

Академия наук Литовской ССР
Институт математики и кибернетики

**Januškevičius Romanas / Янушкявичюс Романас
Владович**

***Исследование устойчивости в некоторых
задачах характеристики распределений***

***Investigation of stability in some characterizations of
probability distributions***

[rankraštis] : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук : 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

Вильнюс, 1978. 107 lap.

Vilnius 1978

VPU biblioteka



009 00354595 2

АКАДЕМИЯ НАУК ЛИТОВСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ЯНУШКЯВИЧЮС Романас Владович

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

01.01.05 - теория вероятностей и математическая
статистика

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель - доктор физико-
математических наук, профессор
В.М. ЗОЛОТАРЕВ

Вильнюс 1978

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА I. УСТОЙЧИВОСТЬ ФАКТОРИЗАЦИЙ НЕРАЗЛОЖИМОГО ЗАКОНА	16
I.1. Неразложимые законы с ограниченным спектром	18
I.2. Основная лемма	22
I.3. Оценка $\beta_p(\varepsilon, G)$ при $G \in \mathcal{L}_m, m > 0$	30
I.4. Оценка $\beta_L(\varepsilon, G)$ при $G \in \mathcal{H}_m, m > 0$	36
ГЛАВА II. ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРЕМЕ О РАЗЛОЖЕНИИ n -МЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА	41
2.1. Аналитическое выражение меры устойчивости разложений на компоненты единичного распределения	42
2.2. Оценка β_p для n -мерного распреде- ления Пуассона	49
ГЛАВА III. УСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА ОДИНАКОВОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ЛИНЕЙНЫХ СТАТИСТИК	61
3.1. Качественная сторона устойчивости	65
3.2. Оценки устойчивости в теореме Г. Поля	72
3.3. Оценки устойчивости характеристики вырожденного нормального распределения ...	99
ЛИТЕРАТУРА	104

В В Е Д Е Н И Е

Проблеме характеристики распределений в теории вероятностей и математической статистике отводится значительное место. Имеется посвященная специально этим вопросам монография А.М. Когана, Ю.В. Линника и С.Р. Рао [15]. Важные теоремы о характеристике распределений рассматриваются в монографии Ю.В. Линника и И.В. Островского [18]. Однако в приложениях теоретических исследований на практике часто наблюдается отсутствие полного совпадения предположений математической теории с наблюдаемой действительностью. Поэтому возникает естественный вопрос: если теоретические предпосылки соблюдаются не полностью, а лишь приближенно, то справедливы ли заключения теории? Эти вопросы порождают следующую проблему: установить степень выполнимости заключений математических предположений при приближенном выполнении посылок. Теоремы теории вероятностей, в которых рассматриваются такого рода задачи, называются теоремами устойчивости.

Задачи характеристики и эффект устойчивости хорошо описывает следующая общая модель, предложенная В.М. Золотаревым [10].

Имеются некоторые пространства $X = \{X\}$, $Y = \{Y\}$ и отображение $F: X \rightarrow Y$. Под характеристикой множества $C \subseteq X$ понимается выделение таких множеств $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$, что

$$X \in A, FX \in B \Leftrightarrow X \in C.$$

Понятно, что одно и то же множество C можно характеризовать в этом смысле с помощью различных характеризующих элементов (F, A, B) . Описанная задача характеристики множества C называется чистой задачей.

В качестве примера чистой задачи рассмотрим задачу харак-

теризации компонент вероятностных законов. С этой целью через $\mathcal{X}$ обозначим пространство двумерных случайных вектор-столбцов, через $\mathcal{Y}$ - пространство случайных величин, а через F - матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Если $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$, то, очевидно,

$$FX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = X_1 + X_2 \in \mathcal{Y}.$$

Положим

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, X_1, X_2 - \right. \quad (0.1)$$

- независимые случайные величины $\left. \right\}$.

Пусть $\mathcal{B}$ - класс случайных величин, разложения которых мы хотим исследовать (например, класс нормальных случайных величин, класс пуассоновских случайных величин, класс двухточечных случайных величин и т.д.). Нетрудно проверить, что множество $\mathcal{C}$ случайных векторов с независимыми компонентами, сумма которых принадлежит классу $\mathcal{B}$, полностью характеризуется набором $(F, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ причем

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap F^{-1}\mathcal{B}$$

($F^{-1}\mathcal{B}$ - полный прообраз множества $\mathcal{B}$).

Соответствующая чистой задаче модель устойчивости характеристики множества $\mathcal{C}$ набором $(F, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ выглядит следующим образом (см. [I], [II]).

В множествах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ задаются метрики (точнее, квазиметрики, как их принято называть в топологии) μ и ν соответственно, причем расстояние от точки до множества понимается в общепринятом смысле.

Чистая задача характеристики множества $\mathcal{C}$, заданная в пространствах $(\mathcal{X}, \mu)$ и $(\mathcal{Y}, \nu)$ своими элементами $(F, \mathcal{A}, \mathcal{B})$

называется (μ, ν) -устойчивой в пределах множества $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$, если для любой последовательности элементов $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{X}'$ условие

$$\varepsilon(X_n) = \mu(X_n, \mathcal{A}) + \nu(FX_n, \mathcal{B}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

влечет за собой соотношение

$$\delta(X_n) = \mu(X_n, \mathcal{C}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

В качестве элементов множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ можно рассматривать, в частности, случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве. При этом в случае простых метрик μ и ν (метрика μ называется простой метрикой, если ее значения полностью определяются парой маргинальных распределений $\mu(X, Y)$ и $\mathcal{L}(Y)$ - см. [II], стр. 418) случайные величины, имеющие одинаковые распределения, не различаются. Поэтому в первых двух главах диссертации метрики рассматриваются не на пространствах случайных величин (случайных векторов), а на пространствах вероятностных распределений. В основном мы используем следующие метрики:

метрику Леви L ,

$$L(X, Y) = \inf \left\{ h : P(Y < x - h) - h \leq P(X < x) \leq P(Y < x + h) + h, \forall x \in \mathbb{R}^1 \right\};$$

метрику $\mathcal{J}_s$,

$$\mathcal{J}_s(X, Y) = \min_{T > 0} \max \left\{ \max_{|t| \leq T} \frac{|f_X(t) - f_Y(t)|}{\min(1, |t|^{2+s})}, \frac{1}{T} \right\},$$

причем $s \geq 0$, а $f_X(t)$ - характеристическая функция случайной величины X ;

равномерную метрику ρ ,

$$\rho(X, Y) = \sup \{ |P(X < x) - P(Y < x)| : x \in \mathbb{R}^1 \};$$

метрику λ ,

$$\lambda(X, Y) = \min_{T > 0} \max \left\{ \frac{1}{2} \max_{|t| \leq T} |f_X(t) - f_Y(t)|, \frac{1}{T} \right\}$$

Исследования свойства устойчивости моделей характеристики посвящен ряд появившихся в последние годы работ (см. [2] - [4], [8] - [12], [13], [19] - [32], [34], [36], [37], [39]).

Задача устойчивости разложений на компоненты рассматривалась рядом авторов как в плане качественного, так и количественного ее анализа. В общей форме эта задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеются две метрики μ и ν в пространстве вероятностных распределений $\mathcal{P} = \{P\}$. Для распределения $Q \in \mathcal{P}$ обозначим $K_Q = \{Q'\}$ множество всех компонент вероятностного закона Q . Имея в виду известные теоремы Г. Крамера и Д.А. Райкова (см. [18]) и более поздние результаты В.В. Линника и его последователей, естественно ожидать, что близость распределений $P = P' * P''$ и $Q = Q' * Q''$ будет обеспечивать близость компонент P' и Q' , если разложение Q выполнено нужным образом. Точнее, что $\mu(P, Q) \leq \varepsilon$ влечет за собой

$$\theta(P') = \inf \{ \nu(P', Q') : Q' \in K_Q \} < \delta,$$

где δ мало, если достаточно мало $\varepsilon > 0$. Эффекты такого рода называются устойчивостью разложения распределений на компоненты и рассматриваются в первой и второй главах диссертации.

Мерой устойчивости может служить введенная В.И. Золотаревым [8] величина

$$\beta_{\nu, \mu}(\varepsilon, Q) = \sup \{ \theta(P') : P' \in K_P, P \in B_\mu(\varepsilon, Q) \},$$

где $B_\mu(\varepsilon, Q) = \{P : \mu(P, Q) \leq \varepsilon\}$.

Чаще всего рассматривается случай $\mu = \nu$ и тогда используется обозначение $\beta_{\nu, \mu}(\varepsilon, Q) = \beta_\mu(\varepsilon, Q)$. Соответствующую меру устойчивости для n -мерных случайных векторов обозначим $\beta_\mu(\varepsilon, Q, n)$. При этом очевидно, что

$$\beta_\mu(\varepsilon, Q, 1) = \beta_\mu(\varepsilon, Q).$$

В первой главе, состоящей из четырех разделов, мы рассматриваем асимптотическое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ меры устойчивости неразложимых законов G с некоторыми ограничениями на "хвосты", причем $\mathcal{U}$ - либо метрика Леви L , либо равномерная метрика ρ . Интерес к этому вопросу возник в связи с исследованием зависимости $\beta_{\mathcal{U}}(\cdot, G)$ от G для некоторой фиксированной метрики $\mathcal{U}$, которая, возможно, обусловлена разложимостью G , степенью убывания "хвостов" распределения G и т.д.

Для дальнейшего изложения основных результатов полезно ввести следующие обозначения.

