

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Bakalaurinis darbas

Keli modeliai vertės pokyčio rizikai (VaR)
skaičiuoti ir jų palyginimas

Several models to calculate Value-at-Risk and their
comparison

Gintaras Pilkionis

VILNIUS 2016

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINES ANALIZES KATEDRA

Darbo vadovas: doc. Martynas Manstavičius

Darbo recenzentas: _____

Darbas apgintas _____

Darbas įvertintas _____

Registravimo NR. _____

Pridavimo į katedrą data _____

Keli modeliai vertės pokyčio rizikai (VaR) skaičiuoti ir jų palyginimas

Santrauka

Pagrindinis darbo tikslas – nustatyti tinkamiausią vertės pokyčio rizikos įvertinimo modelį iš darbe nagrinėjamų penkių modelių. Modeliai paremti istorine simuliacija arba aproksimacija kuriuo nors skirstiniu, be to, vienas iš modelių atsižvelgia į stebėjimų kintamumą. Vertės pokyčio rizika bus modeliuojama Liuksemburgo ir Prahos akcijų indeksų, atitinkamai LUXXR ir PX, logaritminiams kritimams, o kriterijai, pagal kuriuos bus atrinktas geriausias modelis – Kupiec'o ir Christoffersen'o testai. Išaiškėja, kad aproksimacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą – tinkamiausias modelis.

Raktiniai žodžiai : Vertės pokyčio rizika, paprastasis istorinis modeliavimas, laiku paremtas istorinis modeliavimas, normalusis skirstinys, Stjudento skirstinys, kintamumas, GARCH, istorinis testavimas, Kupiec'o testas, Christoffersen'o testas.

Several models to calculate Value-at-Risk and their comparison

Abstract

The main aim of the thesis is to identify the best model to evaluate Value-at-Risk comparing five different models. These models are based either on historical simulation or on fitting of some distribution; furthermore, one of the models considers volatility. Value-at-Risk will be evaluated for Luxembourg and Prague stock indexes', respectively LUXXR and PX, logarithmic losses, and criteria, by which the best model will be chosen, are Kupiec and Christoffersen tests. In fact, the model based on Student's t-distribution and considering volatility appears to be the best.

Key words : Value-at-Risk, Historical Simulation, Age-weighted historical simulation, Normal distribution, Student's t-distribution, Volatility, GARCH, Back-testing, Kupiec test, Christoffersen test.

Turinys

1	Įvadas	2
2	Teorinė dalis	3
2.1	Vertės pokyčio rizika (VaR)	3
2.2	Paprastasis istorinis modeliavimas	4
2.3	Laiku paremtas istorinis modeliavimas	4
2.4	Aproksimacija normaliuoju skirstiniu	5
2.5	Aproksimacija Stjudento skirstiniu	5
2.6	Aproksimacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą	6
2.7	Istorinis testavimas	7
3	Praktinė dalis	9
3.1	Duomenų pristatymas	9
3.2	Vertės pokyčio rizikos (VaR) įvertinimas	12
3.3	Paprastasis istorinis modeliavimas	12
3.4	Laiku paremtas istorinis modeliavimas	13
3.5	Aproksimacija normaliuoju skirstiniu	13
3.6	Aproksimacija Stjudento skirstiniu	13
3.7	Aproksimacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą	14
3.8	Istorinis testavimas	17
4	Išvados	18
5	Literatūra	19
A	Priedai	21
A.1	Modelių testavimo rezultatai	21
A.2	Modelių VaR grafikai	23

1 Įvadas

Investicijų, finansų ir draudimo srityse dažnai tenka įvertinti riziką turimiems finansiniams duomenims. Vienas iš įrankių įvertinti tikėtinus nuostolius yra skaičiuoti vertės pokyčio riziką (angl. Value-at-Risk, VaR). Įprastai tiriamų finansinių duomenų, tokių kaip akcijų indeksų ar valiutų kursų pokyčiai, pasiskirstymas nesuderinamas su normaliuoju dėsnio dėl sunkių skirstinio uodegų. Taigi norint įvertinti tikėtinus nuostolius taip, kad įvertis kuo labiau atspindėtų realybę, kartais nepakanka turimus stebėjimus tiesiog aproksimuoti normaliuoju skirstiniu. Be to, kadangi tikrovėje finansiniai duomenys nekinta stabiliai, tai galėtų būti naudinga atsižvelgti ir į stebėjimų kintamumą.

Šio darbo tikslas – nustatyti tinkamiausią vertės pokyčio rizikos skaičiavimo metodą turimiems duomenims: akcijų indeksų pokyčiams. Vertės pokyčio rizikai įvertinti yra pritaikomi penki skirtingi modeliai, tarpusavyje turintys panašumų ir esminių skirtumų. Bus analizuojami keli neparametriniai (istorinis modeliavimas) ir keli parametriniai (aproksimacija skirstiniais) modeliai. Siekiant nustatyti, ar, atsižvelgdami į stebėjimų kintamumą, mes gausime tikslesnį VaR įvertį, į vieno iš parametrinių modelių skaičiavimus įtrauktas kintamumo principas. Galiausiai modelių rezultatai yra palyginami, pasiremiant istoriniu testavimu (angl. back-testing), kuris tuo tarpu paremtas Kupiec'o ir Christoffersen'o testais, ir pateikiamas sprendimas – tinkamiausias modelis. Be to, testavimo rezultatuose išaiškėja, ar modelis, pakankamai tiksliai įvertinęs vienų duomenų vertės pokyčio riziką, taip pat gerai įvertins vertės pokyčio riziką kitiems duomenims.

Darbo teorinėje dalyje aprašoma vertės pokyčio rizikos sąvoka, paminimi jos privalumai ir trūkumai, pristatomi VaR įvertinimo modeliai ir juos realizuojančios formulės. Praktinėje dalyje plačiau pristatomi tiriami duomenys, skirtingais būdais patikrinamas jų normalumas, pristatomas slenkančio lango principas, remiantis kuriuo bus modeliuojamas VaR. Praktinės dalies pabaigoje plačiau aprašomi gauti rezultatai, įžvelgiamos pagrindinės modelių stipriosios ir silpnosios vietos. Lentelės su modelių rezultatais bei VaR sumodeliuoti grafikai yra prikabinoti prieduose. Išvadose paminimos pagrindinės darbo išvados bei rekomendacijos tolesniam darbo vystymui.

2 Teorinė dalis

2.1 Vertės pokyčio rizika (VaR)

Vertės pokyčio rizikos (angl. Value-at-Risk, VaR) sąvoka yra santykinai nauja. VaR pirmą kartą buvo panaudotas didžiausiomis finansų įmonėmis praėjusio amžiaus devintojo dešimtmečio pabaigoje su tikslu įvertinti savo portfelių riziką. Nuo to laiko, VaR panaudojimas žymiai supopuliarėjo. Ypatingą rizikos vertintojų dėmesį VaR sulaukė tuo metu, kai J.P. Morgan & Co., stambaus Jungtinių Amerikos Valstijų banko JPMorgan Chase padalinys, 1994-aisiais metais išleido į viešumą savo statistinį modelį, kurį įmonė taikydavo rizikos vertinimui [2]. Šiuo metu VaR yra plačiai naudojamas įrankis ir mažesnėse finansų įmonėse.

Vertės pokyčio riziką (VaR) galima apibrėžti taip: tai – reikšmė, kurios su nurodyta tikimybe ir per nurodyta laiką neviršys nuostoliai. Matematiškai, jei L yra ateities nuostoliai, o α – pasirinktas pasiklivimo lygmuo (dažniausiai praktikoje pasirenkamas $\alpha = 95\%$ arba $\alpha = 99\%$), tai

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} \quad (1)$$

Svarbu paminėti tai, kad VaR reikšmė gali būti modeliuojama bet kuriam pasirinktam laikotarpiui, kuris dar vadinamas periodu. Dažnai yra skaičiuojami vienos dienos ar dešimties dienų VaR. Kartais gali būti taikoma „šaknies iš 10 taisyklė“, pagal kurią, norint įvertinti dešimties dienų periodo VaR, imamas apskaičiuotas vienos dienos VaR ir dauginamas iš šaknies iš 10.

Vertės pokyčio rizika, nors ir yra labai paplitęs įrankis tarp rizikos vertintojų, jis nėra tobulas ir turi trūkumų. Visų pirma, VaR nuslepia nuostolių dydį, įvykus ypatingai reikiam įvykiui. Tarus, kad pasiklivimo lygmuo yra 95%, VaR atsakys į klausimą, kokie bus nuostoliai 95% atveju, tačiau neturime jokios informacijos apie tai, kas nutiks likusiais 5% atvejais. Mes galime tikėtis prarasti daugiau, nei apskaičiuota riba, tačiau mes nežinome kiek. Dažnai finansinių duomenų skirstinys turi sunkesnes uodegas, nei normaliojo skirstinio (Bradley, Taqqu, 2001), ir tai reikštų, kad reti įvykiai įvyksta su didesniu dažnumu, lyginant su normaliuoju dėsniu. Be to, bendruoju atveju, kuomet nuostolių aibę L gali sudaryti ir diskretūs atsitiktiniai dydžiai, VaR netenkina subadityvumo savybės¹, t.y. vertybinių popierių portfelio VaR gali būti didesnis nei suma VaR, atskirai paskaičiuotų kiekvienam vertybiniam popieriui.

¹Funkcija $f : A \rightarrow B$ vadinama subadityvia, jei $f(x + y) \leq f(x) + f(y) \ \forall x, y \in A$

2.2 Paprastasis istorinis modeliavimas

Paprastasis istorinis modeliavimas yra vienas iš būdų apskaičiuoti neparametrinį VaR įvertį. Apskritai, neparametrinį įvertį skaičiuoti yra paprasta, nes jis nereikalauja duomenų aproksimavimo kuriuo nors skirstiniu. Taigi, tai mus apsaugoja nuo klaidingo skirstinio parinkimo. Nors tokį modelį yra nesunku realizuoti, jis turi ir trūkumų. Pavyzdžiui, tikėtina, kad VaR įvertis labai priklausys nuo keleto didelių nuostolių, įvykusių tolimoje praeityje, bet patenkančių į imtį, pagal kurią modeliuojamas VaR. Be to, yra sunku apsispręsti, kokio dydžio imtis bus taikoma VaR įvertinimui, kadangi pasenusi informacija kartais gali būti neaktuali. Šis modelis reikalauja prielaidos apie stebėjimų nepriklausomumą ir vienodą pasiskirstymą.

Taikant paprastąjį istorinį modelį ir vertės pokyčio rizikos apibrėžimą (1) bei tariant, kad imtis yra dydžio n , o pasiklovimo lygmuo yra α , $\text{VaR}_\alpha(L)$ įvertis bus $i = (\alpha(n + 1))$ -asis mažiausias imties elementas tuo atveju, jei i yra sveikas skaičius. Jei i nėra sveikas skaičius, pritaikoma tiesinė interpoliacija tarp dviejų gretimų elementų, kad būtų pasiektas tiksliai α -kvantilis².

2.3 Laiku paremtas istorinis modeliavimas

Lyginant su paprastuoju istoriniu modeliavimu, šis modelis labiau atsižvelgia į vėliausiai įvykusius stebėjimus. Natūralu, kad vėlesni akcijų indekso pokyčiai yra labiau aktualūs negu tie, kurie įvyko anksčiau. Tam, kad būtų realizuotas laiku paremtas istorinis modelis, stebėjimams turi būti suteikti svoriai, priklausomi nuo laiko, o svorių suma turi būti lygi 1. Todėl kiekvienam stebėjimui suteiktas svoris

$$\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^n} \times \lambda^{i-1}, \lambda \in (0, 1), i = 1, \dots, n \quad (2)$$

čia n – imties dydis. Pritaikius geometrinės progresijos sumos savybę, nesunku įrodyti, kad svorių suma lygi 1:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^n} \times \lambda^{i-1} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^n} \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^n} \times \frac{(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda} = 1$$

Kadangi $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \lambda^{i-1} = 1$, tai turime, kad didėjant $\lambda \in (0, 1)$, greitimi svoriai skiriasi mažesniu daugikliu, ir atvirkščiai, mažėjant parametrai λ , gretimi svoriai ima labiau skirtis vienas nuo kito.

