jei $l > 1$ ir

$$\lim_{x\to\infty} \beta(1,x) = \frac{1}{2}\,.$$

Imkime

$$\psi_x(t) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\leqslant x} \mathrm{e}^{itf_x(p+1)},$$

kai $x \geqslant 2$ ir $t \in \mathbb{R}$. Kadangi

$$\left|\mathrm{e}^{itr} - 1 - r\left(\mathrm{e}^{\mathrm{it}} - 1\right)\right| \leqslant \frac{r(r-1)}{2} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{it}} - 1\right|^2$$

visiems $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, tai turime, kad

$$\psi_x(t) = 1 + \beta(1,x)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{it}} - 1\right) + O(\beta(2,x)).$$

Perėję prie ribos paskutinėje lygybėje darome išvadą, kad

$$\lim_{x\to\infty} \psi_x(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{it} + 1\right).$$

Bet tai ir yra diskretaus tolygiojo skirstinio $\mathcal{U}(u, 2)$ charakteristinė funkcija.

Taigi, teoremos pakankamumas įrodytas.

2.1 teorema įrodyta.

3 Diskretus tolygusis ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekų sumoms su paslinktais argumentais

Šiame skyriuje pateikiamos stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais argumentais pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(n \leqslant x, f_x(n) + g_x(n+1) < u) = \frac{1}{[x]} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ f_x(n)+g_x(n+1)<u}} 1 \tag{3.1}$$

silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį skirstinį $\mathcal{U}(u, L)$, $L \in \mathbb{N}$, $L \geqslant 2$, būtinos ir pakankamos sąlygos. Teorema buvo įrodyta remiantis faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodais. Taip pat buvo įvesta sąlyga, apribojanti adityviųjų funkcijų elgseną dideliems pirminiams skaičiams ((3.2) sąlyga). Galbūt ši problema yra išsprendžiama kitais metodais (pvz. Kubiliaus modelis ar kt.). Tačiau ir šiais atvejais iškils didelių pirminių skaičių problema.

3.1 Pagrindinis rezultatas ir papildomos lemos

3.1 teorema. *Tegul f_x ir g_x, $x \geqslant 2$, yra dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad $f_x(p)$, $g_x(p) \in \{0, 1\}$ visiems pirminiams p. Be to, tarkime, kad*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{p \leqslant x} \frac{(f_x(p) + g_x(p)) \log p}{p} = 0. \tag{3.2}$$

(3.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į diskretų tolygųjį ribinį dėsnį $\mathcal{U}(u, L)$, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai $L = 2$ ir

$$f_x(2) + g_x(2) = 1, \tag{3.3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{2 < p \leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0. \tag{3.4}$$

Šios teoremos įrodymas paremtas paskirstymo funkcijų $\nu_x(f_x(n)+g_x(n+1) < u)$ faktorialinių momentų ribine elgsena. Ji pateikiama 3.2, 3.4, 3.5 lemose.

3.2 lema ([34])**.** *Tegul f_x ir g_x, $x \geqslant 2$, yra stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad $f_x(p)$, $g_x(p) \in \{0,1\}$ visiems pirminiams p. Jeigu* (3.1) *pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją, kai $x \to \infty$, tai dydis*

$$\phi(x,l) := \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \prod_{k=0}^{l-1} (f_x(n) + g_x(n+1) - k), \quad l = 1, 2, \ldots$$

turi baigtinę ribą

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x,l) =: \phi_l, \tag{3.5}$$

čia ϕ_l yra ribinio dėsnio l-asis faktorialinis momentas. Iš kitos pusės, jei (3.5) *riba egzistuoja kiekvienam fiksuotam natūraliajam l ir eilutė*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l \phi_l}{l!}$$

konverguoja, tai (3.1) *pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją, kurios charakteristinė funkcija yra*

$$1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\phi_l}{l!} \left(e^{it} - 1\right)^l. \tag{3.6}$$

3.3 lema ([13])**.** *Tegul h adityvioji funkcija, įgyjanti realiąsias reikšmes. Tuomet įvertis*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ h(n)=a}} 1 \ll x \left(\sum_{\substack{p \leqslant x \\ h(p) \neq 0}} \frac{1}{p} \right)^{-1/2}$$

teisingas visiems realiesiems skaičiams a ir $x \geqslant 2$.

3.4 lema. *Tegul f_x ir g_x, $x \geqslant 2$, yra dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad $f_x(p)$, $g_x(p) \in \{0,1\}$ visiems pirminiams p ir* (3.2) *sąlyga yra patenkinta. Jeigu* (3.1) *pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokį ribinį dėsnį, tai*

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_l \leqslant x \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \ldots f(p_k) g(p_{k+1}) \ldots g(p_l)}{p_1 \ldots p_k p_{k+1} \ldots p_l} = \phi_l \tag{3.7}$$

visiems fiksuotiems natūraliesiems l. Be to, ribinis dėsnis turi (3.6) *charakteristinę funkciją.*

3.5 lema. *Tegul f_x ir g_x, $x \geqslant 2$, dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės ir $f_x(p)$, $g_x(p) \in \{0,1\}$ visiems pirminiams p bei (3.2) sąlyga yra patenkinta. Jeigu (3.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją F_ξ su baigtine atrama $\{0,1,2,\ldots,L-1\}, L \geqslant 2$, tai egzistuoja konstanta $D \geqslant 2$ tokia, kad*

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \leqslant L-1, \tag{3.8}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{D<p\leqslant x} \frac{f_x(p)+g_x(p)}{p} = 0, \tag{3.9}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_k,p_{k+1},\ldots,p_l\leqslant D\\ p_i\neq p_j, i\neq j}} \frac{f(p_1)\ldots f(p_k)g(p_{k+1})\ldots g(p_l)}{p_1\ldots p_k p_{k+1}\ldots p_l} = \phi_l, \tag{3.10}$$

$l = 1,2,...,L-1$. Be to, ribinio skirstinio F_ξ charakteristinė funkcija yra (3.6) ir $\phi_l = 0$, kai $l \geqslant L$.

Iš 3.1 teoremos gauname pavyzdį.

3.1 pavyzdys. *Tegul stipriai adityviosios funkcijos f_x ir g_x apibrėžtos taip*

$$f_x(p) = \begin{cases} 1, & \text{jei } p = 2 \text{ ir } x \text{ nelyginis,} \\ 0 & \text{kitais atvejais,} \end{cases} \qquad g_x(p) = \begin{cases} 1, & \text{jei } p = 2 \text{ ir } x \text{ lyginis,} \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Tada

$$\nu_x(f_x(n) + g_x(n+1) < u) \Rightarrow \mathcal{U}(u,2), \qquad x \to \infty.$$

3.2 Lemų įrodymai

3.4 lemos įrodymas

Pirmiausia įrodysime, kad

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{f_x(p)+g_x(p)}{p} \ll 1. \tag{3.11}$$

Tarkime, kad (3.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinį skirstinį F_ξ. Šis ribinis skirstinys yra atsitiktinio dydžio ξ, įgyjančio sveikąsias reikšmes, skirstinys. Taigi, egzistuoja toks natūralusis a, kuriam

$$F_\xi(a+) - F_\xi(a) > 0.$$

Tarkime, kad a_0 mažiausias toks sveikasis skaičius. Tuomet

$$\lim_{x\to\infty} \nu_x(n \leqslant x, f_x(n) + g_x(n+1) = a_0) = F_\xi(a_0+) - F_\xi(a_0) > 0.$$

Kadangi

$$\liminf_{x\to\infty} \nu_x(n \leqslant x, f_x(n) \leqslant a_0) \geqslant \lim_{x\to\infty} \nu_x(n \leqslant x, f_x(n) + g_x(n+1) = a_0) > 0,$$

tai tam tikram sveikajam a_1, $0 \leqslant a_1 \leqslant a_0$ turime

$$\liminf_{x\to\infty} \nu_x(n \leqslant x, f_x(n) = a_1) > 0.$$

Iš šios nelygybės ir 3.3 lemos išplaukia, kad

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{f_x(p)}{p} \ll 1.$$

Atitinkamai galime įvertinti funkcijos g_x elgseną. Taigi, (3.11) nelygybė yra teisinga.