Пусть $\mathcal{L}_m^*$ - класс вероятностных законов G с ограниченным спектром $S(G)$, удовлетворяющих условию $\min(u, v) = m$, где

$$u = P(X_G = \inf S(G)), \quad v = P(X_G = \sup S(G)),$$

а X_G - случайная величина с функцией распределения (ф.р.) G . Множество неразложимых законов из $\mathcal{L}_m^*$ обозначим через $\mathcal{L}_m$. Класс всех законов $G \in \mathcal{L}_m$, $m > 0$, точки $\inf S(G)$ и $\sup S(G)$ которых являются изолированными точками множества $S(G)$,

обозначим через $\mathcal{L}_m$. В разделе I.1 приводятся примеры неразложимых законов, принадлежащих классу $\mathcal{L}_m$, доказывается, что $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m^*$ при $m > 1/4$, а также, что $\mathcal{L}_m$ является собственным подмножеством $\mathcal{L}_m^*$ при $0 < m \leq \frac{1}{4}$. Мы показываем, что существует такой закон из класса $\mathcal{L}_0$, для которого

$$\beta_g(\varepsilon, G) \geq 1/4,$$

т.е. существует закон $G \in \mathcal{L}_0$, разложения которого неустойчивы в равномерной метрике. Возникает естественный вопрос: обладают ли устойчивостью разложения законов $G \in \mathcal{L}_m$ в равномерной метрике при $m > 0$? Если да, то каковы количественные оценки меры устойчивости β_g ? Эти вопросы рассматриваются в следующих двух разделах, а именно, в разделе I.2 доказывается справедливость следующей фундаментальной для дальнейшего изложения главы первой леммы:

Л е м м а I.1. Пусть $G \in \mathcal{L}_m, m > 0$. Если $\varepsilon_n \downarrow 0 (n \uparrow \infty)$, то

$$\beta_g(\varepsilon_n, G) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad n \uparrow \infty.$$

В разделе I.3 получены количественные оценки меры устойчивости β_g для законов $G \in \mathcal{L}_m$ при $m > 0$.

Т е о р е м а I.1. Если $G \in \mathcal{L}_m, m > 0$, то существует такая константа $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(G) > 0$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\beta_g(\varepsilon, G) \leq \frac{1}{2} (m - \sqrt{m^2 - 4\varepsilon}),$$

причем в классе $\mathcal{L}_m$ эта оценка неулучшаема.

Исследования устойчивости распределений специального типа проводились О. Калленбергом [34], где он, в частности, установил, что разложения решетчатых законов с конечным спектром

устойчивы в равномерной метрике. В разделе I.3 диссертации приводятся исправления неточностей, которые допустил О. Калленберг в работе [34].

В разделе I.4 рассматриваются количественные оценки меры устойчивости β_L для вероятностных законов из класса $\mathcal{H}_m$ ($m > 0$). Доказывается

Т е о р е м а I.3. Если $G \in \mathcal{H}_m$, $m > 0$, то существует константа $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(G) > 0$, такая, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$\beta_L(\varepsilon, G) \leq \max(3, m^{-1})\varepsilon + \frac{7m+1}{m^3}\varepsilon^2.$$

Вторая глава состоит из двух разделов и посвящена оценкам устойчивости разложений многомерного закона Пуассона, который определяется согласно терминологии, предлагаемой П. Леви [35].

О п р е д е л е н и е. Закон P называется n -мерным законом Пуассона, если его характеристическая функция имеет вид

$$\varphi(\vec{t}; P) = \exp\{i(\vec{\beta}, \vec{t}) + \lambda(e^{i(\vec{t}, \vec{z})} - 1)\}, \quad (0.2)$$

где $\vec{\beta} \in R^n$, $\lambda > 0$, $\vec{t} \in R^n$, $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n) \in R^n$.

В разделе 2.1 рассматривается случай $\vec{z} = \vec{0}$, т.е. строятся оценки меры устойчивости разложений единичного распределения в пространстве R^n . Целесообразность этого рассмотрения обуславливает простота ситуации, позволяющая наглядно наблюдать сущность исследуемого явления. В пространстве R^1 получено аналитическое выражение меры устойчивости $\beta_L(\varepsilon, E)$.

Т е о р е м а 2.1. Для $\varepsilon \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\beta_L(\varepsilon, E) = \begin{cases} 2\varepsilon & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq 1/4, \\ 1/2 & \text{при } 1/4 \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

Новым, более простым и кратким способом приводится доказательство утверждения

$$\beta_g(\varepsilon, E) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}), \quad \varepsilon \in [0, 1/4],$$

первоначальное доказательство которого принадлежит Ю.Ю. Мачи-су [19].

Для формулировки основного результата раздела 2.2 нам необходимо следующее обозначение:

$$F^{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) = P(Z_j > x_j, j = i_1, \dots, i_k; Z_\ell < x_\ell, \ell \neq i_1, \dots, i_k).$$

если F - ф.р. n -мерного закона $(Z_1, \dots, Z_n)$.

Определим

$$\rho(F^{i_1, \dots, i_k}, G^{i_1, \dots, i_k}) = \sup \{ |F^{i_1, \dots, i_k}(\vec{x}) - G^{i_1, \dots, i_k}(\vec{x})| : \vec{x} \in R^n \}.$$

Т е о р е м а 2.3. Если Π - n -мерный закон Пуассона с характеристической функцией (0.2), причем $\tau_{i_1} < 0, \dots, \tau_{i_k} < 0$, то существуют такие постоянные $C = C(\lambda)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(n)$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ справедлива оценка

$$\beta_g(\varepsilon, \Pi^{i_1, \dots, i_k}, n) \leq C \frac{\ln \ln 1/\varepsilon}{\ln 1/\varepsilon}. \quad (0.3)$$

Исследования Г.П. Чистякова [25] показывают, что оценка (0.3) является неулучшаемой.

Отметим также, что доказательство теоремы 2.3 позволяет сократить и упростить изложение § 8.5 (где строится оценка устойчивости для теоремы Д.А. Райкова) монографии [18], а именно соотношения (8.5.13)-(8.5.18).

Большой интерес отводится изучению устойчивости характеристических свойств нормального закона (см., например, [15], гл. 9; [2]-[4], [11], [24], [37], [39]). В главе третьей, состоящей из трех разделов, рассматриваются некоторые вопросы устойчивости характеристики нормального закона одинаковой распределенностью монома и линейной статистики.

В первом разделе главы III анализируются проблемы качественной устойчивости этой характеристики. При этом исследовании целесообразно подчеркнуть функциональную зависимость случайной величины X от ε путем обозначения X_ε . В теореме В.М. Золотарева [10] установлены достаточные условия устойчивости чистой задачи характеристики в общей форме. Если же, в частности, независимые одинаково распределенные случайные величины $X_{1,\varepsilon}, \dots, X_{m,\varepsilon}$ удовлетворяют этим достаточным условиям и

$$L(X_{1,\varepsilon}, \sum_{i=1}^n a_i X_{i,\varepsilon}) \leq \varepsilon,$$

причем $|a_i| < 1$ при $1 \leq i \leq m$, $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$, то

$$\inf_{a, \sigma} L(X_{1,\varepsilon}, N_{a, \sigma}) \rightarrow 0,$$

если $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. обеспечивается сближение в метрике Леви последовательности $\{X_{1,\varepsilon}\}$ с классом нормальных случайных величин. В связи с этим возникают вопросы: при каких условиях последовательность $\{X_{1,\varepsilon}\}$ сходится к конкретному нормальному закону? Если эта сходимость установлена, то как найти параметры a и σ предельного

нормального закона? Эти проблемы решаются в теореме 3.1 и ее следствии.

Второй раздел третьей главы посвящен построению количественных оценок устойчивости в следующей теореме Г. Поля [40].

Т е о р е м а (Г. Поля). Если случайные величины X_1 и X_2 независимы, одинаково распределены с дисперсией $0 < \sigma^2 < \infty$, X_1 и $aX_1 + bX_2$ (где $a > 0, b > 0$) одинаково распределены, то X_1 — нормальная случайная величина с параметрами 0 и σ .

Первым устойчивость этой теоремы рассмотрел Л.Д. Мешалкин [39]. При этом исследование устойчивости теоремы Г. Поля проводилось лишь для частного случая $a = b = 1/\sqrt{2}$. Возникает, таким образом, задача построения количественной оценки устойчивости в теореме Г. Поля для произвольных положительных чисел a, b ; $a^2 + b^2 = 1$. Эта задача решается в следующей теореме.

Т е о р е м а 3.2. Пусть X_1, X_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины, а X_1 и $aX_1 + bX_2$ (ρ, ε) — одинаково распределены, причем a, b — положительные и $a^2 + b^2 = 1$. Если r — натуральное число, $r \geq 3\rho$, где

$$\rho = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right) / \ln \max(a, b)$$

и $EX_1^s = EN_{0,\sigma}, s = 1, 2, \dots, r-1$; $E|X_1|^r \leq M_r < \infty$, то существуют такие положительные постоянные $C = C(b, M_r)$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(b, M_r, \sigma)$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$

$$\rho(X_1, N_{0,\sigma}) \leq C(\sigma^{-2\rho} + \sigma^{r-2\rho})\varepsilon^{1-2\rho/r}.$$

Если $a = b$, то $p = 1$, и, положив $c = 3$, $b = 1$ в качестве следствия теоремы 3.2 получаем теорему Л.Д. Мешалкина [39] (см. стр. 73). Отметим, что теорема 3.2 устанавливает зависимость оценки устойчивости теоремы Г. Поля от порядка конечных моментов исследуемой случайной величины X_1 .