²Nagrinėjame funkciją $F_X : R \rightarrow [0, 1]$, čia X – atsitiktinis dydis ir $F_X(x)$ – jo pasiskirstymo funkcija. Išreiškus $F_X(x) = P(X \leq x) = \alpha$, α -kvantilį žymi reikšmė x duotoje išraiškoje.

Modeliuojant $\text{VaR}_\alpha(L)$, yra sumuojami svoriai stebėjimų, kurie yra surūšiuoti nuo blogiausio iki geriausio, t.y. jei stebėjimai – akcijų indekso kritimai, tai jie surūšiuojami mažėjimo tvarka. Svoriai sumuojami iki tol, kol suma pasieks pasiklivimo lygį α . Kad būtų pasiektas tiksliai α -kvantilis stebėjimų skirstinio, taip pat panaudojama tiesinė interpoliacija tarp dviejų gretimų imties elementų.

2.4 Aproximacija normaliuoju skirstiniu

Duomenų aproksimavimas kuriuo nors skirstiniu jau yra parametrinis įvertinimas. Nuo parametrų pasirinkimo priklausys ir VaR įvertis, todėl reikia pasistengti tiksliau įvertinti reikiamus parametrus. Priešingu atveju, parinkus blogus parametrus, modelis gali būti netinkamas ir VaR bus paskaičiuotas netiksliai.

Aproximacija normaliuoju skirstiniu – patrauklus ir nesudėtingas būdas modeliuoti VaR, kadangi normalųjį skirstinį aprašo tik du parametrai: vidurkis ir standartinis nuokrypis (arba dispersija). Asimetrijos koeficientas³ (angl. Skewness) bei ekscesas⁴ (angl. Excess kurtosis) normaliojo skirstinio visada lygūs 0. Taigi, belieka įsivertinti normaliojo skirstinio, kuriuo aproksimuosime turimus stebėjimus, vidurkį μ ir standartinį nuokrypį σ . Tada, $\text{VaR}_\alpha(L)$, kaip normaliojo skirstinio α lygmens kvantilis, bus apskaičiuotas pagal formulę

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \hat{\mu} + \hat{\sigma} z_\alpha,$$

čia z_α – standartinio normaliojo dydžio α lygmens kvantilis.

Kadangi, dažnai finansinių duomenų skirstinys dėl didelio eksceso turi sunkesnes uodegas nei normaliojo skirstinio [8], tai geriausių rezultatų iš šio modelio galime nesitikėti.

2.5 Aproximacija Stjudento skirstiniu

Lyginant Stjudento skirstinį su normaliuoju, Stjudento skirstinys yra suderinamas su teigiamu ekscesu, kadangi skirstinį be vidurkio ir standartinio nuokrypio aprašo dar vienas parametras – laisvės laipsniai ν . Šiuo atveju $\text{VaR}_\alpha(L)$, kaip imties, aproksimuotos pagal Stjudento skirstinį, α lygmens kvantilis, bus apskaičiuotas pagal formulę

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \hat{\mu} + \sqrt{\frac{\hat{\nu} - 2}{\hat{\nu}}} \hat{\sigma} t_{\alpha, \hat{\nu}},$$

³Jeigu X yra atsitiktinis dydis ir $E|X|^3 < \infty$, tai asimetrijos koeficientas yra lygus $\frac{\mu_3}{\sigma^3}$,
čia $\mu_3 = E((X - EX)^3)$, $\sigma = \sqrt{DX}$.

⁴Jeigu X yra atsitiktinis dydis ir $E|X|^4 < \infty$, tai ekscesas, žym. γ , skaičiuojamas pagal formulę $\gamma = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$,
čia $\mu_4 = E((X - EX)^4)$, $\sigma = \sqrt{DX}$.

čia $\hat{\mu}$ – skirstinio vidurkio įvertis, $\hat{\sigma}$ – standartinio nuokrypio įvertis, $t_{\alpha, \hat{\nu}}$ – Stjudento skirstinio ir $\hat{\nu}$ laisvės laipsniais α -kvantilis. Turiu pabrėžti tai, kad šiame modelyje $\hat{\sigma}$ nepriklausys nuo laiko t . Kadangi Stjudento skirstinio ekscesas, žym. γ , ir laisvės laipsniai yra susieti [10] išraiška

$$\gamma = \frac{6}{\nu - 4}, \quad \text{kai } \nu > 4, \quad (3)$$

tai šia išraiška pasinaudosime, norėdami įsivertinti laisvės laipsnius ν .

2.6 Aproximacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą

Stebėjimų aproksimacija skirstiniu, kuomet standartinis nuokrypis σ nepriklauso nuo laiko t , yra nelanksti. Todėl, modeliuojant VaR, σ_t dabar bus susietas su prieš tai buvusiu σ_{t-1} reikšme. Šiam tikslui bus pritaikytas $GARCH(p, q)$ (angl. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity) modelis, kuris aprašomas [3] taip:

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \omega_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1 \end{cases},$$

čia σ_t^2 vadinama $GARCH(p, q)$ modelio sąlygine dispersija, o $\omega_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$ ir yra nekoreliuoti. $GARCH(p, q)$ modelio pagalba pašalinsime priklausomybę tarp modelio liekanų (angl. residuals) sąlyginių vidurkių, o pasinaudoję $ARMA(p, q)$ (angl. Autoregressive moving average) modeliu bus pašalinta priklausomybė tarp liekanų sąlyginių vidurkių. Procesas $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ su parametrais (p, q) yra $ARMA(p, q)$ procesas, jei šis procesas tenkina lygtį

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + Z_t + \sum_{j=1}^q \theta_j Z_{t-j},$$

čia $Z_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$ ir yra nekoreliuoti.

VaR šiuo atveju bus apskaičiuotas pagal formulę

$$VaR_{\alpha}(L) = \hat{\mu} + \sqrt{\frac{\hat{\nu} - 2}{\hat{\nu}}} \hat{\sigma}_{t+1} t_{\alpha, \hat{\nu}},$$

čia $\hat{\sigma}_{t+1}$ yra standartinio nuokrypio įvertis artimiausio ateinančio periodo.

Modelių optimalioms p ir q reikšmėms pasirinkti bus naudojamas Akaike's informacinis kriterijus (AIC). Modeliui AIC skaičiuojamas pagal formulę

$$AIC = 2k - 2\ln(L_{max}),$$

čia k – įvertinamų parametrų skaičius modelyje, L_{max} – didžiausia tikėtinumo funkcijos šiam modeliui reikšmė. Optimalios p ir q modelio reikšmės gaunamos minimizuojant AIC .

2.7 Istorinis testavimas

Tam, kad palygintume aprašytų modelių efektyvumą, modeliams bus pritaikyti Kupiec'o ir Christoffersen'o testai. Testavimą sudarys 3 etapai [7].

Pirmiausia, pagal Kupiec'o testą, bus palyginta, kiek per modeliuotą laikotarpį nustatyta indekso kritimų, viršijančių VaR, bei koks buvo tikėtinas kritimų, viršijančių VaR, skaičius. Bus apskaičiuota, ar šios dvi reikšmės statistiškai reikšmingai nesiskiria. Šis žingsnis vadinamas besąlyginio padengimo testu (angl. Unconditional coverage test). Tarus, kad per modeliavimo laikotarpį nustatyta n_1 indekso kritimų, viršijančių VaR, n_0 – neviršijančių VaR, $p = 1 - \alpha$ yra teorinė tikimybė indekso kritimui viršyti VaR pagal pasiklovimo lygmenį α , bei $\pi = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$ yra empirinė tikimybė indekso kritimui viršyti VaR, bus apskaičiuotas tikėtinumo santykis⁵

$$LR_{uc} = -2\ln\left(\frac{L_0}{L_1}\right) = -2\ln\left(\frac{(1-p)^{n_0} \times p^{n_1}}{(1-\pi)^{n_0} \times \pi^{n_1}}\right) \sim \chi^2(1)$$

bei priimta (atmesta) atitinkama hipotezė

$$\begin{cases} H_0 : p = \pi \\ H_1 : p \neq \pi \end{cases}$$

LR_{uc} išraiškoje L_0 žymi tikėtinumo funkciją, jei teisinga H_0 , atitinkamai L_1 – tikėtinumo funkcija, jei teisinga alternatyva H_1 . Nulinė hipotezė atmetama, kuomet statistika LR_{uc} didesnė už chi-kvadrato su vienu laisvės laipsniu kritinę reikšmę, tokiu atveju modelio paskaičiuotą VaR įvertį laikysime statistiškai reikšmingai netiksliu, netinkamu.

Kitas testavimo žingsnis – pritaikyti Christoffersen'o testą su tikslu nustatyti, ar pažeidimai (indekso kritimai, viršijantys VaR) įvyko klasterizuotai. Kitaip tariant, bandysime išvelgti, ar pažeidimas šiame periode nulems pažeidimą ateinančiame periode, ar abu pažeidimai yra statistiškai nepriklausomi. Šis testavimo žingsnis dar vadinamas nepriklausomumo testu (angl. Independence test). Tarkime, kad π , n_0 ir n_1 yra tokie, kaip aprašyti pirmajame testavimo žingsnyje. Be to, tarkime, kad

n_{00} – skaičius tokių periodų, kuomet neįvyko pažeidimų ir ši, ir ateinantį periodą,

n_{01} – skaičius tokių periodų, kuomet neįvyko pažeidimo ši periodą, bet įvyko per ateinantį,

n_{10} – skaičius tokių periodų, kuomet įvyko pažeidimas ši periodą, bet neįvyko per ateinantį,

n_{11} – skaičius tokių periodų, kuomet pažeidimai įvyko ir ši, ir ateinantį periodą,

⁵S. S. Wilks [12] yra įrodęs, kad tikėtinumo santykis $LR = -2\ln\left(\frac{L_0}{L_1}\right)$ yra asimptotiškai pasiskirstęs pagal χ^2 remiantis prielaida, kad stebėjimai, kurių L_0 ir L_1 yra skaičiuojami, yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę.

ir apibrėžkime

$$\pi_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \quad \pi_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$$

Tada apskaičiuosime tikėtinumo santykį

$$LR_{ind} = -2\ln\left(\frac{L_0}{L_1}\right) = -2\ln\left(\frac{(1 - \pi)^{n_0} \times \pi^{n_1}}{(1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}}\right) \sim \chi^2(1)$$

ir priimsime (atmesime) atitinkamą hipotezę

$$\begin{cases} H_0 : \text{įvykę pažeidimai yra nepriklausomi laikui bėgant} \\ H_1 : \text{įvykę pažeidimai nėra nepriklausomi laikui bėgant} \end{cases}$$

Nulinė hipotezė bus atmesta, jeigu statistika LR_{ind} bus didesnė už chi-kvadrato su vienu laisvės laipsniu kritinę reikšmę. Tuomet galėsime teigti, kad apskaičiuotas VaR įvertis yra statistiškai reikšmingai netinkamas. Praktikoje galės nutikti taip, kad neižvelgta jokio klasifikavimo, t.y. $n_{11} = 0$ ir $\pi_{11} = 0$, o LR_{ind} išraiškoje atsiras daugiklis 0^0 . Tokiu atveju siūloma tikėtinumo funkciją L_1 , jei teisinga alternatyva H_1 , išreikšti taip:

$$L_1 = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}}$$

Galiausiai, trečiąjį testavimo žingsnį sudaro rezultatai iš pirmųjų dviejų. Šis etapas dar vadinamas sąlyginio padengimo testu (angl. Conditional coverage test). Testo statistika LR_{cc} yra išreiškiama per aukščiau apskaičiuotus LR_{uc} ir LR_{ind} :

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2),$$

o hipotezės yra

$$\begin{cases} H_0 : p = \pi, \text{ įvykę pažeidimai yra nepriklausomi laikui bėgant} \\ H_1 : p \neq \pi, \text{ įvykę pažeidimai nėra nepriklausomi laikui bėgant} \end{cases}$$

Tuo atveju, jei statistika LR_{cc} viršys chi-kvadrato su dviem laisvės laipsniais kritinę reikšmę, bus priimta alternatyva, o modelis bus laikomas netinkamu.