Tegul δ fiksuotas, teigiamas ir pakankamai mažas skaičius. Apibrėžkime dvi naujas, stipriai adityviąsias funkcijas $\tilde{f}_x$ ir $\tilde{g}_x$ taip:

$$\tilde{f}_x(p) := \begin{cases} f_x(p), & \text{jei } p \leqslant x^\delta, \\ 0, & \text{jei } p > x^\delta, \end{cases} \qquad \tilde{g}_x(p) := \begin{cases} g_x(p), & \text{jei } p \leqslant x^\delta, \\ 0, & \text{jei } p > x^\delta. \end{cases}$$

Kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\nu_x\Big(n \leqslant x, \big|f_x(n) + g_x(n+1) - \tilde{f}_x(n) - \tilde{g}_x(n+1)\big| > \varepsilon\Big) \\ &\leqslant \nu_x\Big(n \leqslant x, \big|f_x(n) - \tilde{f}_x(n)\big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) + \nu_x\Big(n \leqslant x, |g_x(n+1) - \tilde{g}_x(n+1)| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) \\ &\leqslant \nu_x\Big(n \leqslant x, \exists p|n : f_x(p) \neq \tilde{f}_x(p)\Big) + \nu_x\left(n \leqslant x, \exists p|n+1 : g_x(p) \neq \tilde{g}_x(p)\right) \\ &\ll \sum_{x^\delta < p \leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Bet iš (3.2) sąlygos gauname, kad

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{x^\delta < p \leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0. \tag{3.13}$$

Tai reiškia, kad (3.1) pasiskirstymo funkcijos ir pasiskirstymo funkcijos

$$\nu_x \left(\tilde{f}_x(n) + \tilde{g}_x(n+1) < u \right) \tag{3.14}$$

konverguoja į tą patį ribinį skirstinį ir šių ribinių skirstinių faktorialiniai momentai sutampa.

Tegul l fiksuotas skaičius. Iš (3.14) skirstinių faktorialinių metodų turime, kad

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(x,l) &= \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \prod_{k=0}^{l-1} \left(\tilde{f}_x(n) + \tilde{g}_x(n+1) - k \right) \\
&= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{n \leqslant x} \tilde{f}_x(n) \left(\tilde{f}_x(n) - 1 \right) \dots \left(\tilde{f}_x(n) - (k-1) \right) \\
&\quad \times \tilde{g}_x(n+1) \left(\tilde{g}_x(n+1) - 1 \right) \dots \left(\tilde{g}_x(n+1) - (l-k-1) \right).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Naudojant funkcijų $\tilde{f}_x$ ir $\tilde{g}_x$ adityvumą (3.15) lygybės vidinę sumą galime perrašyti taip

$$\sum_{\substack{p_1,\dots,p_k,p_{k+1},\dots,p_l \leqslant x^\delta \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p_1 \cdots p_k | n \\ p_{k+1} \cdots p_l | n+1}} f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l),$$

kuri yra lygi

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{p_1,\dots,p_k,p_{k+1},\dots,p_l \leqslant x^\delta \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \left(\frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_l} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
&= \sum_{\substack{p_1,\dots,p_k,p_{k+1},\dots,p_l \leqslant x^\delta \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_l} + O\left(\frac{x^{l\delta}}{x \log^l x} \right).
\end{aligned}$$

Taigi, turime, kad

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(x,l) &= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_k,p_{k+1},\dots,p_l \leqslant x \\ p_i \neq p_j, i \neq j}} \frac{f(p_1) \dots f(p_k) g(p_{k+1}) \dots g(p_l)}{p_1 \dots p_k p_{k+1} \dots p_l} \\
&\quad + O\left(\sum_{x^\delta < p \leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \left(\sum_{p \leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \right)^{l-1} \right) + O\left(\frac{x^{l\delta}}{x \log^l x} \right).
\end{aligned}$$

Pasirinkus $\delta \leqslant 1/l$ iš (3.11) ir (3.13) gauname (3.7). 3.4 lema įrodyta.

3.5 lemos įrodymas

Šios lemos įrodymas panašus į 4 išvados iš [31] būtinumo įrodymą.

Remiantis 3.4 lema (3.7) lygybė galioja kiekvienam natūraliajam l. Tegul $d \geqslant 2$ fiksuotas natūralusis skaičius. Jeigu $x/d^{L-1} > d$, tai iš (3.7) lygybės turime, kad

$$\phi_L \geqslant \limsup_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{L} \binom{L}{k} \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_k,p_{k+1},\ldots,p_L \leqslant d \\ p_i \neq p_j, i\neq j}} \frac{f(p_1)\ldots f(p_k)g(p_{k+1})\ldots g(p_L)}{p_1\ldots p_k p_{k+1}\ldots p_L}.$$

Darant prielaidą, kad

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \geqslant L,$$

gauname prieštarą sąlygai $\phi_L = 0$. Todėl

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \leqslant L - 1$$

kiekvienam fiksuotam, natūraliajam d. Imkime

$$a_d = \limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\}.$$

Seka a_d ($d \geqslant 2$) įgyja sveikąsias reikšmes, yra nemažėjanti ir aprėžta. Vadinasi, egzistuoja natūralusis $D \geqslant 2$, kad

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} = a_d,$$

kai $d \geqslant D$. Kadangi $a_d \leqslant L-1$ visiems natūraliesiems d, tai gauname (3.8) sąlygą.

Kita vertus, iš šių samprotavimų išplaukia, kad

$$\lim_{x\to\infty} (f_x(p) + g_x(p)) = 0$$

visiems fiksuotiems pirminiams $p > D$. Taigi,

$$\lim_{x\to 0} \max_{D<p\leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0. \tag{3.16}$$

Pagal (3.11) ir (3.16) kiekvienai porai $i,\ j$, $1 \leqslant i < j \leqslant L$, turime, kad

$$\sum_{\substack{D<p_1,\dots,p_k,p_{k+1},\dots,p_L\leqslant x\\ p_i=p_j}} \frac{f(p_1)\dots f(p_k)g(p_{k+1})\dots g(p_L)}{p_1\dots p_k p_{k+1}\dots p_L}$$

$$\leqslant \max_{D<p\leqslant x} \frac{f_x(p)+g_x(p)}{p}\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{f_x(p)+g_x(p)}{p}\right)^{L-1} \to 0,$$

kai $x\to\infty$. Iš čia ir (3.7) lygybės turime, kad

$$\phi_L \geqslant \limsup_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{L}\binom{L}{k}\left(\sum_{D<p\leqslant x}\frac{f_x(p)}{p}\right)^k\left(\sum_{D<p\leqslant x}\frac{g_x(p)}{p}\right)^{L-k}.$$

Taigi, iš sąlygos $\phi_L = 0$ išplaukia (3.9).

Paskutinė (3.10) lemos sąlyga išplaukia iš (3.7) ir (3.9) lygybės. 3.5 lema įrodyta.

