VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Renaldas VILKANCAS

KINTAMOS SLENKSTINĖS GRĄŽOS POVEIKIO OMEGA FUNKCIJOS ATŽVILGIU OPTIMIZUOTIEMS INVESTICIJŲ PORTFELIAMS TYRIMAS

DAKTARO DISERTACIJA

SOCIALINIAI MOKSLAI,
EKONOMIKA (04S)

Vilnius LEIDYKLA TECHNIKA 2017

Disertacija rengta 1995–2017 metais Vilniaus Gedimino technikos universitete. Disertacija ginama eksternu.

Vadovas

prof. habil. dr. Algis ŽVIRBLIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, ekonomika – 04S), (1995–2000).

Mokslinis konsultantas

prof. dr. Jelena STANKEVIČIENĖ (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, ekonomika – 04S), (2014–2017).

Vilniaus Gedimino technikos universiteto Ekonomikos mokslo krypties disertacijos gynimo taryba:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Aleksandras Vytautas RUTKAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, ekonomika – 04S).

Nariai:

prof. dr. Daiva JUREVIČIENĖ (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, ekonomika – 04S),
dr. Tatjana POLAJEVA (Talino technologijos universitetas, ekonomika – 04S),
prof. habil. dr. Rimvydas SIMUTIS (Kauno technologijos universitetas, informatikos inžinerija – 07T),
doc. dr. Viktorija STASYTYTĖ (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, ekonomika – 04S).

Disertacija bus ginama viešame Ekonomikos mokslo krypties disertacijos gynimo tarybos posėdyje **2017 m. birželio 9 d. 9 val.** Vilniaus Gedimino technikos universiteto senato posėdžių salėje.

Adresas: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva.
Tel.: (8 5) 274 4956; faksas (8 5) 270 0112; el. paštas doktor@vgtu.lt

Pranešimai apie numatomą ginti disertaciją išsiųsti 2017 m. gegužės 8 d.
Disertaciją galima peržiūrėti VGTU talpykloje http://dspace.vgtu.lt/ ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto bibliotekoje (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lietuva), Lietuvos socialinių tyrimų centro bibliotekoje (A. Goštauto g. 9, LT-01108 Vilnius) ir Lietuvos agrarinės ekonomikos instituto bibliotekoje (V. Kudirkos g. 18, LT-03101, Vilnius).

VGTU leidyklos TECHNIKA 2017-030-M mokslo literatūros knyga
http://leidykla.vgtu.lt

ISBN 978-609-476-024-2

renaldas.vilkancas@vgtu.lt

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Renaldas VILKANCAS

RESEARCH OF IMPACT OF VARIABLE THRESHOLD RETURN ON PORTFOLIOS OPTIMIZED WITH RESPECT TO OMEGA FUNCTION

DOCTORAL DISSERTATION

SOCIAL SCIENCES,
ECONOMICS (04S)

VGTU
LEIDYKLA
Vilnius TECHNIKA 2017

Doctoral dissertation was prepared at Vilnius Gediminas Technical University in 1995–2017.

The dissertation is defended as an external work.

Supervisor

Prof. Dr Habil. Algis ŽVIRBLIS (Vilnius Gediminas Technical University, Economics – 04S), (1995–2000).

Scientific Consultant

Prof. Dr Jelena STANKEVIČIENĖ (Vilnius Gediminas Technical University, Economics – 04S), (2014–2017).

The Dissertation Defence Council of Scientific Field of Economics of Vilnius Gediminas Technical University:

Chairman

Prof. Dr Habil. Aleksandras Vytautas RUTKAUSKAS (Vilnius Gediminas Technical University, Economics – 04S).

Members:

Prof. Dr Daiva JUREVIČIENĖ (Vilnius Gediminas Technical University, Economics – 04S),
Dr Tatjana POLAJEVA (Tallinn University of Technology, Economics – 04S),
Prof. Dr Habil. Rimvydas SIMUTIS (Kaunas University of Technology, Informatics Engineering – 07T),
Assoc. Prof. Dr Viktorija STASYTYTĖ (Vilnius Gediminas Technical University, Economics – 04S).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Dissertation Defence Council of Economics in the Senate Hall of Vilnius Gediminas Technical University **at 9 a. m. on 9 June 2017**.

Address: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania.
Tel.: +370 5 274 4956; fax +370 5 270 0112; e-mail: doktor@vgtu.lt

A notification on the intend defending of the dissertation was send on 8 May 2017.

A copy of the doctoral dissertation is available for review at VGTU repository http://dspace.vgtu.lt/ and at the Library of Vilnius Gediminas Technical University (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lithuania), at the Library of Lithuanian Social Research Center (A. Goštauto g. 9, LT-01108 Vilnius) and at the Library of Lithuanian Institute of Agrarian Economics (V. Kudirkos g. 18, LT-03101, Vilnius).

Reziumė

Disertacijos objektas – portfelio optimizavimo metodai paremti asimetriniais rizikos matais. Šie matai patrauklūs, nes leidžia įvertinti finansinių grąžų asimetriškumą ir adekvačiai atspindi investuotojų požiūrį į riziką. Literatūros analizė parodė, kad nepaisant temos aktualumo ir tyrimų gausos, konkretaus rizikos mato parinkimo, slenkstinės grąžos, kuri yra labai svarbi naudojant asimetrinius rizikos matus, parinkimo, ir šių matų atžvilgiu optimizuotų portfelių efektyvumo, lyginant juos su tradiciniais investicijų portfelio optimizavimo metodais, klausimai nėra gerai ištirti. Darbo tikslas – pasiūlyti naują investicinio portfelio sudarymo modelį, paremtą omega funkcijos ir kintamos grąžos normos koncepcija, leidžiantį investuotojams sudaryti jų poreikius atitinkančius investicinius portfelius. Gauti rezultatai patvirtina siūlomo omega rodiklio ir šiuo rodikliu paremto optimizavimo metodo pranašumą tiek lyginant su tradiciniais, tiek ir su naujais optimizavimo būdais. Be to, gauti rezultatai rodo, kad stochastinio dominavimo kriterijus gali būti sėkmingai naudojamas parenkant slenkstinę grąžą, taip pat evoliucinių optimizavimo algoritmų tinkamumą sprendžiant santykinai didelio masto portfelio optimizavimo uždavinius.

Darbe sprendžiami šie uždaviniai: a) siekiama nustatyti omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių charakteristikas kintant slenkstinei grąžos normai; b) grįžtamojo patikrinimo metodu, naudojant realius istorinius duomenis, palyginti omegą portfelių rezultatus su rezultatais gaunamais naudojant klasikinius ir naujus portfelio optimizavimo metodus; c) ištirti stochastinio dominavimo kriterijaus taikymo galimybes parenkant slenkstinę grąžos normą; d) ištirti skirtuminės evoliucijos algoritmo panaudojamo galimybes optimizuojant santykinai didelius investicijų portfelius.

Disertaciją sudaro įvadas, trys skyriai, bendrosios išvados, literatūros sąrašas, autoriaus publikacijų disertacijos tema sąrašas. Įvade aptariama tiriamoji problema, atskleidžiamas darbo aktualumas, aprašomas tyrimų objektas, formuluojamas darbo tikslas bei uždaviniai, aprašoma tyrimų metodika, išryškinamas mokslinis naujumas bei rezultatų praktinė reikšmė. Pirmajame skyriuje pateikiama optimizavimo metodų analizė, skyriaus pabaigoje formuluojamos išvados ir tikslinami disertacijos uždaviniai. Antroje darbo dalyje yra analizuojami asimetriniai rizikos matai, bei pateikiamos teorinės bei praktinės prielaidos, kuriomis remiantis portfelio optimizavimui siūlomas omega rizikos rodiklis. Trečiajame skyriuje pateikiami empiriniai omega atžvilgių optimizuotų portfelių tyrimo rezultatai. Disertacijos pabaigoje pateikiamos bendrosios viso darbo išvados.

Disertacijos tema paskelbti 3 straipsniai ir perskaitytas 1 pranešimas Lietuvoje vykusioje tarptautinėje konferencijoje.

Abstract

This dissertation is concerned with methods for portfolio optimization based on downside measures of risk. These measures are appealing because they address several conceptual and empirical deficiencies associated with using standard deviation as a measure of risk in the classical mean-variance optimization framework: they account both for the fact that financial returns are not normally distributed and that investors prefer positive skewness in financial returns. The review of literature, however, has shown that despite the topic's relevance and the abundance of studies, the most fundamental questions relating to the selection of the appropriate measure of risk, establishing target or threshold rate of return associated with various asymmetric measures of risk, and how do the portfolios based on downside measures of risk compare against mean-variance portfolios in their performance and stability still remains unanswered. Computational difficulties associated with solving the portfolio selection problem with downside measures is another reason why the topic has not been widely researched. Consequently, this research aims to propose a new portfolio optimization model utilizing the concept of the omega function and the varying threshold rate of return. The empirical results show that the omega portfolios are superior to their mean-variance counterparts and the other tested portfolio strategies in terms of the stability and performance. The results also show that the stochastic dominance criteria can be successfully applied for selecting the threshold and that the algorithm of the differential evolution is suitable for solving of a relatively large portfolio optimization problems.

The dissertation consists of the introduction, three chapters, general conclusions, references, and list of scientific publications by the author. The introduction presents the problem, reveals the relevance of the work, describes the object of the research, formulates the aim and objectives of the thesis, recites research methodology, and highlights the scientific novelty and practical value of the research. The first chapter presents the analysis of the methods used to solve the portfolio selection problem as well as alternative risk measures used to assess the risk of an investment. In the end of the chapter a formulation of conclusions and specification of this study aims are presented. The second chapter provides theoretical framework for using the omega ratio both as a risk and a performance measure to aid investors to decide upon an appropriate level of risk and return. The third chapter present an extensive analysis of the model's results and the conclusion of the study.

The main research results were published in 3 scientific articles and 1 report made at the International conference held in Lithuania.

Žymėjimai

Simboliai

1 – vienetinis vektorius, kurio visi elementai lygus 1, t. y. $(1, 1, ...1_N)^T$;

I – vienetinė matrica, kurios įstrižainės elementai lygus 1, o visi kiti – lygus 0;

$\boldsymbol{\Sigma}$ – kovariacinė matrica;

$\boldsymbol{\mu}$ – tikėtinos grąžos vektorius;

σ – vidutinis kvadratinis (standartinis) nuokrypis;

σ^2 – dispersija;

ρ_{ij} – kintamųjų (portfelio pozicijų) i ir j koreliacijos koeficientas;

σ_{ij} – kintamųjų (portfelio pozicijų) i ir j kovariacija;

σ_P – portfelio standartinis nuokrypis (rizika);

$\mathbf{x}^{\boldsymbol{T}}$ – transponuotas vektorius (vektoriaus eilutė);

$\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}$ – atvirkštinė kovariacinė matrica;

R – grąžų vektorius;

w – vertybinių popierių portfelį sudarančių pozicijų (vertybinių popierių) svorių koeficientų vektorius;

w_i – portfelio i-tojo komponento svorio koeficientas;

x – vektoriaus stulpelis[1], t. y. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$.

[1] Vektoriai ir matricos tekste žymimi paryškintu šriftu.

Santrumpos

BH – strategija „pirk ir laikyk“ (ang. *buy and hold*);

BL – Black ir Litterman modelis;

1/N – vienodų svorių portfelis;

CAPM – kapitalo įkainojimo modelis (angl. *capital asset pricing model*);

CVaR – sąlyginė rizikos vertė (angl. *conditional value at risk*);

EA – evoliuciniai algoritmai;

EF – efektyvumo srities kraštas arba frontas (angl. *efficiency frontier*);

ERC – vienodos rizikos arba rizikos pariteto portfelis (angl. *equal risk contribution, risk parity*);

ETF – biržoje prekiaujami fondai (angl. *exchange traded funds*);

LPM_n – n laipsnio apatinis dalinis momentas (angl. *lower partial moment*);

LW_{1F}-TG – Ledoit ir Wolf rinkos indekso (vieno veiksnio) liestinės portfelis;

LWcc-TG – Ledoit ir Wolf vienodų koreliacijų liestinės portfelis;

MAR, τ – minimali priimtina arba slenkstė grąža (angl. *minimum acceptable return, threshold return*);

Max CVaR – maksimalios grąžos-rizikos sąlyginės rizikos vertės portfelis;

MCA – minimalios koreliacijos algoritmas (angl. *minimum correlation algorithm*);

Min CVaR – mažiausios sąlyginės rizikos vertės portfelis;

MRC – ribinė rizikos pozicija (angl. *marginal risk contribution*);

MV – vidurkio-dispersijos modelis, portfelis (angl. *mean-variance*);

MVP – mažiausios rizikos (dispersijos) portfelis (angl. *minimum variance portfolio*);

TG – liestinės arba maksimalaus Šarpo rodiklio portfelis, (angl. *tangent portfolio*);

UPM_q – q laipsnio viršutinis dalinis momentas (angl. *upper partial moment*);

VAR – rizikos vertė (angl. value at risk);

UPR – perviršio potencialo rodiklis (angl. *upside-potential ratio*).

Turinys

[2] Priedai pateikiami pridėtoje kompaktinėje plokštelėje

Contents

[3] The annexes are supplied in the enclosed compact disc.

Įvadas

Problemos formulavimas

Šiuolaikinės investicinio arba finansinio portfelio teorijos disciplinos pradžia – tikėtino naudingumo teorija ir H. Markovičiaus (H. Markowitz) vidurkio-dispersijos (angl. mean-variance, toliau MV) portfelio teorija. MV portfelio teorijos privalumas, jog priėmus supaprastintas prielaidas, kad investicijų grąžos gali būti aprašytos daugiamačiu normaliuoju skirstiniu, arba, investuotojų naudingumo funkcija yra kvadratinė, o tai reiškia, kad priimdami sprendimus investuotojai nekreipia dėmesio į grąžų „nenormalumą“ arba aukštesniuosius statistinius skirstinio momentus, investuotojų elgsenai aprašyti visiškai pakanka MV kriterijaus.

Nors sutinkama, kad tais atvejais, kai grąžas galima aprašyti elipsiniais skirstiniais, MV teorija gerai aproksimuoja investuotojų naudingumo funkciją, tačiau finansinių duomenų statistinė analizė rodo, kad finansinės grąžos pasižymi asimetrija ir storais kraštais, t. y. savybėmis, kurių negalima įvertinti naudojant vien dispersiją arba standartinį nuokrypį.

Įvairios mokslinės studijos taip pat patvirtina, kad investuotojai rinkdamiesi investicijas vertina ir 3-čiojo ir aukštesnių laipsnių statistinius momentus. Dar vienas svarbus MV teorijos ir standartinio nuokrypio trūkumas tas, kad standartinis nuokrypis yra simetrinis rizikos matas, vienodai vertinantis tiek neigiamus, tiek ir teigiamus nuokrypius, nors investuotojai riziką paprastai tapatina su galimu kapitalo netekimu arba neigiamais grąžų pokyčiais.

Išvardinti MV teorijos trūkumai paskatino grįžti prie tikėtino naudingumo teorijos idėjų ir naujų, tikslesnių rizikos matų paieškų. Be to, augantys kompiuterinės technikos pajėgimai ir tobulėjantys optimizavimo algoritmai, leidžia spręsti vis sudėtingesnius optimizavimo uždavinius ir optimizuoti vis sudėtingesnes tikslo funkcijas, o tai tapo dar vienu postūmiu, lėmusiu tikėtino naudingumo teorijos „renesansą“ ir naujų rizikos matų paiešką ir tyrimus.

Disertacijoje yra atliekama klasikinės portfelio teorijos, jos kritikos, alternatyvių investicinio portfelio optimizavimo metodų ir alternatyvių rizikos matų analizė. Naudojant asimetrinius rizikos matus būtina pasirinkti slenkstinę grąžos normą, kuri yra svarbus veiksnys, lemiantis investicijų portfelio grąžos-rizikos charakteristikas, tačiau slenkstinės grąžos normos poveikis investicijų portfeliui, mokslinėje literatūroje nėra sistemingai ištirtas. Disertacijoje tiriamos omega funkcijos atžvilgiu optimizuoto investicijų portfelio charakteristikos kintant slenkstinei grąžos normai, taip pat stochastinio dominavimo kriterijaus taikymo parenkant ribinę grąžos normą galimybės.

Nors Keating ir Shadwick (2002a, 2002b) pasiūlytas omega rodiklis sulaukė didelio susidomėjimo ir paskatino šio rodiklio atžvilgiu optimizuotų portfelių tyrimus, tačiau slenkstinės grąžos poveikis investicijų portfelio sudėčiai ir rizikos-grąžos charakteristikoms nėra išsamiai ištirtas. Disertacijos autoriaus žiniomis, stochastinio dominavimo kriterijus mokslinėje literatūroje nebuvo panaudotas slenkstinei grąžos normai parinkti. Lietuvos mokslininkai omega atžvilgiu optimizuotų portfelių tyrimų nėra vykdę.

Darbo aktualumas

Investicijų portfelio sudarymas ir valdymas išlieka fundamentalia finansų teorijos ir praktinio investavimo problema, kuri yra toliau aktyviai tyrinėjama net ir praėjus daugiau nei šešiems dešimtmečiams po to, kai H. Markovičius pasiūlė klasikinę MV portfelio teoriją.

Disertacijoje siūlomas portfelio optimizavimo omega funkcijos atžvilgiu metodas išsprendžia tris klasikiniams MV portfeliams būdingus trūkumus: įvertinamas visas tikimybinis skirstinys, t. y. tiek teigiama, tiek ir neigiama arba netekimų rizika, leidžia investuotojui pasirinkti investicijų portfelį atsižvelgiant į jo polinkį rizikuoti, ir, kas skvarbiusia, kaip parodė empiriniai tyrimai, pasižymi atsparumu išorės sąlygų pokyčiams, savybe, kuri yra labai svarbi sparčiai kintančioje finansų rinkų aplinkoje.

Tyrimų objektas

Šio darbo tyrimų objektas – portfelio optimizavimo metodai, paremti rizikos matais, leidžiančiais įvertinti grąžų asimetriškumą ir atsižvelgti į investuotojų polinkį rizikuoti.

Darbo tikslas

Darbo tikslas – pasiūlyti naują investicinio portfelio sudarymo modelį, paremtą omega funkcijos ir kintamos grąžos normos koncepcija, leidžiantį investuotojams sudaryti jų poreikius atitinkančius investicinius portfelius.

Darbo uždaviniai

Tyrimo tikslui pasiekti darbe keliami šie uždaviniai:

1. Atlikti klasikinių portfelio optimizavimo metodų teorinę ir praktinę analizę, atskleisti pagrindinius šių optimizavimo metodų trūkumus ir siūlomus šių trūkumų šalinimo sprendimus.
2. Atlikti asimetrinių rizikos matų, naudojamų optimizuojant investicijų portfelius, teorinę ir praktinę analizę, nustatyti pagrindines savybes, kurias turėtų tenkinti investicijų portfelio optimizavimui naudojami rizikos matai.
3. Atlikti investuotojo tikslinės arba slenkstinės grąžos normos poveikio rizikos matams ir investicijų portfelio charakteristikoms teorinę ir empirinę analizę.
4. Nustatyti, kaip keičiasi omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių rizikos, grąžos bei kitos pagrindinės charakteristikos, kintant investuotojo slenkstinei grąžos normai.
5. Ištirti stochastinio dominavimo kriterijaus pritaikymo galimybes parenkant investuotojo tikslinę arba slenkstinę grąžos normą.
6. Naudojant istorinius duomenis ir grįžtamojo patikrinimo metodą, palyginti omega portfelių rezultatyvumą ir kitas pagrindines charakteristikas, su rezultatais, gautais naudojant, tiek klasikinius MV optimizavimo metodus ir jų modifikacijas, tiek ir įvairius naujus optimizavimo metodus.

7. Ištirti skirtuminės evoliucijos algoritmo praktinio panaudojimo galimybes, omega funkcijos atžvilgiu optimizuojant santykinai didelius investicijų portfelius.

Tyrimų metodika

Siekiant disertacijoje iškelto tikslo ir uždavinių buvo analizuojami, lyginami ir apibendrinami naujausi moksliniai darbai. Optimizuojant investicijų portfelius buvo naudojami klasikiniai ir meta-euristiniai optimizavimo algoritmai, gauti empirinių tyrimų rezultatai analizuoti naudojant klasikinius parametrinius statistinius testus, taip pat ir neparametrinius statistikos metodus.

Darbo mokslinis naujumas

Rengiant disertaciją buvo gauti šie ekonomikos mokslui nauji rezultatai:

1. Atlikta klasikinių investicinio portfelio optimizavimo metodų bei naudojamų rizikos matų analizė padėjo išrinkti portfelio optimizavimui tinkamiausią rizikos-grąžos matą – omegą rodiklį. Šis rodiklis pagrįstas šiuolaikine rizikos koncepcija, kuri riziką apibrėžia kaip netikrumo poveikį tikslams. Be to, omega rodiklis leidžia įvertinti finansinių grąžų ir investuotojų rizikos suvokimo asimetriškumą.
2. Atlikta tikslinės arba slenkstinės grąžos poveikio investicijų pasirinkimui teorinė ir praktinė analizė, parodė, kad keičiant tikslinę grąžą galima efektyviai valdyti investuotojų rizikos toleravimo lygį ir investicinių portfelių rizikos-grąžos charakteristikas. Naudojant omega rodiklį nereikia pasirinkti dalinių momentų laipsnių, išvengiama rizikos gauti nelogiškus ar prieštaringus rezultatus.
3. Pasiūlytas naujas investicijų portfelio sudarymo modelis, paremtas omega funkcija ir kintama slenkstine gręža.
4. Pasiūlytas stochastinio dominavimo kriterijus panaudojimo metodas, leidžiantis parinkti tikslinę arba slenkstinę investuotojo grąžos normą.

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Gauti tyrimo rezultatai patvirtino omega portfelių pranašumą – šie portfeliai pajamingumu ženkliai pralenkė rinkos indeksą ir kitus lyginamuosius portfelius.

Atliktas tyrimas rodo ir omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių gautų rezultatų pastovumą. Atliekant omega optimizavimo modelio testavimą su JAV, Jungtinės Karalystės (toliau – JK) ir euro zonos rinkų akcijų istoriniais duomenimis ir lyginant 9 skirtingas portfelio optimizavimo strategijas, omega atžvilgiu optimizuoti portfeliai visais atvejais išsiskyrė absoliučiai geriausias rezultatais.

Literatūros analizė parodė, kad slenkstinės grąžos parinkimo klausimas mokslininkių darbuose nebuvo išsamiai nagrinėtas. Empiriniams tyrimas paprastai pasirenkama nulinė arba jai labai artima grąža (pvz. vyriausybės vertybinių popierių grąža), dažnai nemanant, kad toks pasirinkimas gali reikšmingai įtakoti rezultatus. Vertindami tokius rezultatus, turėtume būti gana atsargūs, nes šio tyrimo duomenys rodo, kad naudojant mėnesio trukmės grąžas, optimali slenkstinė grąža svyruoja intervale nuo 1 iki 2 proc., o tai sudarytų 12–26 proc. metinę grąžą.

Atliktas tyrimas patvirtino, kad stochastinio dominavimo kriterijus gali būti panaudotas parenkant slenkstinę grąžą 1–2 proc. intervale. Dviem atvejais iš keturių, šis metodas leido pagerinti absoliučius portfelio pajamingumo rezultatus.

Rizikos matų pasirinkimą praeityje neretai ribojo optimizavimo algoritmų galimybės. Efektyvesnių rizikos matų neretai buvo atsisakyta tik todėl, kad nebuvo tikslių optimizavimo algoritmų, leidžiančių išspręsti problemą panaudojant norimą rizikos matą. Empiriniai grąžų skirstiniai nėra glotnūs, iškili ar griežtai monotoniški, todėl dažnai tikslo funkciją galima optimizuoti tik globalaus optimizavimo algoritmų pagalba. Tai yra viena iš priežasčių kodėl, nepaisant nemažo susidomėjimo, omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių tyrimų literatūroje nėra daug, o esantys, daugumoje skirti optimizavimo problemoms nagrinėti, o ne omega portfelių finansinėms charakteristikoms tirti. Nors šio darbo objektas ne optimizavimo algoritmai, akivaizdu, kad iškelto tikslo neįmanoma pasiekti be tinkamų priemonių. Omega funkcijai optimizuoti darbe panaudotas skirtuminės evoliucijos algoritmas. Rezultatai parodė, kad šis algoritmas tinkamas sprendžiant santykinai didelės apimties portfelio optimizavimo uždavinius. Naudojant R integruotą programų kūrimo aplinką, lygiagretaus skaičiavimo programinį paketą „Parallel“ ir skirtuminės evoliucijos algoritmą perkeltą į Fortran kalbą, optimalių portfelių paiešką ir testavimo su istoriniais duomenimis procedūras pavyko paspartinti apie 40 kartų.

Ginamieji teiginiai

1. Naudojant omega funkciją sudaryti investicijų portfeliai įvertina grąžų asimetriškumą ir investuotojų rizikos toleranciją.

2. Rinkdamiesi tikslinę arba slenkstinę grąžos normą investuotojai gali pasirinkti jiems tinkamą rizikos lygį, o tuo pačiu ir investicinio portfelio grąžos-rizikos charakteristikas. Naudojant omegą rodiklį nereikia rinktis dalinių momentų laipsnių, ir nėra rizikos pasirinkti nelogiškus, vienas kitam prieštaraujančius, slenkstinės grąžos ir dalinių momentų laipsnių derinius.
3. Vertinant absoliučius ir santykinius (t. y. gautus atsižvelgiant į riziką) grąžos rodiklius, mėnesio trukmės slenkstinei grąžai kintant 1–2 proc. intervale, omega portfeliai pasiekia geresnių rezultatų nei kiti portfeliai.
4. Omega funkcijos atžvilgiu optimizuoti portfeliai pasižymi rezultatų stabilumu, lyginant juos tiek su klasikiniais MV portfelio optimizavimo metodais, tiek ir su portfeliais sudarytais naudojant alternatyvius rizikos matus (pvz. lyginat su CVaR atžvilgiu optimizuotais portfeliais).
5. Stochastinio dominavimo kriterijus gali būti panaudotas sudarant omega atžvilgiu optimizuotus portfelius ir parenkant optimalią slenkstinę grąžą.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos tema paskelbtos 3 mokslinės publikacijos recenzuojamuose mokslo žurnaluose, perskaitytas vienas mokslinis pranešimas tarptautinėje konferencijoje „Contemporary issues in business, management and education 2014“, Vilnius, Lithuania.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, trys skyriai, bendrosios išvados ir 5 priedai.

Bendra darbo apimtis – 117 puslapių, tekste panaudotos 57 numeruotos formulės, 24 paveikslai ir 24 lentelės (iš jų 11 lentelių prieduose). Rašant disertaciją buvo panaudoti 103 literatūros šaltiniai.

1

Portfelio optimizavimo metodai ir rizikos matai

Šio skyriaus tikslas – išanalizuoti investicijų portfelio optimizavimo metodus ir rizikai matuoti naudojamus rizikos matus, nustatyti jų privalumus ir trūkumus. Šio skyriaus tematika paskelbtos dvi autoriaus publikacijos (Vilkancas 2014, Vilkancas 2014).

Pasak V. Šarpo (W. F. Sharpe), investicijų portfelio teorijos tikslas – sudaryti investicijų portfelį, kuris maksimizuoja tikėtiną grąžą ir minimizuoja riziką. Optimalaus vertybinių popierių portfelio uždavinį 1959 metais išsprendė H. Markovičius, pasiūlydamas vidurkio-dispersijos (angl. *mean-variance*, toliau MV) atžvilgiu optimalų investicijų portfelį. Tobinas (1958), remdamasis H. Markovičiaus portfelio teorija, parodė, kad esant tam tikroms sąlygoms, investicijų portfelio sudarymo procesą galima išskaidyti į du etapus: a) optimalaus rizikingų investicijų portfelio sudarymo etapą ir; b) investicijų portfelio paskirstymą tarp dviejų investicijų klasių – minėto rizikingų investicijų portfelio ir nerizikingų investicijų.

Jei portfelį sudarančių vertybinių popierių grąžos skirstinys būtų normalusis ir riziką galima būtų tiksliai apibrėžti naudojant vertybinių popierių grąžos dispersiją, teoriškai H. Markovičiaus portfelis būtų optimalus. Tačiau H. Markovičiaus teoriją bandant taikyti praktikoje, neišvengiamai susiduriama su keliomis problemomis.

Pirma, kadangi vertybinių popierių būsima grąža ir dispersija nėra žinomos, šiuos dydžius paprastai bandoma įvertinti naudojant praėjusių laikotarpių duomenis, taip „sukuriant“ imčių paklaidas. Net jei tikrieji tikėtinos grąžos, dispersijos ir vertybinių popierių tarpusavio koreliacijos dydžiai būtų žinomi, imties paklaidos išvengti nepavyktų, kadangi kiekviena nauja vertybinių popierių grąžos realizacija (imtis) skirtųsi, todėl kiekvienam būsimam laikotarpiui sudaryti vidurkio-dispersijos portfeliai nebūtų optimalūs. Imčių sudarymo procesą kartodami tūkstančius kartų, galėtume sumažinti imties paklaidą (Scherer, Martin 2005, p. 8), tačiau vidutinių parametrų portfelis vis tiek nebūtų optimalus; be to realiame pasaulyje, visuomet galima tik viena „istorijos realizacija“.

Antra, kad kainų pokyčiai nėra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį ir pasižymi asimetrija, pastebėta jau seniai (Mandelbrot 1963, Fama 1965). Šiandien neabejojama, kad ekstremalūs vertybinių popierių kainų pokyčiai yra gerokai dažnesni nei galima būtų tikėtis remiantis Gauso atsitiktiniu procesu, o tai reiškia, kad reali investicijų portfelio rizika, su kuria susiduria investuotojai, yra gerokai didesnė nei tai parodo dispersija. MV optimizavimo metodas neįvertina aukštesniųjų statistinių momentų (asimetrijos ir eksceso), be to, dispersija, kaip ir kiti simetriniai rizikos matai, tiek teigiamus, tiek neigiamus nuokrypius nuo vidurkio vienodai vertina kaip rizikos šaltinį, t. y. „nediskriminuoja“ nuostolių rizikos, nors yra akivaizdu, kad investuotojai riziką sieja su nuostoliais, o ne didesne (nei buvo tikėtasi) grąža. MV metodas yra tapatus kvadratinės investuotojo naudingumo funkcijos optimizavimui, tačiau ši funkcija nėra griežtai monotoniškai didėjanti, t. y. pasiekus tam tikrą turto lygį, ji ima mažėti, ir todėl jos naudojimas investuotojų elgsenai modeliuoti nėra realistiškas.

Galiausiai MV modelis yra vieno laikotarpio modelis, o realus investavimo procesas paprastai yra ilgalaikis ir apima dažną investicinių tikslų peržiūrėjimą ir atitinkamą investicijų portfelio pozicijų perskirstymą.

Nepaisant paminėtų trūkumų, H. Markovičiaus MV modelis apibrėžia du „pamatinius“ investicijų portfelio pasirinkimo problemos aspektus – rizikos ir grąžos tarpusavio priklausomybę bei investicijų rizikos išskaidymo arba diversifikavimo naudą, t. y. portfelio teorija teigia, kad investuotojai sudarydami investicijų portfelį turi vadovautis ne vien tik atskirų vertybinių popierių tikėtinomis grąžos-rizikos charakteristikomis, tačiau ir jų tarpusavio priklausomybe, į kurią turi būti atsižvelgiama sudarant diversifikuotą vertybinių popierių portfelį. Šios H. Markovičiaus portfelio teorijos idėjos niekuomet nebuvo, ir matyt niekuomet nebus, kvestionuojamos (Rockel 2010).

Be to, H. Markovičius portfelio problemą išsprendė analitiškai, ir jo portfelio sudarymo modelis gali būti toliau plečiamas ir pritaikomas sprendžiant praktinius investavimo uždavinius, pvz. ribojant skolintų vertybinių popierių pardavimus, maksimalius ir minimalius pozicijų svorius, nustatant apyvartosir kardinalumo ribojimus ir pan. H. Markovičiaus portfelio teorija tapo investicijų ir bendrai finansų sektoriaus *de-facto* standartu, o toliau vykdomi akademiniai bei praktiniai tyrimai skirti praktinių problemų sprendimui: tikslesnių rizikos apibrėžimų matų paiešką, aukštesnių statistinių momentų įtraukimą į portfelio analizę, siekiant tinkamai įvertinti finansinio turto grąžų „nenormalumą“, tikslesnį portfelio optimizavimui naudojamų parametrų prognozavimą, atsižvelgiant į finansų rinkų kintamumo ir koreliacijos nepastovimą, struktūrinius „lūžius“ ir pan.

1.1. Investicijų portfelio valdymo procesas

Vertybinių popierių portfelio sudarymo ir optimizavimo procesą galima išskaidyti į keletą etapų: a) tikslų išsikėlimas; b) vertybinių popierių portfelio strategijos parinkimas; c) vertybinių popierių atranka; d) vertybinių popierių portfelio efektyvumo įvertinimas.

Investavimo tikslų iškėlimas nėra sudėtingas procesas – investavimo tikslai gali būti apibrėžiami konkrečia pinigų suma, kuria norima sukaupti senatvei, brangiam pirkiniui įsigyti, skoloms padengti ar panašiems poreikiams. Dažniausiai investavimo tikslai gali būti išreikšti per investuotojo reikalaujamą grąžos normą, kuri investavimo tikslą, t. y. būsimą pinigų sumą, susieja su turimu turtu ar planuojamu pinigų srautu. Kartu paaiškėja ir investavimo ribojimai, iš kurių svarbiausias – investuotojo prisiimama rizika.

Kitas žingsnis – turto klasių pasirinkimas. Šis etapas vadinamas strateginiu kapitalo paskirstymu. Tradicinėms turto klasėms priskiriamos akcijos, obligacijos ir pinigų rinkos priemonės. Pinigų rinkos finansinės priemonės pasižymi maža rinkos rizika, tačiau didele perkamosios galios praradimo rizika. Paprastai rekomenduojama investuoti į turto klases, kurių kainos juda skirtingomis kryptimis arba bent jau pasižymi maža tarpusavio koreliacija, pvz. į nuosavybės vertybinius popierius – akcijas, ir fiksuotos grąžos vertybinius popierius – obligacijas, taip išskaidant investicinio portfelio lėšas ir sumažinant bendrą riziką. Pagrindinė priežastis, kodėl akcijų ir obligacijų kainų pokyčiai išsiskiria – investuotojų reakcija į finansų rinkos neramumus, kai investuotojai „puola“ ieškoti „saugaus prieglobsčio“ ir renkasi „saugesnes“ investicijas į obligacijas ir vengia „rizikingesnių“ investicijų į akcijas (Baele *at al.* 2010). Tačiau „ramiais“ laikotarpiais obligacijų ir akcijų grąžos pasižymi pakankamai stipria koreliacija, todėl investuotojai vis dažniau tradicinių finansinių priemonių portfelius papildo naujomis turto klasėmis, investuodami į kapitalo, žaliavų, valiutų, nekilnojamojo turto ar ribotos rizikos fondus (angl. *hedge funds*). Ribotos rizikos fondai, dažnai privatūs ir todėl mažai reguliuojami, absoliučios grąžos siekia įvairiomis įmanomomis priemonėmis ir todėl, skeptikų dažnai pašaipiai vadinami neribotos rizikos fondais.

Trumpalaikiai nukrypimai nuo ilgalaikių strateginių tikslų, priskiriami taktiniam investicijų portfelio valdymui arba taktiniam turto paskirstymui. Pavyzdžiui, jeigu investuotojas mano, kad akcijos yra santykinai pigios, jis gali nuspręsti laikinai padidinti portfelyje esančių akcijų dalį. Ir atvirkščiai, jei investuotojas mano, kad akcijos yra pervertintos ir jų kaina ateityje kris, jų dalis portfelyje gali būti mažinama. Taktinis portfelio valdymas remiasi gebėjimu prognozuoti rinkos pokyčius ir atitinkamai pasirinkti investicines priemones ir investavimo laiką (angl. *market timing*). Taktiniam portfelio valdymui paprastai priskiriamas ir konkrečių vertybinių popierių pasirinkimas kiekvienoje vertybinių popierių klasėje.

Vertybinių popierių atrankos etape, atsižvelgiant į investuotojo iškeltus tikslus, kiekvienoje turto klasėje parenkami konkretūs vertybiniai popieriai ir sudaromas optimalus investicijų portfelis. Paprastai išskiriamos dvi pagrindinės portfelio formavimo ir valdymo strategijos – pasyvi ir aktyvi (Fabozzi 2000). Pasyvios strategijos tikslas – siekti, kad pajamingumo ir rizikingumo lygis atitiktų rinkos vidurkį, t. y. sekti arba „atkartoti“ plačiai diversifikuoto rinkos indekso rezultatus. Tokių strategijų privalumas yra jų pigumas ir santykinai mažas rizikingumas. Trūkumas – iš anksto „užprogramuojamas“ vidutinis investicijų rezultatas, kuris tampa ypač „nemalonus“ vertybinių popierių rinkų nuosmukio metu.

Aktyvios strategijos šalininkai remiasi prielaida, kad rinkos nėra visiškai efektyvios ir šį neefektyvumą bando išnaudoti, siekdami geresnių už vidutinius rezultatų. Remiantis šiomis strategijomis, investiciniai sprendimai priimami priklausomai nuo situacijos finansų rinkose. Dėl didesnės portfelio pozicijų apyvartos, aktyvios strategijos pasižymi didesnėmis valdymo sąnaudomis ir yra brangesnės.

Klasikinis portfelio optimizavimo modelis, sukurtas H. Markovičiaus ir vėliau išplėtotas V. Šarpo, iš esmės atitinka pasyvaus investicijų valdymo filosofiją, kuri teigia, kad investuotojai neturėtų bandyti „aplenkti“ rinkos rinkdamiesi „patrauklesnes“ akcijas, tačiau turėtų investuoti į plačiai diversifikuotą rinkos portfelį.

Investicijos dažnai išskaidomos ne tik pagal turto klases ir geografinius regionus, tačiau ir tarp aktyviai ir pasyviai valdomų fondų. Mišria strategija galima laikyti ir atvejus, kai dalis kapitalo skiriama likvidumui palaikyti, t. y. nenumatytiems poreikiams, investuojant į santykinai saugias turto klases, o kita dalis, sudaro vadinamąjį „rizikos fondą“, kada yra investuojama į pelningesnius, tačiau ir rizikingesnius vertybinius popierius.

Dažnai naudojamos ir kitos, euristinės arba *ad hoc* taisyklės. Pavyzdžiui, viena iš tokių taisyklių, skirta privatiems investuotojams, teigia, kad investuotojo portfelyje akcijų dalis procentais turi būti lygi skaičiui, gautam investuotojo amžių atėmus iš šimto. Vadovaujantis tokia taisykle, keturiasdešimtmečio investuotojo akcijų dalis portfelyje turėtų sudaryti 60 proc. Žinoma, tokia taisyklė tinka ne visiems ir ne visada. Pavyzdžiui, senjorai gali rinktis rizikingas investicijas, jei santaupos skirtos jų paveldėtojams, o jauniems žmonėms, jei jie neketina investuoti ilgam laikui, neverta investuoti į labai rizikingus vertybinius popierius. Pats portfelio teorijos kūrėjas H. Markovičius pripažino, kad valdydamas savo investicijų portfelį vadovaujasi vienodų svorių, t. y. 1/N taisykle (Todd, Gigerenzer 2012).