Неулучшаемый порядок оценки устойчивости теоремы Г. Поля (случай $a = b = 1/\sqrt{2}$) получен в метрике $\mathcal{V}_s$ при $s > 0$. Этот результат, а также результат исследования устойчивости в метрике $\mathcal{V}_0$, рассматривается в теореме 3.3.

Т е о р е м а 3.3. Пусть X_1, X_2 - независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$EX_1 = 0, \quad EX_1^2 = 1.$$

Пусть, кроме того, X_1 и $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ $(\mathcal{V}_s, \varepsilon)$ -одинаково распределены. Если $s > 0$, то существует такая постоянная $\varepsilon_4 = \varepsilon_4(s) > 0$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_4$

$$\mathcal{V}_s(X_1, N_{0,1}) \leq C_1 \varepsilon,$$

где $C_1 = 32(1 + 4\sqrt{e}(1 - 2^{-s/2})^{-1})$.

Если $s = 0$, $M_{2+\delta} = E|X_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, то существует такая постоянная $\varepsilon_5 = \varepsilon_5(\delta, M_{2+\delta})$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_5$

$$\mathcal{V}_0(X_1, N_{0,1}) \leq C_2 \varepsilon \ln 1/\varepsilon,$$

где $C_2 = 2^{11}\sqrt{e}/(\delta \ln 2)$

Однако, как отмечает В.М. Золотарев [II], может сложиться ситуация, при которой мы можем получать хорошо очерченные ответы

в "естественной" для заданной задачи метрике, но при этом хотим иметь аналогичные ответы в терминах метрик, выбор которых диктуется, например, соображениями возможных приложений. Поэтому мы строим оценки метрики $\mathcal{V}_S$ через чаще используемые метрики λ (двухсторонние оценки) и L (оценка снизу).

В последнем разделе изучается количественная устойчивость характеристики вырожденного распределения. Если, к примеру, X и αX - одинаково распределены (согласно обозначениям, принятым в теореме Г. Пойа, это соответствует случаю $b=0$) и $|\alpha| \neq 1$, то, очевидно, $X = X_E$, где X_E - вырожденная случайная величина. Также не представляет каких-либо затруднений доказательство следующего предложения: если X_1, X_2 - независимые одинаково распределенные случайные величины, а X_1 и $X_1 + X_2$ одинаково распределены, то $X_1 = X_E$. В теоремах 3.4 и 3.5 соответственно рассматриваются оценки устойчивости этих утверждений.

Т е о р е м а 3.4. Если X и αX (L_τ) одинаково распределены, $|\alpha| \neq 0; 1$ и существует такой $\tau > 0$, что $E|X|^\tau = M_\tau < \infty$, то

$$L(X, X_E) \leq ((1 + \tau^{-1}) / \ln \hat{a}) \varepsilon \ln 1/\varepsilon + M_\tau \hat{a}^\tau \varepsilon,$$

где $\hat{a} = \max(|\alpha|, 1/|\alpha|)$.

Т е о р е м а 3.5. Если X_1 и X_2 - независимые одинаково распределенные случайные величины и $\lambda(X_1, X_1 + X_2) \leq \varepsilon$, то при $0 \leq \varepsilon \leq 1/8$

$$\lambda(X_1, X_E) \leq (1 - \sqrt{1 - 8\varepsilon}) / 4.$$

Разделы внутри каждой из трех глав имеют двойную нумерацию (например, "3.2" означает второй раздел третьей главы). Теоремы

и формулы в каждой главе имеют сквозную (независимо от количества разделов) нумерацию. Например, формула (2.14).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [27]-[31] и докладывались на УХП, ХУШ и XIX конференциях Литовского математического общества (Вильнюс, июнь 1976 г., июнь 1977 г., Каунас, июнь 1978 г.); на семинаре по теории вероятностей в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР (Москва, октябрь 1977 г.); на семинаре по теории вероятностей в ЛГУ (Ленинград, ноябрь 1977 г.); на семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей (Москва, декабрь 1977 г.); на семинаре по теории вероятностей в Институте математики и кибернетики АН Литовской ССР (Вильнюс, апрель 1978 г.); на конференции молодых ученых и аспирантов МИАН-ЛОМИ (Ленинград, июнь 1978 г.).

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить В.М. Золотарева за постановку задачи, постоянную поддержку при ее решении и ценные советы.

УСТОЙЧИВОСТЬ ФАКТОРИЗАЦИЙ НЕРАЗЛОЖИМОГО ЗАКОНА

Вскоре после появления теоремы Г. Крамера о разложении на компоненты нормального закона П. Леви обнаружил (см. [17], с. 238), что эта теорема устойчива в метрике Леви L , а Н.А. Сапогов построил оценки устойчивости для случая равномерной метрики ρ (см., например, [18], гл. УШ, § 2). Эти исследования являются первыми результатами в теории устойчивости моделей характеристики распределений — интенсивно развивающейся области теории вероятностей.

Мерой устойчивости разложений на компоненты мы выбрали величину β_n (см. Введение). Ее, естественно, можно определить иным образом. Такой мерой, к примеру, может служить величина

$$\alpha_n(\varepsilon, Q) = \sup \{ \theta^*(P', P'') : P' * P'' \in B_n(\varepsilon, Q) \},$$

где

$$\theta^*(P', P'') = \inf \{ \max \{ \mu(P', Q'), \mu(P'', Q'') \} : Q' * Q'' = \varepsilon \}$$

Эта величина была введена В.И. Золотаревым в работе [8]. Очевидно, $\alpha_n(\varepsilon, Q) \gg \beta_n(\varepsilon, Q)$. Эти меры устойчивости эквивалентны в том смысле, что (при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\beta_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha_n \rightarrow 0$$

(см. также [8]).

Целесообразно рассмотрение определения меры устойчивости (например, меры $\alpha_n(\varepsilon, Q)$) с помощью понятий, принятых при рассмот-

рении общей модели устойчивости чистой задачи характеристики во Введении.

Пусть множество $\mathcal{A}$ двумерных случайных векторов определяется соотношением $(0, I)$, множество $\mathcal{B}$ состоит из единственной точки X_Q (случайная величина X_Q имеет функцию распределения Q). $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Если $X' \in \mathcal{A}$, $X'' \in \mathcal{A}$, причем

$$X' = \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix}, \quad X'' = \begin{pmatrix} X''_1 \\ X''_2 \end{pmatrix},$$

то положим

$$\mu_m(X', X'') = \max \{ \mu(X'_i, X''_i) : i = 1, 2 \},$$

где μ - метрика на пространстве случайных величин. Легко убедиться, что μ_m - метрика на $\mathcal{A}$.

Пусть, наконец,

$$D_\mu(\varepsilon, X_Q) = \{Z : \mu(Z, X_Q) \leq \varepsilon\}.$$

В таком случае нетрудно заметить, что

$$\mathcal{L}_\mu(\varepsilon, Q) = \sup \{ \mu_m(X, C) : X \in F^{-1} D_\mu(\varepsilon, X_Q) \},$$

где $C = \mathcal{A} \cap F^{-1} \mathcal{B}$.

Задача устойчивости разложений на компоненты рассматривалась рядом авторов как в плане качественного, так и количественного ее анализа. Наиболее существенным достижением при исследовании качественной стороны устойчивости разложений является следующий результат (мы используем обозначения, принятые во Введении на стр. 7).

Т е о р е м а (Ю.В. Линник, В.М. Золотарев). Для любой метрики $\int \mathcal{L}$, реализующей слабую топологию (например, для метрики Леви $\mathcal{L}$), и любого закона $Q \in \mathcal{P}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\beta_M(\varepsilon, Q) \rightarrow 0.$$

Количественные оценки устойчивости разложений нормального закона исследовали Н.А. Сапогов, В.М. Золотарев, С.Г. Малосевский (о результатах этих исследований см. в [18]), В.В. Сенатов [23], Г.П. Чистяков [25], законы Пуассона - О.В. Шалаевский, Ю.Ю. Мачис (см. [18]), Г.П. Чистяков [25], свертки нормального и пуассоновского законов - Г.П. Чистяков [26], биномиального закона - Б. Рамачандран, Ю.Ю. Мачис (см. [18]), О. Калленберг [34]. Количественные оценки устойчивости факторизаций простейших неразложимых законов - вырожденного закона E и биномиального закона B с производящей функцией $q + pz$ (при $q = 1$ имеем $B = E$) - были получены Ю.Ю. Мачисом [19], [20]. О. Калленберг [34], в частности, установил, что разложения решетчатых законов с конечным спектром устойчивы в равномерной метрике. Работа О. Калленберга [34] содержит некоторые неточности, исправления которых приводятся в разделе 1.3.

1.1. Неразложимые законы с ограниченным спектром

Напомним некоторые понятия, используемые в теории вероятностей (см., например, [18]). Точка x называется точкой роста закона $F(x)$, если $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Спектром $S(F)$ закона F называется множество всех точек роста закона F . Дискретным спектром $D(F)$ закона F называется множество всех точек разрыва закона F . Обозначим

$$\text{lex} F = \inf S(F), \quad \text{rex} F = \sup S(F).$$

Пусть $\mathcal{L}_m^*$ - класс вероятностных законов G с ограниченными спектрами,

где $m = \min(u, v)$, $u = P(X_G = \text{lex} G)$, $v = P(X_G = \text{rex} G)$ и X_G -

случайная величина с функцией распределения (ф.р.) G . Множество неразложимых законов из $\mathcal{L}_m^*$ обозначим через $\mathcal{L}_m$. Класс всех законов $G \in \mathcal{L}_m$, $m > 0$, точки $\text{lex} G$ и $\text{rex} G$ которых являются изолированными точками множества $S(G)$, обозначим через $\mathcal{H}_m$. Очевидно, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{L}_1$. Заметим, что область значений m является множеством $[0, 1/2] \cup \{1\}$.