3.3 Pagrindinio rezultato įrodymas

Būtinumas. Tarkime, kad

$$\nu_x(f_x(n)+g_x(n+1)<u) \Rightarrow \mathcal{U}(u,L),$$

kai $x\to\infty$, su parametru $L\geqslant 2$. Diskretaus tolygiojo skirstinio atveju turime, kad ribinio skirstinio faktorialiniai momentai yra

$$\phi_k = \frac{(L-1)(L-2)\dots(L-k)}{k+1}, \quad k=1,2,\dots,L-1,$$
$$\phi_k = 0, \quad k=L,L+1,\dots.$$

Iš (3.7) išplaukia, kad

$$\phi_2 \leqslant \phi_1^2.$$

Todėl

$$\frac{(L-1)(L-2)}{3} \leqslant \left(\frac{L-1}{2}\right)^2.$$

Iš čia gauname, kad $L\leqslant 5$.

Pagal 3.5 lemą turime, kad fiksuotiems $D\geqslant 2$ teisingos šios sąlygos :

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} =: \kappa \leqslant L - 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{D<p\leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0.$$

Atskirai nagrinėsime atvejus $L = 2, 3, 4, 5$.

Tegul $L = 2$. Šiuo atveju $\kappa \leqslant 1$,

$$\phi_1 = \frac{1}{2}, \quad \phi_2 = \phi_3 = \cdots = 0.$$

Iš 3.5 lemos turime, kad

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p\leqslant D} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = \frac{1}{2}. \tag{3.17}$$

Jei $\kappa = 1$, tai iš šių samprotavimų gauname, kad yra galimas tik vienas atvejis:

$$f_x(2) + g_x(2) = 1$$

dideliems x ir

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{2<p\leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0.$$

Jei $\kappa = 0$, tai $f_x(p) + g_x(p) = 0$ kiekvienam fiksuotam pirminiam p ir pakankamai dideliems x. Šiuo atveju (3.17) lygybė nėra teisinga. Iš to išplaukia, kad atvejis $\kappa = 0$ nėra galimas.

Tegul $L = 3$. Tada $\kappa \leqslant 2$,

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = \frac{2}{3}, \quad \phi_3 = \phi_4 = \cdots = 0.$$

Iš 3.5 lemos turime, kad

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p\leqslant D} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 1, \tag{3.18}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant D \\ p_1\neq p_2}} \frac{f_x(p_1)f_x(p_2) + 2f_x(p_1)g_x(p_2) + g_x(p_1)g_x(p_2)}{p_1p_2} = \frac{2}{3}. \tag{3.19}$$

Visų pirma, tarkime, kad $\kappa = 2$. Nėra tokių dviejų skirtingų pirminių $p_1,\ p_2 \leqslant D$, kuriems $f_x(p_i) + g_x(p_i) \neq 0$, $i = 1, 2$. Taigi, (3.18) sąlyga nėra tenkinama.

Atvejams $\kappa = 1$ ir $\kappa = 0$ (3.19) sąlyga nėra išpildyta.

Tegul $L = 4$. Tada $\kappa \leqslant 3$,

$$\phi_1 = \frac{3}{2}, \quad \phi_2 = 2, \quad \phi_3 = \frac{3}{2}, \quad \phi_4 = \phi_5 = \cdots = 0.$$

Iš 3.5 lemos turime, kad

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p \leqslant D} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = \frac{3}{2}, \tag{3.20}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p_1,p_2 \leqslant D \\ p_1 \neq p_2}} \frac{f_x(p_1)f_x(p_2) + 2f_x(p_1)g_x(p_2) + g_x(p_1)g_x(p_2)}{p_1 p_2} = 2,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p_1,p_2,p_3 \leqslant D \\ p_1 \neq p_2, p_1 \neq p_3, p_2 \neq p_3}} \Bigg(\frac{f_x(p_1)f_x(p_2)f_x(p_3) + 3f_x(p_1)f_x(p_2)g_x(p_3)}{p_1p_2p_3} + \frac{3f_x(p_1)g_x(p_2)g_x(p_3) + g_x(p_1)g_x(p_2)g_x(p_3)}{p_1p_2p_3} = \frac{3}{2}\Bigg). \tag{3.21}$$

Iš (3.21) lygybės išplaukia, kad κ negali įgyti reikšmių $0, 1$, ir 2.

Tarkime, kad $\kappa = 3$. Tuomet turi egzistuoti trys skirtingi pirminiai skaičiai $p_1,\ p_2,\ p_3 \leqslant D$, kuriems $f_x(p_i) + g_x(p_i) \neq 0$. Tačiau nėra tokių pirminių, kad (3.20) lygybė būtų teisinga.

Tarkime $L = 5$. Tuomet $\kappa \leqslant 4$,

$$\phi_1 = 2, \quad \phi_2 = 4, \quad \phi_3 = 6, \quad \phi_4 = \frac{24}{5}, \quad \phi_5 = \phi_6 = ... = 0.$$

Iš 3.5 lemos turime, kad

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p \leqslant D} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 2, \tag{3.22}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p_1,p_2 \leqslant D \\ p_1 \neq p_2}} \frac{f_x(p_1)f_x(p_2) + 2f_x(p_1)g_x(p_2) + g_x(p_1)g_x(p_2)}{p_1 p_2} = 4,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p_1,p_2,p_3 \leqslant D \\ p_1 \neq p_2, p_1 \neq p_3, p_2 \neq p_3}} \Bigg(\frac{f_x(p_1)f_x(p_2)f_x(p_3) + 3f_x(p_1)f_x(p_2)g_x(p_3)}{p_1p_2p_3} + \frac{3f_x(p_1)g_x(p_2)g_x(p_3) + g_x(p_1)g_x(p_2)g_x(p_3)}{p_1p_2p_3} = 6\Bigg), \tag{3.23}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\sum_{\substack{p_1,p_2,p_3,p_4\leqslant D\\ p_i\neq p_j, i\neq j}}\frac{f(p_1)\dots f(p_k)g(p_{k+1})\dots g(p_4)}{p_1p_2p_3p_4}=\frac{24}{5}. \tag{3.24}$$

Iš (3.24) lygybės išplaukia, kad κ negali būti lygus $0, 1, 2$ ir 3.

Atvejis $\kappa = 4$ nėra galimas dėl (3.22) lygybės. Teoremos būtinumas įrodytas.

Pakankamumas. Iš teoremos (3.4) sąlygos išplaukia, kad (3.11) ir (3.13) sąlygos yra teisingos. Tuomet iš (3.12) turime, kad, konvergavimo atveju (3.1) ir (3.14) skirstiniai silpnai konverguoja į tą patį ribinį skirstinį. Todėl užtenka nagrinėti (3.14) skirstinio faktorialinių momentų $\tilde{\phi}(x, l)$ konvergavimą.

Iš (3.3), (3.4) ir (3.15) gauname, kad

$$\lim_{x\to\infty}\tilde{\phi}(x,l)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\sum_{\substack{p_1,\dots,p_k,p_{k+1},\dots,p_l\leqslant x\\ p_i\neq p_j, i\neq j}}\frac{f(p_1)\dots f(p_k)g(p_{k+1})\dots g(p_l)}{p_1\dots p_kp_{k+1}\dots p_l}=0,$$

kai $l = 2, 3, \dots$ ir

$$\lim_{x\to\infty}\tilde{\phi}(x,1)=\lim_{x\to\infty}\sum_{p\leqslant x}\frac{f_x(p)+g_x(p)}{p}=\frac{f_x(2)+g_x(2)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Iš 3.2 lemos išplaukia, kad (3.1) skirstiniai silpnai konverguoja į diskretų tolygųjį skirstinį $\mathcal{U}(u, 2)$. Teorema įrodyta.