Klausimas, ar aktyvios portfelio valdymo strategijos yra efektyvesnės nei pasyvios, nėra atsakytas. Dažnai teigiama, kad galutiniam rezultatui didžiausią įtaką turi ne aktyvus portfelio valdymas ir trumpalaikiai taktiniai sprendimai, bet pasirinkta strategija ir investavimo laikotarpis. Tokia nuomonė dažnai grindžiama G. Brinson, L. Hood ir G. Beebower (toliau – BHB) 1986 metais paskelbta 1974–1983 m. pensijų fondų rezultatų studija, kurios išvadoje teigiama, kad vidutiniškai net 93,7 proc. pensijų fondų grąžų kintamumo priklauso nuo fondų politikos, t. y. strateginio kapitalo paskirstymo tarp skirtingų turto klasių ir tik 4,2 proc. nuo investavimo laiko ar atskirų finansinių priemonių turto klasėse pasirinkimo, t. y. nuo taktinių sprendimų. 1991 metais G. Brinson, L. Hood ir D. Singer atnaujino BHG studiją ir ištyrę 1977–1978 m. pensijų fondų rezultatus nustatė, kad net 91,5 proc. šių fondų grąžos kintamumo priklauso nuo fondų strateginės politikos, t. y. faktiškai patvirtino BHB rezultatus. Tiesa, BHB savo studijoje nagrinėjo bendrą fondų grąžų kintamumą, o ne fondų pajamingumo lygį ar santykinį strateginio ir taktinio turto paskirstymo poveikį bendrajam pajamingumui. R. Ibbotson ir P. Kaplan (2000) atkreipė dėmesį į tai, kad ženkli fondų grąžos kintamumo dalis priklauso nuo bendro rinkų kintamumo, o ne nuo konkretaus fondo turto paskirstymo strategijos. Atlikę fondų bendrojo pajamingumo skerspjūvio (vienalaikių duomenų) analizę, R. Ibbotson ir P. Kaplan nustatė, kad tik 40 proc. fondų rezultatų galima paaiškinti fondų strateginiais sprendimais, tačiau galutinė autorių išvada nėra neginčytina – kadangi aktyviai valdomų fondų gerus rezultatus „atsveria“ blogi rezultatai, galiausiai, dauguma rezultatų lemiami strateginių turto paskirstymo sprendimų. R. Ibbotson su kolegomis 2010 metais atlikę daugiau nei 5000 investicinių fondų tyrimus ir fondų bendrą pajamingumą išskaidę į: a) pajamingumą priskirtiną bendriems rinkos pokyčiams; b) rezultatus priskirtinus strateginiam turto paskirstymui; ir c) rezultatus priskirtinus taktiniam turto paskirstymui, nustatė, kad apie 75 proc. rezultatų galima priskirti bendriems rinkos pokyčiams, o likusius rezultatus vienodai įtakoja tiek strateginiai, tiek taktiniai fondu valdytojų sprendimai (Xiong *at al*. 2010).

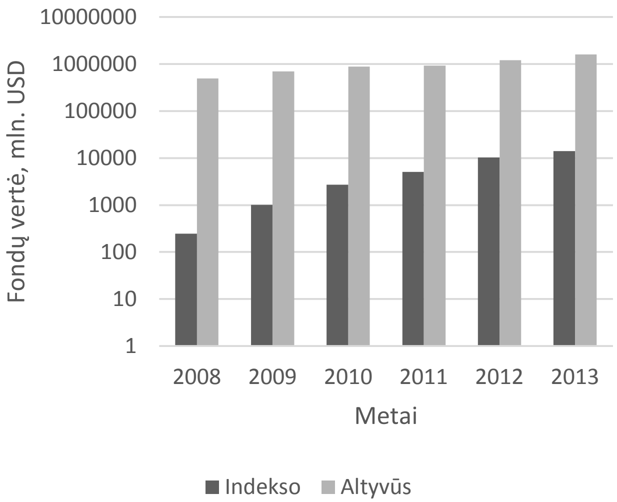
Ginčais tarp aktyvaus ir pasyvaus valdymo strategijų šalinininkų matyt niekuomet nebus išspęstas. Pripažindami, kad iš esmės rinkos yra efektyvios, taip pat turime pripažinti, kad šį „efektyvumą“ užtikrina būtent „aktyvūs“ investuotojai, ieškodami nuolat atsirandančių neefektyvumo bei arbitražo galimybių ir jas pelningai išnaudodami.

1.1 lentelė. Grąžos ir pasirinktos strategijos priklausomybė
Table 1.1. Percent of Total Return Level Explained by Policy Return

Rodiklis	Brinson (1986)	Brinson (1991)	Ibbotson (2000)	Ibbotson (2010)*
Strateginių sprendimų įtakojami rezultatai, %	94	92	88	88
Taktinių sprendimų įtakojami rezultatai, %	6	8	12	12

* Vadovaujantis BHG metodologija, rinkos ir strateginių sprendimų įtaka neatskirta.

Žvelgiant į JAV investicinių fondų rinką, galima pagrįstai teigti, kad čia vyrauja pasyviai valdomi fondai – 2013 metų pabaigoje šių fondų valdomo turto vertė sudarė 1 596 691 mln. USD, o aktyviai valdomų fondų turto vertė tesudarė 14 055 mln. USD. Tiesa per 2009–2013 metų laikotarpį aktyviai valdomų fondų turtas išaugo 127 proc., pasyviai valdomų 1290 proc., t. y. 12,9 karto[4].



1.1 pav. Pasyviai (indekso) ir aktyviai valdomi fondai
Fig. 1.1. Passively and actively managed funds, billions of dollars
Šaltinis: sudaryta autoriaus pagal 2014 Investment Company Factbook (http://www.icifactbook.org) duomenis

[4] 2014 Investment Company Factbook (http://www.icifactbook.org)

Lietuvoje atliktas tyrimas parodė, kad Lietuvos bankai, būdami didžiausi instituciniai investuotojai, rinkdamiesi turtą, praktiškai nesivadovauja investicijų portfelio sudarymo teorijomis (Kraujalis, 2001). 2000 m. pradžioje Kraujalio atlikta dešimties Lietuvos bankų investicinių padalinių ir dviejų antrinių (asocijuotų) bendrovių darbuotojų apklausa parodė, kad tik ketvirtadalis Lietuvos bankų, vykdydami investicinę veiklą, vadovaujasi vertybinių popierių portfelio sudarymo teorijomis. Tiesa, kokiomis konkrečiai teorijomis vadovavosi bankai valdydami investicinius portfelius, autorius nenurodė.

1.2. Klasikinė portfelio optimizavimo teorija

Klasikinės portfelio teorijos sukūrimo data įprasta laikyti[5] 1952 metus, kai H. Markovičius paskelbė portfelio pasirinkimo teoriją (Markowitz 1952). Optimalaus investicijų portfelio, parinkimo problemą H. Markovičius formulavo kaip matematinį optimizavimo uždavinį: maksimizuojamas portfelio grąžos vidurkis fiksuojant portfelio dispersiją:

$$max \quad \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}, \tag{1.1}$$

čia $\mathbf{w}$ – portfelį sudarančių vertybinių popierių (pozicijų) svorių koeficientai; $\boldsymbol{\mu}$ – vertybinių popierių grąžų vidurkiai, $\boldsymbol{\Sigma}$ – grąžų kovariacinė matrica; λ – investuotojo tolerancijos rizikai koeficientas. Optimizuojant portfelį paprastai nustatoma visiško investavimo sąlyga, t. y., kad svorių suma būtų lygi vienetui, o kai draudžiamas skolintų vertybinių popierių pardavimas, nustatoma papildoma $w_i \geq 0$ sąlyga.

Remdamiesi H. Markovičiaus portfelio teorija, investuotojai, rinkdamiesi investicijų portfelį, vadovaujasi tik dviem charakteristikomis: tikėtina grąža ir rizika, kuriai matuoti naudojama dispersija, t. y. daugiamatę investicijų pasirinkimo problemą, kai, esant neapibrėžtumui, iš daugelio skirtingas charakteristikas turinčių turto rūšių reikia sudaryti investicijų portfelį, Markovičius supaprastino iki dviejų matmenų. Dėl to, šis portfelio optimizavimo metodas dažnai vadinamas vidurkio-dispersijų (angl. *mean-variance,* toliau – MV) metodu. Portfelis laikomas MV optimaliu, jei, esant tam tiktam fiksuotam vidutiniam pajamingumui, minimizuojama rizika, arba, esant tam tikrai fiksuotai rizikai, maksimizuojama tikėtina grąža.

[5] Daugiau nei prieš 10 metų iki H. Markovičius paskelbė savo „Portfelio teoriją“, italų matematikas ir ekonomistas Bruno de Finetti savo darbe „Il problema dei Pieni“ (1941) pirmasis pritaikė vidurkio-dispersijos metodą spręsdamas draudimo portfelio problemą.

Kai skolintų vertybinių popierių pardavimai nedraudžiami (t. y. nėra $w_i \geq 0$ ribojimo), funkcijos apribojimai yra tiesiniai ir optimizavimo uždavinys gali būti išspręstas analitiškai Lagranžo daugiklių metodu (Merton, 1972; Fabozzi *et al.*, 2007). Tai reiškia, kad kai $\boldsymbol{\mu}$ ir $\boldsymbol{\Sigma}$ yra žinomi, portfelio optimalius svorius galime apskaičiuoti naudodami formulę:

$$w = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\mu, \tag{1.2}$$

čia γ – rizikos vengimo koeficientas.

Optimalių portfelių aibė, sudaryta atsižvelgiant į skirtingą investuotojų rizikos vengimo koeficientą, vadinama efektyviųjų portfelių kraštu arba frontu. Optimalių arba efektyvių portfelių kraštą galima atvaizduoti naudojant dvimatį grafiką, kurio vertikalioje ašyje yra vaizduojama portfelio tikėtina grąža, o horizontalioje ašyje – portfelio rizika. Kai skolintų vertybinių popierių pardavimai neleidžiami, efektyvusis, t. y. ant efektyvumo krašto esantis portfelis randamas išsprendus kvadratinio programavimo uždavinį, o siekiant rasti visą efektyvumo kraštą nuo portfelio pasižyminčio mažiausia dispersija iki portfelio pasižyminčio maksimalia tikėtina grąža – parametrizuoti kvadratinio programavimo uždaviniai sprendžiami kiekvienam efektyvumo kreivės taškui.

Analitinis portfelio problemos sprendimas padeda geriau suprasti portfelio riziką lemiančius veiksnius, taip pat leidžia šiuos veiksnius išskaidyti į atskiras sudedamąsias dalis. Gautas rezultatas atspindi du pamatinius modernios finansų valdymo teorijos dalykus: optimalaus rizikos ir grąžos santykio svarbą ir diversifikavimo naudą. Mažesnė portfelio rizika pasiekiama mažinat portfelį sudarančių vertybinių popierių koreliacijas, t. y. parenkant kuo mažiau tarpusavyje susijusius vertybinius popierius, arba didinant vertybinių popierių skaičių. Kad geriau suprastume vertybinių popierių skaičiaus poveikį, tarkime, kad visos portfelio pozicijos turi vienodą riziką ir vienodą tarpusavio koreliaciją. Tuomet portfelio rizika yra lygi:

$$\sigma_P = \sigma\sqrt{\frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\rho}, \tag{1.3}$$

čia N – vertybinių popierių skaičius, σ - vidutinis vertybinių popierių standartinis nuokrypis, ρ – vidutinė vertybinių popierių tarpusavio koreliacija. Tuomet, augant vertybinių popierių skaičiui N, portfelio rizika artėja prie $\sigma\sqrt{\rho}$. Pvz., kai σ lygi 20 proc. ir ρ lygi 0,10 vertybinių popierių portfelio rizika yra lygi 6,3 proc., N išaugus iki 100, portfelio rizika sumažėja iki 2,0 proc. Atitinkamai portfelio rizika mažėja ir mažėjant vertybinių popierių tarpusavio koreliacijai. Kai portfelis visiškai diversifikuotas, didesnė grąža gali būti pasiekta, tik priimant didesnę riziką.

Analitinis portfelio sprendimas atskleidžia ir MV modelio trūkumus. Praktikoje $\boldsymbol{\mu}$ ir $\boldsymbol{\Sigma}$ nėra žinomi ir naudojant MV optimizavimo metodą optimalus investicijų portfelis paprastai nustatomas dviem etapais. Pirmame etape, naudojat praėjusių laikotarpių duomenis, gaunami vidurkių $\hat{\mu}$ ir kovariacijų $\hat{\Sigma}$ įverčiai:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t , \tag{1.4}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left(R_t - \hat{\mu}\right)\left(R_t - \hat{\mu}\right)^T , \tag{1.5}$$

čia R_t – vertybinių popierių grąžų vektorius.

Vėliau, gautieji statistiniai įverčiai naudojami MV modelyje, lyg jie būtų žinomi tikrieji parametrai, ignoruojant paklaidų riziką. Tačiau šis parametrų įverčių tiesioginio „įdėjimo“ (angl. *plug-in*) principas nepasižymi gerais rezultatais naudojant modelį už duomenų imties ribų (angl. *out-of-sample*), t. y. *ex post* MV portfeliai nepasižymi nei geru investicijų išskaidymu, nei stabilumu.

MV portfelis yra *ex ante* optimalus, kai įvesties parametrai yra „žinomi“. Kadangi „tikrųjų“ parametrų praktikoje nežinome, o naudojami jų įverčiai dažniausiai pervertina „tikrąsias“ reikšmes arba jų tinkamai neįvertina, „optimizuotas“ portfelis gali būti daug blogesnis nei neoptimizuotas portfelis, sudarytas taikant „naivius“ rizikos išskaidymo metodus, pvz., lėšas portfelyje paskirstant vienodomis dalimis. Naudodami momentų įverčius MV portfeliams sudaryti susiduriame su įverčių rizika, kurios šaltinis yra skirtumai tarp įverčių ir tikrųjų parametrų reikšmių. Todėl optimizuodami portfelį jau turime ne vieną, o du rizikos šaltinius: i) rinkų ir vertybinių popierių kainų nepastovumo riziką; ii) įverčių, arba klaidingų lūkesčių, riziką. Parametrų įverčių rizikos neigiama įtaka MV portfelio optimizavimui yra gerai ištyrinėta ir aprašyta. Naudojant MV optimizavimo metodą, neproporcingai dideli svorių koeficientai priskiriami vertybiniams popieriams, turintiems didelį laukiamą pajamingumą, mažą koreliaciją bei mažą dispersiją, ir neproporcingai maži svorių koeficientai priskiriami vertybiniams popieriams, turintiems žemą laukiamą pelningumą, teigiamą koreliaciją ir didelę dispersiją. Toks svorių paskirstymas yra suprantamas, tačiau labiausiai tikėtina, kad būtent šių vertybinių popierių įverčių paklaidos bus didžiausios. Tai reiškia, kad kuo didesnė statistinių įverčių paklaida, tuo didesnę įtaką jie daro „optimizuoto“ portfelio svoriams. Dėl šios priežasties MV optimizavimą Michaud įvardijo kaip įverčių paklaidų maksimizavimą (Michaud 1989). Net ir nedidelės įverčių paklaidos gali turėti didelę įtaką portfelio svoriams. Taip yra todėl, kad portfelyje esantys vertybiniai popieriai dažnai pasižymi panašia koreliacija ir yra artimi substitutai, todėl net nedideli grąžų pokyčiai gali lemti ženklius portfelio svorių pokyčius (Kritzman, 2006).

Ypač smarkiai turto pasiskirstymą portfelyje veikia laukiamos grąžos įverčių paklaidos (Merton 1980). MV portfelis ypač jautrus grąžos pokyčiams, kai draudžiami skolintų vertybinių popierių pardavimai – net labai nedidelis vieno vertybinio popieriaus grąžos vidurkio padidėjimas gali lemti, kad didelė dalis vertybinių popierių bus „išstumti“ iš portfelio (Best, Grauer 1991). Chopra ir Ziemba (1993), tyrinėdami vidurkių, dispersijų ir kovariacijų įverčių paklaidų santykinę įtaką MV portfeliams, nustatė, kad vidurkių paklaidos iki dešimt kartų reikšmingesnės nei dispersijų paklaidos, o dispersijų paklaidos iki dviejų kartų reikšmingesnės nei kovariacijų paklaidos. Atsižvelgiant į šiuos tyrimų rezultatus, smarkiai išaugo susidomėjimas minimalios dispersijos portfeliais, kuriems optimizuoti nereikalinga tikėtinų grąžų prognozė, o užtenka tik kovariacinės matricos. Deja, minimalios dispersijos portfeliai taip pat neišvengia didelės vertybinių popierių, pasižyminčių nedidele dispersija, koncentracijos (Clarke *et al.* 2011). Be to, paskatinti atsitiktinių matricų teorijos (angl. *random matrix theory*) atradimų, naujausi empiriniai finansinių grąžų tyrimai parodė, kad gaunamos grąžų kovariacinės matricos yra tiek „triukšmingos“, kad jų struktūra iš esmės gali būti laikoma atsitiktine.

Antras svarbus MV modelio trūkumas yra tas, kad teigiami nuokrypiai nuo grąžos vidurkio yra „baudžiami“ lygiai taip pat kaip ir neigiami, t. y. rizika auga vienodai tiek gaunant pelną, tiek ir patiriant nuostolius. Dar viena MV modelio problema – aukštesniųjų statistinių momentų ignoravimas. MV modelis vertina tik pirmuosius statistiniu skirstinio momentus, t. y. vidurkį ir dispersiją (arba kvadratinį nuokrypį), tačiau tyrimai rodo, kad investuotojai vertina ir aukštesniuosius statistinius momentus, pirmenybę teikdami teigiamai asimetrijai, t. y. didesniems teigiamiems nuokrypiams ir mažesniam (nei normaliojo skirstinio) ekscesui, t. y. investuotojams nepatinka nei ekstremalūs neigiami, nei teigiami nuokrypiai. Finansinių grąžų sekų empiriniai tyrimai patvirtina, kad grąžos pasižymi tiek asimetrija, tiek ekscesu, t. y. sunkiais kraštais.

1.2.1. Portfelių svorių ribojimas

Pats paprasčiausias galimas sprendimas siekiant išvengti nesubalansuotų arba „kraštinių“ portfelių – riboti maksimalius portfelio pozicijų svorių koeficientus (Frost, Savarino 1988; Jagannathan, Ma 2003). Natūralu, kad ribojant maksimalius svorius, užkertamas kelias nelogiškai didelei akcijų koncentracijai ir užtikrinamas geresnis rizikos išskaidymas, tačiau svorių apribojimas taip pat reiškia, kad mažiau remiamasi optimizavimo rezultatais ir rinkos „signalais“, o daugiau – „naiviu“ rizikos valdymu. Griežti svorių ribojimai, praktiškai visiškai apibrėžia portfelio sudėtį, „nepalikdami laisvės“ optimizavimo algoritmams. Todėl svorių ribojimas dažnai kritikuojamas kaip nesistemingas *ad hoc* sprendimas.

Teoriškai portfelio svorių ribojimas reiškia, kad *ex ante* portfelio rezultatai visuomet bus blogesni, bet praktikoje svorių ribojimas dažnai lemia geresnius *ex post* portfelio rezultatus – mažesnį kintamumą ir nuostolių riziką (Gupta, Eichhorn 1998). Be to, daugelis institucinių investuotojų yra įstatymais įpareigoti riboti maksimalias portfelių pozicijas, taip siekiant išvengti rizikos susijusios su didele vertybinių popierių koncentracija.

Atliktos studijos taip pat rodo, kad esant tam tikroms sąlygoms, svorių ribojimai atitinka Bajeso kovariacinių matricų ar tikėtinų grąžų „sutraukimo“ metodą.

1.2.2. Bajeso metodas ir sutraukiantys įvertiniai

Bajeso metodo panaudojimas sudarant ir valdant investicijų portfelius yra svarbus dėl dviejų priežasčių: šis metodas leidžia investuotojams įvertinti grąžą generuojančio proceso parametrų neapibrėžtumą ir panaudoti turimą išankstinę (apriorinę) informaciją ar subjektyvias nuostatas.

Stein (1956) pirmasis pastebėjo, kad daugiamačių normaliųjų skirstinių paslinktieji statistiniai įvertiniai dažnai lemia geresnius parametrų įverčius, nei nepaslinktieji įvertiniai. Stein nustatė, kad kintamojo X, priklausančio N-mačiui skirstiniui, kai N≥3, su kovariacine matrica **Σ**, kai X ∈ (**μ**, **Σ**), imties vidurkis $\hat{\mu}$ nėra geriausias populiacijos tikrojo vidurkio μ įvertinys, vertinant pagal kvadratinę nuostolio funkciją:

$$L(\mu,\hat{\mu}) = (\mu-\hat{\mu})'\Sigma^{-1}(\mu-\hat{\mu})\,. \tag{1.6}$$

James-Stein (1961) pasiūlytas sutraukiantysis statistinis įvertinys

$$\hat{\mu}_{JS} = \delta\mu_0 + (1-\delta)\hat{\mu}\,, \tag{1.7}$$

pasižymi mažesniu kvadratiniu nuostoliu nei imties vidurkis:

$$\delta = \min\left(1, \frac{N-2/T}{(\hat{\mu}-\mu_o)'\Sigma^{-1}(\hat{\mu}-\mu_o)}\right), \tag{1.8}$$

čia T – stebėjimų skaičius, μ_0 – sutraukimo arba poslinkio tikslas, δ – sutraukimo intensyvumas. James-Stein įvertinys vadinamas sutraukiančiuoju (angl. *shrinkage estimator*), kadangi imties vidurkis $\hat{\mu}$ dauginamas iš poslinkio koeficiento $(1-\delta)$, kuris yra $0 \le \delta \le 1$, t. y. imties vidurkis „sutraukiamas“ į bendrą konstantą, kuri dažniausiai prilyginama visų kintamųjų bendram vidurkiui (sutraukimo tikslas iš esmės gali būti net ne vienarūšių imčių vidurkis – šis faktas žinomas kaip Stein‘o paradoksas). Įvertinys sumažina vienalaikių arba skerspjūvio (angl. *cross-section*) duomenų vidurkių galimas ekstremalias įverčių paklaidas ir bendrą įverčių variaciją, taip visiškai kompensuodamas dėl šališko poslinkio atsirandančius paklaidas.

Įverčio sutraukimas faktiškai reiškia skirtingų įverčių suvidurkinimą. Sutraukiantįjį įvertinį paprastai sudaro trys komponentai: a) įvertinys, neturintis struktūros arba turintis „silpną“ struktūrą, kaip pvz. imties vidurkis; b) įvertinys turintis struktūrą (sutraukimo tikslą) ir c) sutraukimo intensyvumo koeficientas. Parenkant sutraukimo (poslinkio) tikslą, atsižvelgiama į du reikalavimus. Pirma, jis turi turėti nedaug laisvųjų parametrų, t. y. turėti struktūrą ir būti atsparus aplinkos trikdžiams (angl. *robust*). Antra, jis turėtų turėti bendrų savybių su vertinamu nežinomu dydžiu. Sutraukimo intensyvumas gali būti nustatomas remiantis teorinėmis savybėmis ar empiriniais tyrimais.

Finansinėje literatūroje plačiausiai žinomi Jorion (1985, 1986) ir Ledoit ir Wolf (2003, 2004) sutraukiantieji įvertiniai.

Remdamasis Stein ir James-Stein sutraukiančiųjų įvertinių metodu, Jorion pasiūlė vertybinių popierių grąžų vektorių paslinkti link minimalios dispersijos portfelio (MVP) grąžos, t. y.

$$\hat{\mu}_J = \delta\mu_{MVP} + (1-\delta)\hat{\mu}\,, \tag{1.9}$$

čia

$$\mu_{MVP} = \frac{\mathbf{1}\Sigma^{-1}\hat{\mu}}{\mathbf{1}\Sigma^{-1}\iota}\,, \tag{1.10}$$

ir

$$\delta = \frac{N+2}{N+2+T(\hat{\mu}-\mu_{MPV})'\Sigma^{-1}(\hat{\mu}-\mu_{MPV})}\,. \tag{1.11}$$

Jorion savo pasirinktą metodą argumentavo tuo, kad nustatant MV portfelio svorius nereikalinga grąžos prognozė, o pakanka tik empirinės kovariacijų matricos, pasižyminčios santykinai mažesnėmis paklaidomis.

Atlikęs empirinius metodo tyrimus Jorion konstatavo, kad sutraukiantieji įvertiniai gerokai pranašesni už paprastus statistinius įvertinius, tačiau Grauer ir Hakansson (1995) savo studijoje pastebėjo, kad portfelio strategijos, grindžiamos

Bajeso-Stein ir James-Stein įvertiniais yra tik šiek tiek geresnės nei strategijos grindžiamos vidurkių, gautų naudojant praėjusių laikotarpių duomenis, įvertiniais.

Kitą šios problemos sprendimo būdą pasiūlė Ledoit ir Wolf (2003, 2004). Pareiškę, kad dėl gaunamų didelių įverčių paklaidų nederėtų iš akcijų grąžų imties gaunamą kovariacinę matricą Σ naudoti portfeliams optimizuoti, mokslininkai, vietoje jos, pasiūlė naudoti kovariacinę matricą, „paslinktą link“ struktūrizuotos kovariacinės matricos, gautos naudojant plačiai žinomą V. Šarpo kapitalo įkainojimo modelį (angl. – *capital asset pricing model,* toliau CAPM). Pagrindinis jų argumentas yra tas, kad struktūrizuota kovariacinė matrica **F**, gaunama naudojant V. Šarpo supaprastintąjį vieno veiksnio (t. y. rinkos modelį) modelį, turi gerokai mažiau parametrų ir todėl gali būti apskaičiuota su gerokai mažesne paklaida. Jų pasiūlyta sutraukta kovariacinė matrica $\Sigma_{LW(F)}$ gaunama taip:

$$\Sigma_{LW(F)} = \delta\boldsymbol{F} + (1-\delta)\Sigma, \tag{1.12}$$

čia – δ optimali sutraukiančioji konstanta (angl. *shrinkage constant*), gaunama minimizuojant Σ vidutinę kvadratinę paklaidą. Naudojant struktūrizuotą kovariacinę matricą sumažėja įverčio paklaida, tačiau atsiranda modelio specifikavimo arba „neteisingo“ modelio paklaida (jei pasirinktas modelis neatitinka ar blogai atitinka tikrovę). Kaip dar vieną struktūrizuotos kovariacinės matricos alternatyvą, Ledoit and Wolf siūlė taikyti vienodos koreliacijos modelį, kuriame visos vertybinių popierių porinės koreliacijos pakeičiamos vienoda koreliacija, lygia vertybinių popierių koreliacijų vidurkiui (Ledoit, Wolf 2004):

$$\Sigma_{LW(CC)} = \delta\Sigma_{CC} + (1-\delta)\Sigma. \tag{1.13}$$

Vienodos koreliacijos kovariacinė matrica Σ_{CC} gaunama taip: pirmiausiai imties kovariacinė matrica išskaidomą į koreliacinę matricą **C** ir istrižainines matricas Λ ir Λ', kurių elementai Σ_{CC} yra lygus grąžų dispersijoms

$$\Sigma = \Lambda C \Lambda', \tag{1.14}$$

o po to, koreliacijos matricos porinių koreliacijų elementai ρ_{ij} pakeičiami visos imties koreliacijų vidurkiu, t. y.

$$C_{CC} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho} & \cdots & \hat{\rho} \\ \hat{\rho} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \hat{\rho} \\ \hat{\rho} & \cdots & \hat{\rho} & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.15}$$

čia $\hat{\rho}$ yra lygi:

$$\hat{\rho} = \frac{2}{(N-1)N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \rho_{ij} \, . \tag{1.16}$$

Pasak Ledoit ir Wolf, rezultatai gauti naudojant pastovių koreliacijų matricą mažai skiriasi nuo rezultatų naudojant vieno veiksnio kapitalo įkainojimo modelio kovariacijų matricą, o apskaičiuoti vienodų kovariacijų (koreliacijų) matricą yra gerokai paprasčiau. Galiausi, kaip dar vieną alternatyvą, vietoje koreliacijų matricos Ledoit ir Wolf pasiūlė naudoti vienetinę matricą.

DeMiguel *et al*. (2009b), išplėtę savo ankstesnę studiją (DeMiguel, Garlappi, Uppal 2009a) ir „peržaidę“ MV optimizavimu pagrįstų strategijų „varžytuves“, pripažino Ledoit ir Wolf metodo pranašumą, lyginat šį metodą su 1/N strategija.

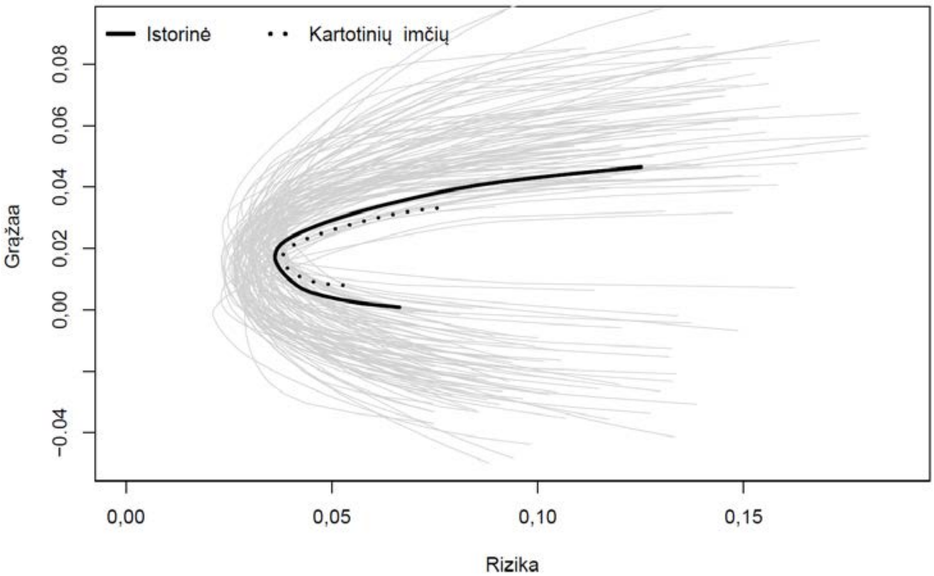
Bajeso metodą, kuris derina apriorinę rinkos pusiausvyros modelių ir statistinių praėjusių laikotarpių imties duomenų informaciją siūlė taikyti įvairūs autoriai (Pastor, Stambaugh 2000; Pastor 2000). Kadangi skirtinga apriorinė informacija lemia skirtingus aposteriorinius grąžų skirstinius Pastor ir Stambaugh nagrinėjo tris pusiausviros modelius: plačiausiai žinomą V. Šarpo vieno veiksnio kapitalo įkainojimo modelį, G. Fama ir K. French (1992) trijų veiksnių modelį, tai pat mažiau žinomą Daniel-Titman (1997) bendrovių charakteristikomis paremtą modelį.

1.2.3. Kartotinių imčių metodas

Optimizuojant investicijų portfelį naudoti kartotinų imčių metodą pirmasis pasiūlė Jorion (1992). Michaud (1998) iškėlė idėją, kad efektyviųjų portfelių riba turėtų būti traktuojama ne kaip griežtai apibrėžta ir nekintanti, o kaip neapibrėžta ir tam tikrose ribose kintanti kreivė. Kaip vieną iš galimų būdų patikimesniam kreivės įverčiui gauti, Michaud pasiūlė naudoti kartotinių imčių metodą.

Remiantis Michaud pasiūlytu metodu, kartotinių imčių efektyviųjų portfelių, t. y. portfelių esančių ant efektyvumo ribos, aibė gaunama taip: a) nauja grąžų duomenų imtis gaunama naudojant istorinių grąžų sekų statistiškai apskaičiuotus vidurkių ir kovariacijų parametrų įverčius (paprastai naudojamus sudarant klasikinio MV metodo efektyviųjų portfelių aibę); b) apskaičiuojame naujai gautos imties vidurkių ir kovariacijų parametrus ir jų pagrindu sudarome naują

MV efektyvių portfelių aibę, t. y. efektyvumo ribos kreivę, užtikrinančią mažiausią dispersiją esant nustatytam tikėtinos grąžos ribojimui; c) a ir b žingsnį kartojame tol, kol gauname pakankamą naujai sugeneruotų efektyvių portfelių kreivių aibę (griežtos taisyklės, kiek kartotinių imčių reikia atrinkti Michaud nenurodė: dažniausiai daroma 200, 500 ar 1000 kartotinų imčių); d) kartotinų imčių efektyviųjų portfelių kreivė gaunama vidurkinant kartotinos atrankos metu gautus portfelių svorio koeficientus (1.2 pav.).



1.2 pav. Kartotinų imčių efektyvumo kreivė
Fig. 1.2. The resampled efficient frontier

Metodo teorinis pagrįstumas ir jo praktinė nauda nėra visiškai aiški – gaunamų maksimalių portfelio reikšmių vidurkis nėra maksimali portfelių vidurkių reikšmė, t. y. kartotinių imčių „efektyvūs“ (optimalūs) portfeliai iš tiesų yra suboptimalūs. Scherer (2002, 2006) pastebėjo, kad naudodami kartotinių imčių metodą galime gauti žemyn įgaubtą efektyvumo kreivę. Nors Wolf (2004) pripažino, kad kartotinių imčių metodu gaunama kovariacinė matrica iš tiesų yra „geresnė“ nei empirinė, tačiau, pasak šio autoriaus, ji nėra geresnė, už „paslinktą“ kovariacinę matricą. Liechty *at al*. (2008) taip pat patvirtino, kad Bajeso metodas yra pranašesnis nei kartotinių imčių metodas. Michaud kartotinių imčių metodą užpatentavo (patento Nr. 6 003 018) ir pradėjo naudoti savo įmonės siūlomose komerciniuose sprendimuose (Northfield optimizavimo pakete). Įrodinėdami savo metodo pranašumą Michaud ir Michaud (2008) remiasi net paties H.

Markovičiaus autoritetu, kuris kartą yra pripažinęs, kad Michaud kartotinių imčių metodas yra pranašesnis nei klasikinis MV metodas (Markowitz, Usmen 2003).

1.2.4. Black-Litterman modelis

Skirtingai nei naudojant kartotinių imčių metodą, kuomet „triukšmingų“ parametrų įverčių problema sprendžiama „triukšmu“ papildant ir pačią efektyviųjų portfelių ribą, Black ir Litterman (1991, 1992) pasiūlytas modelis remiasi Bajeso metodu, kai jungdami pusiausvyros rinkos portfelio tikėtinų grąžų vektorių $\mathbf{\Pi}$ su investuotojo subjektyviu tikėtinų grąžų vektoriumi $\mathbf{Q}$ gauname naują tikėtinų grąžų „mišinį“, t. y. aposteriorinį skirstinį. Black ir Litterman (BL) modelio idėja pakankamai paprasta. Pasak modelio autorių, investuotojo portfelio sudėtį lemia du veiksniai: numanomas rinkos pusiausvyros portfelis, kurį, pasinaudoję rinkos svoriais, gauname atvirkštinio optimizavimo metodu; ir investuotojo subjektyvus požiūris (angl. *view*) arba nuomonė apie būsimą investicijų grąžą. Portfelio svoriai gauti naudojant H. Markovičiaus modelį investuotojams gali būti mažai reikšmingi, ypač kai investuotojai turi savo išankstinę nuomonę apie atskirų vertybinių popierių būsimas grąžas. Kai investuotojas pasitiki savo prognozėmis, jo investicijų portfelis turėtų ženkliai skirtis nuo rinkos pusiausvyros portfelio. Jei investuotojas neturi savo nuomonės, arba, jei jo nuomonė nėra tvirta, jis turėtų rinktis rinkos (arba jam labai artimą) portfelį.

Numanoma tikėtina pusiausvyroje esančios rinkos grąža $\mathbf{\Pi}$ gali būti gaunama dviem būdais: naudojant klasikinį kapitalo įkainojimo modelį:

$$\mathrm{E(R)} = r_f + \beta r_m + \varepsilon, \tag{1.17}$$

arba „atvirkštinio“ optimizavimo būdu, naudojant vertybinių popierių rinkos svorius $\mathbf{w}$, kovariacinę matricą $\mathbf{\Sigma}$ ir rizikos vengimo koeficientą δ, t. y. imdami investuotojo kvadratinę naudingumo funkciją

$$U = w^T \Pi - \left(\frac{\delta}{2}\right) w^T \Sigma w\,, \tag{1.18}$$

ir jos pirmąją išvestinę prilygindami 0

$$\frac{dU}{dw} = \Pi - \delta \Sigma w = 0\,, \tag{1.19}$$

galiausiai randame **Π**, t. y. ieškomą svorių vektorių

$$\Pi = \delta\Sigma w\,. \tag{1.20}$$

Rinkos rizikos vengimo koeficientas δ gali būti traktuojamas kaip perteklinės (angl. *excess*) rinkos portfelio grąžos ir šio portfelio dispersijos santykis, t. y. apskaičiuojamas naudojant istorinius duomenis pagal formulę:

$$\delta = \frac{E(r)-r_f}{\sigma^2}, \tag{1.21}$$

čia E(R) – rinkos portfelio grąža; r_f – nerizikingų vertybinių popierių grąža, σ^2 – rinkos portfelio dispersija.

Savo subjektyvias prognozes investuotojai gali išreikšti absoliučiu (pvz. akcijos A laukiama grąža 5 proc.) arba santykiniu (pvz. akcijos B grąža viršys akcijos C grąža 1 proc.) dydžiu. Absoliutūs vertinimai paprastai naudojami rečiau. Investuotojai taip pat gali nurodyti pasitikėjimo savo išreikštu vertinimu laipsnį:

$$Q = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Omega = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}, \tag{1.22}$$

čia Q yra n x 1 – grąžų prognozės matrica, P – sąsajos matrica.

BL modelis (1.20 ir 1.21 formulės) apjungia rinkos pusiausvyros grąžą su investuotojų požiūriu į laukiamas grąžas ir jų patikimumą. Gaunamą apostiorinį grąžų vektorių galima naudoti optimizuojant investicinius portfelius. Pilną skaitinį BL metodikos pritaikymo pavyzdį galima rasti Peleg 2014 (psl. 301–331).

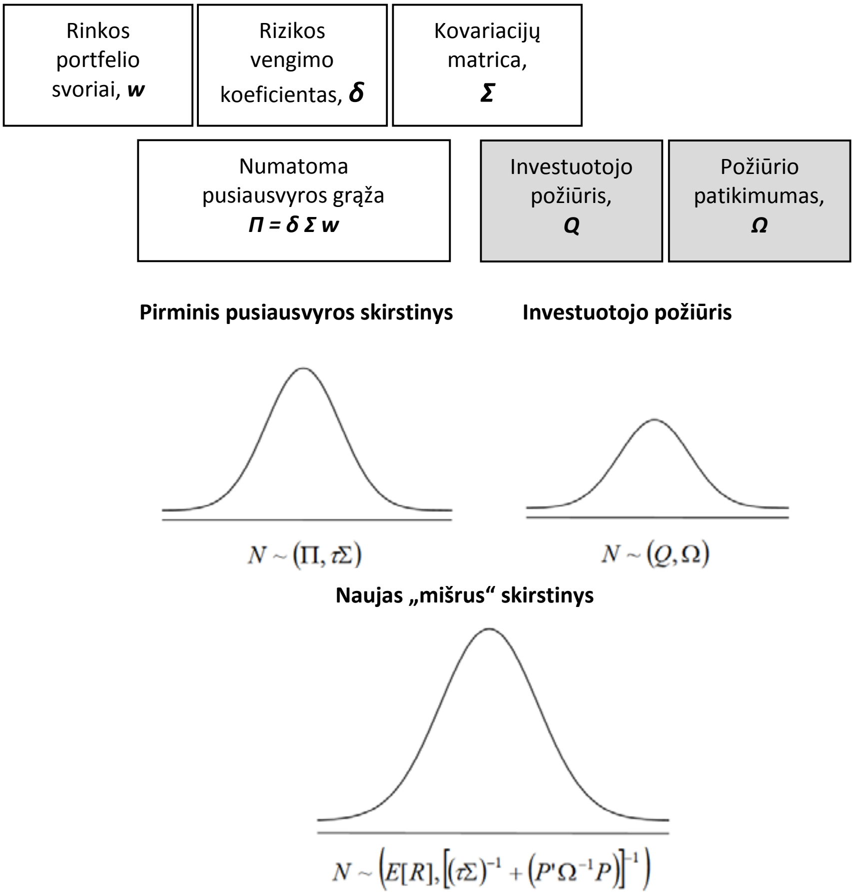
$$\mu_{BL} = \left[\left(\tau\Sigma\right)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[\left(\tau\Sigma\right)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q\right], \tag{1.23}$$

$$\mu_{BL} = \Pi + \Sigma P^T\left[\frac{\Omega}{\tau} + P^T\Omega P\right]^T (Q - P\Pi)\,. \tag{1.24}$$

Black ir Litterman savo darbe nepateikė konkretaus rinkos pusiausvyros ir investuotojo subjektyvių prognozių svorių santykio skaičiavimo metodo, tik abstrakčiai nurodė, kad šis santykis priklauso nuo dviejų parametrų: konstantos τ ir investuotojo subjektyvaus vertinimo neapibrėžtumo **Ω**. Vėlesni įvairių autorių bandymai išaiškinti BL modelį puikiai iliustruoja šį neapibrėžtumą: „Intuityvus Black-Litterman portfelio suvokimas“ (“The intuition behind the Black-Litterman model portfolios” (He & Litterman, 1999), „Black Litterman modelio demistikavimas“ (“The demystification of the Black Litterman model”, Satchell

& Scowcroft, 2000), „Black Litterman modelis: žingsnis po žingsnio“ (“A step-by-step guide to the Black-Litterman model”, Idzorek, 2004).