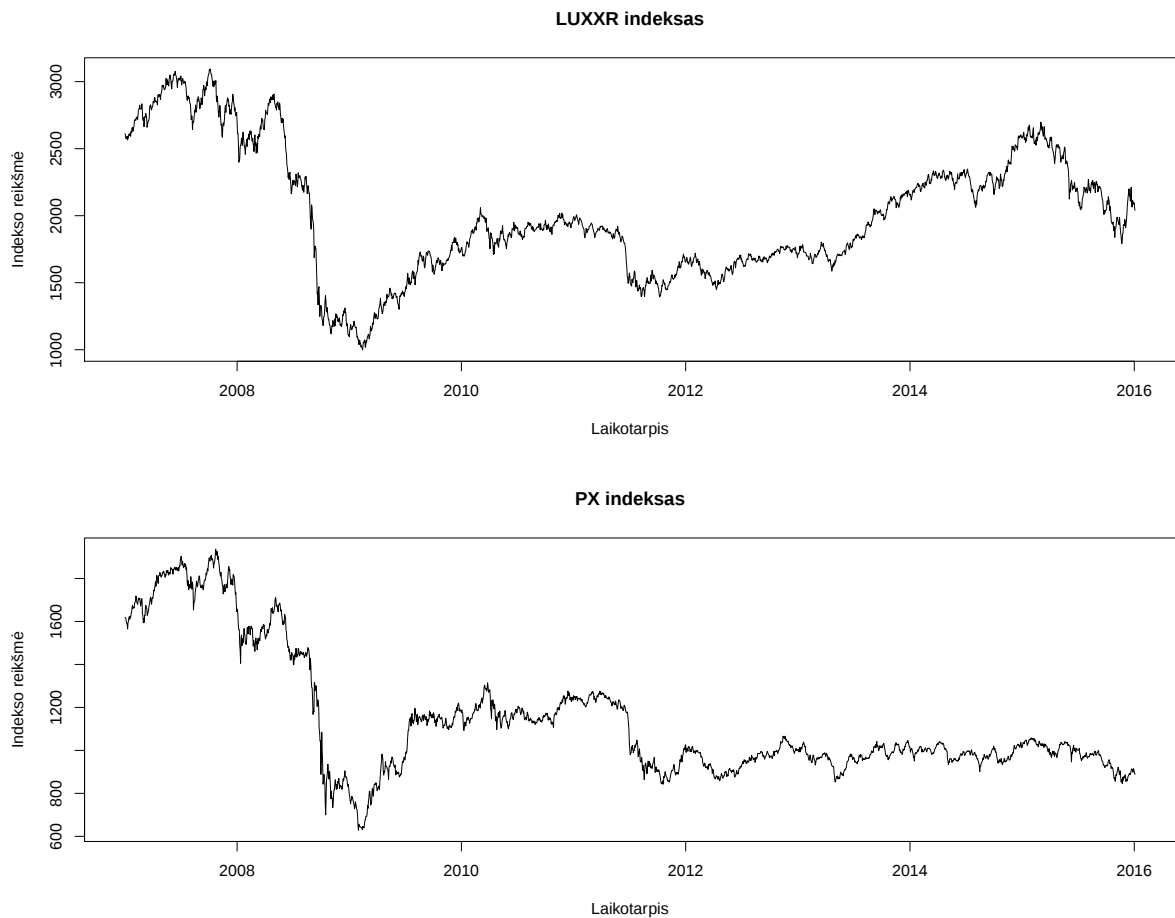
3 Praktinė dalis

3.1 Duomenų pristatymas

Aukščiau aprašytus modelius aš pritaikysiu Liuksemburgo ir Prahos (Čekijos) vertybinių popierių indeksams LUXXR ir PX, kurie yra stebimi nuo 2007.01.01 iki 2016.03.31 imtinai. Duomenys gauti iš duomenų sistemos *Quandl* [1], kurioje patalpinta oficiali informacija apie įvairių rinkų finansinius duomenis. Taigi, yra žinomos LUXXR ir PX indeksų reikšmės kiekvieną atitinkamos valstybės darbo dieną. Apskaičiuojame šių duomenų santykinius logaritminius kritimus pagal formulę

$$l_t = -\ln\left(\frac{index_t}{index_{t-1}}\right),$$

čia $index_t$ ir $index_{t-1}$ yra indekso reikšmės atitinkamai einamosios dienos ir prieš ją buvusios dienos. Apačioje yra pavaizduotos indeksų reikšmės laikui bėgant, o lentelėje – indeksų santykinų logaritminių kritimų statistinės charakteristikos:

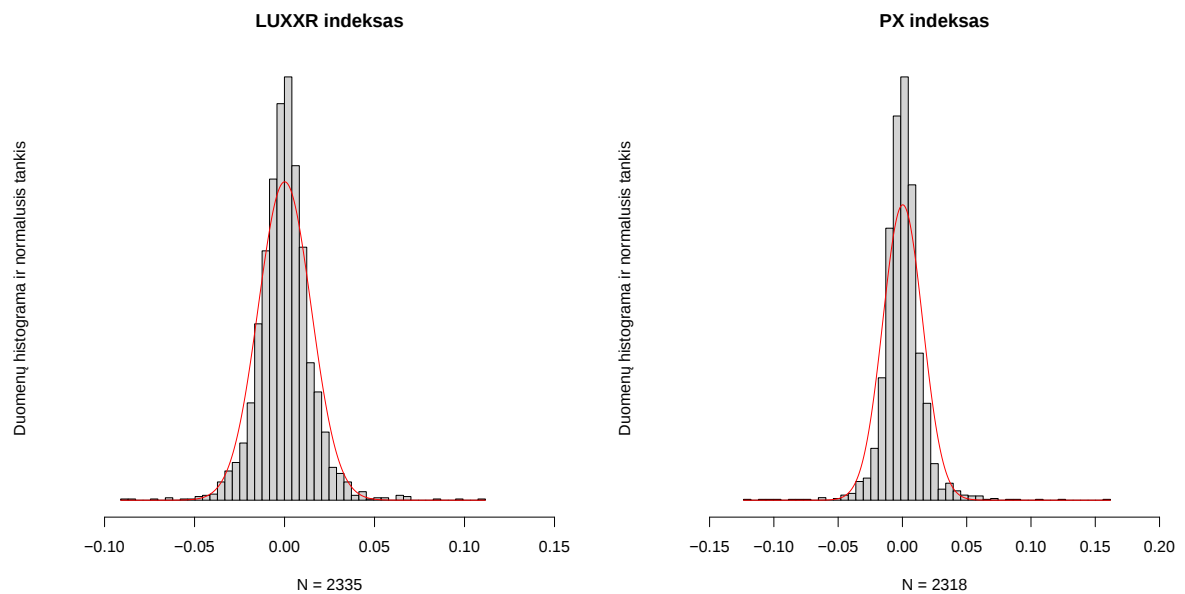


1 pav.: LUXXR ir PX indeksų reikšmės laike

Abiejų indeksų atvejais matome, kad ekscesas yra ganėtinai daugiau už 0, kas parodo šių duomenų skirstinių uodegų sunkumą, lyginant su normaliuoju pasiskirstymu. Palyginimui, normaliojo skirstinio ekscesas yra lygus 0.

	LUXXR	PX
Stebėjimų skaičius	2335	2318
Mažiausia reikšmė	-0,0910	-0,1236
Didžiausia reikšmė	0,1116	0,1619
Vidurkis	0,0000	0,0000
Standartinis nuokrypis	0,0147	0,0155
Asimetrijos koeficientas (angl. Skewness)	0,3362	0,5002
Ekscesas (angl. Excess kurtosis)	5,3100	14,7088

1 lentelė: Indeksų santykinų logaritminių kritimų statistinės charakteristikos



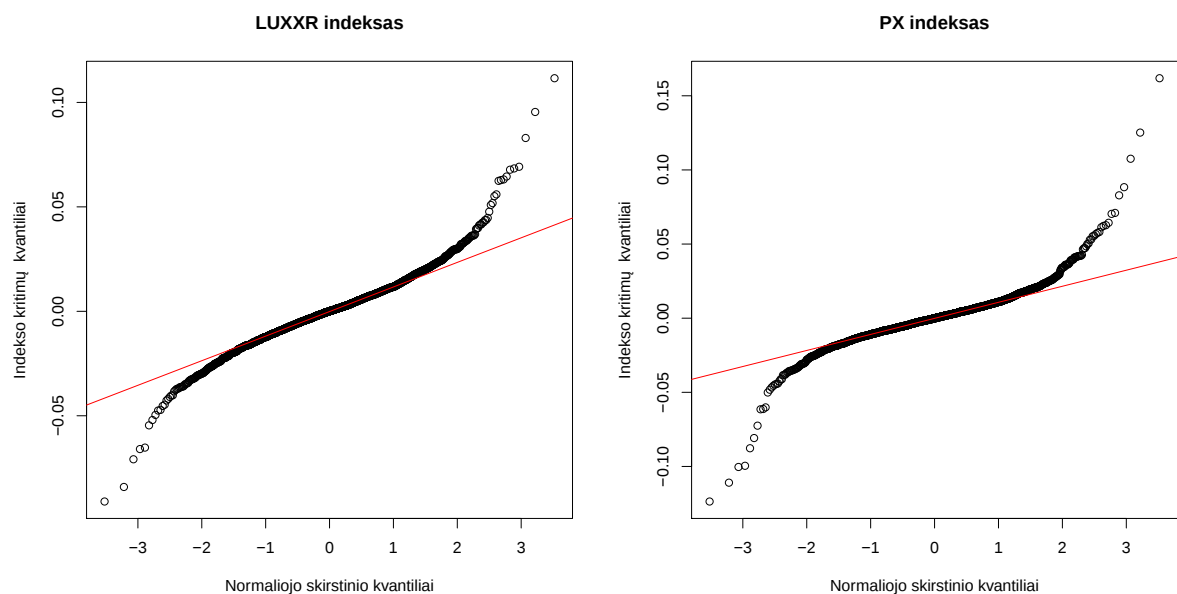
2 pav.: LUXXR ir PX indeksų kritimų histogramos, lyginant su normaliojo skirstinio tankiu

Duomenų normalumui patikrinti buvo atlikti Shapiro–Wilk’o ir Kolmogorov–Smirnov’o testai. Kolmogorov–Smirnov’o testo eigoje buvo tikrinama, ar duomenys yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį su tokiais pačiais vidurkiu ir standartiniu nuokrypiu, kaip tiriamų duomenų. Abiejų atliekamų testų nulinės hipotezės priėmimas reikštų, kad „indekso kritimų skirstinys nuo normaliojo skirstinio skiriasi statistiškai nereikšmingai“. Visuose skaičiavimuose p-reikšmė nesiekia 0,05, todėl kiekvienu atveju yra atmetama nulinė hipotezė. Gauti rezultatai pateikti lentelėje apačioje:

	Shapiro–Wilk’o statistika	p-reikšmė	Kolmogorov–Smirnov’o statistika	p-reikšmė
LUXXR	$W = 0,9500$	0,0000	$D = 0,0566$	0,0000
PX	$W = 0,8723$	0,0000	$D = 0,0888$	0,0000