4 Diskretus tolygusis ribinis dėsnis adityviųjų funkcijų sekų sumoms su paslinktais pirminiais

Šiame skyriuje pateikiamos stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais pirminiais pasiskirstymo funkcijų

$$\nu_x(p \leqslant x, f_x(p+1) + g_x(p+2) < u) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f_x(p+1)+g_x(p+2)<u}} 1 \qquad (4.1)$$

silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį skirstinį $\mathcal{U}(u, L)$, $L \in \mathbb{N}$, $L \geqslant 2$, būtinos ir pakankamos sąlygos. Kaip ankstesniuose skyriuose, teorema buvo įrodyta remiantis faktorialinių momentų bei charakteristinių funkcijų metodais. Šiems skirstiniams taip pat buvo įvesta sąlyga apribojanti adityviųjų funkcijų elgseną dideliems pirminiams skaičiams ((4.2) sąlyga).

4.1 Pagrindinis rezultatas ir papildomos lemos

4.1 teorema. *Tegul f_x ir g_x, $x \geqslant 2$, yra dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės. Tarkime, kad $f_x(p)$, $g_x(p) \in \{0, 1\}$ visiems pirminiams p ir*

$$\lim_{x\to\infty} \log x \sum_{x^\gamma < p \leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0 \qquad (4.2)$$

kiekvienam $\gamma \in (0, 1)$. (4.1) pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į ribinį diskretų tolygųjį skirstinį $\mathcal{U}(u, L)$, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, kai $L = 2$,

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \neq 3,5}} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0 \qquad (4.3)$$

ir kiekvienam pakankamai dideliam x galimas vienas iš atvejų

$$f_x(3) + g_x(3) = 1 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = 0 \qquad (4.4)$$

arba

$$f_x(3) + g_x(3) = 0 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = 2. \qquad (4.5)$$

Teoremos įrodymas remiasi toliau pateiktomis lemomis.

4.2 lema ([2]). *Tegul K teigiamas realusis skaičius. Tada egzistuoja toks realusis skaičius L, kad tolygiai visiems $x \geqslant 2$*

$$\sum_{d \le x^{1/2}(\log x)^{-L}} \max_{(d,v)=1} \left| \pi(x,d,v) - \frac{\operatorname{li} x}{\phi(d)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^K}.$$

4.3 lema ([35]). *Tegul f_x ir g_x, $x \ge 2$, dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės, tokios, kad $f_x(p)$, $g_x(p) \in \{0,1\}$ visiems pirminiams p ir*

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \leqslant c. \tag{4.6}$$

Taip pat tegul natūraliesiems l

$$\begin{aligned}\beta(l,x) := \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \le x} &(f_x(p+1) + g_x(p+2)) \\ &\times (f_x(p+1) + g_x(p+2) - 1) \ldots (f_x(p+1) + g_x(p+2) - l + 1).\end{aligned}$$

Tuomet

$$\beta(l,x) \ll_{l,c} 1.$$

4.4 lema. *Tegul f_x ir g_x, $x \geqslant 2$, dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad $f_x(p)$, $g_x(p) \in \{0,1\}$ visiems pirminiams p ir tegul* (4.6) *nelygybė patenkinta. Jeigu* (4.1) *pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją $F(u)$, kai $x \to \infty$, tai*

$$\lim_{x \to \infty} \beta(l,x) = \beta_l, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{4.7}$$

čia β_l yra ribinio dėsnio l-asis faktorialinis momentas.

4.5 lema. *Tegul stipriai adityviųjų funkcijų aibėms f_x ir g_x galioja* 4.1 *teoremos sąlygos ir* (4.6) *nelygybė patenkinta. Jeigu* (4.1) *pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją $F(u)$, kai $x \to \infty$, tai*

$$\beta_l = \lim_{x \to \infty} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1, p_2, \ldots, p_l \le x \\ p_i \ne p_j, i \ne j}} \frac{f_x(p_1) \ldots f_x(p_k) g_x(p_{k+1}) \ldots g_x(p_l)}{\phi(p_1 p_2 \ldots p_l)}. \tag{4.8}$$

4.6 lema. *Tegul f_x ir g_x, $x \geqslant 2$, dvi stipriai adityviųjų funkcijų aibės tokios, kad $f_x(p),\ g_x(p) \in \{0,1\}$ visiems pirminiams p ir tegul* (4.2) *sąlyga patenkinta. Jeigu* (4.1) *pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkciją F_ξ su baigtine atrama $\{0, 1, \ldots, L-1\}$, $L \geqslant 2$, tai egzistuoja konstanta $D \geqslant 2$ tokia, kad*

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \leqslant L - 1, \tag{4.9}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{D<p\leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0, \tag{4.10}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_k,p_{k+1},\ldots,p_l \leqslant D \\ p_i \neq p_j, i\neq j}} \frac{f(p_1)\ldots f(p_k) g(p_{k+1})\ldots g(p_l)}{\phi(p_1 p_2 \ldots p_l)} = \beta_l, \tag{4.11}$$

$l = 1, 2, \ldots, L-1$. Be to, ribinio dėsnio F_ξ charakteristinė funkcija yra lygi

$$1 + \sum_{l=1}^{L-1} \frac{\beta_l}{l!} (\mathrm{e}^{it} - 1)^l.$$

Iš 4.1 teoremos išplaukia pavyzdys.

4.1 pavyzdys. *Tegul*

$$f_x(p) = \begin{cases} 1, & \textit{jei } p = 3 \textit{ ir } x \textit{ nelyginis}, \\ 0, & \textit{jei } p = 3 \textit{ ir } x \textit{ lyginis}, \\ 0, & \textit{jei } p = 5 \textit{ ir } x \textit{ nelyginis}, \\ 1, & \textit{jei } p = 5 \textit{ ir } x \textit{ lyginis}, \\ 0 & \textit{kitais atvejais}, \end{cases} \quad g_x(p) = \begin{cases} 0, & \textit{jei } p = 3, \\ 0, & \textit{jei } p = 5 \textit{ ir } x \textit{ nelyginis}, \\ 1, & \textit{jei } p = 5 \textit{ ir } x \textit{ lyginis}, \\ 0 & \textit{kitais atvejais}. \end{cases}$$

Tuomet

$$\nu_x(f_x(p+1) + g_x(p+2) < u) \Rightarrow \mathcal{U}(u, 2), \qquad x \to \infty.$$

4.2 Lemų įrodymai

4.4 lemos įrodymas

Kiekvienam $k \geqslant l+2$ teisingas įvertis

$$\beta(l+2,x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ h(p)=m}} \sum_{m=l+2}^{\infty} m(m-1)\dots(m-l-1)$$
$$\geqslant \frac{1}{\pi(x)} k(k-1)\dots(k-l-1) \sum_{\substack{p\leqslant x\\ h(p)=m}} 1.$$

Naudojant 4.3 lemą bei šį įvertį, gauname, kad

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p+1)+g_x(p+2)=k}} 1 \leqslant \frac{\beta(l+2,x)}{k(k-1)\dots(k-l-1)} \ll_l \frac{1}{k(k-1)\dots(k-l-1)}.$$

Todėl

$$F(k+)-F(k) = \lim_{x\to\infty} \nu_x(f_x(p+1)+g_x(p+2)=k) \ll_l \frac{1}{k(k-1)\dots(k-l-1)} \tag{4.12}$$

kiekvienam $k \geqslant l+2$ ir riba

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{k=l}^{K} k(k-1)\dots(k-l+1)(F(k+)-F(k)) = \beta_l \tag{4.13}$$

egzistuoja.