Nuomonės dėl modelyje naudojamos konstantos τ reikšmės taip pat išsiskiria: Black ir Litterman nuomone τ reikšmė turėtų būti artima 0, Satchell ir Scowcroft mano, kad ši reikšmė turėtų būti artima 1.



1.3 pav. Black-Litterman modelis
Fig. 1.3. Black-Litterman model
Šatinis: Idzorek, 2004

Lyginant su įprastu tiesioginio parametrų įdėjimo metodu, BL modelis, bent jau teoriškai, turi akivaizdžių privalumų: investuotojui nebereikia pateiki prognozių kiekvienai portfelio pozicijai – užtenka prognozuoti tik tas pozicijas, dėl kurių jis turi savo nuomonę. Prognozė gali būti santykinė – tokia prognozė yra paprastesnė ir natūralesnė. Kaip vienas iš didžiausių BL modelio privalumų, dažnai pabrėžiama modelio galimybė panaudoti, ne vien tik prognozę, tačiau ir pasitikėjimo šia prognoze laipsnį. Ši savybė neabejotinai suteikia modeliui universalumą, tačiau modelis turi ir savų trūkumų. Modelio parametrų gavimo metodologija nėra labai aiški; investuotojai privalo nurodyti net tik grąžų prognozes, tačiau ir jų patikimumą (priklausomai nuo vertinančiojo požiūrio, tai gali būti laikoma ir metodo privalumu, ir jo trūkumu), tačiau neabejotinai didžiausias metodo trūkumas – įprasta normaliojo grąžų skirstinio prielaida (Giacometti *et al*. 2006).

1.3. Rizika grindžiami portfelių sudarymo būdai

Nepaisant to, kad kovariacinės matricos įverčių reguliarizavimo, Bajeso, kartotinių imčių ir panašūs metodai pagerina MV optimizavimo rezultatus, investicijų valdytojai dažnai renkasi paprastesnius problemos sprendimo būdus, tokius kaip portfelio svorių ribojimai ar panašūs. Rizikos ribojimu grindžiamos portfelio strategijos – dar viena supaprastintų portfelio optimizavimo strategijų grupė. Šių strategijų populiarumą lėmė vertybinių popierių grąžų prognozavimo sudėtingumas – minėtoms strategijoms įgyvendinti grąžų prognozės nėra reikalingos.

Šie optimizavimo būdai kartais priskiriami euristiniams metodams. Taikomojoje matematikoje euristiniais paprastai vadinami tokie algoritmai, kurių pagalba randami apytiksliai sprendimai, tikėtinai mažai besiskiriantys nuo optimalių sprendimų. Euristiniai algoritmai paprastai pasitelkiami sprendžiant uždavinius turinčius sudėtingas tikslo funkcijas ir (ar) ribojimus, kai šių uždavinių visiškai neįmanoma išspręsti arba neįmanoma išspręsti per priimtiną laiką, naudojant įprastus (tiksliuosius) algoritmus. Kalbant apie investicijų portfelio sudarymą ir optimizavimą terminas „euristiniai optimizavimo metodai“ dažnai naudojamas gerokai platesne ir mažiau griežta matematine prasme, apimančia įvairias vertybinių popierių portfelio sudarymo taisykles, paprastai neparemtas klasikiniu MV optimizavimo algoritmu. Tokių strategijų pavyzdžiai, toliau aprašytos rizikos ribojimu paremtos minimalios rizikos, vienodų svorių, vienodos rizikos, vienodos koreliacijos ir panašios portfelio sudarymo strategijos.

1.3.1. Minimalios rizikos portfelis

Netikslios grąžų prognozės lemia tai, kad grąžų įverčiai ženkliai skiriasi nuo tikrųjų reikšmių. Ženklios įverčių paklaidos lemia neoptimalią portfelio sudėtį ir prastus už imties ribų gaunamus portfelio rezultatus. Minimalios dispersijos portfelio (angl. *minimum variance portfolios*, toliau MVP) sudėtį lemia tik grąžų kovariacijų matrica, kurią prognozuoti galima daug tiksliau nei tikėtiną investicijų grąžą. Pasirinkdami mažiausios dispersijos portfelį sumažiname įverčių riziką, o tuo pačiu ir portfelio riziką. Žinodami kovariacijų matricą **Σ,** MVP randame išsprendę tokį optimizavimo uždavinį:

$$\begin{gathered} \min \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1. \end{gathered} \tag{1.25}$$

Kai yra leidžiami skolintų vertybinių popierių akcijų pardavimai, t. y. leidžiama parduoti skolintas akcijas, MVP svorių vektorių $\mathbf{w}_{MV}$ galime rasti analitiškai pagal formulę:

$$w_{MV} = \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1}\mathbf{1}}. \tag{1.26}$$

MVP strategija tampa pakankamai populiari tarp investuotojų, ypač finansinių krizių metu. MVP strategijos populiarumą lemia ne vien tik mažas šios strategijos rizikingumas, tačiau ir santykinai didelis pajamingumas. Nors CAPM teigia, kad siekiant didesnės grąžos neišvengiama ir didesnė rizika, studijos rodo, kad naudojant MVP strategiją gaunami santykinai didesni pajamingumo rodikliai. Šis fenomenas žinomas kaip „mažo kintamumo anomalija“ (Baker, Bradley ir Wurgler 2011; Clarke, Silva ir Thorley 2011).

Nepaisant paminėtų MVP strategijos privalumų, vien tik rizikos minimizavimas, nenustatant jokių siektinos grąžos tikslų, vargu ar yra priimtinas daugumai investuotojų. Galiausiai, minimizuoti riziką galima naudojant gerokai paprastesnes investicijų strategijas, pavyzdžiui, investuojant į nerizikingus vyriausybės vertybinius popierius.

1.3.2. Vienodų svorių portfelis

Vienodų svorių, arba tiesiog 1/N portfelis (kai portfelį sudarančių akcijų yra N, kiekvieno jų svoris yra lygus 1/N) dažnai yra naudojamas kaip kontrolinis portfelis, lyginant įvairias portfelių optimizavimo strategijas. Studijos parodė, kad naivieji 1/N portfeliai, dažnai pranoksta MV atžvilgiu optimizuotus portfelius, kai strategijų rezultatai vertinami naudojant duomenis, nepatenkančius į optimizavimui naudotą duomenų imtį (DeMiguel, Garlappi ir Uppal, 2009a; Duchin ir Levy 2009).

Ypač svarbus yra DeMiguel, Garlappi ir Uppal atliktas tyrimas: jie įvertino 14 portfelio optimizavimo modelių panaudodami 7 skirtingus duomenų rinkinius ir nustatė, kad nei vienas iš 14 modelių nesugebėjo sistemingai aplenkti 1/N strategijos. Jų išvadoje skelbiama, kad MV paremtos optimizavimo strategijos dar turi būti gerokai tobulinamos, kad jų skelbtas pranašumas iš tiesų būtų realizuotas už imties ribų. Nors vėlesniame savo darbe DeMiguel *at al.* (2009b) pripažino Ledoit ir Wolf metodo pranašumą, 1/N strategija ir toliau išlieka mėgstamu „etalonu“ su kurio lyginami įvairūs portfelių optimizavimo būdai.

1/N strategija priskiriama rizikos ribojamu grindžiamų portfelio strategijų grupei, iš tiesų nėra tokia jau „naivi“. Ji atitinka „priešinimosi rinkos tendencijai“ strategijų grupei, kurių principas vertybinius popierius parduoti kainoms kylant, t. y. brangiai ir pirkti kainoms krentant, t. y. pigiai. Akcijų kainoms augant, auga jų lyginamasis svoris portfelyje, kainoms krintant – svoris krenta, todėl norint išlaikyti vienodus svorius portfelio sudėtis turi būti nuolat perskirstoma brangiai parduodant „laimėtojus“ ir pigiai perkant „pralaimėtojus“.

Natūralu, kad 1/N strategija nesiremia bendrovių ar rinkos duomenimis, tačiau priklauso nuo to, iš kokios vertybinių popierių imties sudaromas portfelis. 1/N portfelis yra optimalus tuo atveju, jei neturime visiškai jokios pirminės informacijos apie vertybinius popierius (kalbant Bajeso terminais, kai turime neinformatyvų apriorinį skirstinį). Tikriausiai nei viena strategija niekuomet nebus 100 proc. geriausia, tačiau galime pagrįstai tikėtis, kad remdamiesi apie vertybinius popierius turimais kokybiniais bei kiekybiniais duomenimis ir optimizavimo metodais, galime gauti geresnius rezultatus, nei naudodami 1/N strategiją, kuri nesiremia visiškai jokiais duomenimis.

1.3.3. Vienodos rizikos portfelis

Kaip alternatyvą minimalios dispersijos ir vienodų svorių metodams Maillard, Roncalli, ir Teiletche (2010) pasiūlė vienodos rizikos (angl. *equal risk contribution*) principą kitaip dar vadinamą rizikos pariteto (angl. *risk parity*) principu (Qian, 2005, 2006). Šio metodo esmė portfelio vertybinių popierių svorius paskirstyti taip, kad kiekvieno komponento *ex-ante* rizika būtų vienoda. Todėl rizikos pariteto portfelį tam tikra prasme taip pat galime pavadinti vienodų svorių portfeliu, tačiau šiuo atveju, svorių koeficientai priklauso nuo vertybinių popierių rizikos, o ne nuo pinigų sumos, investuotos į kiekvieną iš vertybinių popierių. Skirtingai nei kitos MV metodo modifikacijos, rizikos pariteto metodu siekiama išvengti rizikos koncentracijos.

Įgyvendinant rizikos pariteto metodą, turime žinoti du dalykus: bendrą portfelio riziką ir kiekvieno vertybinio popieriaus „indėlį“ į bendrą portfelio riziką arba ribinę riziką (angl. *marginal risk contribution*). Bendrai portfelio rizikai išmatuoti Maillard, Roncalli ir Teiletche naudojo įprastą standartinį nuokrypį, t. y. $\sigma_P = [\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}]^{1/2}$, tačiau gali būti naudojami ir kiti rizikos matai, pvz. VaR. Vertybinio popieriaus $\boldsymbol{x_i}$ ribinę rizikos poziciją (MRC) vertybinių popierių portfelyje galima apibrėžti kaip:

$$MRC_i = \partial w_i \sigma_P = \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_i}, \tag{1.27}$$

o bendrą rizikos poziciją („indėlį“, TRC) kaip:

$$TRC_i = w_i \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_i}. \tag{1.28}$$

Tokiu būdu, bendra portfelio rizika išskaidoma į atskirus „rizikos komponentus“ arba pozicijas:

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{N} TRC_i . \tag{1.29}$$

Vienodos rizikos portfelio svorius galime rasti naudojant nuosekliojo kvadratinio programavimo (angl. *sequential quadratic programming*) algoritmą optimizuojant žemiau pateiktą funkciją su įprastais svorių ribojimais:

$$\begin{gathered} \min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(w_i \left(\sum w \right)_i - w_j \left(\sum w \right)_j \right)^2, \\ \mathbf{1}^T w = 1, \\ 0 \le \mathrm{w} \le 1. \end{gathered} \tag{1.30}$$

Maillard, Roncalli ir Teiletche (2010) savo atliktoje studijoje teigia, kad vienodos rizikos portfeliai pagal savo rizikingumą užimą vietą tarp minimalios dispersijos ir vienodų svorių portfelių, t. y.

$$\sigma_{MV} \le \sigma_{ERC} \le \sigma_{1/N} . \tag{1.31}$$

Be to, vienodos rizikos portfeliams, kaip ir vienodų svorių ar minimalios rizikos portfeliams, nereikalinga grąžų prognozė, kurią gauti yra sudėtinga. Rizikos pariteto metodai dažniausiai kritikuojami, dėl rizikai matuoti naudojamo standartinio nuokrypio (Inker 2010). Pasak kritikų, rizikai matuoti turėtų būti naudojamas ne standartinis nuokrypis, o koks nors alternatyvus rizikos matas įvertinantis neigiamą riziką.

Choueifaty ir Coignard (2008) pasiūlė maksimaliai diversifikuoto portfelio (angl. *most diversified portfolio*, toliau MDP) idėją. Sudarant maksimaliai diversifikuotą portfelį naudojamas rizikos išskaidymo matas, vadinamas diversifikavimo rodikliu (angl. *diversification ratio*, toliau DR), kuris apskaičiuojamas pagal formulę:

$$DR = \frac{\sum_{j=1}^{N} w_i \sigma_i}{\sigma_P} = \frac{w^T \boldsymbol{\sigma}}{\left[w^T \Sigma w\right]^{1/2}}, \tag{1.32}$$

t. y. diversifikavimo rodiklis apibrėžiamas kaip portfelį sudarančių vertybinių popierių standartinių nuokrypių svertinio vidurkio ir portfelio standartinio nuokrypio santykis. Kitais žodžiais tariant, DR santykio skaitiklis – portfelio rizika gaunama neatsižvelgiant į portfelio pozicijų tarpusavio koreliaciją. Pagal apibrėžimą investicijų portfelio, sudaryto iš vieno vertybinio popieriaus DR lygus 1, o bendru atveju, kai vertybinių popierių skaičiaus yra didesnis nei vienetas DR ≥ 1.

Maksimaliai diversifikuotas portfelis gaunamas maksimizuojant DR arba DR logaritmą, t. y.:

$$\begin{gathered} \max \ln(\mathrm{DR(w)}), \\ \mathbf{1}^T w = 1, \\ 0 \le \mathrm{w} \le 1. \end{gathered} \tag{1.33}$$

Maksimaliai diversifikuoti portfeliai gali būti patrauklūs investuotojams, norintiems maksimaliai išskaidyti savo investicijas ir sumažinti riziką. Maksimaliai išnaudojant rizikos išskaidymo galimybes, toks portfelis potencialiai gali gerokai sumažinti netekimų riziką rinkos nuosmukio laikotarpiais.

1.4. Nuostolių rizikos matai ir omega rodiklis

Be jau paminėtos įverčių patikimumo problemos, dar vienas svarbus MV teorijos trūkumas yra tas, kad MV naudojamas rizikos matas dispersija iš tiesų neatspindi to, kaip investuotojai realiai suvokia ir vertina riziką. Be jokios abejonės rizikos suvokimas yra labai subjektyvus dalykas, tačiau dominuojantis užsienio ir Lietuvos mokslininkų požiūris yra, kad rizika pirmiausia susijusi su nuostolių arba netekčių tikimybe (Rutkauskas, Stasytytė 2011). ISO 31000:2009 standarte pateikiamas rizikos, kaip netikrumo poveikio tikslams, apibrėžimas, nors ir yra platus, tačiau gerai apibrėžia rizikos esmę.

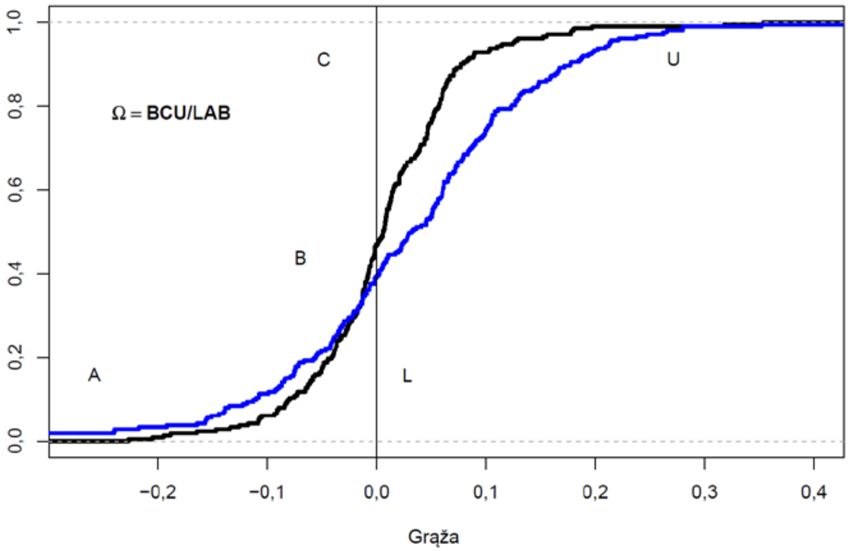
Teoriniai neigiamos arba nuostolių rizikos matų panaudojimo galimybių tyrimai prasidėjo kartu su klasikinės portfelio teorijos atsiradimu – A. Rojus (Andrew D. Roy) pasiūlė portfelio sudarymo koncepciją, paremtą principu „pirmiausia-saugumas“, kurios esmė – portfelio pozicijoms taikyti tokius apribojimus, kurie sumažintų tikimybę, kad pelnas per ateinantį laikotarpį bus mažesnis už iš anksto nustatytą kritinį lygį (Roy 1952). H. Markovičius savo pamatiniuose portfelio valdymo darbuose svarstė galimybę naudoti dalinę variaciją kaip neigiamos rizikos matą.

Investicijų valdymo bendrovė JP Morgan 1994 metais viešai paskelbė savo rizikos valdymo sistemą, paremtą rizikos vertės (angl. *value at risk,* toliau VaR) koncepcija. Rizikos vertė yra didžiausias tikėtinas nuostolis per tam tikrą laikotarpį esant tam tikram patikimumo lygmeniui. Bazelio bankų priežiūros komitetui 2004 metais patvirtinus naują bankų kapitalo pakankamumo skaičiavimo metodiką, rizikos vertė tapo sektoriaus standartu. Nepaisant to, dėl ženklių savo trūkumų, šis matas nėra plačiai naudojamas optimizuojant investicijų portfelius. Artzner, et al. (1999) įrodė, kad VaR rizikos matas gali netenkinti dviejų koherentinio (ang. *coherent*) mato savybių – subadityvumumo ir monotoniškumo jei kintamojo skirstinys nepriklauso elipsinių skirstinių šeimai. Rizikos mato suderinamumas yra svarbus dėl kelių priežasčių: subadityvumumo ir monotoniškumo savybės garantuoja globaliai optimalaus sprendimo egzistavimą. Subadityvumo savybės nebuvimas reiškia, kad dviejų investicijų bendra VaR rizika gali būti didesnė už jų atskirai paimtą VaR riziką, t. y. diversifikuojant portfelį VaR išaugtų. Be jau išvardintų trūkumų, VaR neįvertina galimo netikėtinų nuostolių dydžio, t. y. neįvertina rizikos peržengiančios VaR lygį, situacijos dažnai pasitaikančios kylant neįprastam rinkų kintamumui.

Rockafellar ir Uryasev (2000) pasiūlė naudoti alternatyvų procentilinį rizikos matą – sąlyginę rizikos vertę (angl. *conditional value-at-risk,* sutrumpintai CVaR), leidžiantį įvertinti nuostolius, kai šie peržengia VaR ribą. Sąlyginė rizikos vertė tenkina koherentinio mato savybes (Pflug 2000) ir todėl gali būti lengvai optimizuojama. Efektyviųjų portfelių kreivė gaunama imant skirtingas tikėtinos grąžos reikšmes ir minimizuojant CVaR. Kai grąžų skirstiniai yra normalieji, CVaR ir VaR matai yra ekvivalentūs Rockafellar ir Uryasev (2002).

Maksimalaus praradimo matą pirmieji pasiūlė Grossman ir Zhou (1993). Maksimalus praradimas (angl. *maximum drawdown*) apibrėžiamas kaip portfelio arba pozicijos didžiausios ir mažiausios vertės skirtumas susidaręs per pasirinktą laikotarpį. Kadangi praėjusio laikotarpio maksimalaus praradimo vertė priklauso nuo tik nuo kainų kritimo vieno taškinio įverčio, šis matas nėra labai patogus kai norime palyginti skirtingų laikotarpių rezultatus, gautus naudojant skirtingas portfelių sudarymo strategijas. Gerokai praktiškesnis praradimų matas – praradimų skirstinys esant tam tikram patikimumo lygmeniui žinomas kaip sąlyginė praradimų vertė (angl. *conditional drawdown-at-risk,* sutrumpintai CDaR). Portfelio optimizavimo būdus naudojant sąlyginę praradimų vertę ištyrė ir pasiūlė Chekhlov, Uryasev ir Zabarankin (2005).

Keating ir Shadwick (2002a, 2002b) pasiūlė investicijų rezultatų vertinimo metodą paremtą klasikiniu grąžos-netekimų principu – omega rodiklį. Šis rodiklis – tai tikimybės, kad grąža viršys pasirinktą slenkstinį dydį ir tikimybės, kad grąža bus mažesnė už pasirinktą slenkstinį dydį santykis. Didesnis omega rodiklis reiškia geresnį investicijų rezultatą. Skirtingai nei plačiai naudojamas V. Šarpo rodiklis, kuris įvertina tik du pirmuosius skirstinio statistinius momentus, omega rodiklis įvertina visą tikimybinį skirstinį ir todėl leidžia objektyviai įvertinti rezultatus ir tais atvejais, kai grąžos pasižymi asimetrija.



1.4 pav. Grąžų skirstiniai ir omega funkcija
Fig. 1.4. Distribution of returns and the omega function

Tolydiniu atveju Keating ir Shadwick omega rodiklis užrašomas taip:

$$\Omega(\tau) = \frac{\int_{\tau}^{R_{\max}} \left(1 - F(x)\right) dx}{\int_{R_{\min}}^{\tau} F(x) dx}, \tag{1.34}$$

čia τ– slenkstinė grąžos vertė; R_{min} ir R_{max} – atitinkamai grąžų sekos mažiausia ir didžiausia reikšmės. Kai τ reikšmė artimesnė R_{min} reikšmei, BCU plotas yra didesnis nei LAB plotas ir omega reikšmė yra didelė, ir atvirkščiai (1.4 pav.). Skaičiuojant omega rodiklį atsižvelgiama į slenkstinį grąžos lygį, kurio atžvilgiu rezultatas bus vertinamas kaip pelnas ar nuostolis, taigi jei τ vertinsime kaip investuotojo reikalaujamą grąžos normą, omega rodiklis parodo, kiek rezultatas viršijo investuotojo lūkesčius. Atitinkamai didesnis omega rodiklis reiškia geresnį veiklos rezultatą – didesnę grąžą.

Turint tikimybinius skirstinius arba scenarijus, omega rodiklis gali būti apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\Omega(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^{T} \max(0, r-\tau) * p}{\sum_{t=1}^{T} \max(0, \tau-r) * p}, \qquad (1.35)$$

čia max(.) yra maksimizavimo operatorius, išrenkantis didesnę (nulinę) vertę tais atvejais, kai grąža yra mažesnė nei slenkstinė, t. y. kai r>τ, p – įvykio ar scenarijaus realizacijos tikimybė.

Praktikoje, naudojant empirinius duomenis omega rodiklis paprastai apskaičiuojamas pagal formulę:

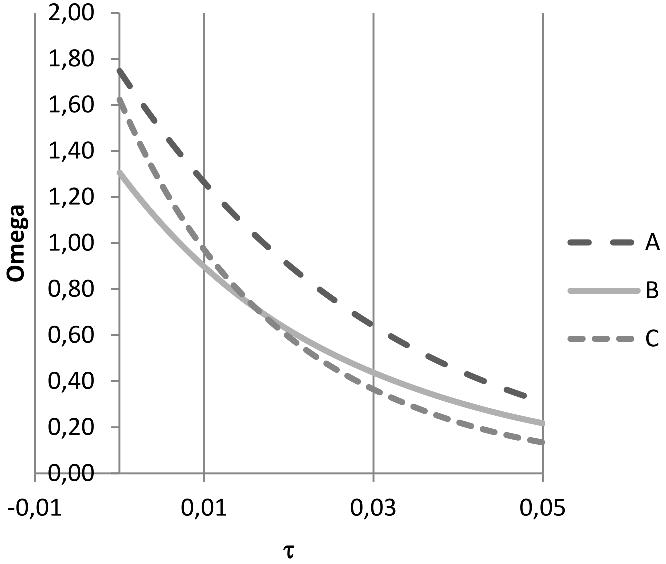
$$\Omega(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^{T} \max(0, r-\tau)}{\sum_{t=1}^{T} \max(0, \tau-r)}. \qquad (1.36)$$

Nors Keating ir Shadwick omegą pristatė kaip „universalų efektyvumo matą“, kuris visiškai charakterizuoja grąžos skirstinį, bei yra intuityvus, lengvai suprantamas ir apskaičiuojamas, tačiau netrukus patys pripažino, kad norint gauti išsamią informaciją apie grąžos – rizikos skirstinį, omega funkcija turėtų būti vertinama ne viename slenkstinės grąžos taške τ, tačiau imant visą jų spektrą. Vėliau autorių pozicija tapo dar kritiškesnė: pasak jų „tik viename taške įvertinta funkcija gali būti visiškai klaidinanti“. Nors omega funkcijos įverčio gauto viename slenkstinės grąžas taške interpretacija – „daugiau yra geriau“ – yra išties labai paprasta, tačiau interpretuoti įverčius gautus slenkstinės grąžos intervalo ribose anaiptol nėra taip paprasta.

Omega funkcija yra griežtai mažėjanti: kai τ yra mažesnė už skirstinio vidurkį μx, omega reikšmė didesnė už vienetą (t. y., **Ω**>1, kai τ< μx); kai τ yra didesnė už skirstinio vidurkį μx, omega reikšmė mažesnė už vienetą (t. y., **Ω**<1, kai τ > μx) ir yra lygi vienetui, kai τ = μx. Intuityviai suprantama, kad kuo didesnė slenkstinė grąža, tuo mažesnė galimybė ją pasiekti ir todėl augant slenksčiui, omega reikšmė artėja prie 0.

Investicijos rizikingumas priklauso nuo visos omega funkcijos (kreivės) charakteristikos: kuo statesnė kreivė, tuo mažesnė rizika, t. y. mažesnė „ekstremalių“ grąžos pokyčių tikimybė, o kuo kreivė plokštesnė – tuo didesnė rezultatų sklaida ir rizika.

1.5 paveiksle pateiktos trijų bendrovių akcijų omega kreivės kai slenkstinė grąža kinta nuo 0 proc. iki 5 proc. Iš paveikslo matyti, kad akcija A yra patrauklesnė už akciją B ir C nepriklausomai pasirinkto slenksčio, tačiau akcijos B patrauklumas lyginant ją su akcija C priklausys nuo to, kokią ribinę grąžą pasirinksime. Dėl šios priežasties, vertinti akcijos patrauklumą tik pagal vieną pasirinktą slenkstinę reikšmę yra pavojinga – vertinti reikia visame intervale.



1.5 pav. A, B, C bendrovių omega funkcijos kreivės
Fig. 1.5. Omega plots for investments A, B and C

Nepaisant Keating ir Shadwick perspėjimų apie galimus omega rodiklio trūkumus, naudojant investicijų „taškinius“ šios funkcijos įverčius, mokslinėje literatūroje slenkstinės ribos pasirinkimo problema sistemingai nebuvo analizuojama, dažnai tiesiog pripažįstant, kad nėra aišku, kaip ši riba turėtų būti nustatyta, arba bendrai nurodant, kad slenkstinė riba turėtų būti nustatoma priklausomai nuo kiekvieno investuotojo rizikos-grąžos preferencijų (Avouyi-Dovi *et al*. 2004, Mausser *et al*. 2006).

Nors nėra aišku, kaip turėtų būti nustatyta slenkstinė grąžos norma, daugelis omega rodiklio savybes tyrusių autorių pripažįsta, kad omega rodiklis yra labai jautrus slenkstinės grąžos τ pokyčiams (Sharma, Mehra 2015; Sharma *at al*. 2016).

Dar vienas svarbus tačiau iki šiol neatsakytas klausimas, ar omega rodiklis, kuris iš tiesų yra pirmųjų apatinio ir viršutinio dalinių momentų santykis gali būti sėkmingai naudojamas investuotojų rizikos tolerancijai išreikšti ir investiciniams portfeliams optimizuoti.

Skirtingai nei kiti nuostolių ar asimetrinės rizikos matai, omega rodiklis – tai pirmojo laipsnio viršutinio ir apatinio dalinių momentų santykis. Pirmasis laipsnis reiškia, kad investuotojo preferencija teigiamų ir neigiamų nuokrypių nuo siektinos ar slenkstinės grąžos yra simetriška (Farinelli, Tibiletti 2008), todėl, iš pirmo žvilgsnio, omega rodiklio naudojimas rizikai vertinti ar investicijų portfeliams optimizuoti gali atrodyti paradoksaliai: juk nepageidaujami neigiami nukrypimai turi būti „griežtai baudžiami“, o pageidaujami teigiami turi būti skatinami. Tačiau, pirmųjų dalinių laipsnių rodiklis iš tiesų gali turėti kelis privalumus. Pirma, nors nuostolių vengimas dažnai prilyginamas rizikos vengimui, tačiau šios dvi sąvokos nebūtinai yra tapačios. D. Kahneman ir A. Tversky (1979) pasiūlydami perspektyvos teoriją (angl. p*rospect theory*) iškėlė hipotezę, kad vengdami nuostolių investuotojai yra linkę daugiau rizikuoti nuostolių srityje ir mažiau rizikuoti pelno srityje. Tokia išvada atrodo netikėta, tačiau ji paaiškina investuotojų elgseną, kai šie pernelyg greitai parduoda brangstančius vertybinius popierius, arba pernelyg ilgai laiko pingančius vertybinius popierius, taip patirdami vis didesnius nuostolius, tačiau tikėdami, kad kol nupigę vertybiniai popieriai neparduoti, nuostolis tik „popierinis“, ir jiems dar pavyks „atsilošti“.

Disertacijoje keliama hipotezė, kad Omega rodiklio pirmojo laipsnio dalinių momentų rodiklio visiškai pakanka įvertinti gražų asimetriškumui, o rizikos toleravimo preferencijas investuotojai gali išreikšti parinkdami jiems tinkamą slenkstinę grąžos normą. Disertacijos autoriaus nuomone, kontroliuoti riziką keičiant slenkstinę grąžos normą yra daug paprasčiau ir „natūraliau“, nei keičiant dalinių momentų laipsnius. Ši hipotezė bus tiriama antroje disertacijos dalyje.

1.5. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas

1. Mokslinėje literatūroje dažnai išreiškiama nuomonė, kad H. Markovičiaus portfelio teorija nėra pritaikoma praktikoje, iš tiesų nėra labai tiksli. H. Markovičiaus suformuluota ir vėliau J. Tobino bei V. Šarpo išplėtota portfelio teorija iš tiesų netvirtina, kad investuotojai turėtų stengtis „išsirinkti geriausius“ vertybinius popierius, tačiau priešingai, teigia, kad investuotojai turėtų investuoti į plačiai diversifikuotą vertybinių popierių portfelį, dažnai vadinamą rinkos portfeliu. Pasyviai valdomų investicinių fondų populiarumas ir valdomo turto dydis akivaizdai įrodo MV portfelio teorijos pritaikomumą.
2. Tačiau tenka pripažinti, kad bandymai H. Markovičiaus MV portfelio teoriją panaudoti aktyviam investicijų portfelio valdymui, akivaizdžiai nėra sėkmingi. H. Markovičiaus MV portfelio teorija, neįvertina parametrų neapibrėžtumo, todėl MV atžvilgiu optimizuoti portfeliai, priešingai nei teigia pati portfelio teorija, pasižymi didele vertybinių popierių koncentracija ir nedideliu stabilumu, kai net nežymiai pasikeitus modelio

kintamųjų parametrams, didžioji dalis esamų portfelio pozicijų pakeičiamos naujomis, mažai besiskiriančiomis nuo senųjų. Praktikoje, tai reiškia dideles apyvartos sąnaudas ir nedidelę strategijos grąžą. Sprendžiant klasikinio MV modelio problemas, siūloma riboti portfelio svorius, naudoti įvairius įverčių „sutraukimo“ ar reguliarizavimo metodus, kartotinių imčių metodus, ar net visai atsisakyti optimizavimo procedūrų ir remtis „naiviomis“ vienodų svorių, vienodos rizikos ar panašiomis strategijomis.

3. Be paminėtos įverčių patikimumo problemos, MV portfelio teorija rizikai vertinti naudoja dispersiją, kuri neįvertina finansinių laiko eilučių asimetriškumo, o taip pat vienodai vertina tiek neigiamą (netekimų) riziką tiek ir teigiamą (kapitalo pelno) riziką, nors elgsenos finansų teorijos ir daugelis empirinių tyrimų rodo, kad investuotojai riziką suvokia asimetriškai, didesnę reikšmę teikdami galimiems nuostoliams, nei galimam pelnui. MV teorijos naudojama dispersija neatitinka šiuolaikinio rizikos apibrėžimo, kuris riziką apibrėžia kaip netikrumo poveikį tikslams.
4. Nors vietoje dispersijos buvo pasiūlyta nemažai naujų rizikos matų, tokių kaip pusvariacijos, dalinių momentų, rizikos vertės, sąlyginės rizikos vertės, netekimų ir pan., tačiau kol kas nepavyko įrodyti šių matų pranašumo prieš tradicinį MV metodą. Naujus rizikos matus ir jais paremtus optimizavimo metodus dažnai „kamuoja“ tos pačios klasikinio MV modelio problemos: parametrų įverčių paklaidos ir menkas rezultatų stabilumas.

Remiantis atlikta mokslinės literatūros analize, buvo suformuluoti kokie disertacijos uždaviniai:

- Atlikti asimetrinių rizikos matų, naudojamų optimizuojant investicinius portfelius, teorinę ir praktinę analizę; nustatyti pagrindines savybes, kurias turėtų tenkinti portfelio optimizavimui naudojami rizikos matai, pasiūlyti portfelio optimizavimui tinkamą rizikos matą.
- Atlikti investuotojo tikslinės arba slenkstinės grąžos normos poveikio rizikos matams ir investicijų portfelio charakteristikoms sisteminę ir empirinę analizę.
- Nustatyti omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių rizikos, grąžos bei kitas skaitines charakteristikas kintant investuotojo slenkstinei grąžai.

2

Rizikos mato parinkimo teoriniai pagrindai

Šiuolaikinės investicinio arba finansinio portfelio teorijos disciplinos pradžia – tikėtino naudingumo teorija ir H. Markovičiaus MV portfelio teorija. Pirmoje dalyje išvardinti MV teorijos trūkumai paskatino mokslininkus vėl grįžti prie tikėtino naudingumo teorijos idėjų.

Norint išrinkti optimalų arba investuotojui „geriausią“ portfelį nepakanka vien galimų investicijų tikimybinės funkcijos ar skirstinio – koks portfelis yra „geriausias“ priklauso ir nuo investuotojo pirmenybių renkantis atsitiktinius skirstinius. Kitais žodžiais tariant, portfelio optimizavimo problema yra ne objektyvus, o subjektyvus dalykas, priklausantis nuo įvairių ekonominių, socialinių, psichologinių aplinkybių.

Portfelio sudarymas iš esmės yra klasikinis sprendimų priėmimo esant neapibrėžtumui uždavinys, kurį galima analizuoti remiantis tikėtino naudingumo teorija, stochastinio dominavimo teorija, taip pat panaudojant įvairius rizikos arba rezultatyvumo (rizikos-atlygio) matus.

Antroje darbo dalyje yra analizuojamas svarbus naudingumo teorijos ir portfelio teorijos ryšys, atliekama asimetrinių rizikos matų ir omega rodiklio savybių analizė bei pateikiamos teorinės bei praktinės prielaidos, kuriomis remiantis portfelio optimizavimui siūlomas naudoti pirmojo laipsnio apatinių ir viršutinių dalinių momentų arba Keating ir Shadwick (2002a, 2002b) omega rizikos matas.

Skyriaus tematika paskelbti trys autoriaus straipsniai (Vilkancas, 2014, Vilkancas 2014, Vilkancas 2016).

2.1. Asimetrinių rizikos matų analizė

Asimetrinio arba vienpusio rizikos mato idėja nėra nauja. Tuo pat metu, kai H. Markovičius paskelbė savo portfelio teorija, A. Rojus (Roy 1952) pasiūlė sudarant portfelius vadovautis principu „pirmiausia saugumas“, kurio esmė – portfelio pozicijoms taikyti apribojimus, kurie sumažintų tikimybę, kad pelnas per ateinantį laikotarpį bus mažesnis už kritinį lygį, nustatytą iš anksto. Išplėsdamas savo portfelio teoriją H. Markovičius pripažino dispersijos trūkumus ir kaip alternatyvą svarstė galimybę naudoti dalinę variaciją arba pusvariaciją (angl. *semivariance*) (Markowitz, 1959). Pasak H. Markovičiaus, pusvariacija yra geresnis rizikos matas, leidžiantis riboti vien tik nepageidaujamus nuostolius, skirtingai nei dispersija, kurią ribojant, mažinami tiek nepageidaujami neigiami, tiek ir pageidaujami teigiami nuokrypiai. Nors matematinis patogumas lėmė, kad Markovičius galiausiai pirmenybę atidavė dispersijai, tačiau alternatyvių rizikos matų paieška įgavo vis didesnį pagreitį.

Bendrąją neigiamos arba netekimų rizikos teoriją išplėtojo Bawa (1975) ir Fishburn (1977), kurie rizikai matuoti pasiūlė naudoti apatinį dalinį momentą (ang. *lower partial moment,* sutrumpintai LPM):

$$LPM_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^n F(x) dx . \tag{2.1}$$

Praktikoje, naudojant empirinius duomenis LPM apskaičiuojamas pagal formulę:

$$LPM_n(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \max\left[0, (\tau - x)^n\right] , \tag{2.2}$$

čia x – atsitiktinis dydis, t. y. investicijų grąža, f(.) – tikimybinio skirstinio funkcija, max(.) – maksimizavimo operatorius išrenkantis didesnę (nulinę) vertę tais atvejais, kai grąža yra mažesnė nei slenkstinė, t. y. kai $x<\tau$.

LPM pagalba nuostolių rizika aprašoma dviem parametrais: investuotojo tiksline arba slenkstine grąža τ, kurios atžvilgiu vertinamas santykinis nuostolingumas ir LPM laipsniu n, kurio pagalba išreiškiamas investuotojo rizikos toleravimas. Kuo aukštesnis LPM laipsnis, tuo investuotojas labiau vengia rizikos, t. y. neigiami nuokrypiai nuo siektinos grąžos „baudžiami griežčiau“. LPT matas leidžia aprašyti ne vien tik kvadratinę naudos funkciją, t. y. pusvariaciją, kuri yra specialus LPM atvejis kai n=2, o daugumą žinomų Dž. Noimano (John fon Neumann) ir O. Morgenšterno (Oscar Morgenstern) naudos funkcijų. LPM trūkumas, kurį savo darbe pripažino pats Fishburn (1977) yra tas, kad teigiami grąžos nuokrypiai vertinami tiesiškai, o tai reiškia, kad investuotojai tampa neutralūs rizikai, kai tik grąža viršija jų siektiną ribą. Dėl šio trūkumo, vėliau buvo smarkiai kritikuojama visa LPM teorija (Kaplan, Siegel 1994).