2 lentelė: Shapiro-Wilk’o ir Kolmogorov-Smirnov’o testų rezultatai

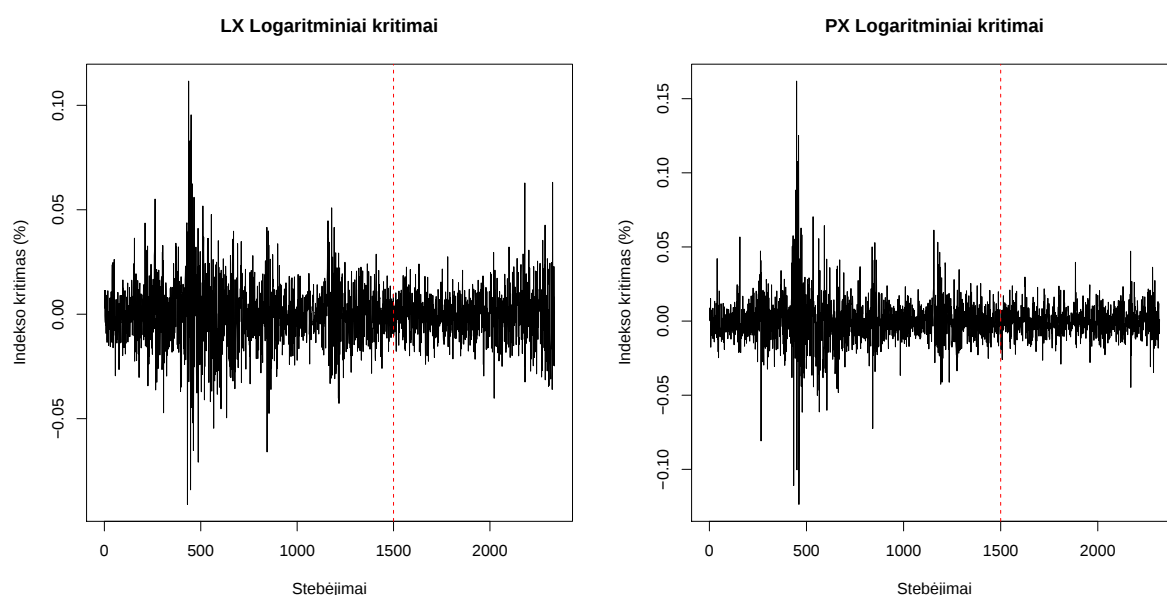
Duomenų nesuderinamumą su normaliuoju skirstiniu patvirtina nubrėžti kvantilių grafikai. Tiesi linija pavaizduoja normaliojo pasiskirstymo kvantilius, o taškai – nagrinėjamos imties kvantilius. Jeigu visi taškai būtų išsidėstę ant linijos arba labai šalia jos, tai reikštų, kad imties skirstinys nedaug skiriasi nuo normaliojo pasiskirstymo. Mūsų atveju imčių kvantilių grafikai „užsiriečia“, o tai vėlgi reiškia uodegų sunkumą.



3 pav.: LUXXR ir PX indeksų kritimų kvantiliai, lyginant su normaliuoju skirstiniu

3.2 Vertės pokyčio rizikos (VaR) įvertinimas

Vertės pokyčio rizikai įvertinti kiekviename modelyje yra panaudojamas slenkančio lango (angl. Rolling window) principas. Tai reiškia, kad yra fiksuojamas stebėjimų, t.y. santykinų logaritminių kritimų, skaičius n , pagal kurį bus modeliuojamas artimiausiojo, $(n + 1)$ -ojo periodo VaR, o norėdami modeliuoti tolimesnio, $(n + 2)$ -ojo periodo VaR, turime iš stebėjimų sąrašo pašalinti 1-ąjį stebėjimą, tačiau įtraukti vėliausią žinomą $(n + 1)$ -ąjį stebėjimą. Taigi, gauname, jog modeliavimui visą laiką yra naudojama n duomenų. Kiekviename modelyje yra pasirinktas $n = 1500$ ir yra vertinami vienos dienos $\text{VaR}_{0.95}$, $\text{VaR}_{0.99}$ ir $\text{VaR}_{0.995}$. Kadangi visų, bendrai paėmus, stebėjimų skaičius yra 2335 LUXXR indekso ir 2318 PX indekso, gauname, jog VaR bus sumodeliuotas 836 ir 819 kartų atitinkamai, įskaitant tai, kad VaR bus įvertintas atitinkamai 2336-ąjį ir 2319-ąjį periodus, kuomet tikrojo indekso kritimo mes nežinome. Apačioje yra pavaizduoti indeksų logaritminiai kritimai:



4 pav.: LUXXR ir PX indeksų logaritminiai kritimai

3.3 Paprastasis istorinis modeliavimas

Vienos dienos Value-at-Risk yra įvertinamas, suradus 95%, 99% ir 99,5% kvantilius iš indeksų santykinų logaritminių kritimų imties. Kaip aprašyta aukščiau, yra naudojamas slenkančio lango principas ir tiriamą imtį yra pastovaus dydžio $n = 1500$.

3.4 Laiku paremtas istorinis modeliavimas

Šis modelis kiekvienam iš 1500 stebėjimų suteikia svorius, priklausomai nuo stebėjimo chronologinio eiliškumo imtyje. Svorio pagal išraišką (2) paskaičiavimui, kai $n = 1500$, buvo pasirinktas $\lambda = 0.9995$, todėl indekso santykinų logaritminių kritimų imties elementų mažiausias ir didžiausias svoriai buvo atitinkamai 0.00044769 ir 0.00094747. Svorio išraiškoje i reiškia, kiek yra dienų tarp stebėjimo iš tiriamos imties ir VaR vertinimo periodo. Kitaip tariant, didžiausias svoris yra suteiktas vėliausiai įvykusiam stebėjimui. Stebėjimų svorių suma lygi 1.

3.5 Aproximacija normaliuoju skirstiniu

Vertės pokyčio rizika šiuo modeliu yra paskaičiuojama, suradus 95%, 99% ir 99,5% kvantilius normaliojo skirstinio, kurio vidurkis ir standartinis nuokrypis paimti tokie, kaip tiriamos imties. Tikėtina, kad šis modelis geriausių rezultatų neparodys, kadangi buvo parodytas duomenų nesuderinamumas su normaliuoju dėsnio. Tačiau palyginimui ir dėl modelio populiarumo praktikoje šis modelis yra įtrauktas į skaičiavimus. Pavyzdžiui, $Var_{0.95}$ yra skaičiuojamas pagal formulę

$$Var_{0.95} = \mu + \sigma z_{0.95},$$

čia μ yra imties vidurkis, σ – imties standartinis nuokrypis, $z_{0.95}$ – reikšmė, nuo kurios standartinio normaliojo dydžio pasiskirstymo funkcija yra lygi 0,95, t.y. $z_{0.95} = 1,6449$. Tokiu pat principu apskaičiuojami $Var_{0.99}$ ir $Var_{0.995}$.

3.6 Aproximacija Stjudento skirstiniu

Taikydami šį modelį darome prielaidą, jog tiriamą imtį pasiskirsčiusi pagal Stjudento skirstinį su ν laisvės laipsniais. Laisvės laipsniai ν bus įvertinami kiekvienai stebėjimų imčiai, kuri tuo tarpu sudaro slenkantį stebėjimų langą. Tam, kad įvertintume ν , pasinaudosime išraiška (3), kurios atvirkštinė funkcija ir bus ν įvertinys:

$$\hat{\nu} = \frac{6 + 4\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}},$$

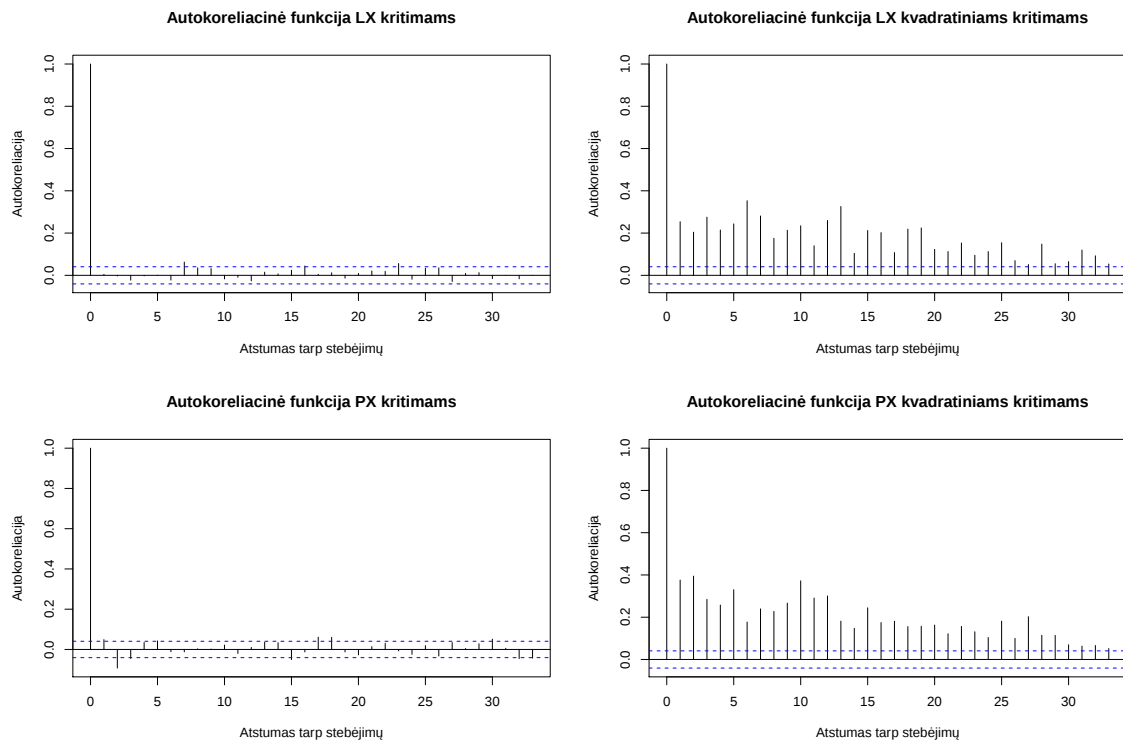
čia $\hat{\gamma}$ yra imties ekscesas. Tada vertės pokyčio rizika bus apskaičiuojama pagal formulę

$$Var_{\alpha} = \hat{\mu}(n) + \sqrt{\frac{\hat{\nu} - 2}{\hat{\nu}}} \hat{\sigma}(n) t_{\alpha, \hat{\nu}},$$

čia $\hat{\mu}(n)$ – imties iš slenkančio lango vidurkis, $\hat{\sigma}(n)$ – imties standartinis nuokrypis, $t_{\alpha, \hat{\nu}}$ – Stjudento skirstinio su $\hat{\nu}$ laisvės laipsniais α lygmens kvantilis.

3.7 Aproximacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą

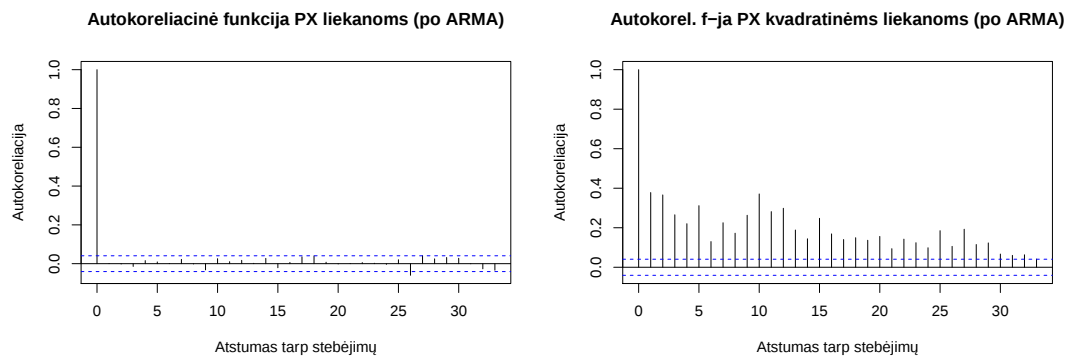
Šiuo atveju VaR apskaičiavimui yra panaudojami ARMA ir GARCH modeliai. Abu modelius taikysime todėl, kad gali būti priklausomybė ir tarp stebėjimų sąlyginių vidurkių, ir tarp sąlyginių dispersijų. Pirmiausia patikrinsime, ar visi, bendrai paėmus, stebėjimai koreliuoja tarpusavyje.