Fiksuokime $l \in \mathbb{N}$, pasirinkime $K > l+2$ ir padalinkime $\beta(l,x)$ į dvi sumas:

$$\beta(l,x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ 1\leqslant f_x(p+1)+g_x(p+2)\leqslant K}} (f_x(p+1)+g_x(p+2))$$
$$\times (f_x(p+1)+g_x(p+2)-1)\dots(f_x(p+1)+g_x(p+2)-l+1)$$
$$+ \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p+1)+g_x(p+2)>K}} (f_x(p+1)+g_x(p+2))(f_x(p+1)+g_x(p+2)-1)\dots$$
$$\times (f_x(p+1)+g_x(p+2)-l+1) \frac{f_x(p+1)+g_x(p+2)-l}{f_x(p+1)+g_x(p+2)-l}.$$

Pertvarkome $\beta(l,x)$ išraišką ir, pasinaudoję 4.3 lema, gauname

$$\beta(l,x) = \sum_{k=l}^{K} k(k-1)\dots(k-l+1) \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ f_x(p+1)+g_x(p+2)=k}} 1 + O\left(\frac{\beta(l+1,x)}{K-l}\right)$$
$$= \sum_{k=l}^{K} k(k-1)\dots(k-l+1)(F(k+)-F(k)) + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K-l}\right).$$

Iš (4.12) ir (4.13) išplaukia, kad

$$\begin{aligned}\beta(l,x) &= \beta_l - \sum_{k=K+1}^{\infty} k(k-1)\dots(k-l+1)(F(k+)-F(k)) + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K-l}\right)\\ &= \beta_l + O_l\left(\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{(k-l)(k-l-1)}\right) + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K}\right)\\ &= \beta_l + \varepsilon_{K,l}(x) + O_l\left(\frac{1}{K}\right).\end{aligned}$$

Paskutinėje lygybėje perėjus prie ribos, kai x artėja į begalybę, tada K artėja į begalybę, gauname (4.7) sąryšį. 4.4 lema įrodyta.

4.5 lemos įrodymas

Tegul $\hat{f}_x$ ir $\hat{g}_x$ yar dvi naujos stipriai adityviosios funkcijos, apibrėžtos lygybėmis:

$$\hat{f}_x(p) = \begin{cases} f_x(p), & \text{jei } p \leqslant x^\delta,\\ 0, & \text{jei } p > x^\delta, \end{cases} \qquad \hat{g}_x(p) = \begin{cases} g_x(p), & \text{jei } p \leqslant x^\delta,\\ 0, & \text{jei } p > x^\delta, \end{cases}$$

čia konstanta $\delta > 0$ yra mažas dydis ir bus pasirinktas vėliau. Kievienam teigiamam ε

$$\begin{aligned}&\nu_x\left(\left|f_x(p+1) + g_x(p+2) - \hat{f}_x(p+1) - \hat{g}_x(p+2)\right| > \varepsilon\right)\\ &\quad\leqslant \nu_x\left(\left|f_x(p+1) - \hat{f}_x(p+1)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \nu_x\left(\left|g_x(p+2) - \hat{g}_x(p+2)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &\quad\leqslant \nu_x\left(\exists\, q|p+1 : f_x(q) \neq \hat{f}_x(q)\right) + \nu_x\left(\exists\, q|p+2 : g_x(q) \neq \hat{g}_x(q)\right). \quad (4.14)\end{aligned}$$

Dešiniosios pusės pirmasis dėmuo neviršija

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{x^\delta < q \leqslant x+1} \sum_{\substack{p \leqslant x\\ q|p+1}} f_x(q) \ll \log x \left(\sum_{x^\delta < q \leqslant x} \frac{f_x(q)}{q} + \frac{1}{x}\right).$$

Analogiškas įvertis yra ir (4.14) antrojo dešiniosios pusės dėmens. Tuomet

$$\begin{aligned}&\nu_x\left(\left|f_x(p+1) + g_x(p+2) - \hat{f}_x(p+1) - \hat{g}_x(p+2)\right| > \varepsilon\right)\\ &\qquad\ll \log x \left(\sum_{x^\delta < q \leqslant x} \frac{f_x(q) + g_x(q)}{q} + \frac{1}{x}\right) = \varepsilon_\delta(x), \quad (4.15)\end{aligned}$$

nes (4.2) sąlyga galioja. Tai reiškia, kad

$$\nu_x \Big(\hat{f}_x(p+1) + \hat{g}_x(p+2) < u\Big) \Rightarrow F(u), \quad \text{kai} \quad x \to \infty.$$

Taigi, faktorialiniai momentai $\beta(l,x)$ ir

$$\hat{\beta}(l,x) := \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leqslant x} \prod_{k=0}^{l-1} \Big(\hat{f}_x(p+1) + \hat{g}_x(p+2) - k\Big)$$

turi tą pačią ribą β_l, $l = 1, 2, \dots$.

Fiksuokime $l \in \mathbb{N}$. Iš žinomų kombinatorikos lygybių išplaukia, kad

$$\hat{\beta}(l,x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{p \le x} \hat{f}_x(p+1)(\hat{f}_x(p+1) - 1) \dots (\hat{f}_x(p+1) - k + 1)$$
$$\times \hat{g}_x(p+2)(\hat{g}_x(p+2) - 1) \dots (\hat{g}_x(p+2) - (l-k) + 1). \quad (4.16)$$

Funkcijų $\hat{f}_x$ ir $\hat{g}_x$ stiprus adityvumas reiškia, kad

$$\hat{f}_x(p+1)(\hat{f}_x(p+1) - 1) \dots (\hat{f}_x(p+1) - k + 1)$$
$$\times \hat{g}_x(p+2)(\hat{g}_x(p+2) - 1) \dots (\hat{g}_x(p+2) - (l-k) + 1)$$
$$= \sum_{\substack{q_1 q_2 \cdots q_k | p+1 \\ q_{k+1} q_{k+2} \cdots q_l | p+2 \\ q_i \neq q_j, i \neq j}} \hat{f}_x(q_1)\hat{f}_x(q_2) \dots \hat{f}_x(q_k)\hat{g}_x(q_{k+1})\hat{g}_x(q_{k+2}) \dots \hat{g}_x(q_l). \quad (4.17)$$

Sveikiesiems skaičiams k_1 ir k_2

$$\sum_{\substack{p \le x \\ k_1 | p+1 \\ k_2 | p+2}} 1 = \pi(x, k_1 k_2, v),$$

čia v toks vienintelis sveikasis skaičius, kuriam

$$v \equiv -2 \mod k_1, \quad v \equiv -1 \mod k_2 \quad \text{ir} \quad 1 \le v \le k_1 k_2 - 1.$$

Pasirinkime $\delta = 1/(3l)$. Iš (4.16) ir (4.17) turime

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}(l,x) &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots,q_l \le x^\delta \\ q_i \ne q_j, i\ne j}} f_x(q_1)\ldots f_x(q_k) \\
&\qquad \times g_x(q_{k+1})\ldots g_x(q_l)\, \pi(x, q_1q_2\ldots q_l, v) \\
&= \frac{\operatorname{li} x}{\pi(x)} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots,q_l \le x^\delta \\ q_i \ne q_j, i\ne j}} \frac{f_x(q_1)\ldots f_x(q_k) g_x(q_{k+1})\ldots g_x(q_l)}{\phi(q_1q_2\ldots q_l)} \\
&\quad + \frac{1}{\pi(x)} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots,q_l \le x^\delta \\ q_i \ne q_j, i\ne j}} f_x(q_1)\ldots f_x(q_k) g_x(q_{k+1})\ldots g_x(q_l) \\
&\qquad \times \left(\pi(x, q_1q_2\ldots q_l, v) - \frac{\operatorname{li} x}{\phi(q_1q_2\ldots q_l)}\right) =: S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Sumai S_2 įvertinti taikome 4.2 lemą:

$$S_2 \ll_l \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots,q_l \le x^\delta \\ q_i \ne q_j, i\ne j}} \left| \pi(x, q_1q_2\ldots q_l, v) - \frac{\operatorname{li} x}{\phi(q_1q_2\ldots q_l)} \right| \ll_l \frac{1}{\log x}.$$