Vienas dažniausiai minimų neigiamos rizikos rodiklių yra Sortino rodiklis. Skaičiuojant Sortino rodiklį (Sortino, Van der Meer 1991), plačiai naudojamo Šarpo rodiklio vardiklyje esantis standartinis kvadratinis nuokrypis keičiamas žemesniuoju daliniu kvadratiniu nuokrypiu (t. y. antrojo laipsnio LPM) ir tokiu būdu iš bendrojo kintamumo išskiriant tik nepageidaujamą neigiamą kintamumą.

Nepaisant plačiai paplitusio požiūrio, kad ribojant nuostolių riziką, nors ir netiesiogiai, tačiau užtikrinamas teigiamos rizikos maksimizavimas, pagrindinis „nuostolių rizikos teorijos“ kritikos aspektas yra tas, kad šie metodai pernelyg koncentruojasi į netekimų vengimą ir mažai dėmesio skiria grąžos užtikrinimui (Avouyi-Dovi, Morin, Neto 2004). Natūralus šios problemos sprendimas – matai leidžiantys nepriklausomai modeliuoti investuotojų elgseną tiek neigiamų tiek ir teigiamų grąžos pokyčių atžvilgiu. Tokių matų buvo pasiūlyta nemažai: nusivylimo ir atlygio rodiklis (Dembo, Rosen 1999; Dembo, Mausser 2000), perviršio potencialo rodiklis (angl. *upside-potential ratio*, toliau UPR) (Sortino, Van der Meer, Plantinga 1999), Omega rodiklis (Shadwick, Keating 2002), Kappa rodiklis (Kaplan, Knowles 2004) ir kiti. Naudojant šios rodiklius vertinami ne tik neigiami, tačiau ir teigiami nuokrypiai arba perteklinė grąža, ir šie rodikliai leidžia išskirti investicijas pasižyminčias santykinai didele pertekline grąža tenkančia netekimų rizikos vienetui. Perteklinė grąža paprastai apibrėžiama kaip grąža viršijanti tikslinę grąža, arba kaip viršutinis dalinis momentas (angl. *upper partial moment*, toliau UPM), t. y. teigiamas nuokrypis nuo tikslinės grąžos τ

$$UPM_q(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \left(x-\tau\right)^q F\left(x\right) dx \,. \tag{2.3}$$

Farinelli-Tibiletti (2008) pasiūlė apibendrintą viršutinio ir apatinio dalinių momentų santykio rodiklį Φ, leidžiantį išreikšti įvairaus laipsnio investuotojų palankumą (nepalankumą) teigiamiems (neigiamiems) nuokrypiams:

$$\Phi_{\tau}^{p,q} = \frac{E[\{(x-\tau)^{+}\}^{p}]^{\frac{1}{p}}}{E[\{(\tau-x)^{-}\}^{q}]^{\frac{1}{q}}} = \frac{\sqrt[p]{UPM_p(\tau)}}{\sqrt[q]{LPM_q(\tau)}} \,. \tag{2.4}$$

Keičiant p ir q parametrus atitinkamai gauname skirtingus rizikos rodiklius:

kai p=1 ir q=2, gauname potencialios perteklinės grąžos rodiklį; kai p=q=1, gauname Omega rodiklį. Taigi Farinelli-Tibiletti Φ rodiklis leidžia lanksčiai išreikšti investuotojų teikiamą pirmenybę investicijų rizikos-grąžos santykiui.

2.2. Tikėtino naudingumo teorija ir rizikos matai

Tikėtino naudingumo teorijos (angl. *expected utility theory*) pradžia siejama su 1738 metais D. Bernulio (Daniel Bernoulli) aprašytu Sankt Peterburgo paradoksu – lošimu, turinčiu matematiškai begalinę tikėtiną vertę ir užtikrinančiu lošėjui laimėjimą, nesvarbu kokią kainą lošėjas mokėtų už teisę lošti. Pasiūlyta sprendimo esmė – mažėjantis ribinis išlošio (pinigų) naudingumas.

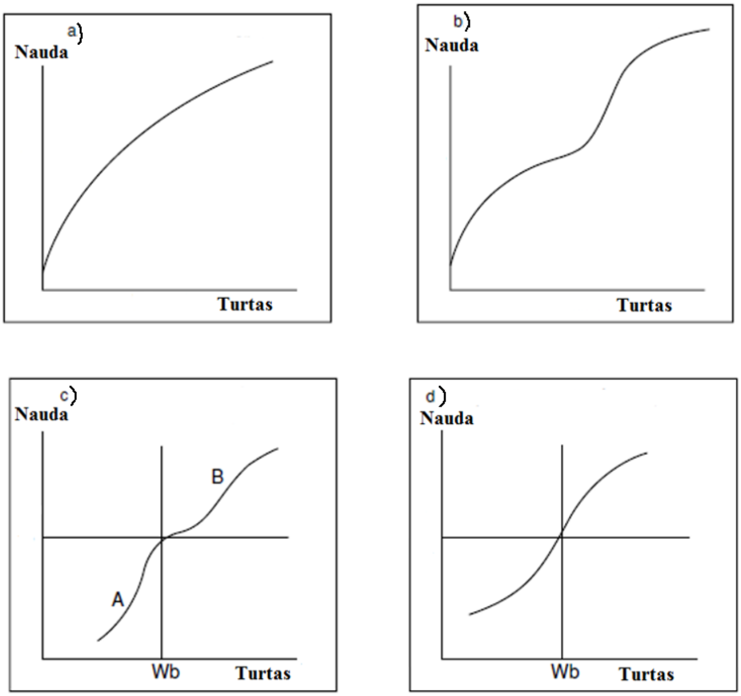
Dž. Noimanas ir O. Morgenšternas 1947 metais suformulavo keturias racionalaus elgesio aksiomas, užtikrinančias naudingumo funkcijos, galinčios išreikšti individo polinkį rizikuoti, egzistavimą. Pasak tikėtino naudingumo teorijos, priimdamas sprendimą agentas maksimizuoja tikėtino naudingumo funkciją, kuri yra lygi kiekvienos alternatyvos naudingumui U(.) padaugintam iš šios alternatyvos tikimybės p, t. y.:

$$EU = \sum_{i=1}^{N} p_i U(s_i)\,. \tag{2.5}$$

Naudingumo teorija naudotojų pirmenybes išreiškia naudingumo ir turto plokštumoje per naudingumo arba tiesiog naudos funkcijas. Rizikos apibrėžimas priklauso nuo konkrečios naudos funkcijos: pvz. MV atveju rizika apibrėžiama kaip dispersija, o grąžos-rizikos priklausomybė vaizduojama vidurkio-dispersijos plokštumoje. Dauguma klasikinių ekonominių ir finansinių modelių remiasi prielaida, kad investuotojų naudos funkcija yra išgaubta aukštyn (angl. *concave*), t. y. šios funkcijos pirmoji išvestinė yra teigiama, u‘>0, t. y. auganti, kas rodo investuotojų nepasitenkinimą, o antroji išvestinė neigiama, u‘‘<0, kas rodo mažėjantį turto ribinį naudingumą. Neigiama antroji išvestinė yra vienintelė būtinoji rizikos vengimo sąlyga (Arrow 1965, 1971; Pratt 1964).

Paprastai visi sutinka dėl to, kad naudos funkcija yra griežtai didėjanti, t. y. kad nauda auga, augant turtui, tačiau dėl mažėjančio ribinio naudingumo arba rizikos vengimo situacija nėra visiškai aiški.

Dar 1948 metais M. Friedmanas (M. Friedman) ir L. Sevidžas (L. Savage), tirdami žmonių elgseną, pastebėjo, kad, tam tikrame turto lygio segmente, žmonės pasižymi polinkiu rizikuoti (angl. *risk seeking*).



2.1 pav. Alternatyvios naudingumo-vertės funkcijos: a) rizikos vengimo naudingumo funkcija; b) Friedmano-Sevidžo naudingumo funkcija; c) Markovičiaus (atvirkštines S formos) naudingumo funkcija; d) Perspektyvos teorijos (S formos) naudingumo funkcija
Fig. 2.1. Alternative shapes of the utility/value function: a) Risk-averse utility function; b) Friedman-Savage utility function; c) Markowitz (reverse S shape) utility function; d) Prospect theory (S shape) utility function.
(šaltinis: Levy, H. 2006. Experimental economics and the theory of finance. *In Encyclopedia of Finance*, pp. 520–540, Springer US)

M. Friedmano ir L. Sevidžo iškeltą problemą pirmasis pabandė išspręsti H. Markovičius[6], pasiūlydamas atvirkštinės S formos naudingumo funkciją kurios forma kinta priklausomai nuo pasirinkto atskaitos taško, ir kuri yra įgaubta žemyn (angl. *concave*) pelno srityje, x>0, ir išgaubta aukštyn (angl. convex) nuostolių srityje, x<0. H. Markovičius taip pat iškėlė svarbią idėją, kad priimant sprendimus svarbus ne vien turto lygis, tačiau ir turto pokytis. D. Kahnemano (D. Kahneman) ir A. Tverskio (A. Tversky) 1979 metais pasiūlyta perspektyvos teorija remiasi

[6] H. Markovičiaus pasiūlyta funkcija yra pirmiausiai išgaubta žemyn, po to aukštyn, už atskaitos taško vėl žemyn ir galiausiai vėl aukštyn.

priešinga idėja, kad investuotojai rizikos vengia pelno srityje, tačiau rizikuoja nuostolių srityje, t. y. turi S – formos naudingumo funkciją. Tokią elgseną mokslininkai paaiškino psichologiniu mažėjančio jautrumo fenomenu, kai didėjant nuostoliams, jautrumas jiems ima mažėti. Tiek H. Markovičius, tiek ir D. Kahnemanas ir A. Tverskis savo darbuose naudojo nulinį atskaitos tašką, dalijantį pelną ir nuostolius. Ginčai dėl to, kuri iš teorijų, ar naudingumo funkcijų yra „teisingesnė“ tęsiasi, abi teorijos turi savo šalininkų (Levy, Levy 2002; Ortobelli *et al.* 2009).

Aprašyti ginčai dėl naudos funkcijos formos, lėmė logišką išvadą, kad dalis investuotojų gali būti nei rizikos vengiantys, nei jos siekiantys, t. y. rizikai neutralūs (Biglova *at al.* 2009; Ortobelli *at al.* 2009).

Sunkumai, su kuriais buvo susidurta bandant apibrėžti investuotojų naudingumo funkciją ar praktiškai pritaikyti tikėtino naudingumo teoriją, paskatino naujų rizikos matų paiešką. Naujieji rizikos matai, tokie kaip VaR ar CVaR, buvo kuriami siekiant geriau atspindėti empirines grąžų savybes (nenormalumą) ar investuotojų požiūrį į rizikos asimetriškumą (t. y. neigiamą rizikos „prigimtį“), tačiau dažnai nekreipiant dėmesio į tai, kiek jie atitinka naudingumo teorijos aksiomatiką ar investuotojų pasirinkimo pirmenybes. Nors šie rizikos matai gali būti statistiškai patrauklūs, atitikti Artzner *et al.* (1999) suformuluotas koherentiškumo savybes arba aksiomas (angl. – *coherency axioms*), tačiau kyla natūralus klausimas, kiek yra naudingi rizikos matai, kurie iš tiesų nematuoja arba neparodo rizikos, kurios investuotojai galėtų ar turėtų vengti (Nawrocki, Viole 2014).

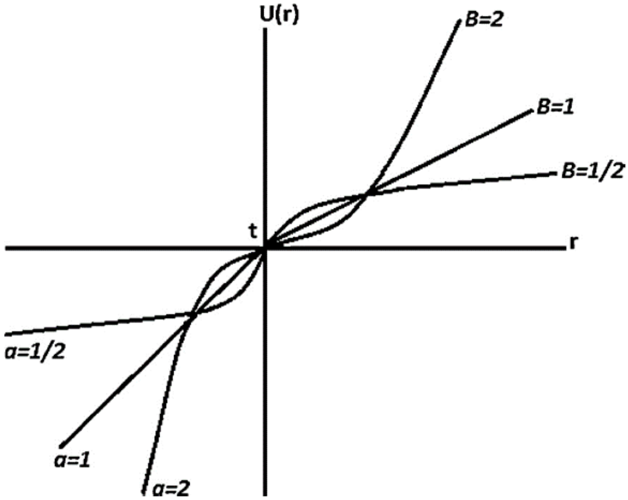
Atsižvelgiant į aukščiau išdėstytus argumentus, ypač „patraukliai“ atrodo aukštesnio ir žemesniojo dalinių momentų santykio – UPM/LPM „klasės“, arba Farinelli-Tibiletti (2008) $\Phi_{\tau}^{q,n}$ rizikos matai, kurie: i) nėra parametriniai ir įvertina visą grąžų tikimybinį skirstinį, ii) įvertina rizikos asimetriškumą, ir iii) yra suderinami su S – formos, atvirkštinės S – formos ir rizikai neutraliomis naudingumo funkcijomis.

UPM/LPM naudingumo funkciją arba a–b–t naudingumo modelį pirmasis pasiūlė Holthausen (1981) išplėsdamas Bawa (1975) ir Fishburn (1977) a-t arba apatinio dalinio momento naudingumo modelį. Pagal Holthausen modelį investuotojai gali būti apibudinami kaip rizikos vengiantys (a>1, b<1), rizikos siekiantys (a<1, b>1) arba rizikai abejingi (a=1, b=1), kaip vaizduojama 2.2 paveiksle.

S – formos UPM/LPM naudingumo funkcija:

$$U(x) = \left\{ \begin{array}{l} (x-\tau)^b, \text{ kai } x>\tau \\ -h(\tau - x)^a, \text{ kai } x \le \tau \end{array} \right\}, \tag{2.6}$$

čia h>1 konstanta, a – investuotojo rizikos vengimo (siekimo) laipsnis nuostolių srityje; b – investuotojo rizikos siekimo (vengimo) laipsnis pelno srityje; τ – slenkstinė grąžos norma.



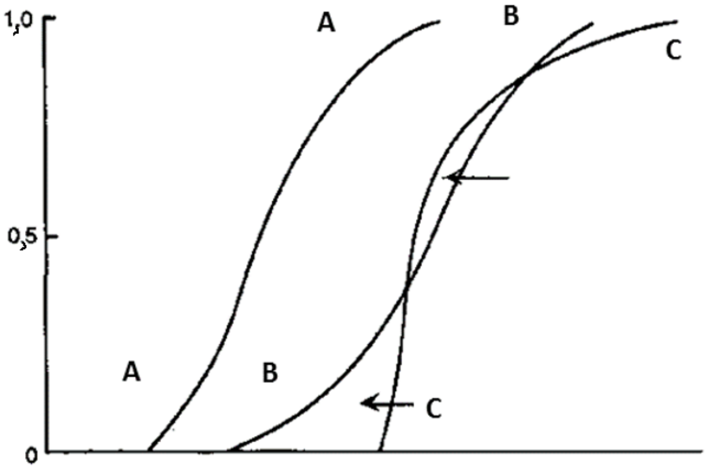
2.2 pav. Viršutinio ir apatinio dalinių momentų naudingumo funkcijų grafikai
Fig. 2.2. Plots of the upper and lower partial moment utility functions

Šiai rizikos matų klasei priklauso ir Keating ir Shadwick (2002a, 2002b) omega rodiklis, nors jis, dėl savo neutralumo rizikai, kai kurių autorių išskiriamas, kaip „netinkamas“ (su naudingumo teorija nesuderinamas) rizikos matas (Nawrocki, Viole 2014).

2.3. Stochastinio dominavimo kriterijus

Naudingumo teorija leidžia įvertinti investuotojų pirmenybes, kai žinoma investuotojo naudingumo funkcija ir jos parametrai. Naudingumo teorijos „naudingumą“ riboja tai, kad dažnai yra neaišku, kokia turėtų būti investuotojo naudingumo funkcija ar jos parametrai. Kaip ironiškai, tačiau taikliai pastebėjo J. Tobin – „verslininkai nebus „sužavėti“ pasiūlymu maksimizuoti subjektyvų naudingumą“. Vienas galimų sprendimų – stochastinio dominavimo (ang. *stochastic dominance*, toliau SD) kriterijus, kuris leidžia įvertinti investicijų patrauklumą arba investuotojų pirmenybes, nesiremiant prielaidomis apie grąžų skirstinius, ar investuotojų naudingumo funkcijos parametrus.

SD pagrindinė idėja, kad investuotojai pirmenybę teikia investicijos turinčios mažas neigiamų arba mažų grąžų ir dideles teigiamų arba didelių išmokų tikimybes. Praktikoje dažniausiai sutinkamos pirmojo ir antrojo laipsnio stochastinio dominavimo taisyklės (atitinkamai žymimos FSD ir SSD).



2.3 pav. Pirmojo ir antrojo laipsnio stochastinis dominavimas
Fig. 2.3. Stochastic dominance of first and second order

Turint dvi alternatyvas A ir B, kurių kiekvienos tikimybės apibrėžtos skirstinio funkcija CDF, B dominuoja A FSD prasme, tik tuomet jei B skirstinio funkcija visuomet yra žemiau ir dešiniau nei A skirstinio funkcija, t. y.:

$$F(z)dz \leq G(z)dz, \forall z \tag{2.7}$$

Kad būtų užtikrintas pirmos eilės SD, pakankama sąlyga yra didėjanti investuotojo naudos funkcija (U‘>0), t. y. kad investuotojas būtų „nepasitenkinęs“ (angl. *non-satiated*) ir pageidautų padidinti savo turimą turtą. Ši dominavimo savybė yra pakankamai akivaizdi, tačiau praktikoje retai pasitaikanti – pirmuoju laipsniu stochastiškai dominuojančios alternatyvos arba portfeliai paprastai reikštų arbitražo galimybę (Jarrow 1986). Antrojo laipsnio SD reiškia, kad investuotojas yra racionalus ir vengia rizikos – jo naudos funkcija yra didėjanti ir įgaubta, t. y. U‘(x)>0 ir U‘‘<0. F(z) dominuoja G(z) tuomet, kai (C alternatyva dominuoja B alternatyvą, 2.3 pav.):

$$\int_{-\infty}^{x} F(z)dz \leq \int_{-\infty}^{x} G(z)dz; \; \int_{-\infty}^{x} [G(z) - F(z)]dz \geq 0 \tag{2.8}$$

SD privalumas lyginant jį su rizikos-atlygio matais yra tas, kad naudojant SD kriterijų nereikia remtis supaprastintomis prielaidomis apie grąžų skirstinius, tai pat, vertinant alternatyvas naudojama visa skirstinio informacija, o ne vien tik jį apibendrinantys parametrai.

SD trūkumas – nustatyti dominuojančią alternatyvą nėra paprastas uždavinys. Populiacijos skirstinio kreivės gali dominuoti, tačiau imties ne, arba atvirkščiai. Siekiant nustatyti dominavimą naudojami įvairūs statistiniai testai McFadden (1989), Anderson (1996), Davidson ir Duclos (2000), Barrett ir Donald (2003), Linton, Maasoumi ir Whang (2003), Davidson (2008). Testai vienas nuo kito skiriasi pagal tai, kaip yra formuluojama nulinė hipotezė (ar keliama dominavimo, ar nedominavimo hipotezė); testo galimybėmis „dirbti“ su koreliuotomis imtimis (tai svarbus dalykas, kai dirbame su finansinėms laiko eilutėms) ir testo kritinių reikšmių nustatymo metodika. Antrojo laipsnio stochastinio dominavimo kriterijaus gali nepakakti galimų investicijų patrauklumui nustatyti, ir todėl gali tekti naudoti aukštesnio laipsnio dominavimo ar net papildomus subjektyvius investicijų „diskriminavimo“ kriterijus. Galiausiai net nedominuojantys vertybiniai popieriai gali būti naudingi formuojant investicijų portfelius. Investicinių portfelių formavimas leidžia išskaidyti ir taip sumažinti riziką ir šis rizikos išskaidymo poveikis gali būti stipresnis nei stochastinio dominavimo poveikis, todėl daugeliu atveju nedominuojantys vertybiniai popieriai neturėtų būti iškart atmesti kaip neperspektyvūs Post (2003) ir Kuosmanen (2004).

Kita, nemažesnė problema yra tai, kad nėra efektyvių algoritmų portfelio optimizavimo uždaviniams su stochastinio dominavimo ribojimais spręsti. Pirmojo laipsnio stochastinio dominavimo ribojimai reiškia, kad reikia spręsti neiškilaus mišraus-sveikojo skaičiaus netiesinio programavimo (angl. *non-convex MINLP*) uždavinį (Yang *at al.* 2010). Tokių uždavinių sprendimas pats savaime yra iššūkis mokslui.

Nepaisant paminėtų SD metodo trūkumų, didėjant skaičiavimo technikos pajėgumui ir optimizavimo algoritmų efektyvumui, tokių problemų sprendimas tampa įmanomas, pvz. naudojant pilno perrinkimo (angl. *full-scale optimization*) algoritmus (Hagströmer, Binner 2009; Adler, Kritzman 2007).

2.4. Asimetriniai rizikos matai ir slenkstinė grąža

Naudojant asimetrinius rizikos matus būtina pasirinkti tikslinę arba slenkstinę grąžą, kuri dažnai dar vadinama minimalia investuotojui priimtina grąža (angl. *minimum acceptable return,* sutrumpintai MAR). Slenkstinė grąža atlieka dvigubą vaidmenį: pirma, ji parodo investuotojo siekiamą grąžą, tačiau ji taip pat apibrėžia ir riziką – kuo didesnė slenkstinė grąža, tuo mažesnės galimybės ją pasiekti ir atitinkamai didesnė rizika. Slenkstinės grąžos norma yra svarbi vertinant investicinių priemonių ar fondų istorinių rezultatų patrauklumą, tačiau, be jokios abejonės, ji ypač svarbi renkantis būsimą investicijų portfelį, kadangi tiesiogiai įtakoja portfelio sudėtį ir galimas grąžos-rizikos charakteristikas. Paradoksalu, tačiau slenkstinės grąžos pasirinkimo problemai mokslinėje literatūroje iki šiol skirtas labai nedidelis dėmesys. Šį „fenomeną" dar 1989 metais savo studijoje pastebėjo Harlow ir Rao (1989), tačiau nuo to laiko situacija iš esmes mažai pasikeitė.

Harlow ir Rao (1989) savo darbe tyrė vidurkio-LPM rinkos pusiausviros modelį, V. Šarpo garsiojo kapitalo įkainojimo modelio (angl. *capital asset pricing model*, sutrumpintai CAPM) analogą, siekdami išsiaiškinti kaip gerai šis modelis gali paaiškinti rizikos-grąžos priklausomybę. Empiriniai tyrimai parodė, kad Harlow ir Rao tiriamas vidurkio-LPM modelis negali būti statistiškai atmestas, t. y. kad akcijų grąžų ir LPM priklausomybė yra statistiškai reikšminga. Savo darbe mokslininkai naudojo kintamą slenkstinę grąžą, leisdami jai kisti visoje istorinių duomenų srityje.

Kita teoriškai labai įdomi, tačiau praktikoje taip pat mažai dėmesio sulaukusi Bordley ir LiCalzi (2000) studija, kurioje autoriai, kaip alternatyvą naudingumo funkcijos maksimizavimui, siūlo maksimizuoti tikslo pasiekimo tikimybę, t. y. rinktis veiksmus ar alternatyvas, kurios maksimizuoja tikimybę pasiekti tikslą.

2.1 lentelė. Galimos išorinės slenkstinės grąžos reikšmės (sudaryta autoriaus)
Table 2.1. Plausible exogenous threshold variables (Source: created by the author)

Slenkstinė grąža	Ekonominis interpretavimas
0%	Nominalaus kapitalo išsaugojimas
Infliacijos lygis	Realaus kapitalo išsaugojimas
Nerizikinga grąža	Minimali alternatyvi kapitalo kaina
Rizikingos investicijos grąža	Alternatyvi kapitalo kaina
Rinkos (indekso) grąža	Tikėtina visos rinkos kapitalo kaina

Praktikoje renkantis slenkstinę grąžos normą, dažniausiai pasirenkama nerizikingų investicijų – pvz. trumpalaikių vyriausybės vertybinių popierių – grąžos norma, vidutinė tikėtina grąža arba tiesiog nulinė grąža (2.1 lentelė). Nesunku suprasti tokio pasirinkimo trūkumus. Fishburn dar 1977 pastebėjo, kad investuotojai riziką dažnai sieja su nesėkmėmis ar nepasiektais nustatytais tikslais. Vidutinė rinkos grąža, kuri rinkos nuosmukio laikotarpiu gali būti neigiama, ar kažkoks kitas nuo rinkos svyravimų priklausantis rodiklis, vargu ar gali būti laikomas tinkamu investavimo tikslu.

2.5. Investicijų pasirinkimas naudojant omegą rodiklį

Omega funkcijos tinkamumą nustatant atskirų vertybinių popierių patrauklumą ar sudarant optimalų investicijų portfelį patikrinsime praktiškai atliekant skaitinius eksperimentus.

Pirmojo eksperimento tikslas patikrinti hipotezę, kad keičiant slenkstinės grąžos reikšmes „rizikai neutralus" omega rodiklis iš tiesų gali būti naudojamas investicijoms ranguoti atsižvelgiant tiek į investicijų skirstinio ypatumus, tiek ir į investuotojų polinkį rizikuoti.

Antrojo eksperimento tikslas nustatyti kintamos slenkstinės grąžos poveikį omega funkcijos atžvilgiu optimizuoto portfelio sudėčiai, kai vertybinių popierių grąžos pasižymi asimetriškumu.

2.5.1. Atskirų investicijų pasirinkimas naudojat omegą rodiklį

Pirmąjį eksperimentą formuluojame remdamiesi Nawrocki (1991) darbu, kuriame autorius tyrė LPM_n mato savybes.

Turime dvi investicijų alternatyvas. Abi investicijos turi vienodus vidurkius ir standartinius nuokrypius, tačiau skirtingus asimetrijos laipsnius: investicijos A asimetrijos koeficientas yra teigiamas, o investicijos B – neigiamas. Akivaizdu, kad vidurkio-dispersijos atžvilgiu, investicijos yra vienodos.

2.2 lentelė. Φ rodiklio savybės (Šaltinis: sudaryta autoriaus pagal Narowcki 1999 duomenis)

Table 2.2. Φ ratio characteristics (Source: created by the author using data from Narowcki 1999)

Investicija A		Investicija B	
Gąža, %	Tikimybė	Grąža, %	Tikimybė
10	0,8	–0,5	0,2
35	0,2	20	0,8

Investicijų A ir B aprašomoji statistika

Descriptive statistics for investment A and B

Rodiklis	Vidurkis	Dispersija	SD	Šarpo rod.	Asimetrija	Ekscesas
A	15	100	10	1,5	1,5	3,25
B	15	100	10	1,5	–1,5	3,25

2.2 lentelės pabaiga
End of Table 2.2.

Investicija A: Φ rodiklis kintant n ir q parametrams, kai slenkstinė grąža 15%
Investment A: Φ ratio for different parameters n and q, threshold return 15%

n\q	**0,20**	**0,50**	**1,00**	**1,50**	**2,00**	**3,00**
0,2	**0,0039**	0,49	2,44	4,17	5,46	7,14
0,5	0,00	**0,25**	1,25	2,14	2,80	3,66
1	0,00	0,20	**1,00**	1,71	2,24	2,92
1,5	0,00	0,19	0,93	**1,59**	2,08	2,71
2	0,00	0,18	0,89	1,53	**2,00**	2,62
3	0,00	0,17	0,86	1,47	1,93	**2,52**

Investicija B: Φ rodiklis kintant n ir q, kai slenkstinė grąža 15%

Investment B: Φ ratio for different parameters n and q, threshold return 15%

n\q	**0,2**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**3**
0,2	**256,00**	500,00	625,00	673,26	698,77	725,25
0,5	2,05	**4,00**	5,00	5,39	5,59	5,80
1	0,41	0,80	**1,00**	1,08	1,12	1,16
1,5	0,24	0,47	0,58	**0,63**	0,65	0,68
2	0,18	0,36	0,45	0,48	**0,50**	0,52
3	0,14	0,27	0,34	0,37	0,38	**0,40**

2.2. lentelėje pateiktos $\Phi_{\tau}^{n,q}$ rodiklio[7] reikšmės apskaičiuotos naudojant 15 proc. slenkstinę grąža. Kaip rodo pateikti duomenys, investicija A yra patrauklesnė investuotojams, kurių n ir q laipsniai >1, t. y. investuotojams, kurie vengia rizikos nuostolių srityje ir siekia rizikos pelno srityje. B investicija yra patrauklesnė investuotojas kurių n < 0 ir q < 1, o tai atitiktų D. Kahnemano ir A. Tverskio aprašytą investuotojo tipą. Omega arba $\Phi_{\tau}^{1,1}$ rodiklis investicijas laiko taip pat laiko lygiavertėmis.

Tačiau, iš 2.3 lentelėje pateikto antro pavyzdžio matyti, kad rezultatai priklauso nuo konkretaus duomenų skirstinio.

[7] Toliau rodiklio indeksų reikšmės nenurodomos, išskyrus atvejus, kai kalbama apie konkrečias rodiklio n, q ar τ reikšmės.

2.3 lentelė. Hipotetinių projektų C ir D grąžų tikimybių skirstiniai (Šaltinis: sudaryta autoriaus)
Table 2.3. The return distribution for the hypothetical projects C and D (Source: created by the author)

Investicija C		Investicija D	
Gąža, %	Tiki-mybė	Grąža,%	Tiki-mybė
0	0,25	–1	0,25
0,5	0,25	2	0,25
1	0,25	3	0,25
2	0,25	5	0,25

Investicijų C ir D aprašomoji statistika

Descriptive statistics for investments C and D

Rodiklis	Vidurkis	Dispersi-ja	SD	Šarpo rod.	Asimetri-ja	Ekscesas
C	0,875	0,547	0,740	1,183	0,435	–1,154
D	2,250	4,688	2,165	1,039	-0,323	–1,076

Investicija C: Φ rodiklis kintant n ir q, kai slenkstinė grąža 1%

Investment C: Φ ratio for different parameters n and q and threshold return1%

n\q	**0,2**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**3**
0,2	**0,044**	2,795	11,179	17,745	22,358	28,169
0,5	0,005	**0,343**	1,373	2,179	2,745	3,459
1	0,003	0,167	**0,667**	1,058	1,333	1,680
1,5	0,002	0,129	0,515	**0,817**	1,030	1,297
2	0,002	0,112	0,447	0,710	**0,894**	1,127
3	0,002	0,095	0,382	0,606	0,763	**0,962**

Investicija D: Φ rodiklis kintant n ir q, kai slenkstinė grąža 1%

Investment D: Φ ratio for different parameters n and q and threshold return1%

n\q	**0,2**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**3**
0,2	**250,897**	623,529	896,000	1054,827	1173,139	1348,003
0,5	3,920	**9,743**	14,000	16,482	18,330	21,063
1	0,980	2,436	**3,500**	4,120	4,583	5,266
1,5	0,617	1,534	2,205	**2,596**	2,887	3,317

2.3 lentelės pabaiga
End of Table 2.3.

2	0,490	1,218	1,750	2,060	**2,291**	2,633
3	0,389	0,967	1,389	1,635	1,819	**2,090**

Iš 2.3 lentelėje pateiktų investicijų C ir D grąžų skirstinių matyti, kad nepriklausomai nuo rizikos vengimo laipsnio, Φ rodiklis rodo, kad investicija D yra patrauklesnė. Galima sutikti, kad daugumai rizikos nevengiančių investuotojų D investicija gerokai patrauklesnė nei investicija C, tačiau visiškai nuostolių netoleruojantis investuotojas, tarkim, investuotojas, kuriam nuostolis reikštų bankrotą, turėtų rinktis investiciją C. Tačiau net ir pasirinkus auštą rizikos vengimo laipsnį, Φ rodiklio rekomendacija rinktis investiciją D nesikeičia.

Omega rodiklis, šiuo atveju, taip pat rodo, kad investicija D geresnė, tačiau tai suprantama – pirmojo dalinio laipsnio omega rodiklis išreiškia neutralų požiūrį į riziką. Tačiau tai nereiškia, kad omega rodiklio negalime panaudoti investicijų skirstymui pagal jų rizikingumą. Norimą rezultatą galime gauti keisdami slenkstinę grąžą. 2.4 lentelėje pateiktos C ir D investicijų Φ rodiklio reikšmės, kai slenkstinė grąža lygi 0,5 proc.).

2.4 lentelė. Φ rodiklis kintant n ir q, kai slenkstinė grąža 0,5% (Šaltinis: sudaryta autoriaus)
Table 2.4. Φ ratio for different parameters n and q and threshold return 0,5% (Source: created by the author)
Investicija C
Investment C

n\q	0,2	0,5	1	1,5	2	3
0,2	4740,41	11844,22	17152,00	20311,86	22684,55	26188,09
0,5	74,069	185,066	268,000	317,373	354,446	409,189
1	18,517	46,267	67,000	79,343	88,612	102,297
1,5	11,665	29,146	42,207	49,983	55,822	64,443
2	9,259	23,133	33,500	39,672	44,306	51,149
3	7,349	18,361	26,589	31,487	35,166	40,597

Investicija D
Investment D

n\q	0,2	0,5	1	1,5	2	3
0,2	717,07	1737,34	2401,52	2736,66	2966,37	3295,71

2.4 lentelės pabaiga
End of Table 2.4.

0,5	11,204	27,146	37,524	42,760	46,350	51,496
1	2,801	6,787	9,381	10,690	11,587	12,874
1,5	1,765	4,275	5,910	6,734	7,300	8,110
2	1,401	3,393	4,691	5,345	5,794	6,437
3	1,112	2,693	3,723	4,242	4,599	5,109

Pasirinkta 0,5 proc. slenkstinė grąža išreiškia investuotojo siekį gauti ne blogesnį rezultatą. Šiuo atveju $\Phi_{\tau}^{1,1}$ arba omega rodiklis rodo, kad C variantas patrauklesnis, nes šiuo atveju tikimybė pasiekti nustatytą grąžą didesnė. Akivaizdu, kad blogiausia, kas gali nutikti pasirinkus investiciją C, tai kad negausime pelno. Pasirinkus variantą D, pelno potencialas yra didesnis, tačiau taip pat didesnė ir nuostolio rizika. Slenkstinę 0,5 proc. ribą nustatėme todėl, kad nustatę 0 ribą arba „tikrąjį“ nenuostolingumo slenkstį, C atveju gautume dalybą iš 0. Teoriškai, tai galima vertinti kaip rekomendaciją rinktis variantą C, nes rodiklio reikšmė išauga iki begalybės, tačiau praktiniu požiūriu toks rezultatas nėra patogus (nors nėra sunku pakeisti rodiklio skaičiavimo algoritmą, kad rezultatas būtų suprantamesnis).

Dar vienas svarbus pastebėjimas – pakeitę slenkstinę grąžą, pakeitėme pasirinkimo pirmenybę ir visiems Φ rodiklio laipsniams. Atliekant kontroliuojamą eksperimentą, tai žinoma nėra reikšminga, tačiau kai grąžas generuojantis procesas nėra žinomas, keisdami Φ rodiklio parametrus galime gauti vienas kitam prieštaraujančius rezultatus, pvz. tuo pat metu mažindami slenkstinę ribą ir nuostolių vengimo laipsnį.

2.5 lentelė. Φ rodiklis kintant n ir q, kai slenkstinė grąža 4% (Šaltinis: sudaryta autoriaus)
Table 2.5. Φ ratio for different parameters n and q and threshold return 4 (Source: created by the author)
Investicija C
Investment C

n\q	**0,2**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**3**
0,2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

2.5 lentelės pabaiga
End of Table 2.5.

2	0,000	0,000	0,000	0,000	**0,000**	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	**0,000**

Investicija D:

Investment D:

n\q	**0,2**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**3**
0,2	**0,00**	0,12	0,47	0,74	0,94	1,18
0,5	0,001	**0,046**	0,185	0,294	0,370	0,466
1	0,001	0,031	**0,125**	0,198	0,250	0,315
1,5	0,000	0,026	0,104	**0,164**	0,207	0,261
2	0,000	0,023	0,091	0,145	**0,183**	0,230
3	0,000	0,019	0,078	0,123	0,155	**0,195**

Galiausiai investuotojo slenkstinę grąžą prilyginame 4 (2.5 lentelė). Šiuo atveju $\Phi_{\tau}^{1,1}$ rodiklis jau siūlo rinktis D variantą, nes tik D variantas suteikia bent teorinę galimybę pasiekti norimą rezultatą. Pasirinkus variantą C, akivaizdu, kad tokia tikimybė lygi 0. Šis pavyzdys puikiai iliustruoją rizikos suvokimo subjektyvumą: įmonei, kurios įsipareigojimai metų pabaigoje lygūs 4, pirmoji investicija yra žymiai rizikingesnė nei antroji, nes pasirinkus variantą C, įmonė garantuotai nepasieks būtino rezultato, t. y. neuždirbs sumos reikalingos įsipareigojimui padengti (žinoma, pasirinkdami variantą D, didiname kitų šalių, pavyzdžiui kreditorių, riziką). Taip pat galima pastebėti, kad pasirinkus didelę slenkstinę grąžą ir aukštą rizikos vengimo laipsnį, n≥1,5, rekomendacija tampa neaiški, arba rodiklio tikslumą reikia didinti iki fizikinių konstantų tikslumo.

Pateikti scenarijai įrodo, kad pirmųjų dalinių laipsnių arba „rizikai neutralus“ omega rodiklis iš tiesų gali būti efektyviai panaudotas investuotojų pasirinkimo pirmenybėms nustatyti.

2.5.2. Portfelio pasirinkimas naudojant omega rodiklį

Atlikti eksperimentai leido įsitikinti, kad omega rodiklis gali būti naudojamas investicijos parinkti pagal investuotojo slenkstinę grąžos normą arba polinkį rizikuoti, tačiau ne mažiau svarbus klausimas, ar omega rodiklis gali būti efektyvus parenkant portfelio svorius priklausomai nuo grąžų skirstinio charakteristikų ir investuotojų poreikių.

Norėdami įvertinti omega funkcijos galimybes, atliksime kontroliuojamą eksperimentą su dirbtiniu būdu gautomis 4 hipotetinių akcijų laiko eilutėmis. Eksperimentas savo metodika panašus į Xiong ir Idzorek [8] (2011) atliktą eksperimentą, tik daugiamačiams nenormaliesiems skirstiniams su pasirinktais koreliacijos ir asimetriškumo bei eksceso koeficientais gauti darbe panaudotas Fleishman trečiojo laipsnio daugianarių metodas (Fleishman 1978), kurio algoritmas įgyvendintas „fungible“ pakete R programavimo aplinkoje (Zopluoglu 2011).

Pirmas scenarijus yra paprastas – jį atliksime tik pradinėms eksperimento sąlygoms patikrinti. Pasirenkame 4 identiškas akcijas, turinčias vienodą laukiamą grąžą, vienodą standartinį nuokrypį, taip pat 0 asimetriškumo ir 0 eksceso koeficientus.