Приведем примеры неразложимых законов, принадлежащих классу $\mathcal{L}_m$.

Любой вероятностный закон с ограниченным спектром, удовлетворяющий условию $D(G) = \{\text{lex} G, \text{rex} G\}$, является неразложимым. Классический закон арксинуса (см. [18], стр. 100) неразложим, и следовательно, является элементом класса $\mathcal{L}_0$. Пользуясь леммой 3.3.4 из монографии [18], легко заметить, что при $m > 1/3$ справедливо соотношение $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m^*$. А.М. Зубкову, редактировавшему статью автора [31], удалось простым приемом улучшить это утверждение и доказать, что $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m^*$ при $m > 1/4$. Действительно, если $\mathcal{L}_m \neq \mathcal{L}_m^*$ при некотором $m > 1/4$, то существуют случайная величина X с ф.р. H и невырожденные случайные величины X_1 и X_2 с ф.р. H_1 и H_2 соответственно такие, что $H = H_1 * H_2$. Обозначим

$$P(X_1 = \text{lex} H_1) = x, \quad P(X_2 = \text{lex} H_2) = y.$$

Так как X_1 и X_2 - невырожденные случайные величины, то

$$P(X_1 = \text{rest } H_1) \leq 1-x, \quad P(X_2 = \text{rest } H_2) \leq 1-y.$$

Из соотношений

$$P(X = \text{rest } H) = P(X_1 = \text{rest } H_1) P(X_2 = \text{rest } H_2) = xy$$

$$P(X = \text{rest } H) = P(X_1 = \text{rest } H_1) P(X_2 = \text{rest } H_2) \leq (1-x)(1-y)$$

следует оценка

$$m \leq \min \{ xy, (1-x)(1-y) \}.$$

Заметим, что величина $\min \{ xy, (1-x)(1-y) \}$ максимальна при $xy = (1-x)(1-y)$, т.е. при $y = 1-x$. Следовательно,

$$\min \{ xy, (1-x)(1-y) \} \leq x(1-x).$$

Так как $x(1-x) \leq 1/4$, то $m \leq 1/4$, что противоречит условию $m > 1/4$.

Нетрудно доказать, что $\mathcal{E}_m$ является собственным подмножеством $\mathcal{E}_m^*$ при $0 < m \leq 1/4$, т.е. для любого $m \in (0, 1/4]$ существует такой закон B_m , что $B_m \in \mathcal{E}_m^* \setminus \mathcal{E}_m$. Действительно,

пусть B_m' - двухточечный закон с разрывами z и $1-z$ в точках I и O, а B_m'' - с разрывами $1-z$ и z в точках O и I соответственно. Если $B_m = B_m' * B_m''$, а Y - случайная величина с ф.р. B_m , то, очевидно,

$$P(Y = -1) = P(Y = 1) = z(1-z),$$

$$P(Y = 0) = 1 - 2z(1-z).$$

Решая уравнение $z(1-z) = m$, находим, что для выполнения условия $B_m \in \mathcal{E}_m^* \setminus \mathcal{E}_m$ достаточно положить

$$z = (1 - \sqrt{1 - 4m}) / 2.$$

Переходим к исследованию устойчивости разложений законов $G \in \mathcal{L}_m$.

Интересно отметить, что существует $G \in \mathcal{L}_0$, для которого

$$\beta_g(\varepsilon, G) \geq 1/4$$

при $\varepsilon \in (0, 1)$, т.е. существует закон $G \in \mathcal{L}_0$, разложения которого неустойчивы в равномерной метрике. Действительно, пусть G - непрерывный вероятностный закон из класса $\mathcal{L}_0$. Пусть, кроме того, $F_{n_1}(x) = G(x)$, а

$$F_{n_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, -1/n], \\ 1/2 & \text{при } x \in (-1/n, 1/n], \\ 1 & \text{при } x \in (1/n, \infty), \end{cases}$$

если $n \geq 1$. Очевидно, $L(F_{n_2}, E) \rightarrow 0$. Далее нам потребуется

Л е м м а (В.М. Золотарев). Для любых ф.р. $\{P_k\}$ и $\{Q_k\}$ верно неравенство

$$L\left(\bigstar_{k=1}^n P_k, \bigstar_{k=1}^n Q_k\right) \leq \sum_{k=1}^n L(P_k, Q_k).$$

Эта лемма приводится, например, в [18], гл.УШ, § I.

Пользуясь леммой Золотарева, замечаем, что

$$L(F_n, G) \leq L(F_{n_1}, G) + L(F_{n_2}, E) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $F_n = F_{n_1} \bigstar F_{n_2}$. Известно, что сходимость в метрике Леви эквивалентна равномерной сходимости, если предельное распределение непрерывно. Следовательно, $\beta_g(F_n, G) \rightarrow 0$.

Тем не менее,

$$\inf \{ \beta(F_{n_2}, G') : G' \in K_G \} \geq 1/4.$$

Оценка $\beta_\beta(\varepsilon, G) \geq 1/4$ при $\varepsilon \in (0, 1)$, очевидно, справедлива для любого невырожденного закона G , множество компонент K_G которого состоит из непрерывных и вырожденных распределений.

Как уже отмечалось во Введении, возникает естественный вопрос: обладают ли устойчивостью разложения законов $G \in \mathcal{E}_m$ в равномерной метрике при $m > 0$? Если да, то каковы количественные оценки меры устойчивости β_β ? Эти два вопроса рассматриваются соответственно в разделах I.2 и I.3.

I.2. Основная лемма

Покажем, что разложения закона $G \in \mathcal{E}_m$ при $m > 0$ устойчивы в равномерной метрике.

Л е м м а I.1. Пусть $G \in \mathcal{E}_m$, $m > 0$. Если $\varepsilon_n \downarrow 0$ ($n \uparrow \infty$), то

$$\beta_\beta(\varepsilon_n, G) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad n \uparrow \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мера устойчивости $\beta_\beta(\varepsilon, Q)$, очевидно, монотонно не возрастающая по ε функция. Предположим, что $\beta_\beta(\varepsilon_n, G) \not\downarrow 0$ при $\varepsilon_n \downarrow 0$, т.е. что разложения закона $G \in \mathcal{E}_m$ неустойчивы в равномерной метрике. Так как G - неразложим, то это означает, что существует ф.р. F_n со свойством

$$\beta(F_n, G) \leq \varepsilon_n \downarrow 0 \quad (n \uparrow \infty) \quad (\text{I.1})$$

и ф.р. $F'_n \in K_{F_n}$ со свойствами

$$\min \left\{ \inf_{\tau} \rho(F'_n, E_{\tau}), \inf_s \rho(F'_n, G_s) \right\} \rightarrow 0 \quad (n \uparrow \infty) \quad (I.2)$$

причем $E_{\tau}(x) = E(x - \tau)$, $G_s(x) = G(x - s)$.

Легко заметить, что если выполняется соотношение (I.2), то выполняется и соотношение

$$\min \left\{ \rho(F'_n, E_{\tau}), \rho(F'_n, G_s) \right\} \rightarrow 0, \quad n \uparrow \infty \quad (I.3)$$

для любых действительных τ и s . Более того, если произвести соответствующим образом сдвиги законов F'_n , то в рассматриваемом случае можно доказать, что соотношения (I.2) и (I.3) эквивалентны.

Докажем, что (I.3) выполняется для ф.р. F''_n , удовлетворяющей условию $F''_n \neq F'_n = F_n$. В самом деле, пусть X_n, X'_n, X''_n - случайные величины с ф.р. F_n, F'_n, F''_n соответственно. Заметим, что если $\rho(F''_n, E_{\tau_0}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторого τ_0 , то $\rho(F'_n, G_{-\tau_0}) \rightarrow 0$. Действительно, тогда $P(X''_n = \tau_0) \rightarrow 1 \quad (n \uparrow \infty)$. Поэтому $P(X'_n = X_n - \tau_0) \rightarrow 1$ и, следовательно, $\rho(F'_n, G_{-\tau_0}) \rightarrow 0 \quad (n \uparrow \infty)$, а это противоречит соотношению (I.3). Если же $\rho(F''_n, G_s) \rightarrow 0 \quad (n \uparrow \infty)$, то для всех достаточно больших n

$$P(X''_n = \text{left } G + s) \gg m/2, \quad P(X''_n = \text{right } G + s) \gg m/2.$$

Так как

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\gg P(X_n < \text{left } G) \gg P(X'_n < -s) P(X''_n = \text{left } G + s), \\ \varepsilon_n &\gg P(X_n > \text{right } G) \gg P(X'_n > -s) P(X''_n = \text{right } G + s), \end{aligned}$$

то

$$P(X'_n < -s) \leq 2\varepsilon_n/m, \quad P(X'_n > -s) \leq 2\varepsilon_n/m,$$

т.е. $\rho(F'_n, E_s) \rightarrow 0$ при $n \uparrow \infty$, что несовместимо с предположением (I.3).

Так как (I.3) выполняется для любых действительных значений τ и s , то вместо $F'_n(x)$ мы можем рассматривать $F'_n(x + m\tau)$. Следующее предположение, таким образом, не уменьшает общности рассуждений.