Naudojant žinomus įverčius gauname

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots,q_l \le x^\delta \\ q_i \ne q_j, i\ne j}} \frac{f_x(q_1)\ldots f_x(q_k) g_x(q_{k+1})\ldots g_x(q_l)}{\phi(q_1q_2\ldots q_l)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots,q_l \le x^\delta \\ q_i \ne q_j, i\ne j}} \frac{f_x(q_1)\ldots f_x(q_k) g_x(q_{k+1})\ldots g_x(q_l)}{\phi(q_1q_2\ldots q_l)} \\
&\qquad + O_l\left(\frac{1}{\log x}\left(\sum_{q\leqslant x} \frac{f_x(q)+g_x(q)}{q}\right)^l\right) \\
&= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots,q_l \le x \\ q_i \ne q_j, i\ne j}} \frac{f_x(q_1)\ldots f_x(q_k) g_x(q_{k+1})\ldots g_x(q_l)}{\phi(q_1q_2\ldots q_l)} \\
&\quad + O_l\left(\sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots,q_l \le x \\ \max(q_1,\ldots,q_l) > x^\delta}} \frac{f_x(q_1)\ldots f_x(q_k) g_x(q_{k+1})\ldots g_x(q_l)}{q_1q_2\cdots q_l} \right) + \varepsilon_l(x).
\end{aligned}$$

Iš (4.2) ir (4.6) sąlygų turime

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{q_1,q_2,\ldots,q_l \le x \\ \max(q_1,\ldots,q_l) > x^\delta}} \frac{f_x(q_1)\ldots f_x(q_k) g_x(q_{k+1})\ldots g_x(q_l)}{q_1q_2\cdots q_l} \\
&\qquad \ll_l \sum_{x^\gamma < q \leqslant x} \frac{f_x(q)+g_x(q)}{q} \left(\sum_{q\leqslant x} \frac{f_x(q)+g_x(q)}{q}\right)^l \ll_l \frac{1}{\log x}.
\end{aligned}$$

4.5 lema įrodyta.

4.6 lemos įrodymas

Lemos įrodymas panašus į 4 išvados iš [31] būtinumo įrodymą.

Iš lemos sąlygų gauname, kad egzistuoja toks $k \in \{0, 1, \ldots, L-1\}$, kuriam

$$\lim_{x\to\infty} \nu_x(f_x(p+1) + g_x(p+2) = k) = F_\xi(k+) - F_\xi(k) \geqslant c.$$

Iš to išplaukia, kad

$$\liminf_{x\to\infty} \nu_x(f_x(p+1) \in \{0, 1, \ldots, k\}) \geqslant \lim_{x\to\infty} \nu_x(f_x(p+1) + g_x(p+2) = k) \geqslant c.$$

Iš 2.2 lemos matyti, kad

$$\nu_x(f_x(p+1) = a) \ll \left(4 + \sum_{p\leqslant x} \frac{f_x(p)}{p}\right)^{-1/2},$$

kai $a = 0, 1, \ldots, k$. Todėl

$$\nu_x(f_x(p+1) \in \{0, 1, \ldots, k\}) \ll_k \left(4 + \sum_{p\leqslant x} \frac{f_x(p)}{p}\right)^{-1/2}.$$

Iš pastarojo įverčio gauname, kad

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{f_x(p)}{p} \ll 1.$$

Analogiškai gauname

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{g_x(p)}{p} \ll 1.$$

(4.6) lygybė yra patenkinta.

Tuomet pagal 4.5 lemą, (4.8) lygybė galioja. Tegul $d \geqslant 2$ fiksuotas natūralusis skaičius. Jeigu $x/d^{L-1} > d$, tai iš (4.8) lygybės gauname

$$\beta_L \geqslant \limsup_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{L} \binom{L}{k} \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_k,p_{k+1},\ldots,p_L\leqslant d\\ p_i\neq p_j, i\neq j}} \frac{f_x(p_1)\ldots f_x(p_k)g_x(p_{k+1})\ldots g_x(p_L)}{p_1\ldots p_k p_{k+1}\ldots p_L}.$$

Tariant, kad

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \geqslant L,$$

gauname prieštarą sąlygai $\beta_L = 0$. Todėl

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} \leqslant L - 1$$

kiekvienam fiksuotam natūraliajam d. Imkime

$$a_d = \limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant d : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\}.$$

Seka a_d ($d \geqslant 2$) įgyja sveikąsias reikšmes, yra nemažėjanti ir aprėžta. Egzistuoja natūralusis skaičius $D \geqslant 2$ toks, kad

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p) + g_x(p) \neq 0\} = a_d,$$

kai $d \geqslant D$. Kadangi $a_d \leqslant L - 1$ visiems natūraliesiems d, gauname (4.9) sąlygą.

Kita vertus, iš šių samprotavimų išplaukia, kad

$$\lim_{x\to\infty} (f_x(p) + g_x(p)) = 0$$

kiekvienam fiksuotam pirminiam $p > D$. Taigi, gauname

$$\lim_{x\to\infty} \max_{D<p\leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0. \tag{4.18}$$

Kiekvienai porai i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant L$,

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{D<p_1,\ldots,p_k,p_{k+1},\ldots,p_L\leqslant x \\ p_i=p_j}} \frac{f_x(p_1)\ldots f_x(p_k)g_x(p_{k+1})\ldots g_x(p_L)}{p_1\ldots p_k p_{k+1}\ldots p_L} \\ &\qquad \leqslant \max_{D<p\leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \left(\sum_{p\leqslant x} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} \right)^{L-1} \to 0, \end{aligned} \tag{4.19}$$

kai $x \to \infty$, nes patenkintos (4.6) ir (4.18) sąlygos. Iš (4.19) ir (4.8) lygybės turime, kad

$$\beta_L \geqslant \limsup_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{L} \binom{L}{k} \left(\sum_{D<p\leqslant x} \frac{f_x(p)}{p} \right)^k \left(\sum_{D<p\leqslant x} \frac{g_x(p)}{p} \right)^{L-k}.$$

Taigi, iš sąlygos $\beta_L = 0$ gauname (4.10).

Paskutinioji (4.11) lemos sąlyga išplaukia iš (4.8) ir (4.10) lygybės.

4.6 lema įrodyta.

4.3 Pagrindinio rezultato įrodymas

Būtinumas. Tarkime

$$\nu_x(f_x(p+1)+g_x(p+2)<u) \Rightarrow \mathcal{U}(u,L),$$

kai $x \to \infty$, su parametru $L \geqslant 2$. Diskretaus tolygiojo skirstinio atveju turime, kad ribinio skirstinio faktorialiniai momentai yra

$$\beta_k = \frac{(L-1)(L-2)\dots(L-k)}{k+1}, \quad k=1,2,\dots,L-1, \tag{4.20}$$

$$\beta_k = 0, \quad k = L, L+1, \dots .$$

Iš (4.8) lygybės išplaukia, kad

$$\beta_2 \leqslant \beta_1^2$$

arba

$$\frac{(L-1)(L-2)}{3} \leqslant \left(\frac{L-1}{2}\right)^2 .$$

Išsprendę pastarąją nelygybę gauname $L \leqslant 5$.