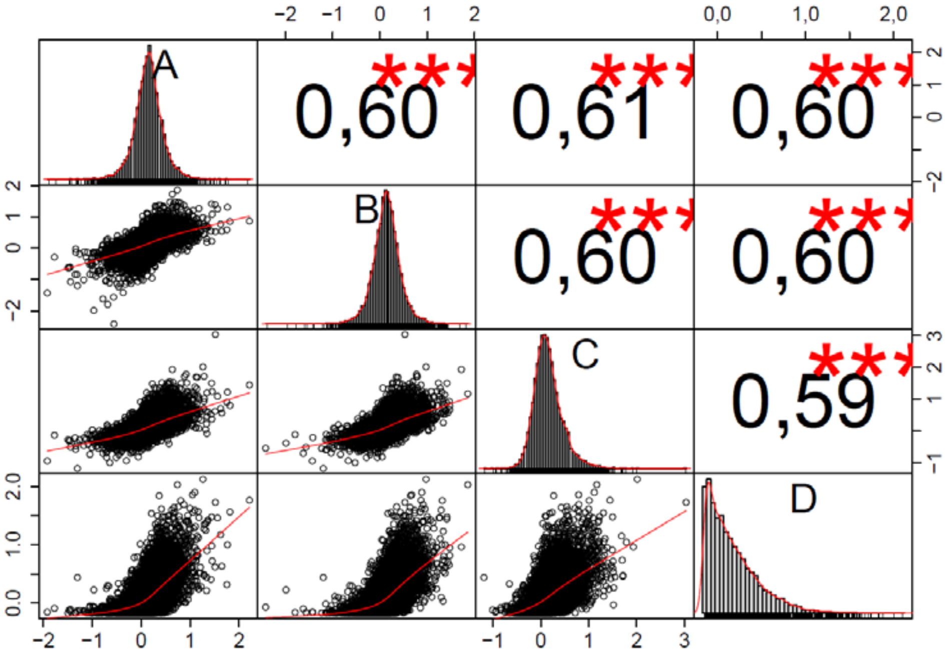
2.6 lentelė. 1 scenarijus: 0 asimetrija ir 0 ekscesas (Šaltinis: sudaryta autoriaus)
Table 2.6. Scenario #1: 0 skewness and uniformly tails (Source: created by the author)

	A	B	C	D
Vidurkis	0,15	0,15	0,15	0,15
Standartinis nuok.	0,3	0,3	0,3	0,3
Koreliacijos				
A	1			
B	0,6	1		
C	0,6	0,6	1	
D	0,6	0,6	0,6	1
1 scenarijus				
Teorinis asimetrijos koef.	0	0	0	0
Teorinis eksceso koef.	3	3	3	3
Empirinis asimetrijos koef.	–0,059	–0,131	–0,051	–0,039
Empirinis eksceso koef.	2,900	2,898	2,846	3,018
Portfelio svoriai				
	A	B	C	D
MVP	0,242	0,252	0,249	0,257
Omega, τ=0	0,270	0,254	0,222	0,253

[8] Xiong ir Idzorek (2011) tyrė vidurkio – sąlyginės rizikos vertės (angl. *mean-conditional value at risk, M-CVaR*) portfelių savybes.

Duomenų generavimo algoritmas leidžia gauti tik apytikres reikšmes, todėl gautos empirinės trečiojo ir ketvirtojo statistinių momentų reikšmės, nedaug skiriasi nuo teorinių, tačiau tokia paklaida mūsų eksperimento rezultatų neįtakoja. Omega funkcijos atžvilgiu optimizuotą [9] portfelį (su slenkstine grąža $\tau=0$) lyginame su mažiausios dispersijos portfeliu (MPV). Matome, kad abiem atvejais, kaip ir buvo tikėtasi, gauti beveik vienodų svorių portfeliai.

Vykdydami antrą scenarijų, patikrinsime, kaip omega funkcija elgiasi tais atvejais, kai grąžos pasižymi asimetrija. Akcijai C nustatomas 1.0, o akcijai D – 1.5 asimetrijos koeficientai. 2.4 paveiksle pateikti naujai generuotų laiko eilučių skirstiniai, išsibarstymo diagramos ir koreliacijos. Iš paveikslo matyti, kad akcijos C skirstinio kraštas nežymiai, o skirstinio D ženkliai „ištempti“ dešinėn. Empirinės koreliacijos koeficientų matricos paklaidos labai nedidelės.



Pastaba: Įstrižainėje pavaizduota kintamųjų tankio histograma; apatiniame trikampyje sklaidos diagrama, viršutiniame – kintamųjų koreliacijos koeficientai ir jų reikšmingumo reikšmės (P < 0,05 *, P < 0,01 **, P < 0,001 ***)

Note: *Histograms with kernel density overlays; scatter plot in the lower triangle, absolute correlations with significance asterisks (0.05, 0.01, 0.001) in the upper triangle.*

2.4 pav. Grąžų skirstiniai ir koreliacijos
Fig. 2.4. Comparison of distributions and correlations

[9] Optimizavimo metodas aptarimas tolimesniuose skyriuose.

Kadangi kvadratinio optimizavimo algoritmas „nemato“ grąžų asimetriškumo, mažiausios dispersijos portfelio svoriai išlieka beveik nepakitę. Portfelį optimizuojant omega funkcijos atžvilgiu, portfelio svoriai persiskirstė teigiamą asimetriją turinčių akcijų naudai: akcijos A ir B svoriai sumažėjo, C ir D išaugo.

Omega funkcija yra jautri laiko eilučių asimetriškumui, tačiau deja ne ekscesui. Tačiau, finansinių laiko eilučių asimetriškumas ir ekscesas paprastai yra susiję, pavyzdžiui, per vadinamąjį kintamumo „atsako“ (angl. *volatility feedback*“) efektą lemiantį, neigiamą asimetriją ir teigiamą ekscesą (Campbell, Hentschel 1992).

2.7 lentelė. 2 scenarijus: Teigiama asimetrija ir 0 ekscesas (Šaltinis: sudaryta autoriaus)
Table 2.7. Scenario #2: Positive skewness and uniformly tails (Source: created by the author)

Teorinis asimetrijos koef.	0	0	1	1,5
Teorinis akceso koef	3	3	3	3
Empirinis asimetrijos koef.	-0,059	-0,131	0,920	1,473
Empirinis akceso koef	2,900	2,898	2,727	2,859

Portfelio svoriai

	A	B	C	D
MVP	0,242	0,252	0,249	0,256
Omega, τ=0	0,132	0,113	0,229	0,525

Eksperimentai parodė, kad naudojant bendrąjį $\Phi_{\tau}^{n,q}$ modelį, investuotojo polinkis rizikuoti išreiškiamas trimis parametrais, τ, n ir q. Naudojant $\Phi_{\tau}^{1,1}$ investuotojo polinkį rizikuoti galime išreikšti vienu parametru τ; aukštesnis τ parametras suponuoja didesnę investuoto toleranciją rizikai, nes mažėja tikimybė pasiekti nustatytą grąžos slenkstį.

2.6. Omega funkcijos optimizavimas

Omega funkcijos reikšmę nesunku apskaičiuoti, tačiau empiriniai grąžų skirstiniai nėra glotnūs, iškili ar griežtai monotoniški, todėl omega funkcija bendru atveju gali būti optimizuojama tik naudojant globalaus optimizavimo algoritmus.

Mausser *et al*. (2006), pritaikęs Charnes ir Cooper (1962) pasiūlytą trupmeninio programavimo ir kintamųjų transformavimo metodą parodė, kad omega funkcija gali būti optimizuojama naudojant tiesinio programavimo metodus, tačiau šis būdas įmanomas tik tuomet, kai max Ω (τ) > 1, o tai reiškia, kad pasirinkta τ reikšmė negali būti didesnė už vidutinę portfelio vertybinių popierių grąžą.

Nemažai autorių, tirdami omega atžvilgiu optimizuotų portfelių savybes naudoja šį tiesinio optimizavimo metodą, teigdami, kad daugumoje „gyvenimiškų" situacijų, portfelio omega vertė neturėtų būti mažesnė už 1 (Kapsos *at al.* 2014). Tačiau, toks požiūris yra pernelyg ribojantis – siekti didesnės nei vidutinė grąžos yra ekonomiškai racionalu. Atsižvelgiant į tai, disertacijoje omega portfelių optimizavimas atliekamas naudojant globaliojo optimizavimo metodą. Be to, globalaus optimizavimo metodų privalumas yra tas, kad šie metodai gerokai universalesni – tiesinio optimizavimo metodai negali būti naudojami aukštesnio laipsnio viršutinių-apatinių dalinių momentų funkcijoms optimizuoti. Sprendžiant šiuos uždavinius globalaus optimizavimo algoritmais, paprastai pakanka pakeisti tik tikslo funkciją, tačiau nereikia keisti pačio algoritmo.

Optimizuodami investicijų portfelį omega funkcijos atžvilgiu, kiekvienai pasirinktai slenkstinės grąžos reikšmei randame pozicijų svorius, kurie maksimizuoja tikėtino pelno (viršutinių nukrypimų nuo slenkstinės grąžos) ir tikėtinų nuostolių (apatinių nukrypimų nuo slenkstinės grąžos) santykį. Omega optimizavimo uždavinį galima užrašyti taip:

$$\begin{gathered} \max \frac{\sum_{t=1}^{T} \max(0, w^T r - \tau)}{\sum_{t=1}^{T} \max(0, \tau - w^T r)}, \\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \\ x_l \le x_i \le x_u. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Optimizuojant omegą funkciją ir renkantis slenkstinę grąžą galimų reikšmių intervale τ_{min}, τ_{max}, maksimali grąžos riba neturėtų viršyti maksimalaus vertybinių popierių istorinio pajamingumo – portfelio grąža negali viršyti jį sudarančių vertybinių popierių pajamingumo. Be to, pasirinkus labai didelę τ reikšmę, paprastai gaunami portfeliai sudaryti tik iš vieno ar kelių vertybinių popierių, turinčių didžiausią grąžą, taip prarandant galimą investicijų diversifikavimo naudą. Tiesa, mokslininkai yra pastebėję, kad teigimą asimetriją turintys portfeliai iš esmės nepasižymi geru investicijų išskaidymu (Mitton, Vorkink 2007).

Kitas pavojus, kad pasirinkus didesnę slenkstinę grąžą, nei maksimali istorinė vertybinių popierių grąža, meta-euristiniai algoritmai, skirtingai nei tradiciniai optimizavimo algoritmai, iš tiesų gali „surasti" sprendinį, nors toks sprendinys neturi ekonominės ar loginės prasmės (Shaw 2011).

Optimizuojamo portfelio grąžų eilutės gali būti gaunamos imant istorinius praėjusių laikotarpių duomenis arba taikant imitacinio modeliavimo metodus. Remiantis vien istoriniais duomenimis susiduriama su vadinamuoju modelio pertekliniu priderinimu (angl. *over-fitting*), t. y. modelis gerai atitinka sudarymo arba testavimo imties laikotarpį, tačiau pasižymi menka prognozavimo galia už šio laikotarpio ribų. Teoriškai geresnis būdas – grąžas modeliuoti taikant įvairius imitavimo metodus, tačiau iš tiesų, grąžas generuojantis procesas nėra žinomas (arba apskritai neegzistuoja), todėl dažniausiai naudojami istoriniai duomenys, darant prielaidą, kad praeities scenarijai bent jau kurį laiką išliks aktualūs ir ateityje.

Nepaisant to, kad omega rodiklis sukėlė nemažą susidomėjimą tiek tarp mokslininkių, tiek tarp investuotojų, studijų, kurios atsakytų į klausimą ar šis rodiklis kuo nors pranašesnis už klasikinius portfelio optimizavimo metodus ar kitas metodais grindžiamas portfelio formavimo strategijas nėra daug. Viena iš priežasčių, kaip jau buvo minėta, omega funkcijos optimizavimas yra pakankamai sudėtingas ir pats savaime yra daugelio tyrimų objektas. Empirinių tyrimų, kuriais būtų tiriamos omega atžvilgiu optimizuotų portfelių savybės kintant slenkstinės grąžos lygiui, autoriaus žiniomis nėra.

2.8. lentelė. Omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių tyrimai (sudaryta autoriaus)
Table 2.8. Review of studies on portfolio optimization with respect to the Omega function (Source: created by the author)

Autorius (-iai), metai	Trumpas studijos aprašymas, pagrindiniai rezultatai
Avouyi-Dovi *et al*. 2004	Duomenys: JAV, Anglijos ir Vokietijos akcijų rinkos indeksų savaitinės grąžos 1974–2003 m. laikotarpiu. Optimizavimo metodas: slenkstinis algoritmas (angl. *threshold accepting*). Rezultatai: bendri pastebėjimai, kad omega gali būti naudojamas optimizuojant investicijų portfelius.
Kane *et al*. 2009	Duomenys: dirbtiniai duomenys – trys akcijų grąžų sekos, apimančios 50 dienų laikotarpį. Optimizavimo metodas: Nelder–Mead metodas ir MCS globalaus minimumo algoritmas. Rezultatai: bendri pastebėjimai, kad omega portfeliai skiriasi nuo minimalios rizikos ar minimalaus praradimo portfelių.

2.8 lentelės pabaiga
End of Table 2.8.

Gilli, Schumann 2010	Data: Kelių šimtų stambiausių Europos akcinių bendrovių akcijų vienerių metų grąžų duomenys. Optimizavimo metodas: slenkstinis algoritmas. Rezultatai: Pabrėžiama kad pagrindinis tikslas įvertinti optimizavimo algoritmą, tačiau ne investicijų optimizavimą.
Gilli *et al.* 2011	Duomenys: kelių šimtų stambiausių Europos akcinių bendrovių akcijų grąžų duomenys, apimantys 1998–2008 laikotarpį. Optimizavimo metodas: slenkstinis algoritmas. Aprašymas: 130/30 portfelio (t. y. portfelio, leidžiančio skolintų vertybinių popierių pardavimą) ir portfelio, draudžiančio „skolintas pozicijas“, optimizavimas atliekant klasikinį vidurkių ir dispersijų bei omega funkcijos optimizavimą. Rezultatai: klasikinio ir omega optimizavimo rezultatai autorių nėra lyginami tiesiogiai, netiesiogiai – omega atžvilgiu optimizuotas portfelis nebuvo pranašesnis.
Gilli, Schumann 2011	Duomenys: Dow Jones Euro STOXX indekso bendrovės. Optimizavimo metodas: slenkstinis algoritmas. Rezultatai: Rizikos minimizavimas, priešingai nei grąžos maksimizavimas, lemia gerus rezultatus kurie gaunami už prognozavimo imties ribų. Papildomas atlygio funkcijos kriterijus, rezultatus pagerina tik nežymiai.
Hentati-Kaffel, Prigent 2012	Aprašymas: bazinių (angl. *plain vanilla*) struktūrizuotų produktų (akcijos ir pasirinkimo sandorio portfelio bei nerizikingos investicijos ir pasirinkimo sandorio portfelio) optimizavimas omega ir omega–Šarpo funkcijos atžvilgiu. Rezultatai: struktūrizuotų produktų išmokos funkcija nėra iškiloji.
Kapsos *at al.* 2014	Omega funkcijos optimizavimas naudojant tiesinio optimizavimo algoritmą.
Sharma *at al.* 2016	Omega-CVaR portfelių tyrimas panaudojant tiesinio optimizavimo algoritmą.
Sharma, A; Mehra, A. 2017	Omega-CVaR portfelių tyrimas panaudojant tiesinio optimizavimo algoritmą. S&P BSE indekso akcijų duomenys.

Atliktų tyrimų apžvalga pateikiama 2.8 lentelėje. Daugumoje paminėtų studijų, ypač ankstyvųjų (Avouyi-Dovi et al. 2004; Kane et al. 2009; Gilli, Schumann 2010), buvo tiriamos įvairių optimizavimo algoritmų panaudojimo galimybės optimizuojant omegą funkciją. Vėliau pradėtos tirti ir omega portfelių finansinės savybės bei atliekami omega portfelių rezultatų palyginimai su rezultatais gautais naudojant įprastas MV optimizavimo strategijas (Kapsos *at al.* 2014, Sharma *at al*. 2016, Sharma, A; Mehra, A. 2017). Tiesa, šiose tyrimuose omega funkcijai optimizuoti naudojamas tiesinio optimizavimo algoritmas gerokai sumenkina gautų rezultatų reikšmę, nes tokiu atveju įvertinama tik neigiama grąžų asimetrija, tačiau neįvertinama teigiama asimetrija, ir tokie portfeliai gali pasižymėti maža rizika, tačiau tai pat ir nedideliu pajamingumu.

Šiame darbe portfelių optimizavimas omega funkcijos atžvilgiu buvo atliekamas panaudojant žemiau aprašytą skirtuminės evoliucijos algoritmą.

2.7. Skirtuminės evoliucijos algoritmas

Evoliuciniai (genetiniai) optimizavimo algoritmai remiasi gamtos procesų imitavimo idėjomis, t. y. sukurti pasinaudojant natūralios atrankos, palikuonių kūrimo ir atsitiktinių mutacijų, skirtų naujoviškumui generuoti, principais.

R. Storno (Rainer Storn) ir K. Praiso (Kenneth V. Price) 1997 pasiūlytas skirtuminės evoliucijos algoritmas yra pripažįstamas kaip vienas sėkmingiausių genetinių algoritmų. Dauguma kitų genetinių algoritmų, kaip pvz.: skirtuminės evoliucijos algoritmo pirmtakas genetinio atkaitinimo algoritmas (angl. *genetic annealing*), kurį K. Praisas sukūrė spręsdamas Čebyševo daugianario kreivės priderinimo (angl. *Chebychev polynomial fitting*) uždavinį, pernelyg lėtai konverguodavo, o taip pat buvo sudėtinga sėkmingai parinkti kontrolinius parametrus.

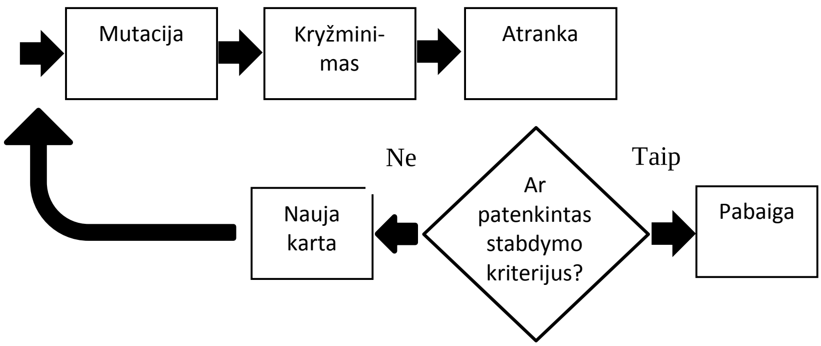
Skirtuminės evoliucijos algoritmas yra lengvai įgyvendinimas (realiai veikiančiam algoritmui pakanka vos daugiau nei 20 programinio kodo eilučių), pasižymi greitu konvergavimu ir reikalauja tik trijų pradinių parametrų: populiacijos dydžio (NP), mutavimo skalės koeficiento (angl. *mutation scale factor*, arba sutrumpintai F) ir kryžminimo tikimybės rodiklio (angl. *crossover* rate, arba sutrumpintai CR). Originaliame algoritmo variante parametrai viso optimizavimo metu išlieka pastovūs. Nors parametrai yra nustatomi empiriškai ir priklauso nuo sprendžiamos problemos pobūdžio, R. Storno ir K. Praiso pasiūlyti standartiniai populiacijos dydžio (NP=10D), mutavimo skalės koeficiento (F=0,9) ir kryžminimo tikimybės rodiklio (CR=0,9) iš esmės gerai tinka pačioms įvairiausioms problemoms.

Tradiciškai optimizavimo uždavinys formuluojamas taip: reikia rasti funkcijos, vadinamos tikslo funkcija, minimumą (arba maksimumą):

$$\min_{X \in A} f(X), \tag{2.10}$$

čia **x**=(x_1, x_2, x_3, ..., x_D) – optimizavimo uždavinio nežinomųjų vektorius f(X) – optimizavimo uždavinio tikslo funkcija, A – leistinoji sritis.

Algoritmo pradžioje sukuriama atsitiktinė pradinė populiacija (P), susidedanti iš NP individų. Paprastai, siekiant užtikrinti platų galimų sprendimų rinkinį ir išvengti priešlaikinio konvergavimo ar paieškos proceso stagnacijos, genetinių algoritmų pradinė populiacija turi būti pakankamai didelė. Žinoma didesnė pradinė populiacija reiškia ir tai, kad reikės atlikti daugiau skaičiavimų ir ilgesnį optimizavimo vykdymo laiką. R. Stornas (1996) rekomenduoja rinktis 10 kartų didesnį populiacijų skaičių nei turimas dimensijų ar uždavinio nežinomųjų skaičius (toliau - D). Pavyzdžiui optimizuojant investicijų portfelį, jei portfelį sudaro 30 pozicijų, rekomenduotiną pradinė populiacija – 300 (toliau – 10*D taisyklė). NP=10*D taisyklė yra geras pradinis „spėjimas“ renkantis sprendinių rinkinį, tačiau „pakankamas“ NP dydis gali varijuoti priklausomai nuo problemos pobūdžio. Įvairių autorių tyrimai rodo kad, esant nedideliam sprendimo kintamųjų skaičiui pakanka (5-10)*D taisyklės, siekiant gauti gerus rezultatus per trumpą skaičiavimų laiką. Tyrimai taip pat parodė, kad gali būti naudinga evoliucijos procesą pradėti su didesniu NP, o vėliau evoliucijos proceso eigoje, artėjant prie optimalus sprendinio, šį skaičių mažinti.



2.5 pav. Skirtuminės evoliucijos algoritmo principinė schema
Fig. 2.5. Bock diagram of differential evolution algorithm

Kai pirminės informacijos apie galimą sprendinį nėra, pradinė populiacija pasirenkama atsitiktinai, paprastai naudojant tolydųjį skirstinį, t. y.

$$x_G^{i,j} = lb + U(0,1)(ub - lb),\ j = 1...D, \tag{2.11}$$

čia U(0,1) – tolydusis atsitiktinis dydis, lb, ub – apatinė ir viršutinė kintamųjų riba. Kai pradinis sprendinys žinomas, pradinė populiacija gali būti generuojama prie pradinio sprendinio pridedant normaliai pasiskirsčiusias atsitiktines paklaidas. Optimizuojant investicijų portfelį, pradinis sprendinys gali būti ne vien tik atsitiktinai generuojama populiacija, tačiau pvz. ir portfeliai gauti naudojant kitas optimizavimo strategijas.

Kiekvienos evoliucijos metu, visi populiacijos arba kartos individai yra veikiami trijų operacijų arba veiksnių: mutacijos, kryžminimo ir atrinkimo. Šis evoliucijos ciklas vykdomas tol, kol pasiekimas nustatytas stabdymo kriterijus – paprastai maksimalus iteracijų skaičius (2.5. pav.).

Pagrindinė skirtuminės evoliucijos algoritmo idėja, lėmusi šio algoritmo sėkmę (Qing 2010), yra naujoviška bandomųjų vektorių parinkimo schema, pavadinta „skirtumine mutacija“, pagal kurią naujas bandomasis vektorius yra gaunamas prie vadinamojo tikslinio vektoriaus (angl. *target vector*) x_G^i pridedant kitų dviejų populiacijos narių vektorių svertinį vidurkį. Kiekvienas pradinės kartos individas, nepriklausomai nuo jo tinkamumo, tampa „pagrindiniu tėvu“ (angl. *principal parent*) ir dalyvauja kuriant „palikuonis“. Kiti, atsitiktinai parinkti, kartos individai tampa „pagalbiniais tėvais“ (angl. *auxiliary parents*). T. y. kiekvienam x_G^i individui, kur indeksu G žyma pradinė karta, atsitiktinai parenkami trys skirtingi (t. y. i≠j≠k≠l) populiacijos nariai x_G^j, x_G^l ir x_G^k iš kurių, pritaikius pasirinktą mutavimo skalės koeficientą, gaunamas naujas mutavęs vektorius (angl. *mutant vector*) v_G^i.

$$v_G^i = x_G^j + F(x_G^k - x_G^l)\ . \tag{2.12}$$

Vėliau vykdomas „kryžminimas“, kurio metu iš tikslinio vektoriaus ir mutavusio vektoriaus sukuriamas naujas bandomasis vektorius (angl. *trial vector*). Kiek kintamųjų arba „genų“ paveldės bandomasis vektorius priklauso nuo kryžminimo tikimybės CR – kuo CR rodiklio reikšmė didesnė, tuo didesnė tikimybė bandomajam vektoriui paveldėti mutavusio vektoriaus „genus“. DE naudojamas kryžminimo metodas vadinamas „binominiu kryžminimu“ (angl. *binomal crossover*), kurio vienintelis skirtumas, lyginant su paprastu tolydžiuoju metodu, yra tas, kad užtikrinama, kad bent vienas naujas kintamasis bus perduotas bandomajam vektoriui, jei $j=j_{rand}$.

$$u_G^{i,j} = \begin{cases} v_G^{i,j} & \text{kai U(0,1)} \le \text{CR arba j=j}_{rand} \\ x_G^{i,j} & \text{kitu atveju} \end{cases}\ . \tag{2.13}$$

Paskutinis DE algoritmo žingsnis – sėkmingų „palikuonių“ atrinkimas. Kiekvienas „pagrindinis tėvas“ lyginamas su savo „palikuoniu“. Kitai iteracijai (arba generacijai) paliekamas („išgyvena“) tikslo funkcijos atžvilgiu geresnis pretendentas.

$$x_{G+1}^{i,j} = \begin{cases} u_G^{i,j} & \text{kai } f(u_G^{i,j}) \le f(x_G^{i,j}) \\ x_G^{i,j} & \text{kitu atveju} \end{cases} . \quad (2.14)$$

Aprašytas bazinis skirtuminės evoliucijos algoritmas nėra vienintelis. R. Stornas ir K. Praisas be bazinio varianto dar pasiūlė apie 10 šio algoritmo variacijų, kurios skiriasi bandomųjų vektorių formavimo ypatumais: pavyzdžiui atsitiktinį vektorių galima pakeisti geriausiu v^{best}, ar vietoje vienos vektorių poros skirtumo, galima naudoti dviejų porų $(x^{r2} - x^{r3})$ ir $(x^{best} - x^{r1})$ skirtumus. Siekiant išskirti įvairius DE algoritmo variantus, jų „nomenklatūra“ nustatoma pagal panaudotas mutavimo ir kryžminimo schemas, pvz.: bazinė schema „DE/rand/1/bin[10]“ reiškia, kad imamas atsitiktinis vektorius ir vienos vektorių poros skirtumas, o kryžminimui naudojamas „binominis metodas“:

$$\text{„DE/rand/1/bin“}: \; v^i = x^{r1} + F(x^{r2} - x^{r3}), \quad (2.15)$$

$$\text{„DE/best/1/bin“}: \; v^i = x^{best} + F(x^{r2} - x^{r3}), \quad (2.16)$$

„DE/best/2/bin“:

$$v^i = x^{best} + F(x^{r2} - x^{r3}) + F(x^{r4} - x^{r5}), \quad (2.17)$$

„DE/rand to best/1“:

$$v^i = x^{r1} + F(x^{r2} - x^{r3}) + F(x^{best} - x^{r1}), \quad (2.18)$$

Schemų pranašumas gali priklausyti nuo konkretaus optimizavimo uždavinio, tačiau bendrai pripažįstama, kad bazinis DE algoritmas yra universalus ir efektyviai sprendžia pačias įvairiausias problemas.

[10] Kita galima kryžminimo atmaina – eksponentinis kryžminimas (angl. *exponential crossover*), kuomet nuo atsitiktinai pasirinkto elemento nuosekliai pakeičiama visa kintamųjų seka.

Maksimalus iteracijų skaičius nustatomas empiriniu būdu [11], paprastai atsižvelgiant į tikslo funkcijos konvergavimo greitį. Evoliuciniai algoritmai yra imlūs skaičiavimams, todėl dažniausiai bandoma juos „paspartinti“ naudojant hibridinius algoritmus, lygiagrečiuosius skaičiavimus, ir pan. strategijas. Pvz., naudojant hibridinį algoritmą, DE optimizavimo procesą galima baigti naudojant Nelder-Mead optimizavimo metodą, kuris pasižymi sparta, tačiau, deja, ir tuo, kad dažnai suranda tik lokalaus, o ne globalaus minimumo taškus. Pradinio DE optimizavimo metu gautą kintamųjų vektorių panaudojus kaip Nelder-Mead metodo pradinį sprendinį galima efektyviai išnaudoti abiejų algoritmų teikiamus privalumus – DE algoritmo gebėjimą rasti globalųjį minimumą ir Nelder-Mead algoritmo spartą. Nors atrodytų, kad lygiagretūs skaičiavimai turėtų būti ypač sėkmingai išnaudojami taikant atsitiktinės paieškos metodus (DE algoritmas priklauso adaptyvinių atsitiktinių metodų klasei), tačiau praktikoje neretai pasitaiko, kad laiko nuostoliai atsirandantys „išlygiagretinant“ gautus rezultatus, viršija gaunamą naudą. Pvz., DEoptim pakete R aplinkoje (Ardia *et al*. 2011) įgyvendintas DE algoritmas leidžia pasirinkti lygiagretųjį optimizavimo vykdymo variantą, tačiau našumo padidėjimas buvo gaunamas tik tol, kol pati tikslo funkcija – omega rodiklis nebuvo tinkamai optimizuota. Perkėlus tikslo funkcijos skaičiavimus į C++ kalbą, gautas našumo padidėjimas buvo prarastas, ir daugeliu atvejų paprastas nuoseklus DE algoritmo vykdymas buvo spartesnis.

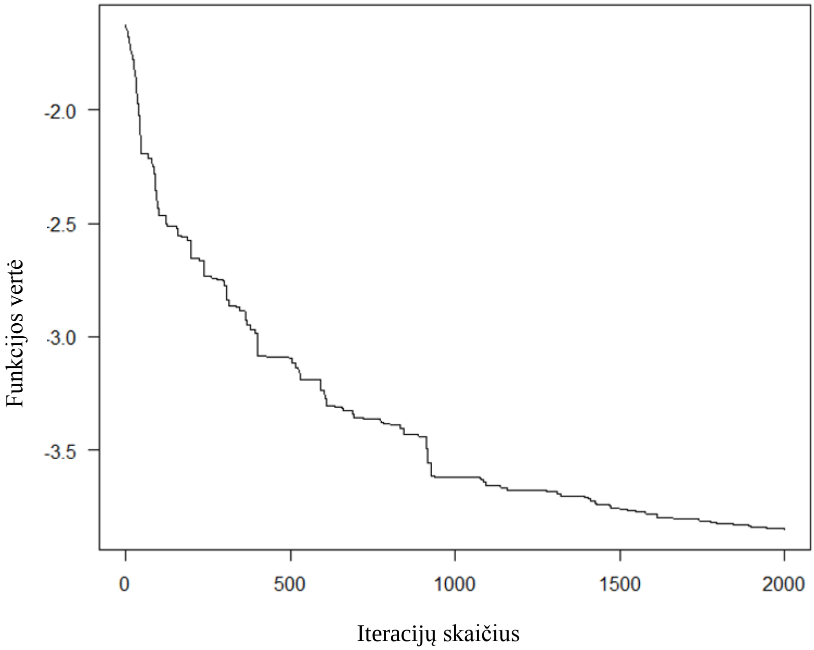
Kitą, kiek netikėtą, įžvalgą galima rasti Gilli ir Schumann tyrime (2012), kuriame autoriai išreiškia abejonę ar apskritai yra verta siekti geriausio įmanomo optimizavimo rezultato, kadangi, pasak autorių, „nėra pagrindo manyti, kad egzistuoja teigiamas ryšys tarp imties apimtyje ir už jos ribų gaunamų rezultatų kokybės“. Šią nuomonę iš dalies patvirtina ir klasikinio MV algoritmo reguliarizavimo procedūrų sėkmė – kuomet „tikslius“ kovariacijų matricos įverčius pakeitus vidutiniais įverčiais, už imties ribų gaunami rezultatai neretai pagerėja.

Optimizuojant omega portfelius, atsižvelgiant į tikslo funkcijos konvergavimo greitį buvo empiriškai pasirinktas 5 tūkst. (30 vertybinių popierių portfeliui optimizuoti) ir 10 tūkst. (50 vertybinių popierių portfeliui) iteracijų skaičius, nors faktiškai, jau po 2 tūkst. iteracijų (2.6 pav.) buvo pasiekimas pakankamas tikslo funkcijos konvergavimo rodiklis, t. y. vykdant tolimesnius skaičiavimus tikslo funkcijos reikšmė mažėdavo labai neženkliai.

Galutiniai omega strategijos tikrinimai naudojant realius istorinius duomenis buvo atlikti naudojant į Fortran programavimo kalbą perkeltą DE algoritmą ir tikslo (omega) funkciją. Lygiagretaus skaičiavimo galimybės buvo pilnai išnaudotos naudojant R integruotą programų kūrimo aplinką ir šioje aplinkoje

[11] Maksimalaus iteracijų arba generacijų skaičius Gmax, kartais išskiriamas, kaip dar vienas algoritmo parametras.

realizuotą programinį paketą „Parallel." Lygiagrečiai buvo skaičiuojami skirtingų tiriamų laikotarpių portfeliai ir taip buvo išvengta nuostolių atsirandančių „išlygiagretinant" gautus rezultatus.



2.6 pav. Tikslo funkcijos reikšmės konvergavimo greitis
Fig. 2.6. Speed of fitness convergence

Tiriant omega portfelio savybes slenkstinei grąžai kintant 0–5 proc. intervale, vienam laikotarpiui buvo sudaroma 50 skirtingų omega portfelių. Galiausiai, strategijos patikrinimo, naudojant vienos rinkos istorinius duomenimis, trukmę pavyko sumažinti nuo 18 valandų iki 45 minučių, t. y. apie 40 kartų.

2.8. Antrojo skyriaus išvados

1. Netekimų arba neigiamos rizikos matų panaudojimo galimybės buvo pradėtos tirti kartu su klasikine portfelio teorija. Nors dėl matematinio paprastumo buvo pasirinkta MV teorija ir dispersija, tačiau netekimų rizikos idėja buvo sėkmingai plėtojama ir toliau. Pastaruoju metu, tiek dėl finansų rinkose kylančių neramumų, tiek ir dėl naujų optimizavimo metodų atsiradimo ir didėjančių skaičiavimo

technikos galimybių, leidžiančių optimizuoti pačias įvairiausias tikslo funkcijas, naujų rizikos matų panaudojimo investicijų portfelių valdymui tyrimai įgauna vis platesnį mastą.

2. Netekimų rizikos matai turi ir savų trūkumų. Nors investuotojai vengia nuostolių, tačiau jie siekia ir didesnės grąžos, todėl pageidautina, kad rizikos matai įvertintų pilną tikimybinį skirstinį. Kadangi neigiamos rizikos matai vertina tik skirstinio kraštuose esančius retesnius įvykius, šių įvykių tikėtinumo įvertinimo paklaidos gali būti didelės, ir todėl neigiamų rizikos matų atžvilgiu optimizuoti portfeliai dažnai pasižymi dar mažesniu stabilumu, nei MV portfeliai.
3. Naudojant asimetrinius rizikos matus iškyla slenkstinės arba tikslinės grąžos pasirinkimo dilema. Akivaizdu, kad nuo šio parametro priklauso „suvokiamos“ rizikos laipsnis, t. y. kuo didesnė slenkstinė grąža, tuo mažesnės galimybės ją pasiekti ir santykinai didesnė rizika. Be to, pasirinkta slenkstinė grąžos norma įtakoja portfelio sudėtį ir galimas grąžos-rizikos charakteristikas, todėl slenkstinės grąžos poveikis turi būti sistemingai ištirtas.
4. Portfeliams optimizuoti siūlomas Keating ir Shadwick omega rizikos matas yra suderinamas su klasikine naudingumo teorija, naudoja pilną tikimybinį skirstinį ir leidžia išreikšti investuotojų rizikos pirmenybes pasirenkant slenkstinę arba tikslinę grąžos normą.
5. Nors omega matas teoriškai pasižymi patraukliomis charakteristikomis ir jau sulaukė nemažo mokslininkų dėmesio, šio mato panaudojimo galimybės optimizuojant investicijų portfelius nėra gerai ištirtos.

3

Omega atžvilgiu optimizuotų portfelių empirinis tyrimas

Šiame skyriuje apžvelgiama atliktų tyrimų metodologija ir pateikiami gauti empirinio tyrimo rezultatai.

Apžvelgiant tyrimų metodologiją, aprašomi tyrime naudoti duomenys, jų parengimo metodai, reikšmingos statistinės charakteristikos, tyrimo metu naudotos prielaidos ir kita tyrimams reikšminga informacija.

Tyrimų rezultatai buvo publikuoti trijuose autoriaus straipsniuose (Vilkancas, 2014, Vilkancas 2014, Vilkancas 2016). Tyrimai papildyti naujomis duomenų aibėmis, bei papildomais statistiniais gautų rezultatų patikimumo testais.

3.1. Portfelio apyvarta ir sandorių sąnaudos

Vertybinių popierių portfelis gali būti valdomas aktyviai arba pasyviai. Dėl mažesnės apyvartos, pasyvaus portfelio valdymo (valdymo sąnaudos, yra platesnė sąvoka, apimanti investicijų valdytojų atlygį ir kitas sąnaudas, tačiau šiame darbe vertinamos tik sąnaudos, susijusios su vertybinių popierių pirkimu ir pardavimu) sąnaudos yra gerokai mažesnės nei aktyvaus, todėl, kad padengtų papildomas sandorių sąnaudas ir užtikrintų savo pranašumą, aktyviai valdomi portfeliai turi uždirbti papildomą grąžą.

Įgyvendindami portfelio strategiją portfelio svorius turime perskirstyti dėl dviejų priežasčių: 1) keičiantis modelio parametrams keičiasi optimalūs portfelio svoriai; 2) keičiantis portfelyje esančių vertybinių popierių rinkos kainoms, faktiniai svoriai nukrypsta nuo teorinių, ir siekdami panaikinti šį skirtumą turime perskirstyti portfelio pozicijas. Dėl antrosios priežasties, turime reguliariai perskirstyti svorius net ir tuomet, kai modelio optimalūs svoriai nekinta, pvz. norėdami išlaikyti vienodų svorių portfelį.

Kadangi portfelio apyvarta ir sandorių sąnaudos tiesiogiai įtakoja portfelio grynąją grąžą, portfelio optimizavimo strategijos pasižyminčios stabilumu ir nedidelėmis apyvartomis turi didesnį pranašumą prieš kitas strategijas, pvz.: 1/N strategija, pasižyminti nedidelėmis apyvartomis, nes svorius reikia koreguoti tik dėl kainų pokyčio.

Portfelio apyvartą įprasta skaičiuoti dviem būdais: Jungtinėje Karalystėje ir Europoje, visišką portfelio apyvartą per vienerius metus priimta vertinti kaip 200 proc. apyvartą, t. y. 100 procentinį portfelį sudarančių vertybinių popierių pardavimą ir 100 procentinį pirkimą. JAV visiškas portfelio pasikeitimas vertinamas kaip 100 proc. apyvarta. Abu apyvartos įvertinimo būdai, priklausomai nuo vertinamos situacijos, gali būti logiški: kalbant apie portfelio vertę 100 proc. rodiklis atrodo logiškas, kadangi bendra portfelio vertė nepakito, tačiau vertinant portfelio apyvartos išlaidas logiškesnė yra 200 proc. deklaruota apyvarta, kadangi išlaidos patiriamos tiek perkant, tiek ir parduodant vertybinius popierius. Disertacijoje taikoma Europoje įprasta apyvartos deklaravimo metodika: visiškas investicijų portfelio pasikeitimas reiškia 200 proc. apyvartą; 100 proc. portfelio apyvarta reiškia, kad portfelio sudėtis pasikeitė 50 proc., t. y. pusė vertybinių popierių buvo parduoti ir vėl nupirkti.

Šiame darbe portfelio apyvarta skaičiuojama taikant įprastą metodiką (DeMiguel, Garlappi ir Uppal, 2009a, Gilli, Schumann, et al. 2011). Vidutinė portfelio apyvarta gaunama:

$$TO = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{N}\left|x_{n,t} - x_{n,t-1}\right|, \tag{3.1}$$

čia $x_{n,t}$ – yra portfelio i-tosios pozicijos svoris po portfelio perskirstymo ir $x_{n,t-1}$ yra portfelio i-tosios pozicijos svoris prieš perskirstymą. Kadangi grąžą ir riziką yra įprasta pateikti naudojant metinius duomenis, tai ir apyvartos rodiklis atitinkamai perskaičiuojamas jį dauginant iš 12.