5 pav.: LUXXR ir PX indeksų stebėjimų autokoreliacinės funkcijos

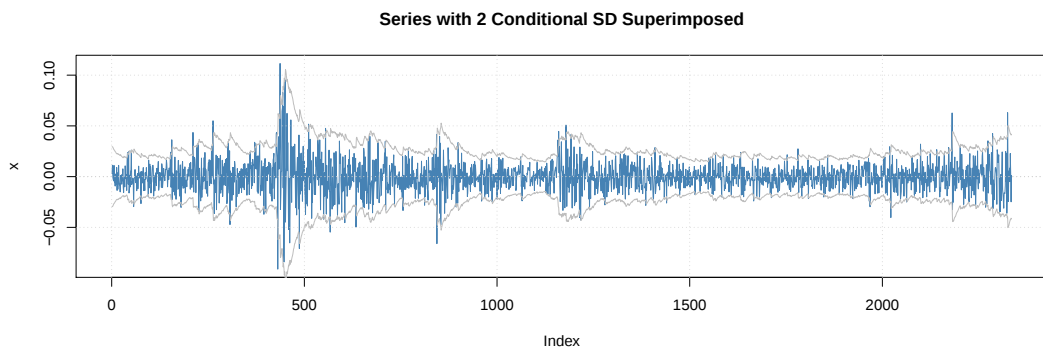
Atsižvelgiant į šiuos grafikus, galime manyti, kad yra pakankamai stipri koreliacija tarp stebėjimų. Pirmiausia, pašalinsime priklausomybę tarp sąlyginių vidurkių, pritaikydami $ARMA(p, q)$ modelį. p ir q reikšmės yra nustatomos parinkimo būdu taip, kad būtų kuo mažesnis prarastų duomenų kiekis. Tam yra naudojamas Akaike's informacinis kriterijus (AIC). LUXXR indekso duomenims yra parinktas $ARMA(0, 0)$ modelis, kas reikštų, kad tinkamiausias modelis yra baltasis triukšmas, kuriame nėra priklausomybės tarp stebėjimų sąlyginių vidurkių. PX indekso duomenims pritaikytas $ARMA(2, 4)$ modelis. Pašalinus priklausomybę tarp sąlyginių vidurkių, PX indekso liekanų autokoreliacinės funkcijos

atrodo taip:

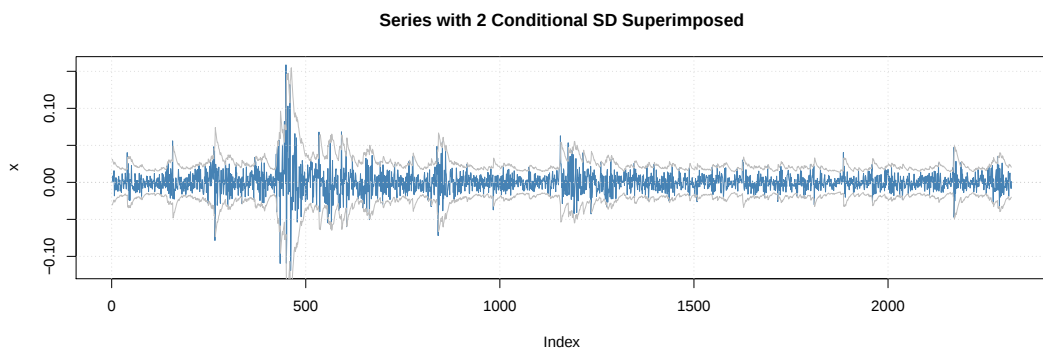


6 pav.: PX stebėjimų liekanų autokoreliacinės funkcijos, pritaikius ARMA (2, 4)

Stipri koreliacija tarp indeksų kvadratinų kritimų reiškia, kad yra priklausomybė tarp stebėjimų sąlyginių dispersijų. Bandysime šią priklausomybę pašalinti, pritaikydami $GARCH(2, 1)$ modelį liekanų laiko eilutei, kuriai jau panaudotas $ARMA(p, q)$. 7 ir 8 pav. pavaizduotos indeksų kritimų laiko eilutės, kartu su jų sąlyginiais standartiniais nuokrypiais:

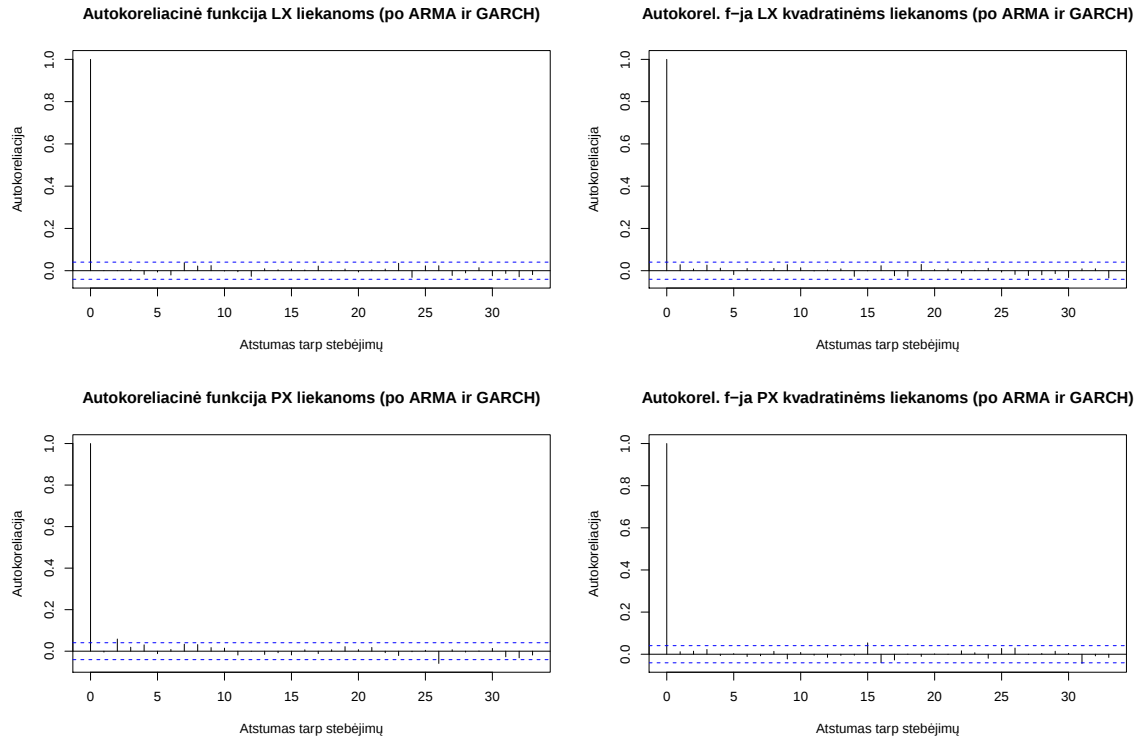


7 pav.: LUXXR indekso kritimų laiko eilutė, kartu su jos sąlyginiais st. nuokrypiais



8 pav.: PX indekso kritimų laiko eilutė, kartu su jos sąlyginiais standartiniais nuokrypiais

Iš grafikų, kuriuose pavaizduoti sąlyginiai standartiniai nuokrypiai, ryškiai stebimi kintamumo klasteriai. Tai reiškia, kad stebėjimai yra heteroskedastiški, t.y. jų sąlyginės dispersijos kinta laike. Todėl, ko gero, šis VaR apskaičiavimo modelis turėtų tikti labiausiai. Patikrinkime, kaip po $GARCH(2, 1)$ pritaikymo atrodo duomenų autokoreliacinės funkcijos:



9 pav.: LUXXR ir PX stebėjimų liekanų autokorel. f-jos, pritaikius $GARCH(2, 1)$

Akivaizdu, jog šiuose duomenyse sąlyginių dispersijų priklausomybė buvo stipresnė nei sąlyginių vidurkių. Be to, atsižvelgiant į autokoreliacinius grafikus, galime manyti, kad $GARCH(2, 1)$ modelis puikiai pašalino sąlyginių dispersijų priklausomybę. Ljung–Box'o testas padėtų nustatyti, ar modifikuotų stebėjimų autokoreliacijos reikšmingai skiriasi nuo 0. Nulinės hipotezės priėmimas reikštų, kad šie stebėjimai yra nepriklausomai pasiskirstę, t.y. autokoreliacija lygi 0.

	Ljung–Box'o statistika	p-reikšmė	$\chi^2_{0.95}(1)$	Atstumas tarp stebėjimų
LX kritimai	0,0006	0,9812	3,841	1
PX kritimai	1,8951	0,1686	3,841	1
LX kvadr. kritimai	0,0458	0,8306	3,841	1
PX kvadr. kritimai	0,3296	0,5659	3,841	1

3 lentelė: Ljung–Box'o testo rezultatai

Kuomet įsitikinome, kad parinkto modelio liekanos statistiškai reikšmingai gali būti laikomos nepriklausomomis (tas reikštų ir nekoreliuotomis), šį modelį pritaikysime ne visiems stebėjimams, o jų imčiai iš 1500 elementų. Kitaip tariant, panaudosime aukščiau aprašytą slenkančio lango principą. Imčiai vėlgi bus taikomi $ARMA(p, q)$ ir $GARCH(2, 1)$ modeliai, ir tada bus įvertinama vertės pokyčio rizika artimiausiam periodui už slenkančio lango, kuriame yra žinomi indeksų kritimai. VaR bus sumodeliuotas 836 ir 819 kartų atitinkamai LUXXR ir PX indeksams.

3.8 Istorinis testavimas

Istorinis testavimas (angl. back-testing), paremtas Kupiec'o ir Christoffersen'o testais, rodo, kad akcijų indekso LUXXR vertės pokyčio riziką $VaR_{0.95}$ tinkamai apskaičiuoja vienintelis iš aprašytų modelių, kuomet stebėjimai yra aproksimuojami Stjudento skirstiniu ir yra atsižvelgiama į kintamumą. Testuojant kitus modelius, nors ir nebuvo atmetamos Kupiec'o testo nulinės hipotezės, tačiau buvo priimtos Christoffersen'o testo alternatyvos. Tai reiškia, kad LUXXR indekso kritimai, viršijantys apskaičiuotas VaR reikšmes, kartais pasirodydavo klasterizuotai, t.y. grupelėmis. LUXXR indekso $VaR_{0.99}$ ir $VaR_{0.995}$ kiekvienas aprašytas modelis skaičiuoja pakankamai tiksliai – Kupiec'o ir Christoffersen'o testų šiais atvejais nulinės hipotezės neatmetamos. Akcijų indekso PX $VaR_{0.95}$ taip pat gerai paskaičiuoja vienintelis modelis, kai stebėjimai yra aproksimuojami Stjudento skirstiniu ir yra atsižvelgiama į kintamumą. Testuojant kitus modelius, buvo priimtos Kupiec'o testo alternatyvos, o tai reiškia, jog indekso kritimų, viršijančių $VaR_{0.95}$, skaičius yra arba labai mažas, arba labai didelis. Mūsų atveju, kritimų, viršijančių $VaR_{0.95}$, skaičius yra apie du kartus mažesnis, negu tikėti-

na, kas tuo tarpu teigia apie rizikos pervertinimą. PX indekso $\text{VaR}_{0.99}$ tinkamai apskaičiuoja tik du modeliai: aproksimacija normaliuoju skirstiniu, kas bebūtų keista, ir aproksimacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą. PX indekso $\text{VaR}_{0.995}$ skaičiavimui tiko visi paminėti modeliai, kadangi abiejų testų H_0 nebuvo atmetamos. Rezultatai yra pateikti lentelėje, A.1 priede.