Iš 4.6 lemos gauname, kad fiksuotiems $D \geqslant 2$ galioja šios sąlygos:

$$\limsup_{x\to\infty} \#\{p \leqslant D : f_x(p)+g_x(p) \neq 0\} =: \kappa \leqslant L-1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{D<p\leqslant x} \frac{f_x(p)+g_x(p)}{p} = 0.$$

Atskirai nagrinėkime atvejus $L = 2,3,4,5$. Jeigu $\kappa < L-1$, iš (4.11) sąlygos gauname, kad $\beta_{L-1} = 0$. Bet tai prieštarauja (4.20). Todėl užtenka nagrinėti atvejus $\kappa = L-1$.

Tegul $L=2$ ir $\kappa = 1$. Šiuo atveju

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \beta_3 = \dots = 0.$$

Iš (4.11) išplaukia, kad pirminiams $p = p(x) \leqslant D$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_x(p)+g_x(p)}{p-1} = \frac{1}{2}.$$

Tai reiškia, kad bet kokiam pakankamai dideliam x teisinga viena iš dviejų sąlygų:

$$f_x(3) + g_x(3) = 1 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = 0$$

arba

$$f_x(3) + g_x(3) = 0 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = 2.$$

Abiem atvejais

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p\neq 3,5}} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p} = 0.$$

Tegul $L = 3$ ir $\kappa = 2$. Tuomet

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \frac{2}{3}, \quad \beta_3 = \beta_4 = \cdots = 0.$$

Pagal 4.6 lemą skirtingų pirminių porai $p_1 = p_1(x) \leqslant D$ ir $p_2 = p_2(x) \leqslant D$ tokiai, kad $f_x(p_1) + g_x(p_1) \neq 0,\ f_x(p_2) + g_x(p_2) \neq 0$ turime

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p=p_1,p_2} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p-1} = 1, \tag{4.21}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p,q\in\{p_1,p_2\} \\ p\neq q}} \frac{f_x(p)f_x(q) + 2f_x(p)g_x(q) + g_x(p)g_x(q)}{(p-1)(q-1)} = \frac{2}{3}. \tag{4.22}$$

Iš (4.21) lygybės gauname vieną atvejį

$$f_x(3) + g_x(3) = 1 \text{ ir } f_x(5) + g_x(5) = 2.$$

Bet (4.22) lygybės kairioji pusė yra lygi 1/2. Taigi atvejis $L = 3$ ir $\kappa = 2$ yra neįmanomas.

Tegul $L = 4$ ir $\kappa = 3$. Tuomet

$$\beta_1 = \frac{3}{2}, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = \frac{3}{2}, \quad \beta_4 = \beta_5 = \cdots = 0.$$

Pagal 4.6 lemą skirtingiems pirminių trejetams $p_1 = p_1(x) \leqslant D$, $p_2 = p_2(x) \leqslant D$ ir $p_3 = p_3(x) \leqslant D$ tokiems, kad $f_x(p_i) + g_x(p_i) \neq 0,\ i = 1, 2, 3,$ turime

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p=p_1,p_2,p_3} \frac{f_x(p) + g_x(p)}{p-1} = \frac{3}{2}, \tag{4.23}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p,q\in\{p_1,p_2,p_3\}\\ p\neq q}} \frac{f_x(p)f_x(q)+2f_x(p)g_x(q)+g_x(p)g_x(q)}{(p-1)(q-1)} = 2. \tag{4.24}$$

Iš (4.23) lygybės gauname, kad yra galimi du atvejai:

$$f_x(2)+g_x(2)=1 \text{ ir } f_x(7)+g_x(7)=f_x(13)+g_x(13)=2$$

arba

$$f_x(3)+g_x(3)=f_x(7)+g_x(7)=f_x(13)+g_x(13)=2.$$

Abiem atvejais kairioji (4.24) lygybės pusė yra lygi 10/9 ir (4.24) lygybė nėra tenkinama. Taigi, atvejis $L=4$ ir $\kappa=3$ nėra galimas.

Tegul $L=5$ ir $\kappa=4$. Tuomet

$$\beta_1=2, \quad \beta_2=4, \quad \beta_3=6, \quad \beta_4=\frac{24}{5}, \quad \beta_5=\beta_6=\cdots=0.$$

Pagal 4.6 lemą skirtingų pirminių ketvertams $p_i=p_i(x)\leqslant D$, $i=1,2,3,4$, tokiems, kad $f_x(p_i)+g_x(p_i)\neq 0$, $i=1,2,3,4$, turime

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p=p_1,p_2,p_3,p_4} \frac{f_x(p)+g_x(p)}{p-1} = 2, \tag{4.25}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\substack{p,q\in\{p_1,p_2,p_3,p_4\}\\ p\neq q}} \frac{f_x(p)f_x(q)+2f_x(p)g_x(q)+g_x(p)g_x(q)}{(p-1)(q-1)} = 4. \tag{4.26}$$

Iš (4.25) lygybės gauname, kad yra galimi trys atvejai:

$$f_x(2)+g_x(2)=f_x(3)+g_x(3)=1 \text{ ir } f_x(7)+g_x(7)=f_x(13)+g_x(13)=2,$$

arba

$$f_x(2)+g_x(2)=1 \text{ ir } f_x(5)+g_x(5)=f_x(7)+g_x(7)=f_x(13)+g_x(13)=2,$$

arba

$$f_x(3)+g_x(3)=f_x(5)+g_x(5)=f_x(7)+g_x(7)=f_x(13)+g_x(13)=2.$$

Visuose trijuose atvejuose (4.26) lygybės kairioji pusė yra lygi 47/18 ir (4.26) lygybė nėra tenkinama. Taigi, atvejis $L=5$ ir $\kappa=4$ taip pat nėra galimas. Teoremos būtinumas įrodytas.

Pakankamumas. Iš teoremos (4.2) ir (4.3) sąlygų išplaukia, kad (4.6) ir (4.15) sąlygos galioja. Tuomet turime, kad konvergavimo atveju skirstiniai (4.1) ir

$$\nu_x \left(\hat{f}_x(p+1) + \hat{g}_x(p+2) < u\right)$$

silpnai konverguoja į tą patį ribinį dėsnį. Iš (4.4), (4.5) ir (4.3), mąstant taip pat kaip 4.5 lemos įrodyme, gauname, kad

$$\lim_{x\to\infty} \hat{\beta}(l,x) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \sum_{\substack{p_1,p_2,\ldots,p_l \le x^\delta \\ p_i \ne p_j, i\ne j}} \frac{f_x(p_1)\ldots f_x(p_k) g_x(p_{k+1})\ldots g_x(p_l)}{\phi(p_1 p_2 \ldots p_l)} = 0,$$

jeigu $l > 1$ ir

$$\lim_{x\to\infty} \hat{\beta}(1,x) = \frac{1}{2}.$$

Imkime

$$\hat{\psi}_x(t) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\leqslant x} \mathrm{e}^{it(\hat{f}_x(p+1)+\hat{g}_x(p+2))},$$

kai $x \geqslant 2$ ir $t \in \mathbb{R}$. Kadangi

$$\left|\mathrm{e}^{itr} - 1 - r\left(\mathrm{e}^{\mathrm{it}} - 1\right)\right| \leqslant \frac{r(r-1)}{2} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{it}} - 1\right|^2$$

visiems $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, tai gauname, kad

$$\hat{\psi}_x(t) = 1 + \hat{\beta}(1,x)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{it}} - 1\right) + O(\hat{\beta}(2,x)).$$

Perėjus prie ribos, kai $x \to \infty$, darom išvadą, kad

$$\lim_{x\to\infty} \hat{\psi}_x(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{it} + 1\right).$$

O tai ir yra diskretaus tolygiojo skirstinio $\mathcal{U}(u, 2)$ charakteristinė funkcija.

Teoremos pakankamumas įrodytas.

4.1 teorema įrodyta.