Пусть справедливо (I.1) и существуют такие последовательности $\{F_{n1}\}$ и $\{F_{n2}\}$, что для любых действительных чисел τ_1, s_1, τ_2, s_2 выполняются одновременно следующие два соотношения ($n \uparrow \infty$)

$$\min \{ \rho(F_{n1}, E_{\tau_1}), \rho(F_{n1}, G_{\tau_2}) \} \rightarrow 0,$$

$$\min \{ \rho(F_{n2}, E_{s_1}), \rho(F_{n2}, G_{s_2}) \} \rightarrow 0,$$

(I.4)

причем $F_{n1} * F_{n2} = F_n$, а медиана F_{n1} равна нулю.

Для доказательства ложности предпосылок (I.4) нам потребуются некоторые дополнительные обозначения и соотношения. Напомним, что арифметической суммой множеств действительных чисел A и B называется множество

$$A + B = \{x : x = x_1 + x_2, x_1 \in A, x_2 \in B\}.$$

Обозначим

$$F(\{x\}) = F(x+0) - F(x), \quad D_c(F) = \{x : F(\{x\}) \geq c\}.$$

Докажем, что при $0 < c \leq 1$

$$D_c(F) \subseteq D_{c/2}(F_1) + D_{c/2}(F_2) \subseteq D_{c^2/4}(F). \quad (I.5)$$

Действительно,

$$F(\{x\}) = \sum_{s \in D(F_1): x-s \in D(F_2)} F_1(\{s\}) F_2(\{x-s\}).$$

Далее, так как

$$\sum_{s \in D_{c/2}(F_1)} F_1(\{s\}) F_2(\{x-s\}) < c/2,$$

$$\sum_{s: x-s \in D_{c/2}(F_2)} F_1(\{s\}) F_2(\{x-s\}) < c/2,$$

то при $x \in D_c(F)$

$$\sum_{s \in D_{c/2}(F_1): x-s \in D_{c/2}(F_2)} F_1(\{s\}) F_2(\{x-s\}) = F(\{x\}),$$

$$\sum_{s \in D_{c/2}(F_1)} F_1(\{s\}) F_2(\{x-s\}) - \sum_{s: x-s \in D_{c/2}(F_2)} F_1(\{s\}) F_2(\{x-s\}) > 1$$

Следовательно, $x \in D_{c/2}(F_1) + D_{c/2}(F_2)$. Далее, если $x \in D_{c/2}(F_1) + D_{c/2}(F_2)$ то

$$F(\{x\}) \geq \sum_{s \in D_{c/2}(F_1): x-s \in D_{c/2}(F_2)} F_1(\{s\}) F_2(\{x-s\}) \geq \frac{c^2}{4}$$

т.е. $x \in D_{c^2/4}(F)$. Справедливость (I.5) доказана.

Так как $\vartheta(F_n, G) \geq L(F_n, G)$, то из теоремы Линника-Золотарева (см. введение в главу I) следует, что для $j=1, 2$ справедливы следующие соотношения

$$\min \{L(F_{n_j}, E), L(F_{n_j}, G)\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (I.6)$$

Из последовательности $\{F_{n_j}\}$ ($j=1, 2$) выделим две подпоследовательности $\{F_{k_j}^1\}$ и $\{F_{k_j}^2\}$ следующим образом: $F_{k_j}^1 = F_{n_{k_j}}$, если

$$\min \{L(F_{n_k j}, E), L(F_{n_k j}, G)\} = L(F_{n_k j}, E).$$

и $F_{kj}^2 = F_{n_k j}$, если

$$\min \{L(F_{n_k j}, E), L(F_{n_k j}, G)\} = L(F_{n_k j}, G).$$

Любой член F_{pj} ($j=1,2$) последовательности $\{F_{nj}\}$ ($j=1,2$) является, главным образом, либо элементом последовательности $\{F_{kj}^1\}$, либо - $\{F_{kj}^2\}$ ($j=1,2$).

Мы докажем, что если

$$\min \{L(F_{k1}, E), L(F_{k1}, G)\} = L(F_{k1}, E) \quad (I.7)$$

для некоторого достаточно большого k , то для этого же k справедливо соотношение

$$\min \{L(F_{k2}, E), L(F_{k2}, G)\} = L(F_{k2}, G)$$

Пользуясь соотношением (I.6), получаем, что для произвольного $\tau > 0$ существует N_τ такой, что

$$\min \{L(F_{nj}, E), L(F_{nj}, G)\} \leq \tau \quad (j=1,2) \quad (I.8)$$

при $n > N_\tau$. Пусть наше утверждение ложно, т.е. пусть при некотором $s_0 > N_\tau$

$$L(F_{s_0 2}, G) > L(F_{s_0 2}, E).$$

Из (I.7) и (I.8) в таком случае имеем

$$L(F_{s_0 1}, E) \leq \tau, \quad L(F_{s_0 2}, E) < \tau.$$

Пользуясь леммой Золотарева (см. раздел I.I), получаем

$$L(F_{s_0}, E) \leq L(F_{s_{01}}, E) + L(F_{s_{02}}, E) < 2\tau. \quad (I.9)$$

Так как при $n \gg N_T$, очевидно, $\varepsilon_n \leq \tau$, то

$$L(F_{s_0}, G) \leq \tau. \quad (I.10)$$

Соотношения (I.9) и (I.10) несовместимы, если $G \neq E$ и $\tau > 0$ достаточно мало.

Из только что доказанного утверждения следует, что для любого достаточно большого n существует номер k_n такой, что

$$F_{n1}^1 * F_{n2}^2 = F_{k_n}$$

Если же равенство (I.7) не имеет места, т.е. если

$$\min \{L(F_{k_1}, E), L(F_{k_1}, G)\} = L(F_{k_1}, G)$$

для некоторого достаточно большого k , то нетрудно доказать, что для того же k справедливо соотношение

$$\min \{L(F_{k_2}, E), L(F_{k_2}, G)\} = L(F_{k_2}, E).$$

Действительно, с этой целью достаточно ^{по}предложить, что последнее равенство не выполняется для некоторого большого k_0 и воспользоваться оценками (I.I), (I.6) и

$$L(F_{k_0}, G * G) \leq L(F_{k_{01}}, G) + L(F_{k_{02}}, G).$$

Следовательно, для любого достаточно большого k существует номер l_k такой, что

$$F_{k1}^2 * F_{k2}^1 = F_{l_k}.$$

Как уже отмечалось, последовательность $\{F_{nj}\}$ ($j=1,2$) исчерпывающе описывается элементами F_{nj}^i ($i=1,2$). Вместо соотношений (I.6) нам, таким образом, достаточно рассмотреть одно из следующих двух соотношений (так как другое рассматривается совершенно аналогично):

$$\begin{aligned} L(F_{n1}^1, E) \rightarrow 0, \quad L(F_{n2}^2, G) \rightarrow 0, \\ L(F_{n1}^2, G) \rightarrow 0, \quad L(F_{n2}^1, E) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \uparrow \infty$. Пусть справедливо первое соотношение. С целью упрощения обозначений вместо подпоследовательности $\{F_{n1}^1\}$ будем рассматривать саму последовательность $\{F_{n1}\}$, а вместо $\{F_{n2}^2\}$ - последовательность $\{F_{n2}\}$. Имеем, следовательно, что

$$L(F_{n1}, E) \rightarrow 0, \quad L(F_{n2}, G) \rightarrow 0. \quad (I.II)$$

Множества $D_{m/4}(F_{ni})$, $i=1,2$ состоят из конечного числа точек при любом $m > 0$ (мы не рассматриваем тривиальный случай $D_{m/4}(F_{ni}) = \emptyset$), поэтому обозначим

$$a_{ni} = \min D_{m/4}(F_{ni}), \quad b_{ni} = \max D_{m/4}(F_{ni}), \quad i=1,2.$$

Заметим, что $D_{m/2}(F_n) \neq \emptyset$ при достаточно больших n ,

$$a = \min D_{m/2}(F_n) = \min D_{m^2/16}(F_n), \quad (I.I2)$$

$$b = \max D_{m/2}(F_n) = \max D_{m^2/16}(F_n)$$

где $a = \text{lex} G$, $b = \text{rex} G$. Из правой части соотношений

(I.5) при $c = \frac{m}{2}$ заключаем, что $a_{n1} + a_{n2} \geq a$, $b_{n1} + b_{n2} \leq b$,

а из левой - что $a_{n1} + a_{n2} \leq a$, $b_{n1} + b_{n2} \geq b$. Следовательно, при достаточно больших n

$$a_{n1} + a_{n2} = a, \quad b_{n1} + b_{n2} = b. \quad (I.I3)$$

Переходим к непосредственному доказательству ложности предположения (I.4). Докажем, что $a_{n1} + b_{n2} < b$ при достаточно большом n . Действительно, медиана закона F_{n1} равна нулю, и поэтому

$$\varepsilon_n \geq P(X_n < a) \geq P(X_{n1} \leq 0) P(X_{n2} < a) \geq \frac{1}{2} P(X_{n2} < a),$$

$$\varepsilon_n \geq P(X_n > b) \geq P(X_{n1} > 0) P(X_{n2} > b) \geq \frac{1}{2} P(X_{n2} > b),$$

где X_{n1}, X_{n2} - случайные величины с ф.р. F_{n1}, F_{n2} соответственно.