Lyginant modelių VaR grafikus su tikraisiais indeksų kritimais (grafikai pavaizduoti A.2 priede), galima pastebėti, kad visų modelių, išskyrus aproksimacijos Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą, VaR grafikai (10-17 pav.) padaro staigų šuolį žemyn tarp 400-ojo ir 450-ojo periodų. Taip nutiko būtent todėl, kad modeliuojant šio periodų intervalo VaR, iš slenkančio stebėjimų lango buvo pašalinti staigūs akcijų indeksų kritimai, kurie kaip tik visų, bendrai paėmus, indekso kritimų grafike (4 pav.), vyko intervale tarp 400-osios ir 450-osios dienų. Kadangi slenkantį langą sudaro $n = 1500$ elementų, tai stebėjimai, įvykę prieš 1500 periodų, tapo neaktualūs. Apskritai, šių modelių VaR grafikai beveik visą modeliavimo laikotarpį yra mažėjantys, tačiau galime įžvelgti tendenciją, kad akcijų kritimų kintamumas su laikui bėgant didėja, todėl ir didesnių kritimų pasirodo daugiau. Tai būtų užuomina apie modelių netikslumą. Kalbant apie modelį, kuomet indeksų kritimai aproksimuojami Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą, aiškiai matyti, kad modelis santykinai gerai prisitaiko prie akcijų indekso pokyčių. Vos tik nutinka staigus akcijų indekso pokytis – VaR grafikas taip pat staigiai pakyla aukštyn. Be to, nesunku pastebėti, kad taikant šį modelį suma skirtumų tarp VaR įverčio ir akcijų indekso absoliutaus pokyčio yra mažiausia, kas yra gerai, norint kuo mažiau pervertinti riziką.

4 Išvados

Šiame darbe nustatyta, kad vertinant tiriamų stebėjimų vertės pokyčio riziką tinkamiausias iš pateiktų modelių yra tas, kuris atsižvelgia į stebėjimų kintamumą laikui bėgant. Kiti modeliai gali vertinti VaR labai netiksliai.

Be to, parodyta, kad modeliai, pakankamai tiksliai įvertinę vienų duomenų vertės pokyčio riziką, nebūtinai taip pat gerai įvertins vertės pokyčio riziką kitiems duomenims. Taigi, ne visiems duomenims tinka tie patys modeliai.

Galiausiai nustatyta, kad modeliai, neatsižvelgiantys į kintamumą, labai lėtai reaguoja į stebėjimų kintamumo padidėjimą ar sumažėjimą, todėl šie modeliai yra linę nepakankamai įvertinti ar pervertinti riziką santykinai ilgą laikotarpį.

Šio darbo vystymui aš rekomenduočiau įsigilinti labiau į vertės pokyčio rizikos modeliavimą, kuomet atsižvelgiama į duomenų kintamumą. Gali būti, kad sukonstravus modelį kitų skaičiavimų pagrindu, bus gautas dar tikslesnis VaR įvertis. Be to, patarčiau palyginti vertės pokyčio riziką su jos alternatyva, pavyzdžiui, sąlygine vertės pokyčio rizika (angl. Conditional Value-at-Risk). Įmanoma, kad kai kuriais atvejais sąlyginė vertės pokyčio rizika yra labiau tinkamas rizikos vertinimo įrankis. Galiausiai, mano manymu, tam, kad nustatyti modelio tinkamumą, jį reiktų pritaikyti didesniam laiko eilučių kiekiui.

5 Literatūra

- [1] *Quandl Financial and Economic Data*,
<https://www.quandl.com/>
- [2] JPMorgan, *Introduction to RiskMetrics™*, 4th edition, 1995,
[http://janroman.dhis.org/finance/Risk Management/
Introduction to riskmetrics.pdf](http://janroman.dhis.org/finance/Risk%20Management/Introduction%20to%20riskmetrics.pdf)
- [3] T. Bollerslev, *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, University of California at San Diego, University of Aarhus, 1986.
- [4] J. Boudoukh, M. Richardson, R. F. Whitelaw, *The Best of Both Worlds: A Hybrid Approach to Calculating Value at Risk*, Risk, 1998.
- [5] H. Bozdogan, *Akaike's Information Criterion and Recent Developments in Information Complexity*, The University of Tennessee, 2000.
- [6] B. O. Bradley and M. S. Taqqu, *Financial Risk and Heavy Tails*, Boston University, 2001.
- [7] P. Christoffersen, *Evaluating Interval Forecasts*, McGill University, 1998.
- [8] L. T. DeCarlo, *On the Meaning and Use of Kurtosis*, Fordham University, 1997.
- [9] D. Hendricks, *Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data*, Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review, 1996.
- [10] M. S. Heracleous, *Sample Kurtosis, GARCH-t and the Degrees of Freedom Issue*, European University Institute, 2007.

- [11] T. J. Linsmeier, N. D. Pearson, *Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1996.
- [12] S. S. Wilks, *The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses*, Institute of Mathematical Statistics, 1938.

A Priedai

A.1 Modelių testavimo rezultatai

LX, 95%	Violations	LR _{uc}	LR _{ind}	LR _{cc}	UC, IND, CC Decisions
HS	35 (42)	1,2127	6,0607	7,2734	H_0, H_1, H_1
AWHS	39 (42)	0,1948	7,0322	7,2270	H_0, H_1, H_1
Normal	35 (42)	1,2127	6,0607	7,2734	H_0, H_1, H_1
t	37 (42)	0,5906	8,0741	8,6647	H_0, H_1, H_1
t, var. vol.	46 (42)	0,4415	2,2643	2,7058	H_0, H_0, H_0
LX, 99%	Violations	LR _{uc}	LR _{ind}	LR _{cc}	UC, IND, CC Decisions
HS	6 (9)	0,7406	0,1014	0,8420	H_0, H_0, H_0
AWHS	7 (9)	0,2333	0,1353	0,3686	H_0, H_0, H_0
Normal	9 (9)	0,0498	3,0702	3,1200	H_0, H_0, H_0
t	8 (9)	0,0150	3,5325	3,5475	H_0, H_0, H_0
t, var. vol.	10 (9)	0,3098	0,2668	0,5766	H_0, H_0, H_0
LX, 99,5%	Violations	LR _{uc}	LR _{ind}	LR _{cc}	UC, IND, CC Decisions
HS	4 (5)	0,0075	0,0482	0,0557	H_0, H_0, H_0
AWHS	4 (5)	0,0075	0,0482	0,0557	H_0, H_0, H_0
Normal	6 (5)	0,7058	0,1014	0,8072	H_0, H_0, H_0
t	4 (5)	0,0075	0,0482	0,0557	H_0, H_0, H_0
t, var. vol.	7 (5)	1,5948	0,1353	1,7301	H_0, H_0, H_0

4 lentelė: LX indekso duomenims pritaikytų VaR modelių palyginimas

Paiškinimai:

HS – paprastasis istorinis modeliavimas, AWHS – laiku paremtas istorinis modeliavimas,

Normal ir t – aproksimacija atitinkamai normaliuoju ir Stjudento skirstiniais,

t, var. vol. – aproksimacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą;

Violations – skaičius stebėjimų, peržengusių VaR, bei tikėtinas peržengimų skaičius;

H_0 – nulinė hipotezė priimta, modelis statistiškai tiko.

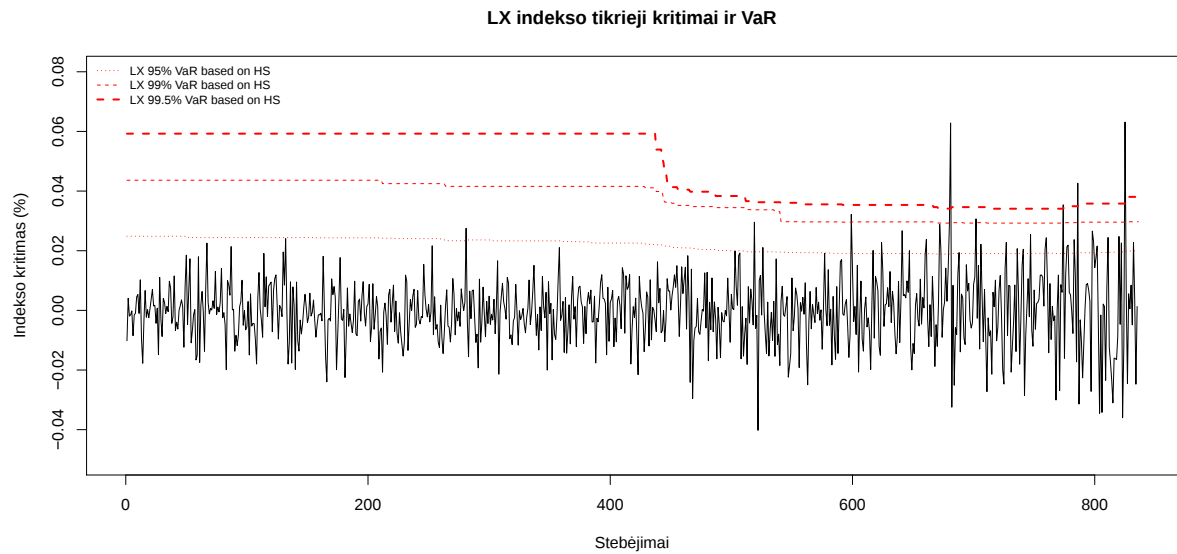
PX, 95%	Violations	LR _{uc}	LR _{ind}	LR _{cc}	UC, IND, CC Decisions
HS	17 (41)	18,6785	0,8793	19,5578	H_1, H_0, H_1
AWHS	20 (41)	13,7412	2,9011	16,6423	H_1, H_0, H_1
Normal	13 (41)	26,9892	1,6985	28,6877	H_1, H_0, H_1
t	17 (41)	18,6785	4,0193	22,6978	H_1, H_1, H_1
t, var. vol.	43 (41)	0,1117	0,1434	0,2551	H_0, H_0, H_0
PX, 99%	Violations	LR _{uc}	LR _{ind}	LR _{cc}	UC, IND, CC Decisions
HS	2 (9)	6,7729	0,0147	6,7876	H_1, H_0, H_1
AWHS	2 (9)	6,7729	0,0147	6,7876	H_1, H_0, H_1
Normal	4 (9)	2,6584	0,0492	2,7076	H_0, H_0, H_0
t	2 (9)	6,7729	0,0147	6,7876	H_1, H_0, H_1
t, var. vol.	7 (9)	0,1808	0,1382	0,3190	H_0, H_0, H_0
PX, 99,5%	Violations	LR _{uc}	LR _{ind}	LR _{cc}	UC, IND, CC Decisions
HS	1 (5)	3,3746	0,0049	3,3795	H_0, H_0, H_0
AWHS	1 (5)	3,3746	0,0049	3,3795	H_0, H_0, H_0
Normal	2 (5)	1,3238	0,0147	1,3385	H_0, H_0, H_0
t	2 (5)	1,3238	0,0147	1,3385	H_0, H_0, H_0
t, var. vol.	4 (5)	0,0020	0,0492	0,0512	H_0, H_0, H_0