Išvados

Disertacijoje gauti šie rezultatai:

- stipriai adityviųjų funkcijų sekų su paslinktais pirminiais skirstinių silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos;
- stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais argumentais skirstinių silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos;
- stipriai adityviųjų funkcijų sekų sumų su paslinktais pirminiais skirstinių silpnojo konvergavimo į diskretų tolygųjį dėsnį būtinos ir pakankamos sąlygos.

Literatūra

[1] M.B. Barban, A.I. Vinogradov, B.V. Levin, Limit laws for arithmetic functions of J.P. Kubilius class H, defined on the set of "shiffed" primes, *Liet. mat. rink.*, **5**:1-8, 1965.

[2] E. Bombieri, On the large sieve, *Mathematika*, **12**:201-225, 1965.

[3] P.D.T.A. Elliott, On the limiting distribution of f(p+1) for non-negative additive functions, *Acta Arith.*, **25**:259-264, 1974.

[4] P.D.T.A. Elliott, A conjecture of Kátai, *Acta Arith.*, **26**:11-20, 1974.

[5] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic Number Theory. I. Mean Value Theorems*, Springer, New York Heidelberg Berlin, 1979.

[6] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic Number Theory. II. Central Limit Theorems*, Springer, New York Heidelberg Berlin, 1980.

[7] P.D.T.A. Elliott, *Arithmetic Functions and Integer Products*, Springer, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985.

[8] P.D.T.A. Elliott, On the correlation of multiplicative and the sum of additive arithmetic functions, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **112**(538, 2), 1994.

[9] P.D.T.A. Elliott, The concentration function of additive functions on shifted primes, *Acta Math.*, **173**:1-35, 1994.

[10] P.D.T.A. Elliott, C. Ryavec, The distribution of the values of additive arithmetical functions, *Acta Math.*, **126**:143-164, 1971.

[11] P. Erdős, M. Kac, The Gausian law of errors in the theory of additive number-theoretic functions, *Amer. J. Math.,* **62**:738-742, 1940.

[12] P. Erdős, A. Wintner, Additive arithmetical functions and statistical independence, *Amer. J. Math.,* **61**:713-721, 1939.

[13] G. Halász, On the distribution of additive arithmetical functions, *Acta Arith.*, **27**:143-152, 1975.

[14] A. Hildebrand, An Erdős-Wintner theorem for differences of additive functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **310**(1):257-276, 1988.

[15] I. Kátai, On the distribution of arithmetical functions on the set of primes plus one, *Comput. Math.*, **19**:278-289, 1968.

[16] I. Kátai, Some remarks on additive arithmetical functions, *Liet. mat. rink.*, **9**:515-518, 1969.

[17] I. Kátai, On the distribution of arithmetical functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **20**(1-2):69-87, 1969.

[18] J. Kubilius, *Probabilistic Methods in the Theory of Numbers*, Providence, Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs, No 11, 1964.

[19] W.J. LeVeque, On the size of certain number-theoretic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66**:440-463, 1949.

[20] G. Stepanauskas, The mean values of multiplicative functions. III, in A. Laurinčikas, E. Manstavičius and V. Stakėnas (Eds.), *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proceedings of the Second International Conference in Honour of J.Kubilius, Palanga, Lithuania, September 23-27, 1996*(New Trends in Probability and Statistics, **4**), VSP-TEV, Utrecht Vilnius, 371-387, 1997.

[21] G. Stepanauskas, The mean values of multiplicative functions on shifted primes, *Lith. Math. J.*, **37**:443-451, 1997.

[22] G. Stepanauskas, The mean values of multiplicative functions. IV, *Publ. Math. Debrecen*, **52**:659-681, 1998.

[23] G. Stepanauskas, The mean values of multiplicative functions. I, *Annales Univ. Sci. Budapest.* (Sect. Comp.), **18**:175-186, 1999.

[24] G. Stepanauskas, L. Žvinytė, Discrete uniform limit law for additive functions on shifted primes, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **21**(4):437-447, 2016.

[25] G. Stepanauskas, L. Žvinytė, Discrete uniform distribution for a sum of additive functions, *Lith. Math. J.*, **57**(3):391-400, 2017.

[26] J. Šiaulys, The von Mises theorem in number theory, in: *New Trends in Probability and Statistics.* Vol.**2**, *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proc on Intern. Conf. Palanga, Lithuania,* 1991, F.Schweiger and E. Manstavičius (Eds.), TEV, Vilnius / VSP Utrecht, 293-310, 1992.

[27] J. Šiaulys, The convergence of distribution of integer valued additive functions to the Poisson law, *Lith. Math. J.*, **35**(3):300-308, 1995.

[28] J. Šiaulys, The convergence to the Poisson law. II, Unbounded strongly additive functions, *Lith. Math. J.*, **36**(3):314-322, 1996.

[29] J. Šiaulys, The convergence to the Poisson law. III, Method of moments, *Lith. Math. J.*, **38**(4):374-390, 1998.

[30] J. Šiaulys, On the distributions of additive functions, *Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai*, **3**: Special Issue of *Liet. Matem. Rink.*, 104-109, 1999.

[31] J. Šiaulys, Factorial moments of distributions of additive functions, *Lith. Math. J.*, **40**(4):389-401, 2000.

[32] J. Šiaulys, The convercence to the Poison law in number theory, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, **5**:108-114, 2002.

[33] J. Šiaulys, G. Stepanauskas, The Poison law for additive functions on shifted primes, in E. Manstavičius and A. Laurinčikas (Eds.), *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proceedings of the Fourth International Conference in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, September 24-30, 2006*, TEV, Vilnius, 204-212, 2007.

[34] J. Šiaulys, G. Stepanauskas, Poison distribution for a sum of additive functions, *Acta Appl. Math.,* **97**:269-279, 2007.

[35] J. Šiaulys, G. Stepanauskas, Poison distribution for a sum of additive functions on shifted primes, *Acta Arith.,* **130**(4):403-414, 2007.

[36] J. Šiaulys, G. Stepanauskas, Poison distribution for a sum of additive functions on arithmetic progressions, *Annales Univ. Sci. Budapest.* (Sect. Comp.), **29**:199-212, 2008.

[37] J. Šiaulys, G. Stepanauskas, Some limit laws for strongly additive prime number indicators, *Šiauliai Math. Sem.*, **3**(11):235-246, 2008.

[38] J. Šiaulys, G. Stepanauskas, Binomial limit law for additive prime number indicators, *Lith. Math. J.*, **51**(4):562-572, 2011.

[39] J. Šiaulys, G. Stepanauskas, Discrete uniform limit law for additive prime number indicators, in A. Laurinčikas, E. Manstavičius and G. Stepanauskas (Eds.), *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proceedings of the Fifth International Conference in Honour of J.Kubilius, Palanga, Lithuania, September 25-29, 2011*, TEV, Vilnius, 255-263, 2012.

[40] N.M. Timofeev, The distribution of values of additive functions on the sequence $\{p+1\}$, *Mat. Zametki*, **33**(6):933-941, 1983.

[41] N.M. Timofeev, Arithmetic functions on the set of shifted primes, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **6**:311-317, 1995.

[42] N.M. Timofeev, H.H. Usmanov, The distribution of values of a sum of additive functions with shifted arguments, *Mat. Zametki*, **352**(5):113-124, 1992.

[43] Б.В. Левин, Н.М. Тимофеев, Аналитический метод в вероятностной теории чисел, Уч. зап. Владимирского гос. пед. ин.-та. мат. **57**(2):57-150, 1971.

[44] Н.М. Тимофеев, Гипотеза Эрдеша-Кубилюса о распределении значений аддивных функций на последовательности сдвинутых простых чисел, *Acta Arith.*, **58**(2):113-131, 1991.