Следовательно, $a_{n2} \geq a, b_{n2} \leq b$. Из (I.I3) заключаем, что

$a_{n1} \leq 0, b_{n1} \geq 0$. Если, таким образом, $a_{n1} + b_{n2} = b$, т.е. (в силу (I.I3)) $a_{n1} = b_{n1}$, то $a_{n1} = b_{n1} = 0$. Отсюда имеем, что $a_{n2} = a, b_{n2} = b$. Поэтому

$$\varepsilon_n \geq P(X_{n1} < 0) P(X_{n2} = a), \quad P(X_{n1} < 0) \leq \frac{4\varepsilon_n}{m}, \quad (I.I4)$$

$$\varepsilon_n \geq P(X_{n1} > 0) P(X_{n2} = b), \quad P(X_{n1} > 0) \leq \frac{4\varepsilon_n}{m}. \quad (I.I5)$$

Взяв в соотношении (I.4) $\varepsilon_1 = 0$, получаем, что (I.4), (I.I4) и (I.I5) несовместимы.

Обозначив $a_{n1} = \delta_n, b_{n2} = b + \gamma_n$, из соотношений $a_{n1} \leq 0, b_{n1} \leq 0, a_{n1} + b_{n2} < b$ имеем, что при достаточно больших n

$$\delta_n + \gamma_n < 0.$$

Из (I.II) имеем, что $a_{n1} \rightarrow 0, b_{n1} \rightarrow 0, a_{n2} \rightarrow a, b_{n2} \rightarrow b$. Поэтому при $n \uparrow \infty$

$$|\delta_n| \rightarrow 0, \quad |\delta_n| \rightarrow 0. \quad (I.16)$$

С другой стороны, ф.р. G - непрерывна слева, и поэтому для любого $\lambda > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $P(b - \varepsilon \leq X_G < b) \leq \lambda$, где X_G - случайная величина с ф.р. G .

Выберем $\lambda = m^2/32$. Соответствующее ему ε обозначим через ε_m . В силу (I.16) существует такое N , что $|\delta_n + \delta_n| \leq \varepsilon_m$ при $n \geq N$. Соотношения

$$P(b - \varepsilon_m \leq X_G < b) \leq \frac{m^2}{32}, \quad P(b - \varepsilon_m \leq X_n < b) \geq \frac{m^2}{16}$$

и (I.1) очевидно несовместимы при $n \geq N$.

Лемма доказана.

1.3. Оценка $\beta_\varepsilon(\varepsilon, G)$ при $G \in \mathcal{L}_m, m > 0$

Как уже отмечалось, количественные оценки меры устойчивости β_ε простейших неразложимых законов из класса $\mathcal{L}_m$ - вырожденного и двухточечного законов - были получены Ю.Ю. Мачисом в [19], [20]. А именно, справедлива*)

Т е о р е м а (Ю.Ю. Мачис [20]). Пусть B - двухточечный закон с производящей функцией $q + pz$. Если $\varepsilon \in [0, m^2/4]$, где $m = \min(p, q)$, то

$$\beta_\varepsilon(\varepsilon, G) = (m - \sqrt{m^2 - 4\varepsilon}) / 2.$$

Целью настоящего раздела является построение количественных оценок меры устойчивости $\beta_\varepsilon(\varepsilon, G)$ для произвольных законов G из класса $\mathcal{L}_m (m > 0)$ при малых $\varepsilon \geq 0$.

*) См. также раздел 2.1, стр. 42 - 43.

Т е о р е м а I.I. Если $G \in \mathcal{E}_m, m > 0$, то существует такая константа $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(G) > 0$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\beta_g(\varepsilon, G) \leq (m - \sqrt{m^2 - 4\varepsilon}) / 2, \quad (I.I7)$$

причем в классе $\mathcal{E}_m$ эта оценка неулучшаема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F = F_1 * F_2$. Введем следующие обозначения:

$$F_1(0) = z_1, \quad 1 - F_1(0+) = z_2, \quad 1 - F_2(b+0) = z_3,$$

$$F_2(a) = z_4, \quad F_2(a+0) = u - z_5, \quad F_2(b) = 1 - v + z_6.$$

Так как $\rho(F, G) \leq \varepsilon$, то справедливы цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} 1 - u + \varepsilon &\geq 1 - F(a+0) \geq (1 - F_1(0))(1 - F_2(a+0)) = \\ &= (1 - z_1)(1 - u + z_5); \quad \varepsilon \geq F(a) \geq F_1(0)F_2(a+0) = z_1(u - z_5). \end{aligned}$$

Аналогично получаются еще две системы неравенств:

$$\begin{cases} 1 - v + \varepsilon \geq (1 - z_2)(1 - v + z_6), \\ \varepsilon \geq z_2(v - z_6), \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon \geq z_3(1 - z_1), \\ \varepsilon \geq z_4(1 - z_2). \end{cases}$$

Действительно, достаточно заметить, что $1 - v + \varepsilon \geq F_1(0+)F_2(b)$; $\varepsilon \geq (1 - F_1(0+))(1 - F_2(b))$; $\varepsilon \geq (1 - F_2(b+0))(1 - F_1(0))$, $\varepsilon \geq F_2(a)F_1(0+)$. Очевидно, $z_i \geq 0$ при $i = 1, 2, 3, 4$.

Пользуясь леммой I.I, заключаем, что ни одна из оценок

$$z_1 \geq \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 - 4\varepsilon}), \quad z_2 \geq \frac{1}{2}(v + \sqrt{v^2 - 4\varepsilon})$$

не выполняется при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поэтому, рассмотрев системы неравенств, имеем

$$z_1 \leq z_1^* = \frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 - 4\varepsilon}),$$

$$z_2 \leq z_2^* = \frac{1}{2} (v - \sqrt{v^2 - 4\varepsilon}) .$$

Из этих оценок следует, что

$$\rho(F_1, E) \leq \frac{1}{2} (m - \sqrt{m^2 - 4\varepsilon})$$

и, кроме того,

$$F_2(a) \leq z_2^*, \quad 1 - F_2(b+0) \leq z_1^*. \quad (I.18)$$

Так как

$$G(x) + \varepsilon \gg F(x) \gg F_1(0+) F_2(x) \gg (1 - z_2^*) F_2(x),$$

то для $a < x \leq b$ получаем

$$F_2(x) \leq G(x) + \frac{\varepsilon + z_2^*(1-v)}{1 - z_2^*} = G(x) + z_2^*. \quad (I.19)$$

Аналогично,

$$F_2(x) \gg G(x) - z_1^*. \quad (I.20)$$

Из оценок (I.18)-(I.20) следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\rho(F_2, G) \leq \frac{1}{2} (m - \sqrt{m^2 - 4\varepsilon}).$$

Справедливость соотношения (I.17) доказана.

Для доказательства неулучшаемости оценки величины $\beta_\rho(\varepsilon, G)$ нам достаточно доказать существование такого закона $Q \in \mathcal{L}_m$, что

$$\beta_\rho(\varepsilon, Q) = \frac{1}{2} (m - \sqrt{m^2 - 4\varepsilon}).$$

Это следует из простого примера, приведенного Ю.Ю. Мачисом в [20]. Действительно, пусть Q - двухточечный закон с разрывами m и

M в точках I и O соответственно, причем $m \leq M$. Пусть, кроме того,

$$\Psi(t; F_1) = (1 - Z_0^*) + Z_0^* t, \quad \Psi(t; F_2) = (M + Z_0^*) + (m - Z_0^*) t,$$

где $Z_0^* = (m - \sqrt{m^2 - 4\varepsilon})/2$, являются производящими функциями F_1 и F_2 .

Нетрудно убедиться, что самая лучшая аппроксимация законов F_1 и F_2 законами из класса K_Q такова:

$$\rho(F_1, E) = Z_0^*, \quad \rho(F_2, Q) = Z_0^*.$$

Заметим также, что $\rho(F_1 * F_2, Q) = \varepsilon$, т.е. $F_1 * F_2 \in B_\rho(\varepsilon, Q)$.

Теорема I.1 доказана.

Во введении к главе I отмечалось, что в работе О. Калленберга [34] допущены некоторые неточности. А именно, недостаточно обоснованы заключения об оценке сверху меры устойчивости $\beta_\tau(\varepsilon, G)$, где G - решетчатое распределение с конечным спектром. Пусть

$$\theta(F') = \inf \{ \tau(F', G') : G' \in K_G \},$$

$$\gamma_\tau(\varepsilon, G, \mathcal{F}) = \sup \{ \theta(F') : F' \in K_F, F \in \mathcal{F} \cap B_\tau(\varepsilon, G) \},$$

где τ - метрика Леви или равномерная метрика, а $\mathcal{F}$ - класс решетчатых равномерно ограниченных действительных вероятностных законов. В случае $G \in \mathcal{F}$ из результатов О. Калленберга [34] автоматически следуют оценки величины γ_τ , однако для оценок меры устойчивости β_τ требуются дополнительные рассуждения, показывающие, что класс $\mathcal{F}$ достаточно широк в классе вероятностных законов $B_\tau(\varepsilon, G)$. Мы докажем это в теореме I.2. Далее целесообразно использовать обозначение $u = G(\{0\})$. Заметим также, что условие

$$\mathcal{F} \subseteq \{H: S(H) \subseteq \{0, 1, \dots, N\}, \{0, N\} \subseteq S(H)\} \quad (1.21)$$

не уменьшает общности рассуждений.