5 lentelė: PX indekso duomenims pritaikytų VaR modelių palyginimas

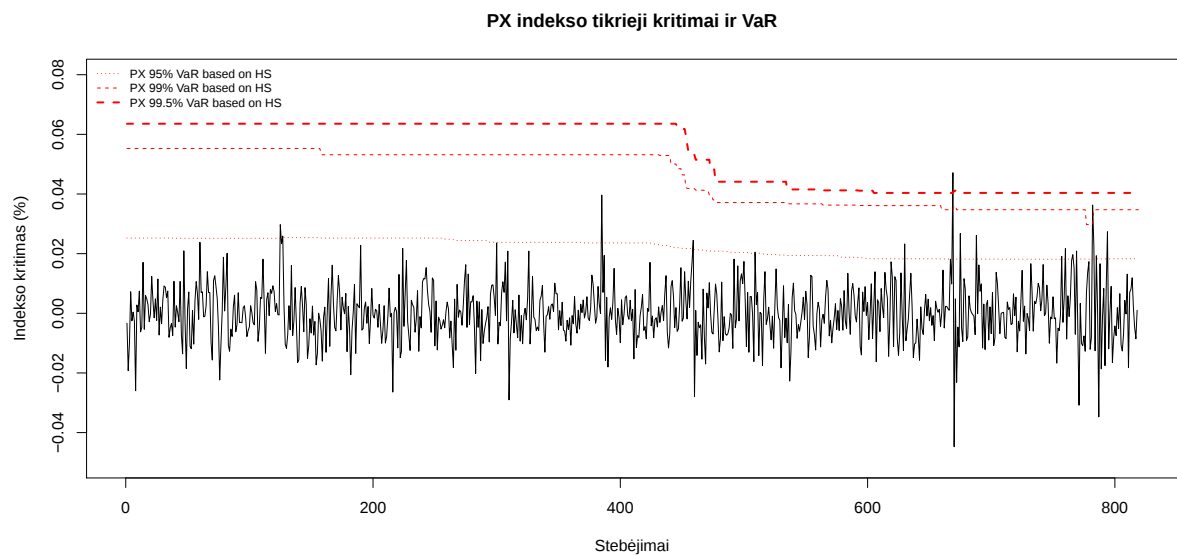
Paiškinimai:

HS – paprastasis istorinis modeliavimas, AWHS – laiku paremtas istorinis modeliavimas, Normal ir t – aproksimacija atitinkamai normaliuoju ir Stjudento skirstiniais, t, var. vol. – aproksimacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą; Violations – skaičius stebėjimų, peržengusių VaR, bei tikėtinas peržengimų skaičius; H_0 – nulinė hipotezė priimta, modelis statistiškai tiko.

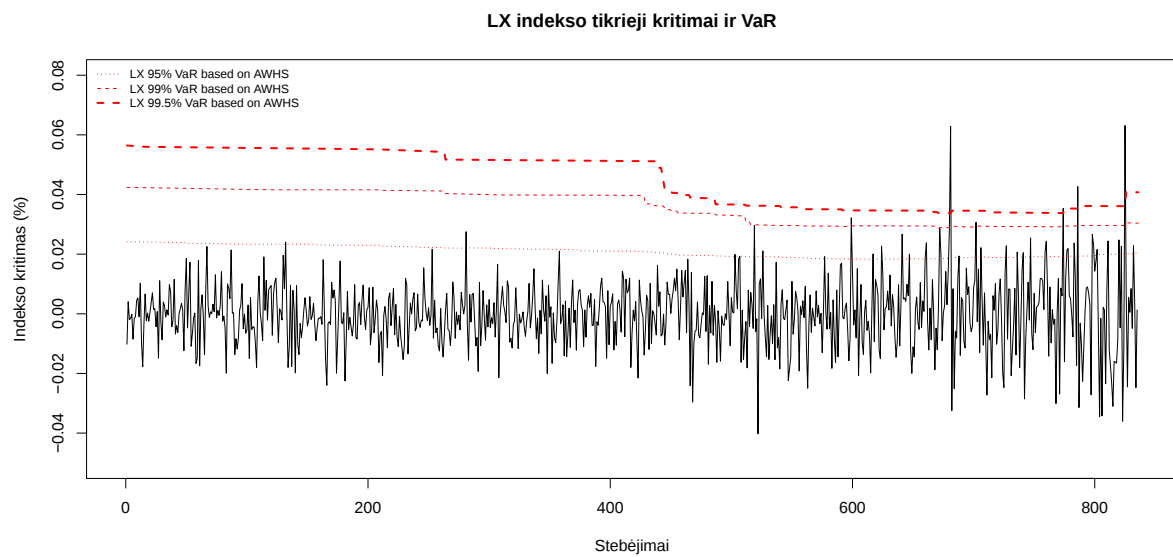
A.2 Modelių VaR grafikai



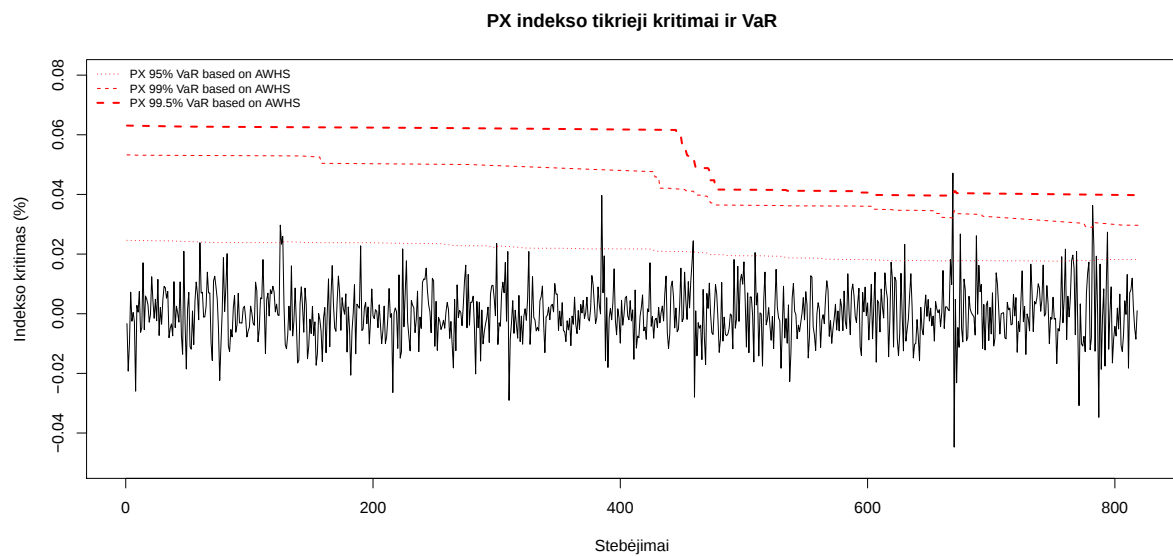
10 pav.: Paprastasis istorinis modeliavimas (LX)



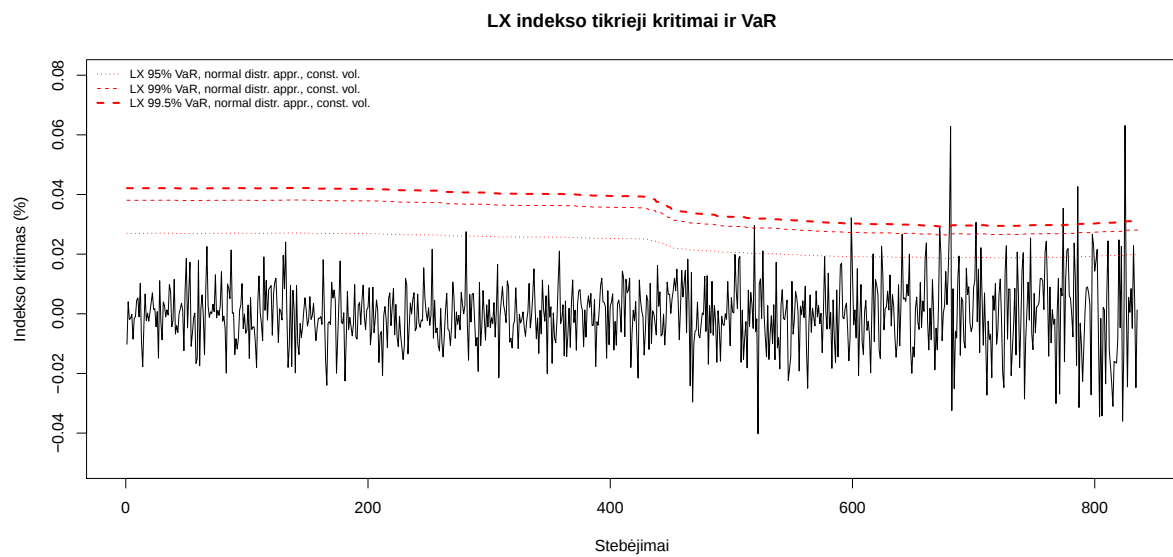
11 pav.: Paprastasis istorinis modeliavimas (PX)



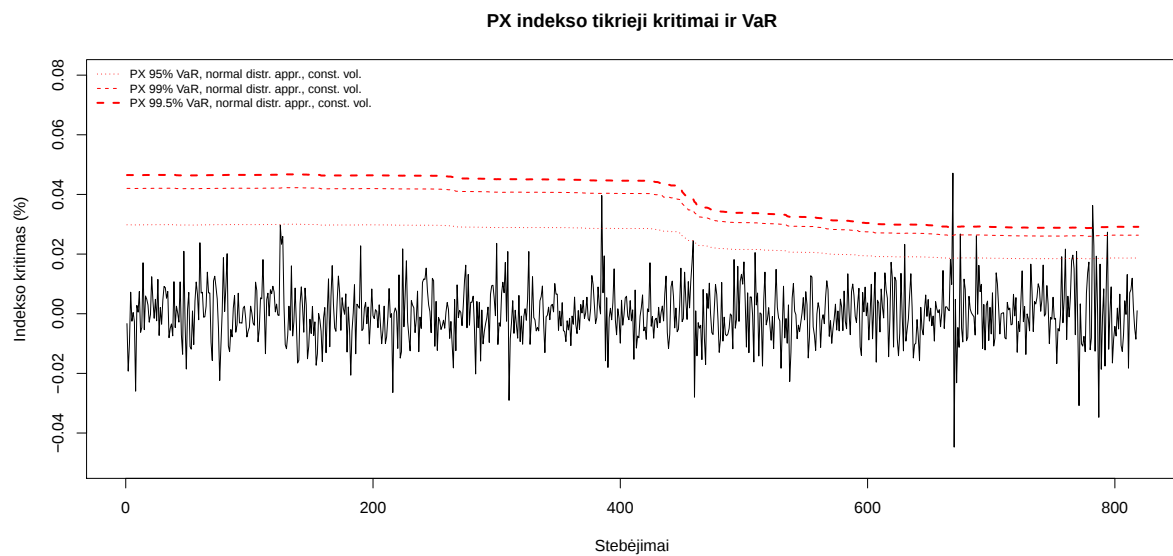
12 pav.: Laiku paremtas istorinis modeliavimas (LX)



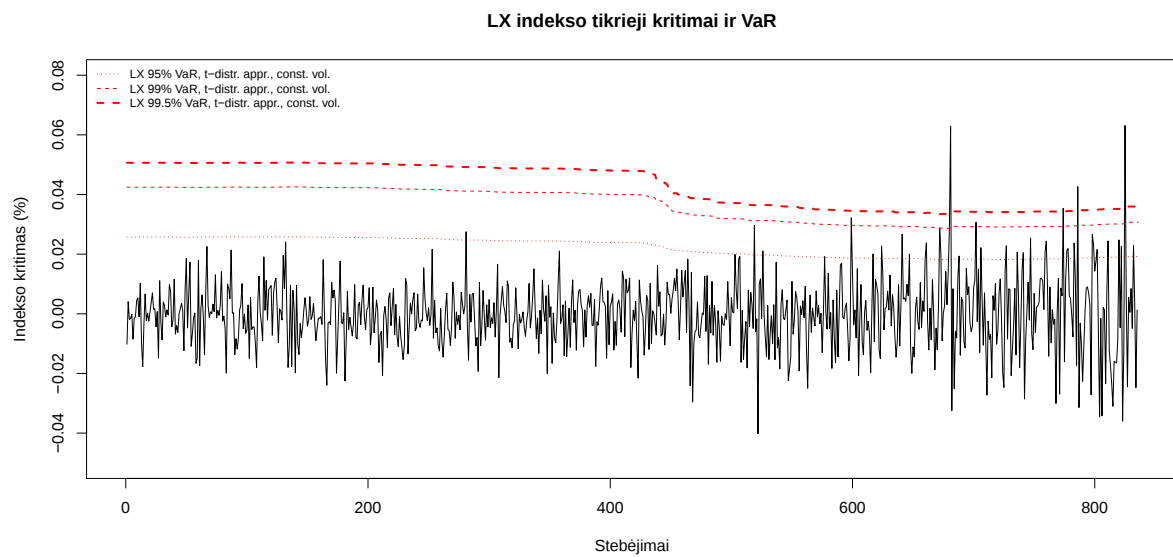
13 pav.: Laiku paremtas istorinis modeliavimas (PX)