Apskaičiuoti portfelio grynąją grąžą, gautą atėmus su portfelio perskirstymu susijusias sąnaudas, yra sudėtingiau. Prekiaujant vertybiniais popieriais patiriamos tiesioginės ir netiesiogines išlaidos. Tiesioginėms išlaidoms priskiriamas komisinis atlyginimas ir panašios išlaidos, netiesioginės: pirkimo-pardavimo kainų skirtumas, siejamas su vertybinių popierių likvidumu, ir sąnaudos susijusios su „poveikiu rinkai" t. y. poveikiu kainoms. Teoriškai įprasta prielaida, kad galima įsigyti ar parduoti neribotą vertybinių popierių kiekį neįtakojant jų kainų, realiame pasaulyje mažai tikėtina, ypač parduodant didelius akcijų paketus. Sąnaudos taip pat gali būti proporcinės, t. y. priklausančios nuo sandorio sumos ir fiksuotos, t. y. nuo sandorio sumos nepriklausančios.

Modeliuojant sandorių sąnaudas yra paprasčiau taikyti proporcinių apyvartos sąnaudų metodą. Darant prielaidą, kad kiekvieno sandorio proporcinių sąnaudų „tarifas" yra lygus c, portfelio vertės, atskaičius sąnaudas, dinamiką galime aprašyti:

$$W_{t+1} = W_t(1+R_{t+1})\left(1-c\sum_{n=1}^{N}\left|x_{n,t+1}-x_{n,t}\right|\right), \tag{3.2}$$

čia – R yra portfelio bendroji grąža. Tuomet portfelio grynoji grąža atskaičius apyvartos sąnaudas R_{NET} yra lygi:

$$R_{NET} = \frac{W_t}{W_{t-1}} - 1\,. \tag{3.3}$$

Vertinant tiriamų strategijų grynąjį rezultatą, remiantis Carhart (1997) studija, buvo sąlyginai „nustatytas" 1 proc. proporcinis apyvartos tarifas, t. y. modeliuojama, kad 100 proc. portfelio apyvarta portfelio grynąsias pajamas sumažina 1 proc., arba, kitaip tariant, portfeliui reikia pasiekti 1 proc. „alfa", kad padengtų 100 proc. išaugusią apyvartą (išsamią studijų, susijusių su sandorių sąnaudomis, apžvalgą galima rasti (Kasten 2007 atliktoje studijoje).

Nepaisant to, kad pasirinktas 1 proc. proporcinis apyvartos tarifas yra pakankamai konservatyvus – jis yra du kartus didesnis nei DeMiguel, Garlappi ir Uppal (2009a) studijoje naudotas 0,5 proc. tarifas, perkant-parduodant didelius akcijų paketus realios portfelio išlaidos gali būti gerokai didesnės (ir atitinkamai mažesnė grynoji portfelio grąža) dėl netiesioginių „poveikio rinkai" sąnaudų, todėl dideli portfelio pokyčiai yra nepageidaujami.

3.2. Skolintų vertybinių popierių pardavimai

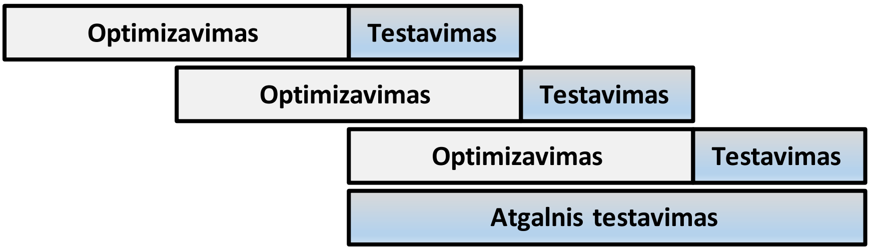
Šiame darbe nenagrinėjami portfeliai leidžiantys skolintų, t. y. investuotojui nepriklausančių, vertybinių popierių pardavimą, finansiniu žargonu vadinami tiesiog „trumpaisiais" pardavimais arba „trumposiomis" pozicijomis (angl. *short sales, short positions*). Nors portfeliai gaunami draudžiant skolintų vertybinių popierių pardavimus yra teoriškai mažiau optimalūs nei tokių ribojimų neturintys portfeliai (Clarke 2002), tačiau praktikoje skolintų vertybinių popierių pardavimų ribojimas sutinkamas gana dažnai: siekdamos sumažinti riziką tokius pardavimus gali drausti reguliuojančios institucijos arba fondų valdytojai tokius ribojimus gali nusistatyti savarankiškai; antra, skolintų vertybinių popierių pardavimai ne visuomet yra įmanomi, ypač tai pasakytina apie mažai likvidžius vertybinius popierius ar mažai išvystytas vertybinių popierių rinkas; galiausiai, vienodų svorių ar vienodos rizikos portfeliams skolintų vertybinių popierių pardavimai yra natūraliai negalimi, todėl siekdami gauti prasmingą skirtingų portfelio sudarymo metodų palyginimą, visoms strategijoms turime taikyti vienodus ribojimus. Be to, įvairios studijos rodo, kad skolintų vertybinių popierių pardavimų ribojimas užkerta kelią didelei vertybinių popierių koncentracijai, kai atskiros vertybinių popierių pozicijos gali n kartų viršyti nuosavą kapitalą, ir tokiu būdu padeda stabilizuoti svorius ir taip padidinti portfelių efektyvumą (Frost, Savarino 1986; Jagannathan, Ma 2003).

3.3. Portfelio strategijų tyrimo metodika

Tiriamų portfelio optimizavimo strategijų rezultatai – grąža ir kiti pagrindiniai rodikliai, buvo įvertinti naudojant mokslinėse studijose dažnai naudojamą slenkančio imties „lango“ metodą (DeMiguel, Garlappi ir Uppal, 2009a; Gilli, Schumann, *et al*. 2011).

Pirmiausiai pasirenkama vieno testavimo laikotarpio trukmė arba „langas“. Šiame darbe pasirinkta trukmė M lygi 36 mėnesiams (t. y. 3 metų laikotarpiui) arba 102 savaitėms (t. y. 2 metų laikotarpiui), kai tyrimui naudojami savaitiniai duomenys. Remiantis pirmojo testavimo laikotarpio grąžų sekomis apskaičiuojami optimizavimo modelio parametrai, vykdoma optimizavimo procedūra, ir rezultate gaunami tiriamos strategijos optimalūs svoriai. Naudojant gautus svorius apskaičiuojama kito mėnesio, t. y. t = M+1 portfelio grąža ir kiti pagrindiniai portfelio parametrai. Procesas tęsiamas pridedant vieną naują laikotarpį (mėnesį, ar kitą laikotarpį, priklausomai nuo to kaip dažnai bus perskirstomi portfelio svoriai) ir atmetant vieną vėliausią laikotarpį tol, kol baigiasi visas duomenų laikotarpis.

Šio grįžtamojo patikrinimo naudojant slenkantį „langą“ rezultate gaunama portfelio T-M laikotarpių grąžų seka, apskaičiuota už portfelio sudarymo imties ribų, t. y. apskaičiuota su duomenimis, neįtrauktais į optimizuojant portfelį naudotų duomenų imtį. Grįžtamojo patikrinimo naudojant istorinius duomenis metodas leidžia įvertinti įvairių rizikos prognozavimo metodų patikimumą lyginant *ex ante* prognozes su *ex post* gautais rezultatais.



3.1 pav. Atgalinio testavimo procedūra (Šaltinis: sudaryta autoriaus)
Fig. 3.1. Backtesting procedure (Source: created by the author)

Aprašyta procedūra kartojama kiekvienai tiriamai strategijai (3.1 pav.).

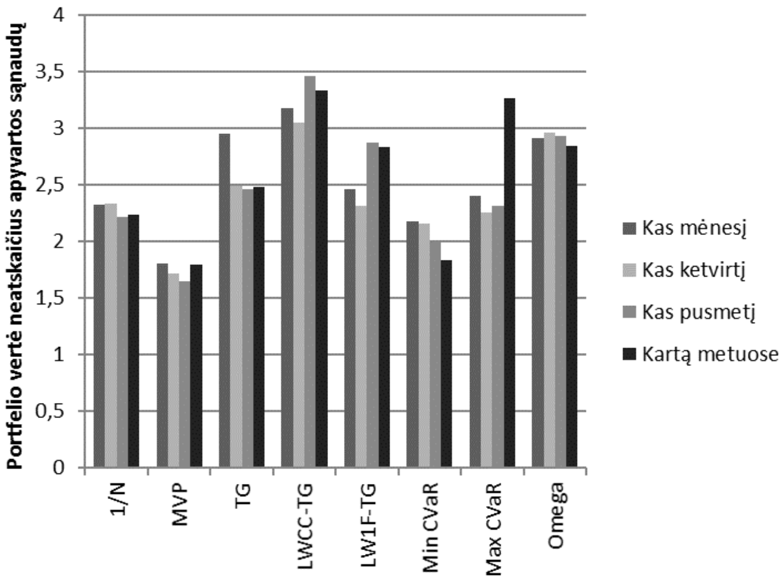
3.3.1. Portfelio svorių perskirstymo periodiškumas

Nors investicijų portfelio pozicijų perskirstymas yra susijęs su papildomomis sąnaudomis, jis yra neišvengiamas, kadangi neperskirstant svorių, t. y. vadovaujantis vien „pirk ir laikyk“ (angl. *Buy-and-hold*, toliau BH) taisykle, turimo portfelio sudėtis greitai nukryptų nuo pasirinktos investavimo strategijos. Pavyzdžiui, pasirinkus 60 proc. akcijų ir 40 proc. obligacijų portfelį, tačiau jo pozicijų periodiškai neperskirstant, laikui bėgant tokio portfelio sudėtyje esančių akcijų santykinė dalis augtų, kadangi akcijų grąža paprastai yra didesnė nei obligacijų grąža. Pasikeitusi portfelio sudėtis reikštų ir pasikeitusias rizikos charakteristikas, kurios tikriausiai netenkintų investuotojo, kadangi laikotarpio pradžioje jis pasirinko vidutinio rizikingumo 60/40 portfelį. Tai reiškia, kad fondų valdytojai turi nuolatos balansuoti tarp fondo strateginių, rizikos diversifikavimo ar pan. tikslų ir portfelio apyvartos sąnaudų, atsirandančių įgyvendinant šiuos tikslus.

Paprastai fondų valdytojai portfelių pozicijas perskirsto laikydamiesi tam tikrų nusistatytų taisyklių: a) tam tikru periodiškumu; b) kai portfelio svoriai peržengia nusistatytą leidžiamą „nukrypimo ribą“ (pvz. 5 proc.); arba c) tam tikru periodiškumu, jei tuo metu svoriai yra peržengę nustatytą „leistiną ribą“.

Tokį portfelio valdymą galima pavadinti taktiniu, kai siekiant tam tikrų taktinių tikslų, pvz. sumažinti apyvartos sąnaudas, leidžiama nukrypti nuo pagrindinės strategijos – nustatytų optimalių svorių. Portfelio perskirstymo periodiškumas gali būti keičiamas ir dėl įvairių kitų priežasčių: siekiant optimizuoti mokamus mokesčius, „išgryninti“ uždirbtą pelną. Pavyzdžiui, Lietuvoje iki 2014 metų, pardavus vienerius metus išlaikytus vertybinius popierius, nereikėjo mokėti kapitalo prieaugio mokesčio, todėl dažnai būtų buvę nelogiška pabrangusias akcijas parduoti anksčiau nei praėjus nustatytam lengvatiniams vienerių metų laikotarpiui.

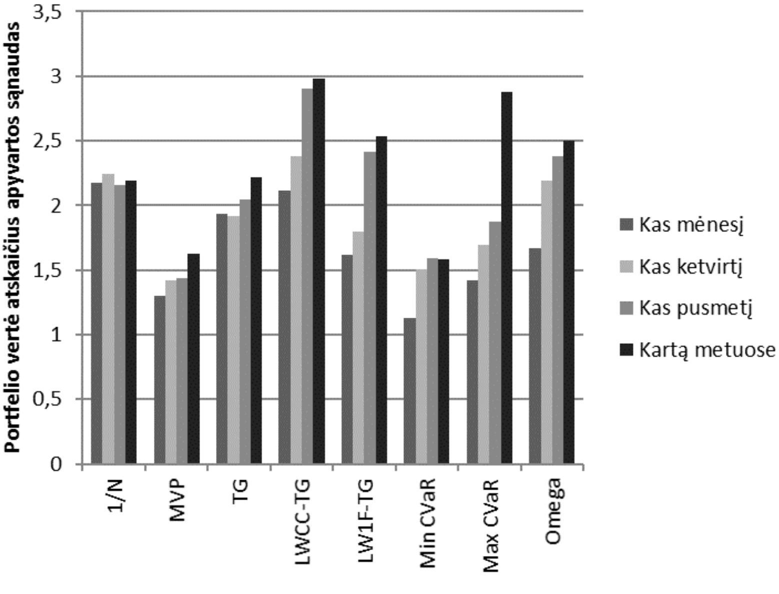
Siekiant nustatyti kaip svorių perskirstymo dažnumas įtakoja investicinių portfelių rezultatus, buvo pasirinkti Dow Jones Industrial Average indeksą sudarančių bendrovių akcijų mėnesiniai grąžų duomenys apimantys 1998 01 01–2013 04 30 laikotarpį (iš viso 30 akcijų ir 184 laikotarpiai) ir su šias duomenimis atgalinio patikrinimo būdu buvo atliktas skirtingų strategijų testavimas, portfelių svorius atitinkamai perskirstant vieną kartą per mėnesį, kartą per ketvirtį, kartą per pusmetį ir kartą metuose. Atliktų testų rezultatai A priede. Svarbiausi yra omega portfelio ir lyginamųjų portfelių bendrosios (R1) ir grynosios (R12) verčių rodikliai gauti tiriamo laikotarpio pabaigoje. Šių rodiklių palyginimai pateikti 3.2 ir 3.3 paveiksluose.



3.2 pav. Portfelio vertė neatskaičius apyvartos sąnaudų, kai svoriai perskirstomi kiekvieną mėnesį, kiekvieną ketvirtį, kas pusmetį ir kartą metuose.
(Šaltinis: sudaryta autoriaus)
Fig. 3.2. Portfolio value before turnover costs, with weights redistributed on a monthly basis, on a quarterly basis, on a semiannual basis, or on an annual basis.
(Source: created by the author)

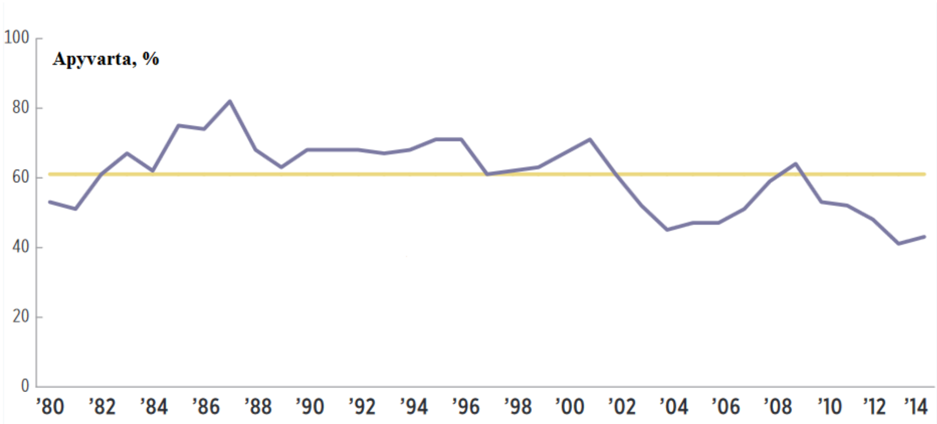
Kol apyvartos sąnaudų įtaka portfelio rezultatams nėra vertinama, portfelio pozicijų perskirstymo dažnumas nėra dominuojantis veiksnys galintis smarkiai įtakoti portfelių rezultatus. Kaip matyti iš lentelėse pateiktų duomenų portfelių verčių skirtumai visais atvejais (išskyrus Max CVaR portfelį ir TG portfelį) yra santykinai nedideli, be to, yra sunku išskirti kokius nors šių skirtumų tendencingumus – skirtumai atsiranda dėl skirtingų strategijų ir skirtingų svorių.

Kai vertinama portfelio apyvartos sąnaudų įtaka galutinei grynajai portfelio vertei (R12 rodiklis), akivaizdžiai matoma tendencija – mažėjant svorių perskirstymo periodiškumui, portfelio galutinė vertė didėja. Akivaizdu, kad mažėjant svorių perskirstymo dažnumui, mažėja portfelio apyvarta (R7 ir R8 rodikliai), o todėl ir apyvartos sąnaudos, o tai lemia didesnę grynąją portfelio grąžą. Išimtis yra vienodų svorių portfelis, kurio viso laikotarpio grąža, įvertinus apyvartos sąnaudas, mažai pasikeitė, kas yra visiškai natūralu, nes šios strategijos apyvarta yra nedidelė. Išimtis ir vėl yra Max CVaR portfelis, tačiau šis išskirtinis rezultatas gali būti priskirtas atsitiktinumui, kadangi vėlesni empiriniai testai naudojant tiek DJIA akcijų duomenis, tiek ir kitų rinkų duomenis, išskirtinio šios strategijos pranašumo nepatvirtino.



3.3 pav. Portfelio vertė atskaičius apyvartos sąnaudas, kai svoriai perskirstomi kiekvieną mėnesį, kiekvieną ketvirtį, kas pusmetį ir kartą metuose.
(Šaltinis: sudaryta autoriaus)
Fig. 3.3. Portfolio value after turnover costs, with weights redistributed on a monthly basis, on a quarterly basis, on a semiannual basis, or on an annual basis.
(Source: created by the author)

Nors grynosios grąžos augimas pastebimas ir toliau mažinant portfelių svorių perskirstymo dažnumą, t. y. nuo vieno karto per pusmetį iki vieno karto per metus, tolimesniems tyrimams pasirinktas pusės metų svorių perskirstymo dažnumas. Tokį pasirinkimą, sąlygojo tiek subjektyvus pasitenkinimas pasiektu kompromisu, tiek ir anksčiau gauti laiko grąžų sekų tyrimai, rodantys, kad statistiškai reikšminga tiriamų laiko eilučių autokoreliacija gali išlikti iki pusės metų.



3.4 pav. Investicinių fondų metinė apyvarta, 1980–2014
Fig. 3.4. Turnover rate experienced by equity fund investors, 1980–2014
(Source: Investment Company Institute[12])

Taip pat, pažvelgus į gautą strategijų apyvartos statistiką (R7 ir R8), matyti, kad svorius perskirstant kas pusmetį, tirtų portfelių metinė apyvarta nedaug viršija JAV investicinių fondų vidutinę metinę apyvartą 1980-2013 metais, t. y. 61 proc. arba apie 120 proc. perskaičiavus pagal disertacijoje taikomą apyvartos skaičiavimo metodiką (3.4 pav.).

3.3.2. Portfelių tyrimui naudotos duomenų aibės

Parenkant portfelio svorių perskirstymo periodiškumą, tyrimui naudoti Dow Jones Industrial Average indeksą sudarančių bendrovių akcijų mėnesio trukmės grąžų duomenys apimantys 1998 01 01–2013 04 30 laikotarpį (iš viso 30 akcijų ir 184 laikotarpiai).

Pagrindiniam omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių tyrimui naudoti trijų pasaulinių finansų rinkų duomenų rinkiniai:

- JAV Dow Jones Industrial Average indeksą sudarančių bendrovių akcijų mėnesiniai grąžų duomenys, apimantys 1998-01-30–2013-12-31 laikotarpį (iš viso 30 akcijų ir 192 laikotarpiai);
- JK FTSE indeksą sudarančių 30 atsitiktinai parinktų akcijų mėnesinės grąžos apimančios 2001-01-31–2014-05-30 laikotarpį

[12] 2015 Investment Company Factbook (http://www.icifactbook.org)

(norint apskaičiuoti klasikinių MV portfelių svorius, reikalinga atvirkštinė kovariacinė matrica, kurią galima rasti tik tuomet, kai stebėjimų skaičius M yra didesnis už akcijų skaičių N. Kadangi pasirinkta atgalinio testavo vieno laikotarpio trukmė yra lygi 36 mėn., t. y. M=36, todėl norint rasti klasikinių portfelių svorius reikėjo mažinti akcijų skaičių arba naudoti savaitinius arba dienos grąžų duomenis. Siekiant, kad FTSE indekso akcijų portfelius būtų galima tiesiogiai palyginti su DJIA akcijomis, buvo paimta atsitiktinė 30 akcijų imtis);

- Europos EURO STOXX 50 indeksą sudarančių bendrovių akcijų savaitiniai grąžų duomenys apimantys 2002-01-04–2013-12-31 laikotarpį (iš viso 50 akcijų ir 627 laikotarpiai).

3.3.3. Lyginamieji portfeliai ir efektyvumo įvertinimo kriterijai

Omega portfeliams objektyviai įvertinti jų rezultatai palyginti su rezultatais, gautais naudojant kitas optimizavimo strategijas. Iš viso darbe lyginami devyni portfeliai arba strategijos: klasikiniai H. Markovičiaus mažiausios dispersijos ir liestinės taško arba maksimalaus Šarpo rodiklio portfeliai (atitinkamai pažymėti MV ir TG); liestinės taško portfeliai optimizuoti naudojant Ledoit ir Wolf pasiūlytas vienodų koreliacijų ir „paslinktą“ kovariacines matricas (atitinkamai pažymėti LW_{CC}-TG ir LW_{1F}-TG), mažiausios sąlyginės rizikos vertės (Min CVaR) ir maksimalios grąžos-rizikos santykio sąlyginės rizikos vertės (Max CVaR), vienodų svorių portfelis (1/N), Maillard, Roncalli ir Teïletche (2010) pasiūlytas vienodos rizikos portfelis (ERC) ir Varadi, Kapler ir Rittenhouse minimalios koreliacijos portfelis (MCA).

Optimizavimo metu gauti portfeliai buvo vertinami įvairiais pjūviais: lyginant bendrą grąžą arba vertės indeksą, vidutinę metinę grąžą, riziką, portfelio apyvartą, reikalingą konkrečiai strategijai įgyvendinti, portfelio koncentraciją ir grynąją grąžą, gautą atėmus sąnaudas patirtas perskirstant portfelių svorius. Portfelių rezultatams įvertinti iš viso panaudota 12 rodiklių. Be įprastų rizikos rodiklių – standartinio nuokrypio ir Šarpo rodiklio pateikiamos viso laikotarpio maksimalios ir minimalios metinės grąžos reikšmės. Vertinant portfelio apyvartą – pateikiama vidutinė metinė apyvarta ir bendra, t. y. viso laikotarpio apyvarta.

Portfelio koncentracijai įvertinti naudojamas Gini koeficientas, skaičiuojamas pagal italų statistiko Corrado Gini sukurtą metodą. Koeficientas kinta skalėje nuo 0 iki 1 – jei Gini koeficiento reikšmė yra 1, tai rodo visišką portfelio koncentraciją (portfelį sudaro tik viena pozicija), o gerai išskaidyto vienodų svorių portfelio Gini koeficientas lygus 0. Gini koeficientą galima išreikšti procentais, jį dauginat iš 100. Rezultatų lentelėje pateikiamos vidutinės Gini koeficiento reikšmės gautos per visą tiriamą laikotarpį.

Galiausiai pateikiama portfelio grynoji metinė grąža ir grynoji vertė, gaunamos atskaičius proporcinius apyvartos mokesčius, taip pat ir Šarpo rodiklis apskaičiuotas naudojant grynąją grąžą.

Pagrindinis kriterijus vertinant strategijų patrauklumą yra hipotetinio portfelio galutinė bendroji ir grynoji vertės. Nors rezultatų lentelėse pateikiamos strategijų Šarpo rodiklio reikšmės, tačiau gauti rezultatai nebūtinai reiškia, kad omega portfelio rizikos-grąžos rodikliai iš tiesų yra geresni – gauti rezultatai gali būti tiesiog atsitiktinės imties paklaidos rezultatas.

Šarpo rodiklių statistiniam reikšmingumui nustatyti dažnai naudojamas Jobson ir Korkie (1981) bei Memmel (2003) parametrinis testas (pvz. Amenc, Goltz, Le Sourd 2009) remiasi prielaida, kad kintamieji yra nepriklausomi ir normaliai pasiskirstę (t. y. i.i.d.), tačiau finansinės laiko eilutės retai tenkina šią prielaidą.

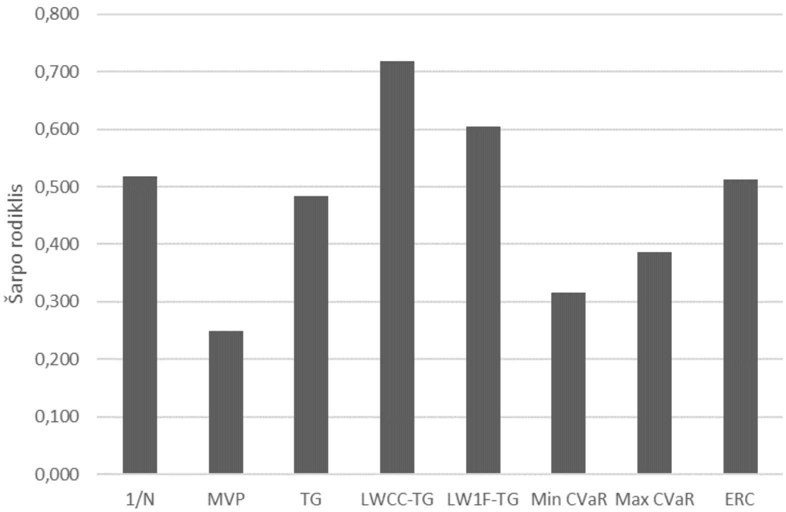
Todėl šiame darbe Šarpo rodiklio statistiniam reikšmingumui nustatyti panaudotas Ledoit ir Wolf (2008) pasiūlytas neparametrinis testas, paremtas ciklinės blokų įkelties (angl. *circular block bootstrap*) metodu (Politis ir Romano 1992).

Nulinė hipotezė, kad portfelių Šarpo rodiklio skirtumas yra lygus nuliui, t. y. $H_0{:}\Delta = 0$, atmetama jei apskaičiuotas reikšmingumo lygmuo „LW p-level“ yra mažesnis už pasirinktą 5 % ($\alpha = 0{,}05$) reikšmingumo lygmenį. Įkelties bloko dydis priklauso nuo tiriamos duomenų imties ir nustatomas naudojant Loh (1987) pasiūlytą šio parametro parinkimo funkciją. Visos reikšmingumo lygmens reikšmės gautos kartojant imtis 5000 kartų. Gauti rezultatai rodo, kad omega portfelio Šarpo rodiklis nėra reikšmingai aukštesnis už kitų portfelių rodiklius. Kriterijaus p-reikšmės pateiktos 3.1 lentelės „LW p-level“ eilutėje.

3.1 lentelė. Šarpo rodiklių reikšmingumo kriterijai (sudaryta autoriaus)
Table 3.1. P-values of the Sharpe ratios (compiled by the author)

Rodiklis	1/N	MPV	TG	LW_{CC}-TG	LW_{1F}-TG	Min CVaR	Max CVaR	ERC
Skirtumas	–0,034	–0,113	–0,049	0,015	–0,016	–0,095	–0,074	–0,037
LW p-level	0,694	0,194	0,438	0,768	0,752	0,256	0,33	0,62

Nepaisant to, kad Šarpo rodiklis yra populiariausias ir dažniausiai naudojamas grąžos-rizikos matas, jo skaičiavimas paremtas dispersija, ir todėl teigiamą asimetriją arba pelną šis rodiklis vertina kaip rizikos „šaltinį“. Dėl šios priežasties, rezultatai buvo papildomai įvertinti panaudojant perviršio potencialo rodiklį.



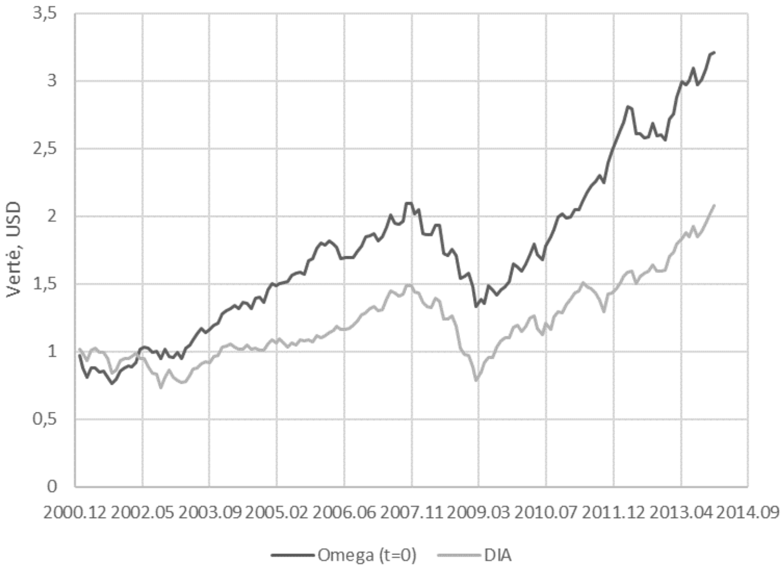
3.5 pav. Šarpo rodikliai
Fig. 3.5. Sharpe ratios

3.4. Omega portfelių savybės kintant slenkstinei grąžos normai

Jau pradiniame portfelio optimizavimo strategijų testavimo etape, kuris buvo atliktas siekiant parinkti optimalų portfelių perskirstymo periodiškumą, gauti rezultatai parodė, kad omega funkcijos atžvilgiu optimizuoti portfeliai iš kitų strategijų išsiskiria gerais rezultatais. Pasirinkus pusės metų svorių perskirstymo periodiškumą ir vertinant portfelių pasiektą grynąją vertę, t. y. vertę gautą atėmus apyvartos mokesčius, Omega portfelis pajamingumu nusileido tik Ledoit ir Wolf LW_{CC}-TG bei LW_{1F}-TG portfeliams (LW_{1F}-TG portfelio pranašumas buvo labai nežymus), tačiau aplenkė kitus portfelius, įskaitant 1/N portfelį.

Pradiniame testavimo etape buvo pasirinkta dažnai naudojama nulinė slenkstinė grąža, tačiau vienas iš pagrindinių darbo uždavinių – ištirti kintančios slenkstinės grąžos poveikį omega portfelio savybėms.

Lyginant geriausią omegą portfelio rezultatą, pasiektą keičiant slenkstinę grąžą su rinkos indekso portfeliu – DIA fondo akcijomis, omega portfelio pasiekta galutinė vertė buvo 53 procentais didesnė (3.6. pav.). Be to, DIA fondo akcijų galutinė vertė pateikta neįvertinus valdymo mokesčio (tiesa, DIA fondas yra pasyviai valdomas indekso fondas ir metinis jo valdymo mokestis yra labai nedidelis).



3.6 pav. Omega portfelio ir rinkos indekso (DIA fondo) kainų pokyčiai
Fig. 3.6. Price changes of the omega portfolio and DIA ETF

Atliekant omega portfelių tyrimus, slenkstinė grąža τ buvo keičiama intervale nuo 0 iki 5 proc., neatsižvelgiant į istorinių grąžų pokyčių ribas. Nustatyti didesnę slenkstinę grąžą nei maksimali istorinė vertybinių popierių grąža nėra tikslinga, tačiau siekiant supaprastinti ir paspartinti skaičiavimus, istorinių grąžų maksimali reikšmė nebuvo tikrinama. Galutiniams tyrimo rezultatams, tai jokios įtakos neturėjo. Pasirinktas intervalo žingsnis – 0,1 proc.

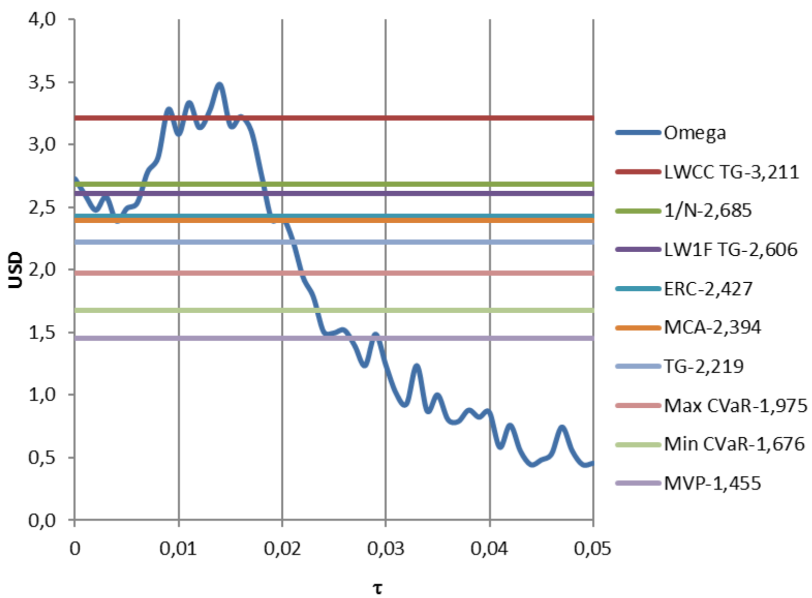
Gauti tyrimo rezultatai pateikti B priede. Rezultatų lentelėse pateikiami jau apibendrinti duomenys: kitimo intervalas nuo 0 iki 4 proc., o intervalo žingsnis – 0,5 proc. Taip pat pateikiami ir geriausio rezultato duomenys: slenkstinė grąža kuriai esant buvo gautas toks rezultatas, portfelio vertė ir kiti pagrindiniai portfelių pasiekti rodikliai. 3.7–3.9 paveiksluose pateikta visa omega portfelių vertės pokyčių dinamika, gauta kintant slenkstinei grąžai ir, palyginimui, lyginamųjų strategijų laikotarpio pabaigoje gautos grynosios vertės. 3.2–3.4 lentelėse pateikiami lyginamųjų portfelių pagrindiniai rodikliai, taip pat ir geriausią rezultatą pasiekusio omega portfelio pagrindiniai rodikliai.

3.2 lentelė. Omega portfelio ir lyginamųjų DJIA indekso akcijų portfelių pagrindiniai rodikliai, kai svoriai perskirstomi kas pusę metų (Šaltinis: sudaryta autoriaus)
Table 3.2. The performance of the omega portfolio and benchmark portfolios of DJIA index where weights are reallocated every six months (Source: created by the author)

Rodik -lis	1/N	MV	TG	LW_{CC} TG	LW_{1F} TG	Min CVaR	Max CVaR	ERC	Omega (τ=1,4)
R1	2,753	1,684	2,677	3,841	3,116	2,148	2,459	2,527	4,340
R2	8,10	4,09	7,87	10,91	9,14	6,06	7,17	7,39	11,95
R3	15,27	11,99	13,33	13,25	12,85	13,23	14,25	13,84	15,61
R4	34,32	21,96	34,81	36,06	34,39	22,40	36,23	30,24	36,55
R5	–28,52	–24,57		–21,38	–24,94	–25,14	–26,81	–28,10	–13,8
R6	53,07	34,10	59,04	82,30	71,09	45,77	50,30	53,43	76,57
R7	19	111	143	138	137	189	166	31	170
R8	248	1442	1857	1795	1778	2452	2155	404	2207
R9	4	85	90	90	87	87	91	23	92
R10	7,91	2,98	6,44	9,53	7,77	4,17	5,51	7,08	10,26
R11	51,82	24,85	48,32	71,88	60,45	31,52	38,66	51,18	65,70
R12	2,685	1,455	2,219	3,211	2,606	1,676	1,975	2,427	3,481

Pastabos. Rodikliai: R1 – portfelio bendroji vertė, USD; R2 – metinė grąža, %; R3 – metinis standartinis nuokrypis, %; R4 – maksimali metinė grąža, %; R5 – minimali metinė grąža; R6 – Šarpo rodiklis; R7 – vidutinė metinė apyvarta, %; R8 – bendra laikotarpio apyvarta, %; R9 – vidutinis Gini koeficientas; R10 – grynoji portfelio grąža, %; R11 – Šarpo rodiklis apskaičiuotas su grynąją grąža, %; R12 – Grynoji portfelio vertė laikotarpio pabaigoje, USD. Portfeliai: 1/N – vienodų svorių; MV – minimalios rizikos; TG – liestinės; LW_{CC}-TG – Ledoit ir Wolf vienodų koreliacijų liestinės; LW_{1F}-TG – Ledoit ir Wolf rinkos indekso; Min CVaR – mažiausios sąlyginės rizikos vertės; Max CVaR maksimalios grąžos – rizikos santykio sąlyginės rizikos vertės; ERC – vienodos rizikos; Omega (didžiausios grynosios grąžos).

Notes. Ratios: R1 – Cumulative raw return, USD; R2 – Annual returns, %; R3 – Annualized standard deviation; R4 – Best annual gain, %; R5 – worst annual loss, %; R6 – Sharpe Ratio Annualized; R7 – Average annual turnover, %; R8 – Total portfolio turnover, %; R9 – average Gini coefficient; R10 – net (after turnovert tax) annual return, %; R11 – after-tax Sharpe ratio; R12 – Cumulative net return. Portfolios: 1/N – Equal-Weight; MV – minimum variance; TG – Tangent; LW_{CC}-TG – Ledoit and Wolf tangent with constant correlation matrix; LW_{1F}-TG – Ledoit and Wolf tangent with single-index covariance matrix; Min CVaR – Minimum CVaR; Max CVaR – CVaR Max Return/Risk Ratio; ERC – Equal risk; Omega (the maximum return portfolio).



3.7 pav. DJIA akcijų rinkos hipotetinio 1 USD portfelio galutinė vertė
Fig. 3.7. Value growth of a hypothetical $1 investment in stocks from the DJIA index universe where weights are re-allocated every six months (Source: created by the author)

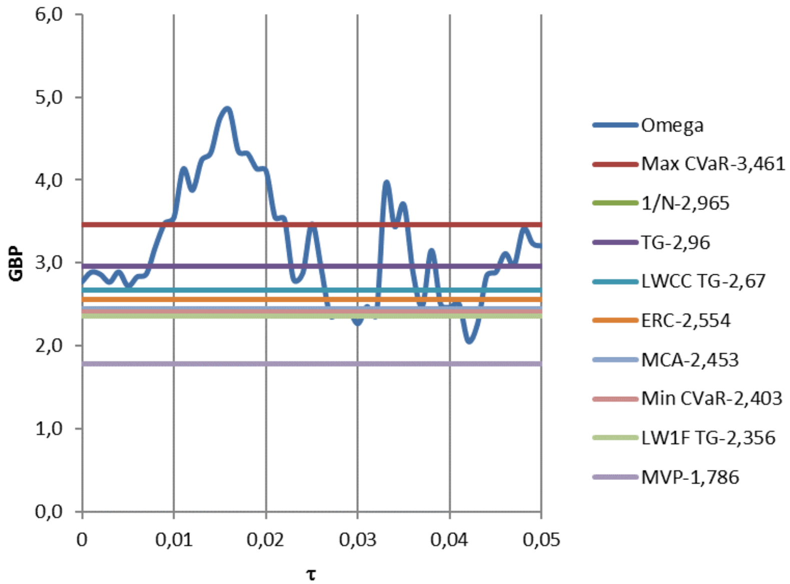
3.3 lentelė. Omega portfelio ir lyginamųjų FTSE 100 indekso akcijų portfelių pagrindiniai rodikliai, kai svoriai perskirstomi kas pusę metų (Šaltinis: sudaryta autoriaus)
Table 3.3. The performance of the omega portfolio benchmark portfolios of FTSE 100 index where weights are reallocated every six months (Source: created by the author)

Rodik -lis	1/N	MV	TG	LW_{CC} TG	LW_{1F} TG	Min CVaR	Max CVaR	EQR	Omega (τ=1,6)
R1	3,032	2,036	3,467	3,150	2,757	2,936	4,289	2,637	5,920
R2	11,14	7,00	12,57	11,55	10,14	10,80	14,87	9,67	18,46
R3	14,29	12,11	15,29	17,25	15,82	13,85	16,47	12,57	24,36
R4	35,64	24,47	32,92	27,17	27,62	26,64	33,08	24,29	83,44
R5	–26,25	–15,29	–35,48	–44,05	–43,45	–8,88	–29,08	–24,13	–34,21
R6	77,97	57,84	82,20	66,93	64,09	78,01	90,33	76,95	75,75
R7	21	118	144	151	143	182	194	29	181
R8	226	1303	1580	1658	1569	1998	2130	322	1995
R9	5	83	89	88	85	89	93	24	91

3.3 lentelės pabaiga
End of Table 3.3.