Т е о р е м а 1.2. Если $G \in \mathcal{F}$, то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\beta_L(\varepsilon, G) \leq \chi_L((12+u)\varepsilon/u, G, \mathcal{F}) + 6\varepsilon/u,$$

$$\beta_g(\varepsilon, G) \leq \chi_g((8(N+1)+u)\varepsilon/u, G, \mathcal{F}) + 6\varepsilon/u.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, как и выше, $L(F, G) \leq \varepsilon$, $F = F_1 * F_2$, случайные величины X, X_1, X_2 имеют ф.р. F, F_1, F_2 соответственно. Заметим, вспоминая (1.21), что $F(-\varepsilon) \leq \varepsilon$, $1 - F(N+\varepsilon+0) \leq \varepsilon$. Случайную величину X_1 сдвинем так, чтобы

$$\sup \{y: F_1(y) \leq \sqrt{\varepsilon}\} = 0.$$

Отсюда $P(X_1 \leq 0) \geq \sqrt{\varepsilon}$, следовательно,

$$\sqrt{\varepsilon} P(X_2 \leq -\varepsilon) \leq P(X_1 \leq 0) P(X_2 \leq -\varepsilon) \leq F(-\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

$$u - \varepsilon \leq P(X_1 < 0) + P(X_2 \leq \varepsilon) \leq 2\sqrt{\varepsilon} + P(-\varepsilon \leq X_2 \leq \varepsilon).$$

Поэтому $P(-\varepsilon \leq X_2 \leq \varepsilon) > u/2$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Аналогично,

$$u - \varepsilon \leq P(X_1 < -2\varepsilon) + P(-2\varepsilon \leq X_1 \leq 2\varepsilon) + \\ + P(X_2 < -\varepsilon) \leq 2\sqrt{\varepsilon} + P(-2\varepsilon \leq X_1 \leq 2\varepsilon).$$

Введем в рассмотрение целочисленные случайные величины X^*, X_1^*, X_2^* с ф.р. F^*, F_1^*, F_2^* соответственно, связанные равенством $X^* = X_1^* + X_2^*$ и определяемые формулами

$$X_j^* = \begin{cases} [X_j + 3\varepsilon], & \text{если } -3\varepsilon \leq X_j \leq N + 3\varepsilon, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

причем через $[a]$ мы обозначаем целую часть числа a .

Пусть, далее, $n - 3\varepsilon < x \leq n + 1 - 3\varepsilon$, n - целое. Тогда

$$P(X_i < x) \leq P(X_i < n + 1 - 3\varepsilon) \leq P(X_i^* \leq n) + \\ + P(X_i < -3\varepsilon) \leq P(X_i^* < x + 3\varepsilon) + 2\varepsilon / u, \quad (I.22)$$

так как $\frac{u}{2} P(X_i < -3\varepsilon) \leq P(X < -\varepsilon) \leq \varepsilon$. Считая $i \neq j$, имеем при всех целых $n \geq 0$

$$P(n + 3\varepsilon < X_i < n + 1 - 3\varepsilon) P(-2\varepsilon \leq X_j \leq 2\varepsilon) \leq \\ \leq F(n + 1 - \varepsilon) - F(n + \varepsilon + 0) \leq 2\varepsilon,$$

т.е. $P(n + 3\varepsilon < X_i < n + 1 - 3\varepsilon) \leq 4\varepsilon / u$, а также

$$P(X_i > N + 3\varepsilon) P(-2\varepsilon \leq X_j \leq 2\varepsilon) \leq P(X > N + \varepsilon) \leq \varepsilon \\ P(X_i > N + 3\varepsilon) \leq 2\varepsilon / u.$$

Пользуясь этими оценками, нетрудно доказать, что $F_i(x) \geq F_i^*(x - 3\varepsilon) - 6\varepsilon / u$. Отсюда и из (I.22) следует, что $L(F_i, F_i^*) \leq 6\varepsilon / u$, $i = 1, 2$. Пользуясь леммой Золотарева, получаем, что $L(F, F^*) \leq 12\varepsilon / u$. Осталось, таким образом, рассмотреть случай равномерной метрики. Случайную величину X_j^* определим так ($j = 1, 2$):

$$X_j^* = \begin{cases} [X_j] & , \text{если } 0 \leq X_j \leq N, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как и в случае метрики Леви, нетрудно доказать справедливость соотношения $P(F_j^*, F_j) \leq 6\varepsilon / u$, $j = 1, 2$. Заметив, что

$$\rho(F, F^*) \leq P(X \neq X^*) \leq P(X_1 \neq X_1^*) + P(X_2 \neq X_2^*) \leq \\ \leq \sum_{j=1}^2 (P(X_j < 0) + P(X_j > N) + \sum_{n=0}^{N-1} P(n < X_j < n+1))$$

легко получить оценку $\rho(F, F^*) \leq 8(N+1)\varepsilon/u$.

Теорема доказана.

Используя оценки величины γ_τ (см. [34]) и теорему I.2, мы без труда получаем оценки меры устойчивости β_τ .

I.4. Оценка $\beta_L(\varepsilon, G)$ при $G \in \mathcal{H}_m, m > 0$

Т е о р е м а I.3. Если $G \in \mathcal{H}_m, m > 0$, то существует константа $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(G) > 0$ такая, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$\beta_L(\varepsilon, G) \leq \max(3, m^{-1})\varepsilon + \frac{7m+1}{m^3} \varepsilon^2. \quad (I.23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L(F, G) \leq \varepsilon$, $F = F_1 * F_2$ и медиана закона F_1 равна нулю. Пусть, кроме того, X, X_1, X_2 - случайные величины с ф.р. F, F_1, F_2 соответственно. Пользуясь теоремой Линника-Золотарева (см. введение к главе I) и рассуждениями, которые аналогичны рассуждениям, проведенным в разделе I.2 (стр. 25-28), не ограничивая общности доказательства, заключаем о существовании такой неубывающей функции $\delta(\varepsilon), \varepsilon \in (0, 1)$ и $\delta(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$, что

$$F_1(1-\delta(\varepsilon)) \leq \delta(\varepsilon), \quad 1 - F_1(\delta(\varepsilon)) \leq \delta(\varepsilon), \quad (I.24) \\ P(X_2 \gg 1 - \delta(\varepsilon)) \geq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Справедлива цепочка неравенств:

$$\varepsilon \gg P(X > b + \varepsilon) \gg P(X_1 > \delta(\varepsilon) + \varepsilon) P(X_2 > b - \delta(\varepsilon)),$$

$$\text{т.е. } P(X_1 > \delta(\varepsilon) + \varepsilon) \leq \varepsilon / (v - \delta(\varepsilon)),$$

$$G(x + \varepsilon) + \varepsilon \gg (1 - \varepsilon / (v - \delta(\varepsilon))) F_2(x - \delta(\varepsilon) - \varepsilon).$$

Мы доказали, таким образом, что

$$F_2(x) \leq G(x + \delta(\varepsilon) + 2\varepsilon) + \varepsilon \frac{G(x + \delta + 2\varepsilon) + v - \delta}{v - \delta - \varepsilon}. \quad (\text{I.25})$$

Из условий теоремы следует справедливость соотношений

$$P(-\delta(\varepsilon) \leq X_1 \leq 0) \gg 1/2 - \delta(\varepsilon), \quad (\text{I.26})$$

$$G(a) = G(a'), \quad G(b) = G(b') \quad (\text{I.27})$$

для некоторых $a' > a, b' < b$, где через a и b , как и выше, мы обозначили соответственно $\text{left } G$ и $\text{right } G$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P(-\delta(\varepsilon) \leq X_1 \leq 0) P(b' + \delta(\varepsilon) + \varepsilon \leq X_2 < b - \varepsilon) &\leq \\ &\leq P(b' + \varepsilon \leq X < b - \varepsilon) \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

$$P(b' + \delta(\varepsilon) + \varepsilon \leq X_2 < b - \varepsilon) \leq 4\varepsilon / (1 - 2\delta(\varepsilon)).$$

Отсюда, вспомнив (I.25), имеем, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(G)$ — достаточно малое положительное число,

$$P(X_2 \gg b - \varepsilon) \gg v - (1 - \delta)\varepsilon / (v - \delta) - 4\varepsilon / (1 - 2\delta).$$

Следовательно, справедлива оценка

$$P(X_2 \gg b - \varepsilon) \gg v - \frac{1 + 4v - 7\delta + 2\delta^2}{(v - \delta)(1 - 2\delta)} \varepsilon. \quad (\text{I.28})$$

Дробь в соотношении (I.28) обозначим через $h(\varepsilon, \delta, v)$. Далее

заметим, что

$$P(0 \leq X_1 < \delta(\varepsilon)) \geq \frac{1}{2} - \delta(\varepsilon), \quad (I.29)$$

$$F_2(a + \delta(\varepsilon)) \geq u - \delta(\varepsilon).$$

Так как из последней оценки следует, что $F_1(-\delta - \varepsilon + 0) \leq \varepsilon / (u - \delta)$, то

$$1 - G(x - \varepsilon) + \varepsilon \geq 1 - F(x) \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{u - \delta}\right) (1 - F_2(x + \delta + \varepsilon))$$

Это приводит нас к неравенству

$$F_2(x) \geq G(x - \delta - 2\varepsilon) - \frac{1 - G(x - \delta - 2\varepsilon) - \delta + u}{u - \delta - \varepsilon} \varepsilon. \quad (I.30)$$

Из (I.27), (I.29) и (I.30) имеем

$$F_2(a + \varepsilon) \geq u - \varepsilon h(\varepsilon, \delta, u). \quad (I.31)$$

Принимая во внимание (I.28) и (I.31), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq (1 - F_1(2\varepsilon + 0))(1 - F_2(b - \varepsilon)) \geq \\ &\geq (1 - F_1(2\varepsilon + 0))(v - \varepsilon h(\varepsilon, \delta, v)), \\ \varepsilon &\geq F_1(-2\varepsilon) F_2(a + \varepsilon) \geq F_1(-2\varepsilon)(u - \varepsilon h(\varepsilon, \delta, u)). \end{aligned}$$