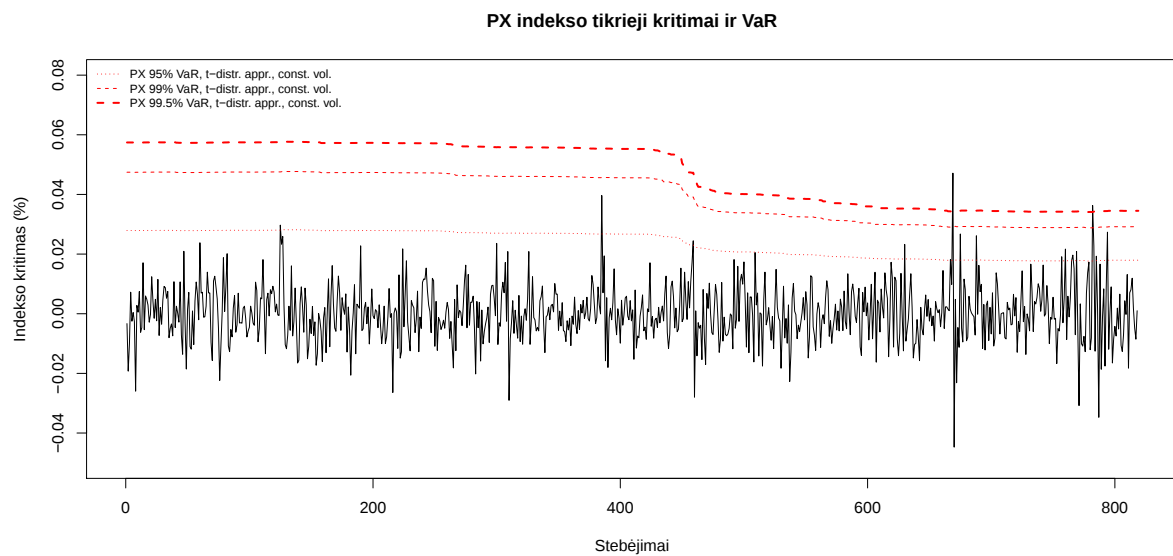
14 pav.: Aproximacija normaliuoju skirstiniu (LX)



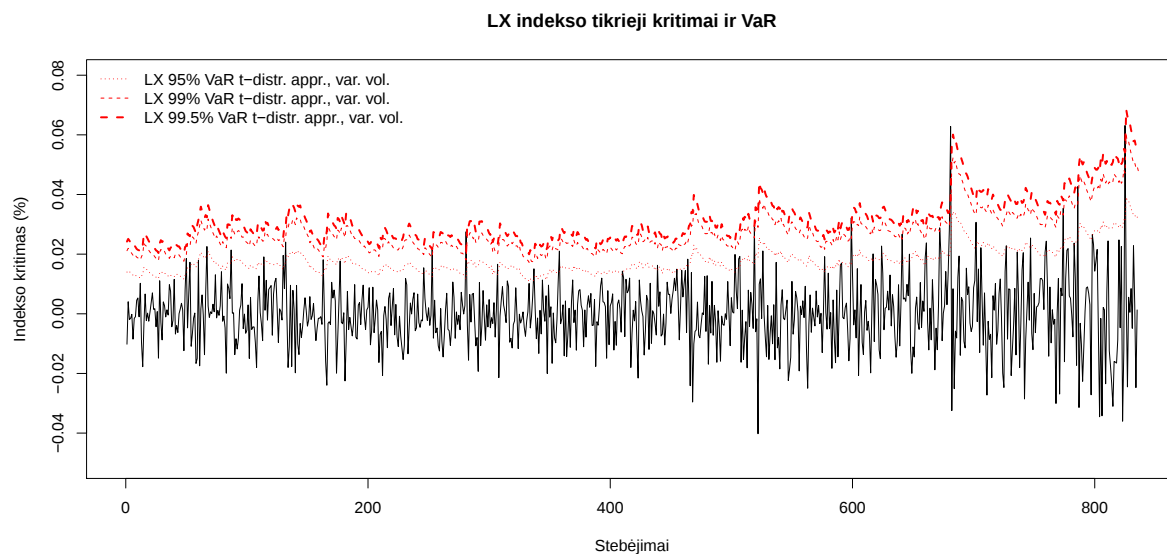
15 pav.: Aproximacija normaliuoju skirstiniu (PX)



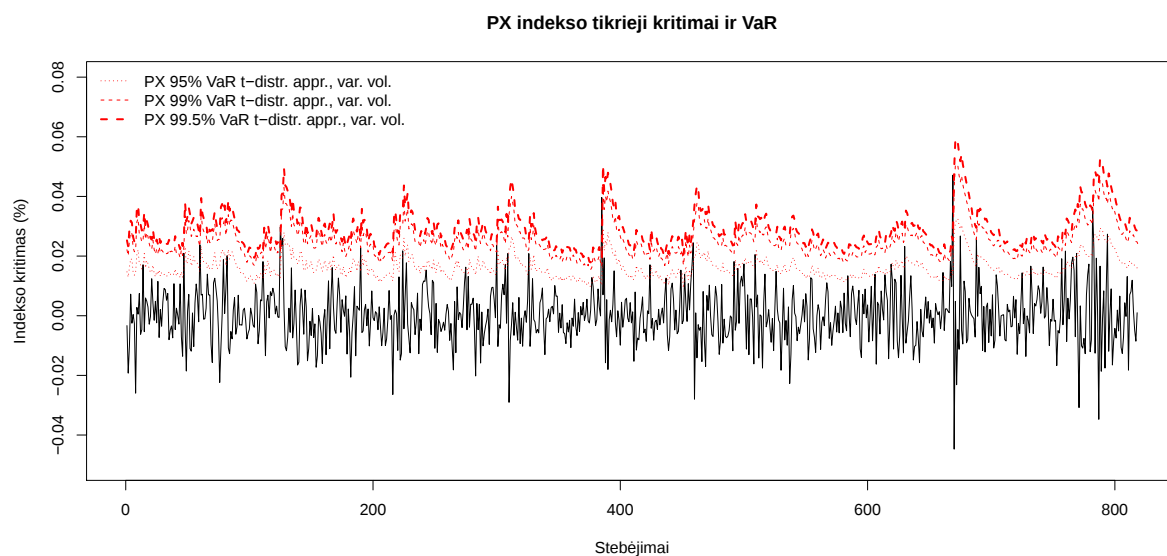
16 pav.: Aproksimacija Stjudento skirstiniu (LX)



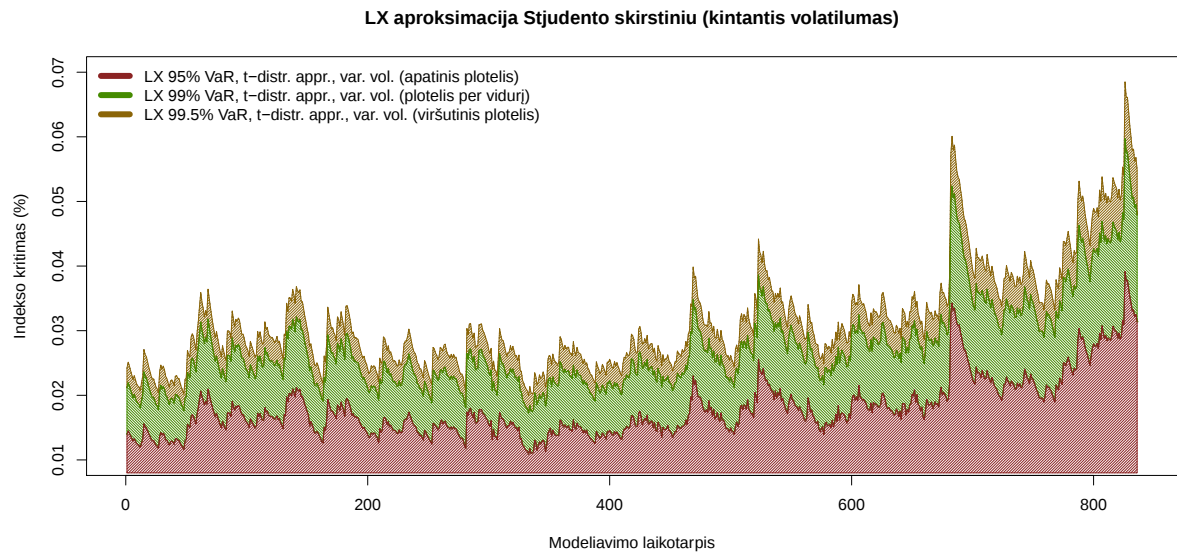
17 pav.: Aproksimacija Stjudento skirstiniu (PX)



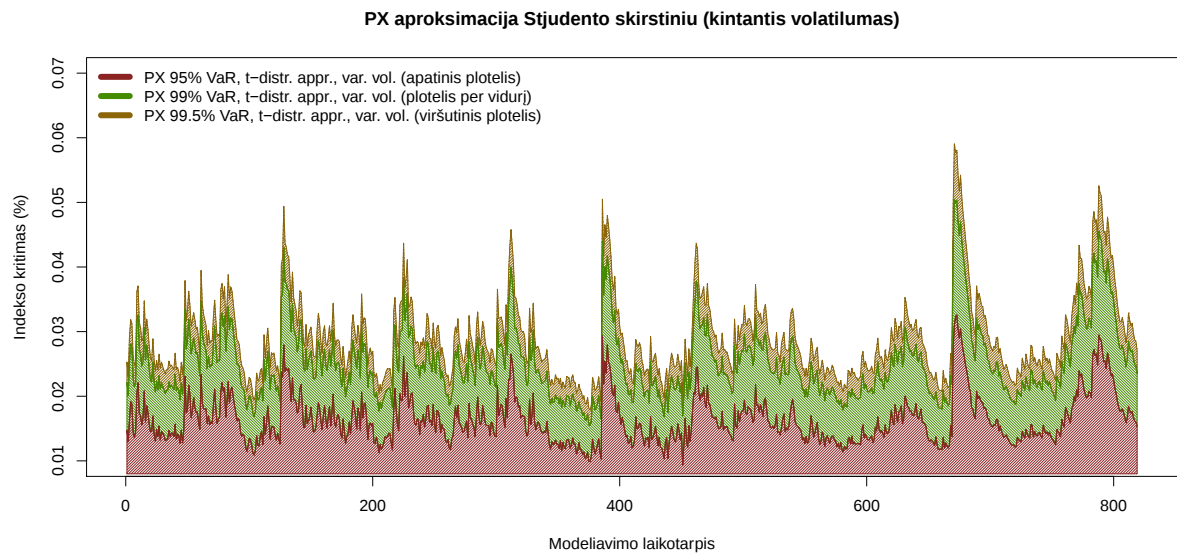
18 pav.: Aproximacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą (LX)



19 pav.: Aproximacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą (PX)



20 pav.: Aproksimacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą (LX)



21 pav.: Aproksimacija Stjudento skirstiniu, atsižvelgiant į kintamumą (PX)