R10	10,94	5,82	11,14	10,04	8,71	8,99	12,94	9,38	16,64
R11	76,53	48,06	72,81	58,19	55,07	64,90	78,57	74,62	68,31
R12	2,965	1,786	2,960	2,670	2,356	2,403	3,461	2,554	4,849

Pastaba: Paaiškinimai po 3.2 lentele.
Note: Exlanations under Table 3.2.



3.8 pav. FTSE 100 indekso akcijų hipotetinio 1 GBP portfelio galutinė vertė
Fig. 3.8. Value growth of a hypothetical 1£ investment in stocks from the FTSE 100 index universe where weights are reallocated every six months
(Source: created by the author)

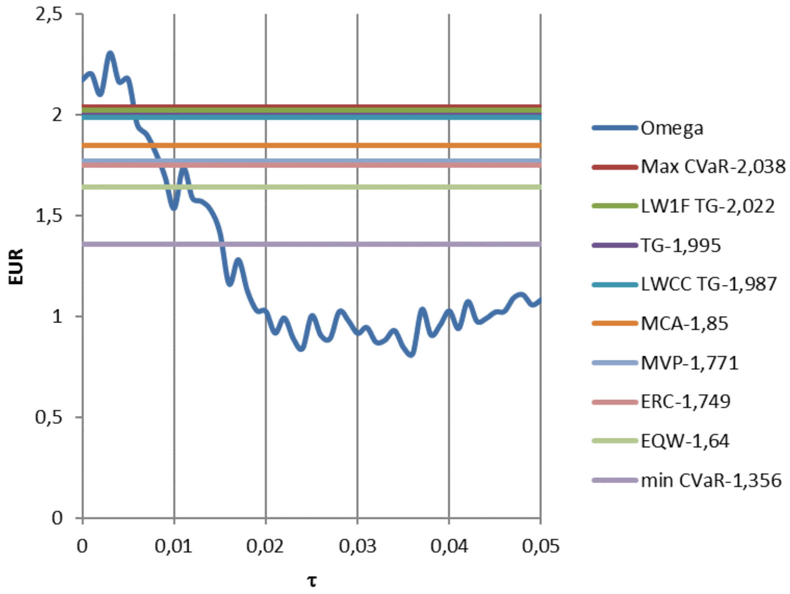
3.7–3.9 paveiksluose pateikti rezultatai rodo, kad omega atžvilgiu optimizuotų portfelių grąža ir rizika priklauso nuo investuotojo pasirinktos slenkstinės grąžos: augant slenkstinei grąžai, auga ir portfelio grynoji vertė, tačiau kartu auga ir portfelio rizika (tai galima matyti, pažiūrėjus į portfelių Šarpo rodiklius 3.2–3.4 lentelėse). Visais atvejais omega portfeliai pasižymėjo rezultatyvumu – testuojant su trimis akcijų rinkiniais, naudojant trijų skirtingų akcijų rinkų duomenis, omega atžvilgiu optimizuoti portfeliai sugebėjo pralenkti kitas 9 „konkurse“ dalyvavusias portfelio optimizavimo strategijas.

3.4. lentelė. Omega portfelio ir lyginamųjų EURO STOXX 50 akcijų rinkos portfelių pagrindiniai rodikliai, kai svoriai perskirstomi kas pusę metų (Šaltinis; sudaryta autoriaus)
Table 3.4. The performance of the omega portfolio and benchmark portfolios of EURO STOXX 50 index where weights are reallocated every six months (Source: created by the author)

Rodik -lis	1/N	CMV	CTG	LW_{CC} TG	LW_{1F} TG	Min CVaR	Max CVaR	ERC	Omega (τ=0,3)
R1	1,672	2,007	2,404	2,402	2,412	1,640	2,581	1,804	2,748
R2	5,27	7,21	9,17	9,16	9,20	5,07	9,94	6,08	10,64
R3	17,40	14,14	15,45	15,49	15,36	14,46	16,55	15,94	15,89
R4	28,75	26,21	38,09	37,33	36,26	23,21	36,47	26,74	31,95
R5	–41,63	–39,13	–44,84	–44,18	–4,71	–34,50	–46,64	–40,33	–39,19
R6	30,31	51,04	59,36	59,14	59,92	35,04	60,09	38,14	66,96
R7	20	124	187	191	177	190	238	31	176
R8	195	1242	1873	1908	1770	1898	2381	311	1762
R9	4	90	94	94	93	92	95	19	83
R10	5,08	5,97	7,30	7,25	7,43	3,17	7,56	5,77	8,88
R11	29,19	42,25	47,24	46,83	48,39	21,92	45,70	36,19	55,87
R12	1,640	1,771	1,995	1,987	2,022	1,356	2,038	1,749	2,308

Pastaba: Paaiškinimai po 3.2 lentele.
Note: Exlanations under Table 3.2.

Be to, omega atžvilgiu optimizuoti portfeliai pasižymėjo stabilumu slenkstinės grąžos vertei τ kintant intervale nuo 1 iki 2 proc. EURO STOXX 50 akcijų optimali slenkstinė grąža yra mažesnė, tačiau šiuo atveju buvo tiriami savaitiniai duomenys. Didžiausia portfelio grąža buvo pasiekta pasirinkus 0,3 proc. savaitinę slenkstinę grąžą, kas atitiktų 1,2 proc. mėnesinę grąžą. Alternatyvios portfelių optimizavimo strategijos stabilumu nepasižymėjo: JAV rinkoje geriausiai pasižymėjo LW_{CC}-TG portfelis, tačiau kitose rinkose šis portfelis net nepateko į geriausių strategijų trejetuką. Euro zonos ir JK akcijų rinkose geriausius rezultatus parodė Max CVaR strategija, tačiau JK rinkoje jos pranašumas buvo minimalus. Žiūrint į antroje ir trečioje vietoje atsidūrusias strategijas situacija panaši: JAV rinkoje 2–3 vietas užėmė 1/N ir LW_{1F}-TG, Euro zonos rinkoje – 1/N ir TG, JK – LW_{1F}-TG ir TG portfeliai.



3.9 pav. EURO STOXX 50 akcijų rinkos hipotetinio 1 EUR portfelio galutinė vertė
Fig. 3.9. Value growth of a hypothetical 1 EUR investment in stocks from the EURO STOXX 50 index universe where weights are reallocated every six months (Source: created by the author)

Atkreiptinas dėmesys, kad omega portfelio slenkstinei grąžai viršijus 2 proc. ribą, portfelio grąža paprastai ima mažėti, o rizika toliau auga. Tai galima paaiškinti tuo, meta-euristiniai algoritmai „sugeba rasti sprendinį“ net ir tokiais atvejais, kai slenkstinė grąža viršija istorinių duomenų pajamingumo rodiklius (naudojant klasikinius tiksliuosius optimizavimo algoritmus, nustačius pernelyg aukštus optimizavimo parametrus, sprendinys tampa negalimu), tačiau akivaizdu, kad toks sprendinys dažniausiai nėra ekonomiškai ar finansiškai prasmingas.

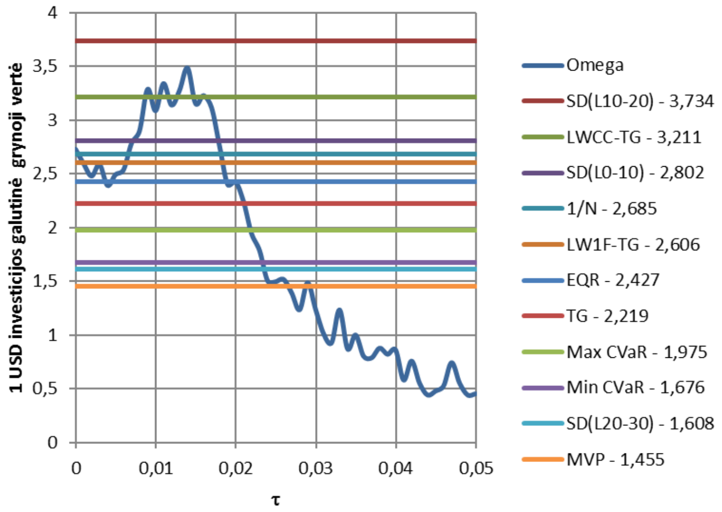
3.5. Slenkstinės grąžos parinkimas taikant stochastinio dominavimo kriterijų

Tiriant omega funkcijos atžvilgiu optimizuotus portfelius, už imties ribų gauti rezultatai parodė, kad slenkstinei grąžai kintant 1–2 proc. ribose (naudojant mėnesinius grąžų rezultatus), omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių grąža ir galutinė vertė ženkliai išaugo ir viršijo visų konkuruojančių portfelio strategijų rezultatus. Gautas rezultatas yra pakankamai svarbus, nes praktikoje slenkstinė grąžą dažnai prilyginama nerizikingų investicijų grąžai arba tiesiog nuliui. Tačiau, praktiniu požiūriu, minėtas rezultatas nėra visiškai patenkinamas dėl keleto priežasčių: a) optimizuodamas portfelį, kiekvieno portfelio formavimo arba perbalansavimo laikotarpio pradžioje investuotojas turi pasirinkti vieną konkrečią slenkstinės grąžos reikšmę; b) siūlomas 1–2 proc. slenkstinės grąžos intervalas yra gautas atsižvelgiant į rezultatus gautus naudojant istorinius duomenis, todėl negalima garantuoti, kad pasirinkus kitą duomenų imtį, ar kitą laikotarpį, optimalaus intervalo ribos nepasikeis; c) galiausiai, remiantis tradiciniu vidurkio-dispersijos kriterijumi, aukštesnė portfelio grąža susijusi su didesne rizika (vėlgi, tik tam tikrame intervale, kurį viršijus, toliau paprastai auga tik rizika) ir priimdamas sprendimą, investuotojas turi vadovautis polinkiu rizikuoti ar naudotis kažkokia kitokia pasirinkta naudos funkcija.

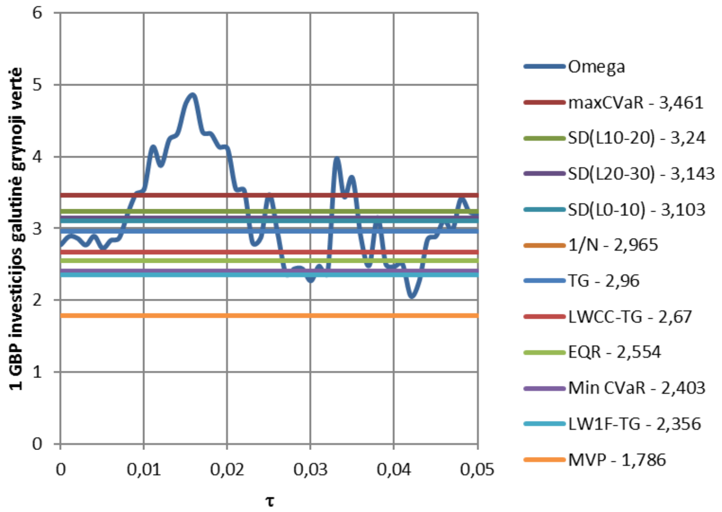
Kaip vienas iš galimų būdų investuotojo ribinei grąžai parinkti, buvo panaudotas stochastinio dominavimo kriterijus. Pradiniu testavimo laikotarpiu gauti omega atžvilgiu optimalūs portfeliai buvo padalinti į tris grupes: 1 grupė – portfeliai, gauti naudojant 0–1 proc. mėnesinę slenkstinę grąžą („SD L0-10“); 2 grupė – portfeliai, gauti naudojant 1–2 proc. slenkstinę grąžą („SD L10-20“); ir 3 grupė – portfeliai, gauti naudojant 2–3 proc. slenkstinę grąža („SD L10-20“). Kiekvieną iš pasirinktų trijų grupių galima susieti su investuotojų polinkiu rizikuoti, t. y. 1 grupė atitiktų mažos rizikos arba konservatyvių investuotoju grupę, 2 – didesnės rizikos grupę, ir taip toliau. Toliau kiekvienoje grupėje buvo nustatyti stochastiškai dominuojantys portfeliai ir šių portfelių slenkstinė grąža panaudota sudarant ateinančio laikotarpio investicijų portfelį. Panaudojant šį metodą gautų omega portfelių rezultatai pateikti C priede ir 3.10–3.13 paveiksluose.

Gauti rezultatai rodo, kad stochastinio dominavimo kriterijus gali būti sėkmingai panaudotas renkant slenkstinės grąžos normą. „SD L10-20“ strategija aplenkė konkuruojančias strategijas visais tirtais atvejais, išskyrus JK rinką, kurioje ji užėmė antrą vietą. Pirmą vietą JK akcijų rinkoje ir vėl užėmė Max CVaR strategija, „SD L10-20“ strategija jos aplenkti nesugebėjo. Tačiau, kaip jau buvo minėta, kitose rinkose Max CVaR strategija nepasižymėjo nei gerais rezultatais, nei stabilumu.

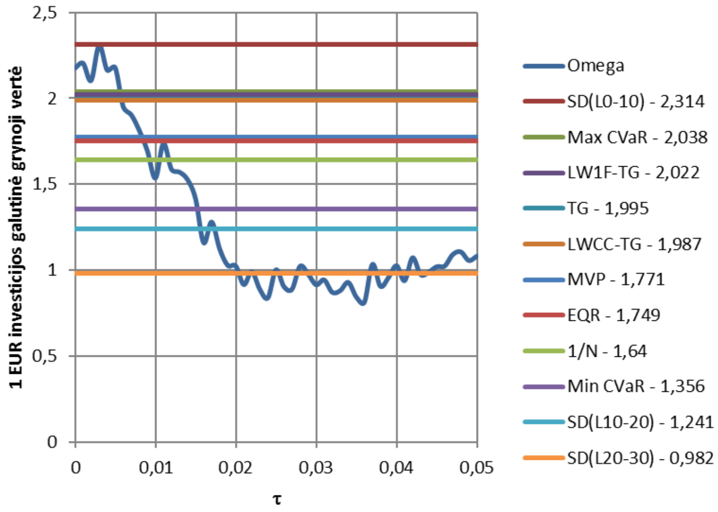
Siekiant dar kartą patikrinti rezultatų stabilumą euro zonos rinkose, papildomas strategijų tyrimas buvo atliktas Vokietijos DAX30 akcijų rinkoje. Gauti rezultatai ir vėl patvirtino bendrą tendenciją – rezultatyvumu išsiskyrė „SD L10-20“ ir „SD L20-30“ strategijos, o JK rinkoje gerai pasižymėjusi Max CVaR strategija, atsidūrė priešpaskutinėje vietoje, vertinant pagal pasiektą grynąją vertę. DAX30 rinka išsiskyrė tuo, kad omega strategijos grynoji vertė toliau augo, slenkstinei grąžai ženkliai viršijus 2 proc. ribą. Šis išskirtinis rezultatas būdingas tik Vokietijos rinkai, todėl gauti rezultatai turi būti vertinami atsargiai – gerą rezultatą galėjo lemti viena ar kelios smarkiai „augusios“ akcijos (natūralu, kad tokios akcijos pasižymi teigiama asimetrija ir omega funkcija jas „pasirinko“).



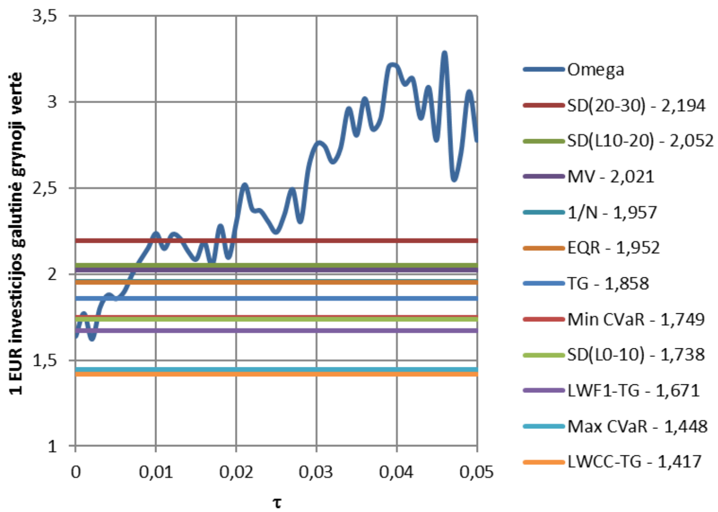
3.10 pav. DJIA akcijų rinkos hipotetinio 1 USD portfelio galutinė grynoji vertė
Fig. 3.10. The final value of a hypothetical 1 USD investment in stocks from the DJIA index universe (Source: created by the author)



3.11 pav. FTSE 100 indekso akcijų hipotetinio 1 GBP portfelio galutinė vertė
Fig. 3.11. The final value of a hypothetical 1GBP investment in stocks from the FTSE 100 index universe (Source: created by the author)



3.12 pav. EURO STOXX 50 akcijų rinkos hipotetinio 1 EUR portfelio galutinė vertė
Fig. 3.12. The final value of a hypothetical 1 EUR investment in stocks from the EURO STOXX 50 index universe (Source: created by the author)



3.13 pav. DAX30 akcijų rinkos hipotetinio 1 EUR portfelio galutinė vertė
Fig. 3.13. Value growth of a hypothetical 1 EUR investment in stocks from the DAX30 index universe (Source: created by the author)

Pažymėtina, kad bandymas stochastinio dominavimo kriterijų panaudoti visai omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių aibei, neskirstant jų į atskiras grupes (t. y. L0-10, L10-20 ir L20-30) nebuvo sėkmingas. Galimas tokios nesėkmės paaiškinimas – pernelyg didelis „šokinėjimas“ nuo vienos investavimo strategijos prie kitos didina portfelio apyvartos sąnaudas „neatnešdamos“ laukiamo rezultato.

Nors grynoji portfelio vertė, t. y. investuotojo pasiekta galutinė investicijos vertė neabejotini yra vienas svarbiausių *ex-post* kriterijų, tačiau kuomet lyginame portfelius pasižyminčius skirtingomis rizikos charakteristikomis, šis kriterijus gali būti nepakankamas. Pavyzdžiui, pažvelgę į strategijų pasiektus Šarpo rodiklius, matome SD L10-20 strategija nepasižymi išskirtinai gerais rezultatais. Tačiau Šarpo rodiklis įvertina tik du pirmuosius momentus, ir portfeliai pasižymintis teigiamu ekscesu, gali būti tinkamai neįvertinti naudojant šį klasikinį rizikos – grąžos matą. Šią prielaidą patvirtina perviršio potencialo rodiklis (UPR), leidžiantis įvertinti asimetrišką finansinių grąžų pobūdį. Strategijų vertinimui panaudojus UPR rodiklį „SD L10-20“ strategijos vėl tapo pirmaujančiomis. UPR rodiklio nepavyko apskaičiuoti tik FT100 akcijoms dėl gautos nulinės vardiklio reikšmės. Gauta nulinė UPR rodiklio reikšmė, reiškia kad neigiama rizika yra lygi 0. Tačiau jei gautą nulinę vardiklio reikšmę tiesiog pakeistume nedidele verte, vėl patvirtintume SD L10-20 strategijos pranašumą.

3.6. Trečiojo skyriaus išvados

1. Aktyvios portfelio valdymo strategijos, lyginant su pasyviomis, lemia didesnę portfelio pozicijų kaitą, o tai reiškia didesnes apyvartos sąnaudas ir mažesnę portfelio savininkams tenkančią grąžą. Apyvartos sąnaudas galima sumažinti, mažinant portfelio svorių perskirstymo dažnumą, t. y. taktiškai balansuojant tarp strateginių tikslų ir mažesnių apyvartos sąnaudų. Darbe empirinio tyrimo būdu nustatyta, kad kas pusę metų vykdomas portfelių pozicijų perskirstymo dažnumas yra pakankamai geras kompromisas tarp noro išlaikyti pasirinktą optimizavimo strategiją, ir siekio maksimaliai sumažinti portfelio apyvartos sąnaudas.
2. Empirinio tyrimo rezultatai rodo, kad omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių grąža ir rizika priklauso nuo investuotojo pasirinktos slenkstinės grąžos: augant slenkstinei grąžai auga portfelio grąža ir jo vertė, tačiau kartu auga ir portfelio rizika. Tačiau pasiekus tam tikrą slenkstinę ribą, iš esmės ima augti tik portfelio rizika. Taip atsitinka todėl, kad naudojant evoliucinius optimizavimo algoritmus, skirtingai nei klasikinius, galima „rasti“ sprendinį net ir nustačius pernelyg dideles optimizavimo parametrų reikšmes. Žinoma, tokį sprendinį yra sunku

logiškai ar ekonomiškai pagrįsti, todėl viršutinė slenkstinė grąža turėtų būti ribojama atsižvelgiant į maksimalią istorinę vertybinių popierių grąžą.

3. Pagrindinis investavimo strategijos rezultatyvumo rodiklis – pasiekta grynoji vertė arba vertės prieaugis. Tyrimo metu gauti rezultatai rodo, kad omega funkcijos atžvilgiu optimizuoti portfeliai išsiskyrė savo rezultatyvumu. Testuojant su trimis skirtingais akcijų rinkiniais paimtais iš trijų skirtingų pasaulinių akcijų rinkų, omega portfelių pasiekta galutinė vertė buvo didesnė, nei vertė gauta naudojant kitas 9 konkuruojančias portfelio optimizavimo strategijas.
4. Be to, omega atžvilgiu optimizuoti portfeliai pasižymėjo ir stabilumu. Geriausi strategijos rezultatai pasiekti slenkstinės grąžai τ kintant intervale nuo 1 iki 2 proc. EURO STOXX 50 akcijų optimalios slenkstinės grąžos intervalas mažesnis, tačiau šiuo atveju buvo tiriami savaitiniai duomenys, o didžiausia portfelio grąža buvo pasiekta pasirinkus 0,3 proc. savaitinę slenkstinę grąžą, kas atitiktų 1,2 proc. mėnesinę grąžą.
5. Atliktas empirinis tyrimas parodė, kad stochastinio dominavimo kriterijus gali būti panaudotas pasirenkant slenkstinę grąžos normą. Atsižvelgiant į investuotojų polinkį rizikuoti buvo pasirinkti trys galimi slenkstinės grąžos intervalai – 0–1 proc., 1–2 proc., ir 2–3 proc., iš kurių vadovaujantis stochastinio dominavimu kriterijumi ir buvo parenkama ateinančio laikotarpio slenkstinė grąža. Gauti rezultatai dar kartą patvirtino, kad omega atžvilgiu optimizuoti portfeliai maksimalų potencialą pasiekia 1–2 proc. slenkstinės grąžos ribose, tačiau naudojant stochastinio dominavimo kriterijų, sumažėja subjektyvaus pasirinkimo arba „spėliojimo“ būtinybė.

Bendrosios išvados

1. Atlikta teorinė analizė parodė, kad nepaisant didelio susidomėjimo asimetriniais rizikos matais, tikslinės arba slenkstinės grąžos poveikis investicinio portfelio rizikos-grąžos charakteristikoms yra menkai ištirtas.
2. Atlikta klasikinių investicinio portfelio optimizavimo metodų bei rizikos rodiklių analizė padėjo nustatyti portfelio optimizavimui tinkamiausią rizikos-grąžos matą – omegą rodiklį. Šis rodiklis gerai atitinka šiuolaikinę rizikos koncepciją, kuri riziką apibrėžia kaip netikrumo poveikį tikslams.
3. Omega rodiklis apskaičiuojamas naudojant pilną investicijų skirstinio informaciją, todėl jo pagalba galima įvertinti finansinių grąžų asimetriškumą.
4. Empirinio tyrimo rezultatai patvirtino hipotezę, kad tikslinės arba slenkstinės grąžos pagalba investuotojai, atsižvelgdami į savo investicinius tikslius ir polinkį rizikuoti, gali efektyviai kontroliuoti portfelio rizikos-grąžos charakteristikas.
5. Gauti rezultatai patvirtina omega funkcijos atžvilgiu optimizuotų portfelių pranašumą. Testuojant su trimis skirtingais akcijų rinkiniais paimtais iš trijų skirtingų pasaulinių finansų rinkų, omega funkcijos

atžvilgiu optimizuotų portfelių pasiekta galutinė vertė yra didesnė nei 9 lyginamųjų portfelių, sudarytų naudojant alternatyvias optimizavimo strategijas.

6. Nustatyta, kad omega funkcijos atžvilgiu optimizuoti portfeliai pasižymi stabilumu slenkstinei grąžai kintant intervale nuo 1 iki 2 proc. Tiriant EURO STOXX 50 akcijų portfelius, optimalios slenkstinės grąžos intervalas mažesnis, tačiau šiuo atveju buvo naudojami savaitiniai duomenys. Didžiausia portfelio grąža buvo gauta pasirinkus 0,3 proc. savaitinę slenkstinę grąžą, o tai atitiktų 1,2 proc. mėnesinę grąžą.

7. Tyrimas taip pat parodė, kad nei viena lyginamoji optimizavimo strategija nepasižymi rezultatų stabilumu: JAV rinkoje geriausiai pasižymėjo LW_{CC}-TG strategija, tačiau kitose rinkose ji nepateko į geriausių strategių trejetuką. Euro zonos ir JK akcijų rinkose geriausiai pasirodė Max CVaR strategija, tačiau JK rinkoje jos pranašumas buvo minimalus. Žiūrint į antrą ir trečią vietas užėmusias strategijas situacija panaši: JAV rinkoje 2–3 vietas užėmė 1/N ir LW_{1F}-TG portfeliai, euro zonos rinkoje – 1/N ir TG portfeliai, JK – LW_{1F}-TG ir TG portfeliai. Atsižvelgiant į kitų strategijų rezultatų nepastovumą, jų pasiektus rezultatus galima laikyti atsitiktiniais.

8. Atliktas tyrimas parodė, kad stochastinio dominavimo kriterijus gali būti sėkmingai panaudotas pasirenkant slenkstinę grąžą. Atsižvelgiant į investuotojų polinkį rizikuoti buvo sudaryti trys galimi slenkstinės grąžos intervalai: 0–1 proc., 1–2 proc., ir 2–3 proc., iš kurių, vadovaujantis stochastinio dominavimo kriterijumi, ir buvo parenkama ateinančio laikotarpio slenkstinė grąža. Šis metodas dar kartą įrodė, kad omega atžvilgiu optimizuoti portfeliai maksimalų potencialą pasiekia 1–2 proc. slenkstinės grąžos ribose, tačiau naudojant stochastinio dominavimo kriterijų, sumažėja subjektyvaus pasirinkimo būtinybė.

9. Empirinių tyrimu metu nustatyta, kad skirtuminės evoliucijos algoritmas gali būti sėkmingai panaudotas sprendžiant santykinai didelės apimties portfelio optimizavimo uždavinius.

Literatūra

Adler, T.; Kritzman, M. 2007. Mean–variance versus full-scale optimisation: in and out of sample. *Journal of Asset Management*, 7(5), 302–311.

Anderson, G. 1996. Nonparametric tests of stochastic dominance in income distributions. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1183–1193.

Ang, A.; Chen, J.; Xing, Y. 2006. Downside risk. *Review of Financial Studies*, 19(4), 1191–1239.

Ardia, D.; Boudt, K.; Carl, P.; Mullen, K.; Peterson, B. 2011. Differential evolution with DEoptim: anapplication to non-convex portfolio optimization, *The R Journal* 3(1): 27–34.

Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.-M.; Heath, D. 1999. Coherent measures of risk, mathematical Finance 9(3): 203–228. Blackwell Publishers Inc.

Athayde, G. M.; Flôres, R. G. 2004. Finding a maximum skewness portfolio – a general solution to three-moments portfolio choice. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(7), 1335–1352.

Avouyi-Dovi, S.; Morin, S.; Neto, D. 2004. *Optimal asset allocation with Omega function*. Technical report, Banque de France.

Baker, M.; Bradley, B.; Wurgler, J. 2011. Benchmarks as limits to arbitrage: Understanding the low-volatility anomaly. *Financial Analysts Journal*, 67(1), 40–54.

Barrett, G. F.; Donald, S. G. 2003. Consistent tests for stochastic dominance. *Econometrica*, 71(1), 71–104.

Bawa, V. S. 1975. Optimal rules for ordering uncertain prospects, *Journal of Financial Economics* 2:95–121. Elsevier. http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X(75)90025-2

Best, M. J.; Grauer, R. R. 1991. On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results, *Review of Financial Studies* 4(2): 315–342.

Briec, W.; Kerstens, K.; Jokung, O. 2007. Mean-variance-skewness portfolio performance gauging: a general shortage function and dual approach. *Management science*, 53(1), 135–149.

Brinson, G.; L. Hood; G. Beebower. 1986. Determinants of portfolio performance. *Financial Analysts Journal*, 47:40–48.

Brinson, G. P.; Hood, L. R.; Beebower, G. L. 1995. Determinants of portfolio performance. *Financial Analysts Journal*, 51(1), 133–138.

Campbell, J. Y.; Hentschel, L. 1992. No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns. *Journal of financial Economics*, 31(3), 281–318.

Caporin, M.; Jannin, G. M.; Lisi, F.; Maillet, B. B. 2014. A survey on the four families of performance measures. *Journal of Economic Surveys*, 28(5), 917–942.

Carhart, M. M. 1997. On persistence in mutual fund performance, *The Journal of Finance* 52(1): 57–82. Blackwell Publishing Ltd. http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1997.tb03808.x

Chekhlov, A.; Uryasev, S.; Zabarankin, M. 2005. Drawdown measure in portfolio optimization, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 8(1): 13–58.

Chopra, V. K.; Ziemba, W. T. 1993. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice, *The Journal of Portfolio Management* 19(2): 6–11. http://dx.doi.org/10.3905/jpm.1993.409440

Choueifaty, Y.; Coignard, Y. 2008. Toward maximum diversification. *Journal of Portfolio Management*, 35(1), pp. 40–51.

Clarke, R.; De Silva, H.; Thorley, S. 2011. Minimum variance portfolio composition, *The Journal of Portfolio Management* 37(2): 31–45. *Institutional Investor Journals*. http://dx.doi.org/10.3905/jpm.2011.37.2.031

Davidson, R.; Duclos, J. Y. 2000. Statistical inference for stochastic dominance and for the measurement of poverty and inequality. *Econometrica*, 68(6), 1435–1464.

Dembo, R.; Mausser, H. 2000. The put/call efficient frontier, *Algo Research Quarterly* 3: 13–25.

Dembo, R.; Rosen, D. 1999. The practice of portfolio replication: a practical overview of forward and inverse problems, *Annals of Operations Research* 85: 267–284. Springer. http://dx.doi.org/10.1023/A:1018977929028

DeMiguel, V.; Garlappi, L.; Uppal, R. 2009. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953.

DeMiguel, V.; Garlappi, L.; Nogales, F. J.; Uppal, R. 2009b. A generalized approach to portfolio optimization: improving performance by constraining portfolio norms, *Management Science* 55(5): 798–812. INFORMS. http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.1080.0986

DeMiguel, V.; Garlappi, L.; Uppal, R. 2009a. Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy?, *Review of Financial Studies* 22(5): 1915–1953. Soc Financial Studies. http://dx.doi.org/10.1093/rfs/hhm075

Duchin, R.; Levy, H. 2009. Markowitz versus the Talmudic portfolio diversification strategies, *The Journal of Portfolio Management* 35(2): 71–74. http://dx.doi.org/10.3905/JPM.2009.35.2.071

Estrada, J. 2007. Mean-semivariance behavior: Downside risk and capital asset pricing. *International Review of Economics & Finance*, 16(2), 169–185.

Fama, E. F. 1965. The behavior of stock-market prices, *Journal of Business*: 34–105. http://dx.doi.org/10.1086/294743

Farinelli, S.; Tibiletti, L. 2008. Sharpe thinking in asset ranking with one-sided measures, *European Journal of Operational Research* 185(3): 1542–1547. http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2006.08.020

Fishburn, P. C. 1977. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns, *The American Economic Review* 67(2): 116–126. JSTOR.

Frey, R. J. 2009. On the W (Omega) ratio. Applied Mathematics and Statistics Department, Stony Brook University.

Frost, P. A.; Savarino, J. E. 1988. For better performance: constrain portfolio weights, The *Journal of Portfolio Management* 15(1): 29–34. http://dx.doi.org/10.3905/jpm.1988.409181

Gilli, M.; Schumann, E. 2010. Distributed optimisation of a portfolio's Omega, *Parallel Computing* 36(7): 381–389. http://dx.doi.org/10.1016/j.parco.2009.10.001

Gilli, M.; Schumann, E. 2011. Risk–reward optimisation for long-run investors: an empirical analysis, *European Actuarial Journal* 1(2): 303–327. http://dx.doi.org/10.1007/s13385-011-0024-2

Gilli, M.; Schumann, E.; Di Tollo, G.; Cabej, G. 2011. Constructing 130/30-portfolios with the omega ratio, Journal of Asset Management 12(2): 94–108. *Nature Publishing Group*. http://dx.doi.org/10.1057/jam.2010.25

Grauer, R. R.; Hakansson, N. H. 1995. Stein and CAPM estimators of the means in asset allocation. *International Review of Financial Analysis*, 4(1), 35–66.

Grossman, S. J.; Zhou, Z. 1993. Optimal investment strategies for controlling drawdowns, *Mathematical Finance* 3(3): 241–276. Blackwell Publishing Ltd. http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9965.1993.tb00044.x

Gupta, F.; Eichhorn, D. 1998. Mean-variance optimization for practitioners of asset allocation. *Handbook of Portfolio Management*, Frank J. Fabozzi Associates, New Hope, Pennsylvania.

Hagströmer, B.; Binner, J. M. 2009. Stock portfolio selection with full-scale optimization and differential evolution, *Applied Financial Economics*, 19(19), 1559–1571.

Harlow, W. V.; Rao, R. K. 1989. Asset pricing in a generalized mean-lower partial moment framework: Theory and evidence, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24(03), 285–311.

Harlow, W. V. 1991. Asset allocation in a downside-risk framework, *Financial Analysts Journal*, 47(5), 28–40.

Harvey, C. R.; Liechty, J. C.; Liechty, M. W.; Müller, P. 2010. Portfolio selection with higher moments. *Quantitative Financ*e, 10(5), 469–485.

Hentati-Kaffel, R.; Prigent, J.-L. 2012. Structured portfolio analysis under Sharpe Omega ratio. Universite Pantheon-Sorbonne (Paris 1), Centre d'Economie de la Sorbonne. http://dx.doi.org/10.1142/S0219024905002767

Holthausen, D. M. 1981. A risk-return model with risk and return measured as deviations from a target return. *The American Economic Review*, 71(1), 182–188.

Ibbotson, R. G.; Kaplan, P. D. 2000. Does asset allocation policy explain 40, 90, or 100 percent of performance? *Financial Analysts Journal*, 56(1), 26–33.

Inker, B., 2010. The hidden risks of risk parity portfolios. *GMO white paper*.

Jagannathan, R.; Ma, T. 2003. Risk reduction in large portfolios: why imposing the wrong constraints helps, *The Journal of Finance* 58(4): 1651–1684. Wiley Online Library. http://dx.doi.org/10.1111/1540-6261.00580

Jondeau, E.; Rockinger, M. 2006. Optimal portfolio allocation under higher moments, *European Financial Management*, 12(1), 29–55.

Joro, T.; Na, P. 2006. Portfolio performance evaluation in a mean–variance–skewness framework, *European Journal of Operational Research*, 175(1), 446–461.

Jarrow, R. 1986. The relationship between arbitrage and first order stochastic dominance. *The Journal of Finance*, 41(4), 915–921

Kahneman, D.; Tversky, A. 1979. Prospect theory: an analysis of decision under risk, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* 47(2): 263–291. http://dx.doi.org/10.2307/1914185

Kane, S. J.; Bartholomew-Biggs, M. C.; Cross, M.; Dewar, M. 2009. Optimizing Omega, *Journal of Global Optimization* 45(1): 153–167. Springer US. http://dx.doi.org/10.1007/s10898-008-9396-5

Kaplan, P. D.; Knowles, J. 2004, A. Kappa: a generalized downside risk-adjusted performance measure, *Journal of Performance Measurement* 8: 42–54. TGS Publishing.

Kaplan, P. D.; Siegel, L. B. 1994. Portfolio theory is alive and well, *The Journal of Investing* 3(3): 18–23. http://dx.doi.org/10.3905/joi.3.3.18

Kapsos, M.; Zymler, S.; Christofides, N.; Rustem, B. 2014. Optimizing the Omega ratio using linear programming. *The Journal of Computational Finance*, 17(4), p.49.

Kasten, G. W. 2007. High transaction costs from portfolio turnover negatively affect 401 (K) participants and increase plan sponsor fiduciary liability, *Journal of Pension Benefits* 14(3): 50–64. Aspen Publishers, Inc.

Kazemi, H.; Schneeweis T.; Gupta, B. 2004. Omega as a performance measure, *Journal of Performance Measurement* 8: 16–25.

Keating, C.; Shadwick, W. F. 2002a. A universal performance measure, *Journal of Performance Measure*ment 6(3): 59–84. EDHEC.

Keating, C.; Shadwick, W. F. 2002b. An introduction to omega, AIMA Newsletter.

Klecan, L.; McFadden, R.; McFadden, D. 1991. A robust test for stochastic dominance. Unpublished paper, MIT.

Kritzman, M. 2006. Are Optimizers Error Maximizers? *The Journal of Portfolio Management*, 32(4), 66–69.

Kuosmanen, T. 2004. Efficient diversification according to stochastic dominance criteria. *Management Science*, 50(10), 1390–1406.

Ledoit, O.; Wolf, M. 2003. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection, *Journal of Empirical Finance* 10(5): 603–621. Elsevier.

Ledoit, O.; Wolf, M. 2004. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices, *Journal of Multivariate Analysis* 88(2): 365–411. Elsevier. http://dx.doi.org/10.1016/S0047-259X(03)00096-4

Levy, M.; Levy, H. 2002. Prospect theory: much ado about nothing?. *Management Science*, 48(10), 1334–1349.

Liechty, J.; Harvey, C. R.; Liechty, M. W. 2008. Bayes vs. Resampling: A Rematch. *Journal of Investment Management*, 6(1).

Linton, O.; Maasoumi, E.; Whang, Y. J. 2005. Consistent testing for stochastic dominance under general sampling schemes, *The Review of Economic Studies*, 72(3), 735-765.

Maillard, S.; Roncalli, T.; Teïletche, J. 2010. The properties of equally weighted risk contribution portfolios, *The Journal of Portfolio Management* 36(4): 60–70.

Mandelbrot, B. 1967. The variation of some other speculative prices, *Journal of Business* 40(4): 393–413. http://dx.doi.org/10.1086/295006

Markowitz, H. 1952. Portfolio selection, *The Journal of Finance* 7(1): 77–91. Wiley Online Library.

Markowitz, H. M. 1959. Portfolio selection: efficient diversification of investments, Cowles Foundation Monograph 16.

Markowitz, H. M.; Usmen, N. 2003. Resampled Frontiers versus Diffuse Bayes: An Experiment. *Journal of Investment Management*, vol. 1 (4), 9–25.

Mausser, H.; Saunders, D.; Seco, L. 2006. Optimizing omega, *Risk Magazine*, November, 88–92.

Merton, R. C. 1972. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier, *Journal of financial and quantitative analysis*, 7(04), 1851–1872.

Merton, R. C. 1980. On estimating the expected return on the market: an exploratory investigation, *Journal of Financial Economics* 8(4): 323–361. Elsevier. http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X(80)90007-0

Michaud, R. O. 1989. The Markowitz optimization enigma: is ‘optimized’ optimal?, *Financial Analysts Journal* 45(1): 31–42. JSTOR. http://dx.doi.org/10.2469/faj.v45.n1.31

Mitton, T.; Vorkink, K. 2007. Equilibrium underdiversification and the preference for skewness, *Review of Financial studies*, 20(4), 1255–1288.

Peleg, Doron. 2014. Fundamental Models in Financial Theory. MIT Press.

Pflug, G. Ch. 2000. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk, *Probabilistic Constrained Optimization* 49: 272–281. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-3150-7_15.

Post, T. 2003. Empirical tests for stochastic dominance efficiency. *The Journal of Finance*, 58(5), 1905–1932.

Rockafellar, R. T.; Uryasev, S. 2000. Optimization of conditional value-at-risk, *Journal of Risk* 2: 21–42.

Rockafellar, R. T.; Uryasev, S. 2002. Conditional value-at-risk for general loss distributions, *Journal of Banking & Finance* 26(7): 1443–1471. http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6

Rockel, N. 2010. Modern portfolio theory - Evolutionary Road - The enduring popularity of MPT hasn't stopped investment wonks from trying to improve it. *Institutional investor*, 44(4).

Roy, A. D. 1952. Safety first and the holding of assets, *Econometrica* 20: 431–449. http://dx.doi.org/10.2307/1907413

Rutkauskas, A. V.; Stasytytė, V., 2011. Rizikos sampratos formavimosi ypatumai. *Verslas: teorija ir praktika*, (2), pp. 141–149.

Scherer, B. 2002. Portfolio resampling: Review and critique, *Financial Analysts Journal*, 98–109.

Scherer, B. 2006. A note on the out-of-sample performance of resampled efficiency, *Journal of Asset Management*, 7(3), 170–178.

Scherer, B.; Martin, R. D. 2005. Modern Portfolio Optimization with NuOPT™, S-PLUS®, and S+ Bayes™. Springer Science & Business Media. 405 p.

Sharma, A; Mehra, A. 2017, Extended omega ratio optimization for risk-averse investors. Intl. Trans. in Op. Res., 24: 485–506. doi:10.1111/itor.12184

Sharma, A.; Utz, S.; Mehra, A. 2016. Omega-CVaR portfolio optimization and its worst case analysis. OR Spectrum, 1–35.

Sharpe, W. F. 1964. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of finance*, 19(3), 425–442.

Shaw, W. T. 2011. Portfolio Optimization for VAR, CVaR, Omega and utility with general return distributions: a Monte Carlo approach for long-only and bounded short portfolios with optional robustness and a simplified approach to covariance matching, Working paper [online] [cited 6 October 2014]. Available from Internet: http://ssrn.com/abstract=1856476 http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1856476

Sortino, F. A.; Van Der Meer, R. 1991. Downside risk, *The Journal of Portfolio Management*, 17: 27–31. Institutional Investor Journals. http://dx.doi.org/10.3905/jpm.1991.409343

Sortino, F. A.; Van Der Meer, R.; Plantinga, A. 1999. The Dutch triangle, *The Journal of Portfolio Management* 26: 50–57. Institutional Investor Journals. http://dx.doi.org/10.3905/jpm.1999.319775

Sun, Q.; Yan, Y. 2003. Skewness persistence with optimal portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*, 27(6), 1111–1121.

Tobin, J. 1958. Liquidity preference as behavior towards risk. *The review of economic studies*, 65–86.

Todd, P. M.; Gigerenzer, G. 2012. What is Ecological Rationality. In Todd, P. M., Gigerenzer, G (Ed.) *Ecological rationality: Intelligence in the world*, p. 4. Oxford University Press.

Vinod, H. D. 2004. Ranking mutual funds using unconventional utility theory and stochastic dominance. *Journal of Empirical Finance*, 11(3), 353–377.

Xiong, J. X.; Ibbotson, R. G.; Idzorek, T. M.; Chen, P. 2010. The equal importance of asset allocation and active management. *Financial Analysts Journal*, 66(2), 22–30.

Yang, Xi; Gondzio, J.; Grothey, J. 2010. Asset liability management modelling with risk control by stochastic dominance. *Journal of Asset Management* 11.2 pp. 73–93.

Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas

Straipsniai recenzuojamuose mokslo žurnaluose

Vilkancas, R. 2014. Characteristics of Omega-Optimized Portfolios at Different Levels of Threshold Returns. *Business, Management and Education,* 12(2), 245–265.

Vilkancas, R. 2014. Omega atžvilgiu optimizuoto akcijų portfelio empiriniai tyrimai, *Verslas: teorija ir praktika* 15(1): 58–70. http://dx.doi.org/10.3846/btp.2014.01

Vilkancas, R. 2016. Omega-optimized portfolios: applying stochastic dominance criterion for the selection of the threshold return. *Trends economics and management*. Brno: Brno University of Technology. ISSN 1802-8527. Vol. 10, iss. 25 (2016), p. 56–67

Summary in English

Introduction

Problem formulation

The beginning of modern investment or financial portfolio theory‘s discipline was the theory of expected utility and mean-variance (further – MV) portfolio theory proposed Harry Markowitz. The advantage of MV portfolio theory is that after assuming the simplistic assumptions that the returns on investment can be described in multivariate normal distribution, or that the investors‘ utility function is squared, which, simply speaking, means that investors don‘t pay attention to the beautiful „abnormality“ or higher moments of the distributions when making decisions, the MV criterion is sufficient to describe investors‘ behavior.

While it is recognized that MV theory approximates well the investors‘ utility function in these cases when the returns are distributed by the normal law or any other elliptical distribution, but the statistical analysis of financial data shows that the return on assets is characterized by asymmetry and heavy tails, i.e. the properties that cannot be measured using only the dispersion or standard deviation. Researches of many scientists also confirm that when choosing investments the investors assess the statistical moments at the 3rd and also at higher moments. Another important drawback of MV theory and standard deviation is that the standard deviation is a symmetric risk measure that uniformly assesses both negative as well as positive deviations, although investors usually equate the risk to a potential capital loss or negative changes.

The above mentioned disadvantages of MV theory led to coming back to the ideas of expected utility theory and to search of new, more precise measures of risk. In addition, increasing capacity of computer technologies and advanced algorithms of optimization allow to solve increasingly complex optimization problems and to optimize the increasingly complex objective functions, and it has become another impetus that led to "renaissance" of the expected utility theory and to research of new risk measures.

The dissertation includes analysis of criticism of the classical portfolio theory and offered alternative methods of portfolio optimization and alternative asymmetric risk measures. Using asymmetric risk measures, it is necessary to choose the threshold rate of return, which is an important factor determining risk-return characteristics of the investment portfolio, but the effect of threshold rate of return on the investment portfolio has not been systematically studied in the scientific literature. The dissertation analyzes the characteristics of portfolios optimized with respect to the omega risk measure at different levels of threshold rate of return, as well as application possibilities of stochastic dominance criterion with the marginal rate of return.

Relevance of the thesis

The formation and management of investment portfolio still remain a fundamental problem of financial theory and practice even after more than six decades after H. Markowitz suggested the classical portfolio theory, for which the author received the Nobel Prize in Economics in 1990.

The method of portfolio optimization using Omega Function that is proposed in the dissertation solves the three weaknesses of classic MV portfolios: assessment of the complete probability distribution, i.e. both positive and negative, or loss risk, allows the investor to choose the investment portfolio given its propensity to take risks, and what is most important, as shown by empirical research have robusticity or resistance to change of external conditions, a feature that is very important in the rapidly changing financial market environment.

The object of the research

Object of the research – methods of portfolio optimization based on risk measures allowing to assess the asymmetry of returns and to take into account the investors‘ propensity to take a risk.

The aim of the thesis

Consequently, aim of this research to propose a new portfolio optimization model utilizing the concept of the omega function and the varying threshold rate of return.

Objectives of the thesis

In order to achieve the above mentioned aim, the following research objectives are raised:

1. To perform theoretical and practical analysis of classic portfolio optimization methods, to analyze the main disadvantages of these optimization methods and proposed solutions to remedy the drawbacks.
2. To perform theoretical and practical analysis of asymmetric risk measures used for optimizing investment portfolios; to identify the key

characteristics that should be fulfilled by risk measures used for portfolio optimization.

3. To perform systematic and empirical analysis of effect of investor's target or threshold rate of return on risk measures and portfolio characteristics.
4. To identify risk-return and other numerical characteristics of omega-optimized portfolios at different levels of investor’s target or threshold rate of return.
5. To investigate possibilities of stochastic dominance criterion application in selecting an investor’s target or threshold rate of return.
6. Using real historical data and back-testing methodology, to compare omega portfolio results with the results obtained using both classic MV optimization methods and its modifications, as well as a variety of new optimization methods.
7. To investigate the possibilities to use differential evolution algorithm in practice, for solving relatively large-scale portfolio optimization with respect to the Omega function problems.

Research methodology

In order to achieve the aim and objectives of the dissertation, recent scientific researches were analyzed, compared and summarized; researching and comparing different strategies of portfolio optimization classical and meta-heuristic optimization algorithms have been used, obtained empirical results were analyzed using classical parametric statistical tests, as well as nonparametric statistical methods.

Scientific novelty of the thesis

These results that are new to economic science were obtained while preparing the dissertation:

1. The analysis of classical methods of investment portfolio optimization and risk measures helped to determine the most appropriate risk-return measure for portfolio optimization – the omega ratio. This ratio is based on the modern concept of risk, defining risk as the effect of uncertainty to the objectives. The omega ratio allows to evaluate the asymmetry of financial returns and investor’s perception of the risk.
2. Analysis of the effect of investor’s target or threshold rate of return on choice among investment alternatives showed that changing the target rate of return allows to effectively manage the level of investors' risk tolerance and risk-return characteristics of investment portfolios, avoiding the need to use the degrees of partial moments and risk of getting illogical or contradictory results.
3. A new portfolio optimization model utilizing the concept of the omega function and the varying threshold rate of return was proposed.

4. The method of stochastic dominance criteria that allows selection of a target or threshold investor's rate of return was proposed.

Practical value of research findings

Empirically stated characteristics of omega-optimized portfolios by changing marginal investor's rate of return. The results showed that portfolios optimized with respect to the omega function exceeded initial expectations – their achieved results significantly surpassed the other portfolio strategies, which have participated in the portfolio formation "competition".

Study have confirmed that omega-optimized portfolios are characterized by robusticity. By executing backward testing of the model with real stock markets data of US, UK and the euro zone, and after comparison of 9 different securities portfolios optimization strategies, omega-optimized portfolios in all cases have shown the absolutely best results.

The results show that the optimal threshold rate of return can vary from 1 to 2 %, what would make 12–26 % annual rate. The investor should choose a specific level of threshold rate of return, by combining investment objectives and the degree of risk tolerance. The result is essentially forcing to review the common practice, where the threshold rate of return is set equal to zero, or to very close rate of it, for example, to not risk-free return of securities.

After the study of the possibilities of use of the stochastic domination criterion for assessment of the threshold rate of return, the results suggest that this criterion can be successfully used to determine the threshold rate in the interval of 1–2%. In some cases, the use of this method has led to further improvement of the omega portfolio results.

Solving the objectives of portfolio optimization, the choice of risk measure is often limited by the possibilities of optimization algorithms. More effective risk measures were often refused only because of no possibilities to solve these optimization objectives. The empirical distributions of returns are not smooth, convex or strictly monotonous, so omega function in general may be optimized just by using global optimization algorithms.

This is one of the reasons why, despite of its considerable interest, there are only few researches of portfolios optimized with respect to this function in the scientific literature, and most of them in many cases are dedicated for the optimization problem, but not to analyze the financial characteristics of the omega portfolios. Although the main object of this research is methods of portfolio optimization rather than optimization algorithms, it is clear that it is impossible to achieve the raised goal without appropriate means. The research investigated the possibilities of differential evolution algorithm use for solving relatively large scale the omega portfolio optimization problem. Using an R integrated application development environment, DE algorithm, implemented in the Fortran programming language, and the parallel computing software package Parallel, implemented in the R environment, it was possible to boost about 40 times the search of optimal portfolios and back test procedures.

Statements to be defended

1. Omega measure allows to create optimal investment portfolios, assessing asymmetry of returns and users' risk tolerance.
2. When choosing a target or the threshold rate of return, investors can effectively choose the right level suitable for them, and at the same time characteristics of the investment portfolio return-risk characteristics. By choosing the threshold rate of return it is easier to control the risk-return characteristics, comparing this method with the choice of alternative partial moments levels. In addition, by using the threshold returns, there is no risk to choose illogical, conflicting combinations of threshold returns and degrees or orders of partial moments.
3. Changing the threshold rate of return in the range of 1–2% (investigation of the monthly returns data) portfolios optimized in respect of the omega function have achieved the best results for both the evaluation of the absolute results, and evaluation of the risk adjusted results.
4. Portfolios optimized with respect to the Omega function had exceptional stability of the results comparing both with the classical MV portfolio optimization strategy and major modifications of this strategy, and portfolios optimized using alternative measures (i.e. portfolios in respect of the CVaR).
5. Stochastic dominance criteria can be successfully applied in the selection of the optimal marginal rate of return and omega-optimized portfolios.

Approval of research findings

There are 3 scientific publications published about the topic of this dissertation in peer reviewed science magazines. Findings of the thesis were presented at scientific conference „Contemporary issues in business, management add education' 2014“, held in Vilnius, Lithuania.

1. Portfolio optimization methods and measures of risk

The creation of the classic portfolio theory can be dated back to 1952 when Markowitz published portfolio selection theory (Markowitz 1952). Despite great academic success, a practical application of this model has not been very successful, because it has been quickly noticed that Markowitz mean-variance (MV) portfolios can neither be characterized by good diversification of investments nor by stability. Markowitz used variance, i.e. a symmetric measure of risk that equally assesses both negative and positive risk deviations. The fact that variations in price are not normally distributed and asymmetric was observed long ago by Mandelbrot (1963) and Fama (1965). Today, there is no doubt, that extreme changes in security prices are much more common than one could expect with reference to the Gaussian random process, which means that the actual risk of the investment portfolio, faced by the portfolio manager, is significantly higher than that represented by variance historically widely used for risk measurement. In addition, variance, along with other symmetrical risk measures, both positive and negative risk deviations from the average rate is considered as a source of risk, i.e. "does not discriminate" the risk of losses, although investors are concerned about losses rather than about an opportunity to earn higher returns. There is no doubt that investors differently assess "downside" and "upside" risks thus preferring positive asymmetry of returns. After all, a successful investment is the one that brings in gains rather than losses. Therefore, an appropriate risk measure should also differently treat downside and upside risk.

The idea of an asymmetric risk measure is not a novelty. At the time Markowitz announced his portfolio theory, Roy (1952) proposed the concept of a portfolio selection based on the "safety first" principle, which means imposing constraints on portfolio positions in such way, that the expected return on the portfolio, should not fall below some critical or "disaster" level set in advance. Expanding his MV theory, Markowitz acknowledged deficiencies of variance, and alternatively, considered the use of semi-variance (Markowitz 1959). According to Markowitz, semi-variance is a better measure for risk, since it allows limiting undesirable losses only, as opposed to variance which, reduces both undesirable downside and desirable upside risks. Although mathematical convenience has resulted into that Markowitz finally gave priority to the ordinary variance, still, the search for alternative measures for risk had started to accelerate.

A general downside or the loss risk theory was developed by Bawa (1975) and Fishburn (1977) who recommended to measure risk using a lower partial moment or LPM:

$$LPM_{\lambda}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^{\lambda}\, dF(x). \tag{S1.1}$$

With the help of the LPM, the risk of losses is described using two parameters: a specified target return or reference point τ, in respect of which the loss ratio is measured, and an order of LPM λ, which expresses an investor's risk tolerance. It is easy to understand intuitively that a higher order of the LPM means lower risk tolerance, i.e. negative deviations from the target return are "punished more severely". The LPM can be used to describe not only the quadratic utility function, i.e. semi-variance, which is a special case of the LPM, when $\lambda = 2$, but also the most of well-known von Neumann-Morgenstern utility functions.

Despite the common agreement that by limiting the risk of loss, albeit indirectly, but still the maximization of upside risk is ensured, the main criticizing aspect of the "risk of loss theory" is that these methods are too focused on the avoidance of losses and little attention is paid to the provision of returns (Avouyi-Dovi *et al*. 2004). A natural solution to this problem is measures allowing independent modelling of investors' behaviour in respect of both negative and positive variations in returns: a regret-reward measure (Dembo, Rosen 1999; Dembo, Mausser 2000), the Upside-Potential Ratio, UPR) (Sortino *et al*. 1999), the Omega ratio (Keating, Shadwick 2002a, 2002b), the Kappa ratio (Kaplan, Knowles 2004), etc. While using these indicators, not only downside but also upside or excess returns are measured, i.e. they allow identifying investments characterized by a relatively large excess return ascribed per unit of drawdown risk. Excess returns or an Upper Partial Moment (UPM) are generally defined an upside deviation from target return τ.

$$UPM_n(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} (x-\tau)^n \, dF(x). \tag{S1.2}$$

Farinelli, Tibiletti (2008) introduced a generalized ratio of upper and lower partial moments – Φ, which allows expressing the favour (disfavour) of upside (downside) deviations of various investors:

$$\Phi_{(p,q,\tau)} = \frac{\sqrt[p]{UPM_p(\tau)}}{\sqrt[q]{LPM_q(\tau)}}. \tag{S1.3}$$

By changing parameters p and q, we respectively obtain different risk indicators: if p = 1 and q = 2, we obtain the upside-potential ratio; if p = q = 1, we obtain the Omega ratio. Thus, the Farinelli–Tibiletti Φ ratio allows expressing flexibly investor preferences in respect of returns and associated risks.

The $\Phi_{\tau}^{1,1}$ or Omega ratio suggested by Keating and Shadwick (2002a, 2002b) is equivalent to the total distribution as it evaluates all higher-order moments. Thus, it is not necessary to rely on assumptions about investors' risk tolerance and their utility functions when using it, and hence, according to researchers, this is a "universal ratio" that helps with an objective assessment of the performance of investments.

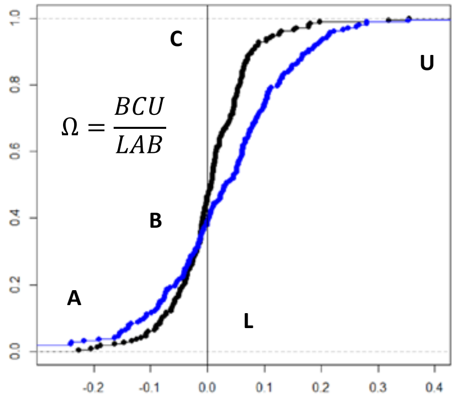


Fig. S1.1. The total distribution of returns and the Omega function

$$\Omega(\tau) = \frac{\int_{\tau}^{R_{\max}} \left(1-F(x)\right) dx}{\int_{R_{\min}}^{\tau} F(x)\, dx} = \frac{\int_{\tau}^{R_{\max}} BCU}{\int_{R_{\min}}^{\tau} LAB}, \tag{S1.4}$$

where τ – the threshold; Rmin and Rmax – the minimum and maximum values of returns respectively. When τ is closer to the Rmin value, the BCU area is larger than that of the LAB and the Omega value is high, and vice versa (Fig. S1.1). While calculating the Omega, the threshold level of return is taken into account, in respect of which the result is considered as gain or loss; thus, if τ is seen as the required rate of return, the Omega ratio shows at what extent the obtained result exceeds the expectations of the investor. Accordingly, a higher Omega ratio means higher performance, i.e. return.

Although Keating and Shadwick introduced the Omega as a “universal measure of efficiency”, which fully characterizes return-risk distribution and is intuitive, easy to understand and calculate, they soon recognized themselves, that in order to get full information about return-risk distribution, the Omega function should be assessed not at a single point τ of the threshold return but within the whole range. Later, the authors’ position has become even more critical: according to them, “a function estimated at only one point can be completely misleading”.

Despite the warnings of Omega deficiencies while taking “point” estimates of investments with respect to this function, the issue of threshold selection is not analyzed more explicitly in literature.

2. Theoretical foundations for selecting a measure of risk

Most of the classic economic and financial models are based on the assumption that investors‘ utility function is concave, i.e. the first derivative of this function is positive, u‘>0, i.e. growing, indicating investors' displeasure, and the second derivative is negative, u‘‘<0, indicating the diminishing marginal utility of property and which is the only necessary condition for risk aversion (Arrow, 1965, 1971; Pratt, 1964).

In 1948, M. Friedman and L. Savage on the basis of observed human behavior found out that at a particular segment of asset level people are tended to take risks or are characterized by risk seeking behavior. H. Markowitz was the first who attempted to solve the problem raised by M. Friedman and L. Savage, offering a reverse S-shaped utility function whose shape changes depending on the selected reference point and which is concave in the domain of profit, and convex in the domain of losses. D. Kahneman and A. Tversky in 1979 proposed a Prospect Theory and raised the reverse idea that investors avoid risk in the field of profit, but begin to behave risky in losses, i.e. have S - shaped utility function. The researchers explain such behavior in psychological phenomenon of decreasing sensitivity to the loss when the distance from reference point is growing. Both H. Markowitz, and D. Kahneman with A.Tversky in their works have chosen the reference point of zero dividing the profits and losses. Disputes concerning which of the theories or utility functions is "fairer" continue, both theories have their supporters (Levy, Levy 2002; Ortobelli et al. 2009). Described disputes concerning form of utility function spawned not entirely unexpected idea that the majority of investors can be neither avoiding risk nor seeking risk – they can be risk neutral (Biglova at al., 2009; Ortobelli at al. 2009).

The difficulties encountered in trying to define investors' utility function and practically apply the expected utility theory led to search of new risk measures. New risk measures such as VaR or CVaR were "constructed" in order to better reflect the empirical characteristics of returns (abnormality), or the attitude of investors to the asymmetry of risk (i.e. a negative "nature" of risk), but regardless of the extent to which they meet the axiomatic of utility theory or priorities of investors choices. Although these risk measures can be statistically appealing and comply with coherence axioms formulated by Artzner et al. (1999), a natural question that arises is how useful are measures of risk, which in reality do not measure or do not reflect the risk that investors could or should avoid (Nawrocki, Viole 2014).

In the light of the aforementioned considerations, upper partial moment/lower partial moment or UPM/LPM "classes" or risk measures by Farinelli-Tibiletti (2008) look especially "attractive", as they: i) are not parametric and evaluate the total probabilistic distribution of return, ii) evaluate the asymmetry of returns iii) are compatible with the S-shaped, reverse S-shaped and risk-neutral utility functions. This class of risk measures also includes omega ratio proposed by Keating and Shadwick (2002a, 2002b), although, because of its neutrality to the risk, it is distinguished by some authors as "inappropriate" (not compatible with utility theory) risk measure (Nawrocki and Viole 2014). Using the general $\Phi_{\tau}^{n,q}$ model, the investor's attitude to risk is expressed by three parameters, τ, n and q. Using the $\Phi_{\tau}^{1,1}$ or the omega ratio investor's attitude to risk can be expressed with a single parameter τ; higher τ parameter implies a higher investor‘s tolerance to risk because the likelihood of reaching the stated return threshold is decreasing.

Using asymmetric risk measures, the need arises to select a target or threshold return, which is also often known as the minimum acceptable rate of return (MAR) of the investor. Threshold return plays a dual role: first, it shows investor's target return, but it also controls the risk “appetite” - the higher the target return is, the lower the possibility to reach it will be and therefore the greater risk. The marginal threshold rate of return is important for assessing the attractiveness of investment instruments or historical results of funds, however, without a doubt, it is even more important when choosing a future investment portfolio, as it has a direct influence on the composition of the portfolio and its potential risk-return characteristics. It is therefore paradoxical that problem of marginal return selection had a very low priority in the scientific literature until now.

It is easy to calculate the value of the Omega ratio, but the empirical return distributions are not smooth, convex or strictly monotonous, so omega function in general may be optimized just by using global optimization algorithms. Mausser et al. (2006), adapted the method of fraction programming and the transformation of variables, proposed by Charnes and Cooper (1962) showed that the omega function can be optimized using linear programming techniques, but this method is possible only when the max Ω (τ)> 1, which means that the chosen τ value cannot be higher than the average return of the securities portfolio. A number of authors, investigating the characteristics of omega-optimized portfolio use this method of linear optimization, stating that in most of the "life" situations, the omega value of portfolio should not be less than 1 (Kapsos *at al*. 2014, Mansini *at al*. 2015), but in the opinion of the author of this work, such approach is too restrictive - to reach for rate of return which is higher than average is economically justified. Omega portfolio optimization problem has been solved by a differential evolution algorithm, which has proved successful in solving relatively large-scale portfolio optimization problems.

Despite the fact that the Omega ratio has raised a great interest in both academic and financial circles, there are not many studies that could answer to the question of whether this ratio is somehow better than classic techniques for portfolio optimization.

3. An empirical evaluation of omega optimized portfolios

The characteristics of the Omega portfolio were assessed with threshold return value τ varying in the range from 0 to 5 percent. Range step is 0.1%. The tables of the obtained results (presented in Annex B and D) include concise data ranging from 0 to 4 percent, the range step of 0.5 % and the maximum value of a hypothetical portfolio.

In order to objectively evaluate Omega portfolios, their performance are compared with the performance of the portfolios optimized using other techniques. A total of nine benchmark portfolios are compared within this paper: the classic minimum variance portfolio, the tangency or maximum Sharpe ratio portfolio (respectively MVP and TG), tangency portfolios optimized using uniform correlation and "shrunk" covariance matrices proposed by Ledoit and Wolf (respectively LW_{CC}-TG and LW_{1F}-TG), minimum conditional value-at-risk and highest return-risk CVaR portfolios (Min CVaR and Max CVaR), the equal weighted portfolio (1/N), the equal risk portfolio (ERC) proposed by Maillard, Roncalli and Teïletche (2010) and the minimum correlation portfolio (MCA) suggested by Varadi, Kapler and Rittenhouse.

The study refers to three data sets of the global stock market: Dow Jones Industrial Average index composed of data on monthly industry stock returns for the period from 30/01/1998 to 31/12/2013 (a total of 30 stocks and 192 periods), FTSE index composed of 30 randomly selected monthly stock returns for the period from 31/01/2001 to 30/05/2014 (in order to calculate the weights of classical MV portfolios, the inverse covariance matrix that can be obtained only when the number of observations M is greater than the number of stocks N is required; since the selected duration for one backtesting period is equal to 36 months, i.e. M = 36 (see below), to estimate the weights of the classic portfolio, it was necessary to reduce the number of stocks or use weekly or daily data on stock returns; thus, in order the FTSE index portfolio could be directly compared to DJIA stocks, a random set of 30 stocks was selected) and EURO STOXX 50 index composed of data on weekly industry stock returns for the period from 04/01/2002 to 31/12/2013 (a total of 50 stocks and 627 periods).

The performance of the studied strategies for portfolio optimization, including return and other indicators, were evaluated using a moving sample window method often applied in scientific studies (DeMiguel *et al*. 2009a; Gilli *et al*. 2011). Primarily, the duration of one testing period is selected; this paper accepts M = 36 months, or 104 weeks. Based on the return series of the first testing period, the parameters required for implementing a particular strategy are obtained and then used for calculating optimal portfolio weights that are received and used for calculating portfolio returns for the next period, i.e. M + 1. The process is continued with an addition of a new period and the exclusion of one of the earliest periods until the end of the entire data period is reached. As a result of this backtesting using a moving window approach, a series of T-M monthly (weekly) out-of-sample portfolio returns is obtained, i.e. calculated using data that was not included into a data sample during portfolio optimization. The procedure applies to each testing strategy and each stock data set.

Another decision to be made in the management of investment portfolios is to choose how often the investment portfolio will be reallocated. Fund managers usually reallocate portfolio positions either in accordance with a specified frequency or when portfolio weights “deviate” from the specified allowable threshold or, more commonly, over a certain period if, at that time, weights are “off” the specified “threshold”. Such portfolio management can be called tactical, as for certain tactical objectives, e.g. reducing transaction costs it is allowed to deviate from the basic strategy. The frequency of portfolio reallocation can be also changed for other reasons such as reducing the taxes paid. Based on the results of the preliminary tests, a half-year frequency for reallocating weights was selected, which is empirically proven as a good compromise in order not to deviate significantly from the selected strategy and the desire to reduce turnover costs.

In order to assess portfolio performance, a total of 12 different indicators were used. In addition to conventional risk indicators – annualized standard deviation (and the Sharpe ratio, the study presents the maximum and minimum annual returns received over the period. While assessing portfolio turnover, the average annual turnover and the total, i.e. covering the whole period, turnover are given (R7 ard R8). In order to assess portfolio concentration, the Gini coefficient calculated according to the method and developed by the Italian statistician Corrado Gini is employed. The coefficient ranges from 0 to 1. If the value of the Gini coefficient equals to 1, this shows complete portfolio concentration (portfolio consists of only one position), and the Gini coefficient for a well-diversified portfolio of equal weights equals to 0. The table of the obtained results includes the average values of the Gini coefficient obtained during the entire period of study. Finally, it provides the net annual returns of the portfolio and the net value (R12) received after the deduction of proportional turnover charges as well as the Sharpe ratio estimated using net returns (R11).

And finally the suitability of stochastic dominance criteria was tested. At the end of each testing period three dominant portfolios where selected: the first portfolio selected from a set of the Omega portfolios obtained within the threshold rate τ varying from 0 to 1 percent referred to as “SD L0-10”, the second from a set of portfolios within the threshold rate τ varying from 1 to 2 percent referred to as “SD L10-20”, and the third ”SD L20-30” portfolio from the a set of portfolios within the threshold rate τ varying from 2 to 3 percent. Dominant portfolios were identified using Anderson (1996) test for second degree stochastic dominance Vinod (2004). Although a stochastic dominance test by Davidson and Duclos (2000) is more recent and different authors have recognized it as one of the most effective, in this experiment, the most important evaluation criterion is the out of sample performance of the selected portfolios.

The detailed results are presented in Annex B and D. The main results are presented in Figures S3.1–S3.3. The results show that the return and risk of Omega-optimized portfolios depend on the threshold return selected by the investor: a growth in the threshold return leads to an increase in the performance of the net portfolio; however, at the expense of a growing portfolio risk. In fact, the result is quite impressive as Omega-optimized portfolios tested applying all three sets of stocks and using data obtained at three different stock markets, managed to surpass 9 competing strategies for portfolio optimization.

Omega-optimized portfolios were distinguished by stability with threshold return value τ varying in the range from 1 to 2%. The optimal threshold return of EURO STOXX 50 stocks was lower, but in this case, weekly data were investigated –the highest portfolio return was achieved selecting a weekly threshold return of 0.3 percent, which is equivalent to 1.2 percent of monthly returns.

Theoretically the stochastic dominance rules are appealing as they require less restrictive assumptions about the investor's utility functions. From this study it can be concluded that the investment portfolios selected by stochastic dominance rules may produce superior results and eliminate much of guess-work when selecting the threshold rates.

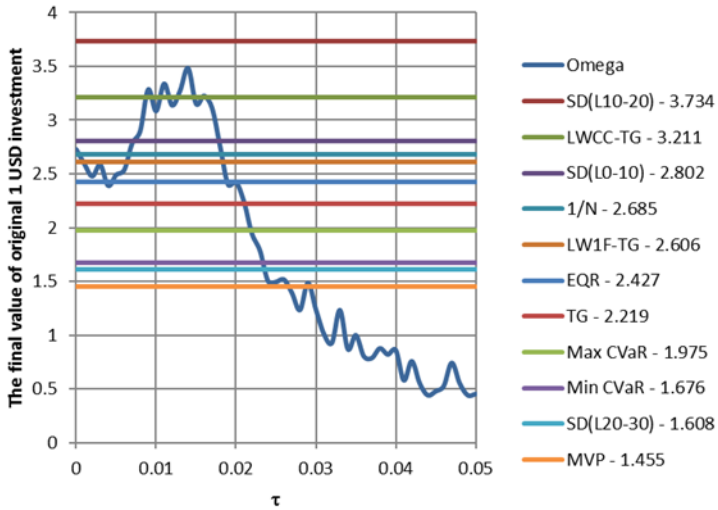


Fig. S3.1. The final value of a hypothetical 1 USD investment in stocks from the DJIA index universe where weights are re-allocated every six months (Source: created by the author)

Alternative portfolio optimization strategies did not demonstrate stability: in the US market, LWCC.TG was characterized as the best one, but, when surveyed in other markets, it was not even in the top three of the best strategies. As for the Eurozone and London stock markets, the max CVaR strategy was the best player; however, its advantage in the British market was minimal. A look at the second and the third places points to a similar situation: 1/N and LW1F-TG portfolios take the 2nd and 3rd places in the US market, whereas – 1/N and TG in the Eurozone and – LW1F-TG and TG in UK markets.

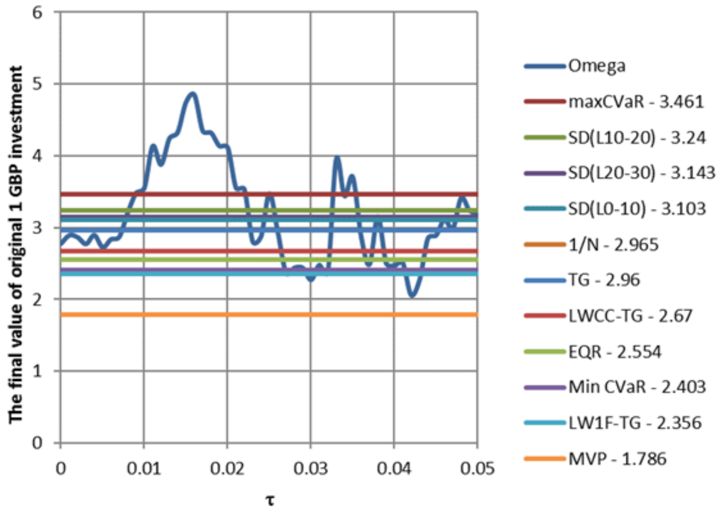


Fig. S3.2. The final value of a hypothetical 1GBP investment in stocks from the FTSE 100 index universe where weights are reallocated every six months (Source: created by the author)

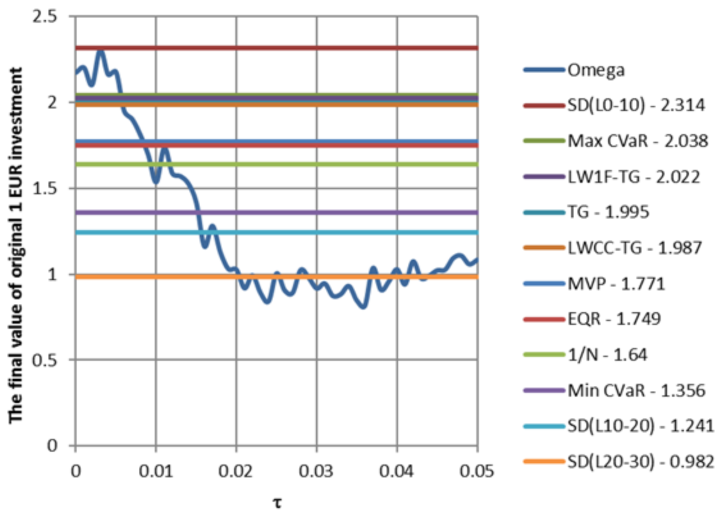


Fig. S3.3. Value growth of a hypothetical 1€ investment in stocks from the EURO STOXX 50 index universe where weights are reallocated every six months (Source: created by the author)

General conclusions

1. The theoretical analysis has shown that, despite the great interest in asymmetric risk measures, the question of how target or threshold return affects the risk-return characteristics of the investment portfolio, is essentially poorly studied.
2. The analysis of classical methods for investment portfolio optimization and risk measures helped to determine the most appropriate risk-return measure for portfolio optimization – the omega ratio. This ratio is based on the modern concept of risk, describing the risk as the effect of uncertainty to the objectives.
3. The omega ratio is calculated using entire sample from observed distribution, thus allowing to evaluate the asymmetry of financial returns.
4. Results of the empirical research confirmed the hypothesis that investors with the help of target or marginal return can effectively control the risk-return characteristics of portfolio depending on their goals and propensity to take risks.
5. The results confirm the advantage of the omega optimized portfolios over their rivals – testing with three different sets of stock data from three different financial markets, omega-optimized portfolios managed to surpass 9 competitive strategies of portfolio optimization in terms of the final net worth of a portfolio.
6. Portfolios optimized with respect to the Omega were marked as stable, when marginal return was changing in the range from 1 to 2 percent. The interval of optimal marginal return of EURO STOXX 50 shares was lower, but in this case, the weekly data was analyzed – the highest portfolio return was achieved when weekly threshold rate of return was chosen 0.3%, which would correspond to 1.2% monthly return.
7. The study shows that, investigated alternative strategies of portfolio optimization were not stable: in the U.S. market LW_{CC}-TG was the best, but in other studied markets it did not fall even in the threesome of best strategies. In stock markets of the euro-zone and UK the best appeared to be the Max CVaR strategy, but in the UK‘s market it's advantage was minimal. Looking at the second and third places, the situation is similar: the U.S. market 2–3 places 1/N and LW_{1F}-TG portfolios, in the euro zone‘s market – 1/N and TG, UK-LW_{1F}-TG and TG. Taking into account the volatility of the results, as a consequence, the results can be considered random.
8. The research has shown that the stochastic dominance criteria can be successfully used for choosing the threshold rate of return. In the light of the investors potential propensity to take the risk, three possible intervals of marginal rate of return have been chosen – 0–1%, 1–2%, 2–3%, from which, on the basis of stochastic dominance criterion the

marginal rate of return for the next period was selected. This method has proven once again that portfolios optimized with respect of omega reached the maximum potential in the limits of 1–2% of return rate, however, use of the stochastic dominance criteria reduces the need for subjective choice.

9. During the empirical studies it was found out that differential evolutionary algorithm can be successfully used for solving relatively large scale portfolio optimization problems.

Priedai[13]

A priedas. Omega portfelio ir lyginamųjų portfelių pagrindiniai rodikliai, kai portfelio pozicijų svoriai perskirstomi skirtingu periodiškumu.
B priedas. Omega portfeliai kintant slenkstinei grąžai.
C priedas. Omega portfelių optimizavimas taikant stochastinį dominavimą.
D priedas. Disertacijos autoriaus sąžiningumo deklaracija.
E priedas. Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema kopijos.

[13] Priedai pateikiami pridėtoje kompaktinėje plokštelėje.

Renaldas VILKANCAS
KINTAMOS SLENKSTINĖS GRĄŽOS
POVEIKIO OMEGA FUNKCIJOS ATŽVILGIU
OPTIMIZUOTIEMS INVESTICIJŲ
PORTFELIAMS TYRIMAS

Daktaro disertacija

Socialiniai mokslai,
ekonomika (04S)

RESEARCH OF IMPACT OF
VARIABLE THRESHOLD RETURN ON PORTFOLIOS
OPTIMIZED WITH RESPECT
TO OMEGA FUNCTION

Doctoral Dissertation

Social Sciences,
Economics (04S)

2017 05 12. 11,5 sp. l. Tiražas 20 egz.
Vilniaus Gedimino technikos universiteto
leidykla „Technika“,
Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius,
http://leidykla.vgtu.lt
BĮ UAB „Baltijos kopija“
Kareivių g. 13B, 09109 Vilnius