Это означает, что

$$F_1(-2\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{u - \varepsilon h(\varepsilon, \delta, u)}, \quad 1 - F_1(2\varepsilon + 0) \leq \frac{\varepsilon}{v - \varepsilon h(\varepsilon, \delta, v)}. \quad (I.32)$$

Явное выражение меры устойчивости для $G \in \mathcal{H}_{\gamma_1}$, т.е. случай $m = 1$ рассматривается в теореме 2.1. Если же $0 < m \leq 1/2$, то из проведенных рассуждений видно, что

$$L(F_1, E) \leq \varepsilon / (m - \varepsilon h(\varepsilon, \delta, m)). \quad (I.33)$$

Имея (I.24), мы получили (I.32). Обозначив δ в оценках (I.24) через δ_n , из оценок (I.32) заключаем, что

$$\delta_{n+1} = \varepsilon / (m - \varepsilon h(\varepsilon, \delta_n, m)).$$

Мы не будем исследовать сходимость последовательности $\{\delta_n\}$ и (в случае ее монотонного невозрастания) искать предел $\delta = \lim \delta_n$. Отметим только, что в последнем случае δ должно удовлетворять уравнению

$$\delta = \varepsilon / (m - \varepsilon h(\varepsilon, \delta, m)).$$

Пусть $\delta_0(\varepsilon)$ - корень этого уравнения, $\delta_0(\varepsilon) \leq (1+5m)\varepsilon/m$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Если такого корня не существует или последовательность $\{\delta_n\}$ не является монотонно невозрастающей, то выберем (имея в виду оценку (I.28) и аналогичное соотношение (I.31))

$$\delta_0(\varepsilon) = (1+5m)\varepsilon/m, \quad \theta_0(\varepsilon, m) = h(\varepsilon, \delta_0, m).$$

Заметим, что при $a + 3\varepsilon \leq x \leq b - 3\varepsilon$

$$G(x+\varepsilon) + \varepsilon \geq F_1(2\varepsilon+0)F_2(x-2\varepsilon) \geq (1 - \frac{\varepsilon}{v-\varepsilon\theta_0})F_2(x-2\varepsilon),$$

$$F_2(x) \leq G(x+3\varepsilon) + \varepsilon / (v - (\theta_0+1)\varepsilon).$$

$$1 - G(x-\varepsilon) + \varepsilon \geq (1 - F_1(-2\varepsilon))(1 - F_2(x+2\varepsilon)) \geq (1 - \frac{\varepsilon}{u-\varepsilon\theta_0})(1 - F_2(x+2\varepsilon)),$$

$$F_2(x) \geq G(x-3\varepsilon) - \varepsilon / (u - (\theta_0+1)\varepsilon).$$

Так как

$$\varepsilon \geq F(a-\varepsilon) \geq F_1(0+)F_2(a-\varepsilon) \geq \frac{1}{2} F_2(a-\varepsilon),$$

$$\varepsilon \geq (1 - F_1(0))(1 - F_2(b + \varepsilon + 0)) \geq \frac{1}{2}(1 - F_2(b + \varepsilon + 0)),$$

$$\text{то } F_2(a - \varepsilon) \leq 2\varepsilon, \quad 1 - F_2(b + \varepsilon + 0) \leq 2\varepsilon.$$

Мы, таким образом, доказали, что

$$L(F_2, G) \leq \max(\varepsilon / (m - (\theta_0 + 1)\varepsilon), 3\varepsilon). \quad (\text{I.34})$$

Если $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(G)$ — достаточно малое положительное число, то, пользуясь соотношениями

$$\frac{\varepsilon}{m - \varepsilon h(\varepsilon, \delta_0, m)} = \frac{\varepsilon}{m - \varepsilon \theta_0} \leq \frac{\varepsilon}{m} + \frac{6m+1}{m^3} \varepsilon^2,$$

$$\frac{\varepsilon}{m - (\theta_0 + 1)\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{m} + \frac{7m+1}{m^3} \varepsilon^2$$

и оценками (I.33), (I.34), заключаем, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ справедливо неравенство (I.23).

Теорема доказана.

Г Л А В А II

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ

В ТЕОРЕМЕ О РАЗЛОЖЕНИИ n -МЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Первой работой, в которой рассматривается устойчивость разложений многомерных законов, является статья Н.А. Сапогова [21]. В ней получена оценка устойчивости n -мерного аналога теоремы Крамера. А именно, доказана следующая

Т е о р е м а (Н.А. Сапогов). Пусть $\vec{X}_1 + \vec{X}_2 = \vec{X}$, где $\vec{X}_i = (X_i^1, \dots, X_i^n)$, $i=1,2$ — независимые случайные векторы. Пусть, кроме того, медианы X_1^k , $k=1,2,\dots,n$ равны нулю.

Обозначим через $\vec{Y} = (Y^1, \dots, Y^n)$ n -мерный нормальный закон, для которого $EY^k = 0$ при $1 \leq k \leq n$,

$$\min_{|t|=1} D\left(\sum_{i=1}^n t_i Y^i\right) > \delta > 0.$$

Если для положительного $\varepsilon < 1$

$$\sup_I |P_{\vec{X}}(I) - P_{\vec{Y}}(I)| \leq \varepsilon,$$

где $I = \{(x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i < b_i, 1 \leq i \leq n\}$, $P_{\vec{Z}}(I) = P(\vec{Z} \in I)$, то существует такое многомерное нормальное распределение $\vec{Y}$, что

$$\begin{aligned} \sup |P_{\vec{X}_1}(I) - P_{\vec{Y}_1}(I)| &\leq \\ &\leq C (\ln \ln (1/\varepsilon + 2))^{3n/2 - 1} \sigma_1^{-3} (\ln 1/\varepsilon)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2.0)$$

где $C = C(n, \epsilon)$ — постоянная, $\tilde{\sigma}_1^{-2} = \min_{|t|=1} D\left(\sum_{i=1}^n t_i X_1^{*i}\right)$,
а $(X_1^{*1}, \dots, X_1^{*n})$ — случайный вектор, причем
 $X_1^{*k} = X_1^k$, если $|X_1^k| \leq N$; $X_1^{*k} = 0$, если $|X_1^k| > N$,
где $k = 1, 2, \dots, n$; $N = (2 \ln 1/\epsilon)^{1/2} + 1$.

Отметим, что правая часть оценки (2.0) неограниченно растет при условии, что $n \rightarrow \infty$. Это, очевидно, нежелательный эффект, которого, однако, нам удалось избежать при анализе устойчивости разложений n -мерных единичных и пуассоновских распределений.

Среди более поздних работ, посвященных устойчивости характеристики многомерных законов, большой интерес, на наш взгляд, представляют работы Ю.Р. Габовича [2], [4]. В них исследуется устойчивость характеристики многомерного нормального распределения свойством независимости линейных статистик. Ссылки на другие статьи по изучению устойчивости в задачах характеристики многомерных распределений можно найти в обзорной статье Е. Лукача [37].

2.1. Аналитическое выражение меры устойчивости разложений на компоненты единичного распределения

В данном разделе приводится новое, более простое и краткое, доказательство теоремы Ю.Ю. Мачиса [19], рассматривается аналитическое выражение $\beta_L(\epsilon, E)$ для $\epsilon \in [0, 1]$, где E — единичное распределение, а также выражение $\beta_g(\epsilon, E, n)$ для $\epsilon \in [0, 1/4]$.

Т е о р е м а (Ю.Ю. Мачис [19]). Для $0 \leq \epsilon \leq 1$ имеет место равенство

$$\beta_{\rho}(\varepsilon, E) = \begin{cases} (1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2 & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq 1/4, \\ 1/2 & \text{при } 1/4 \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Новое доказательство. Пусть $0 \leq \varepsilon \leq 1/4$, F_1 и F_2 - ф.р. независимых случайных величин X_1 и X_2 , причем

$$\rho(F_1 * F_2, E) \leq \varepsilon, \quad (2.2)$$

где E - единичное распределение с разрывом в точке 0. Сдвинем X_1 и X_2 так, чтобы сумма $X = X_1 + X_2$ не изменилась, а медиана закона X_1 была равна нулю. Введем следующие обозначения:

$$F_1(0) = z_1, \quad 1 - F_1(0+) = z_2,$$

$$F_2(0) = y_1, \quad 1 - F_2(0+) = y_2.$$

Из условия (2.2) следует справедливость цепочек неравенств:

$$\varepsilon \geq 1 - F(0+) \geq (1 - F_1(0))(1 - F_2(0+)) = (1 - z_1)y_2, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon \geq F(0) \geq F_1(0)F_2(0+) = z_1(1 - y_2).$$

Аналогично получается еще одна система неравенств:

$$\varepsilon \geq 1 - F(0+) \geq (1 - F_1(0+))(1 - F_2(0)) = z_2(1 - y_1), \quad (2.4)$$

$$\varepsilon \geq F(0) \geq F_1(0+)F_2(0) = (1 - z_2)y_1.$$

Очевидно, $z_i \geq 0, y_i \geq 0$ при $i=1,2$. Так как согласно произведенному сдвигу, $z_1 \leq 1/2$ и $z_2 \leq 1/2$, то из соотношений (2.3) и (2.4) замечаем, что $y_1 \leq 1/2, y_2 \leq 1/2$. Используя эти оценки и системы (2.3), (2.4), находим

$$z_i \leq \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1-4\varepsilon}) , \quad y_i \leq \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1-4\varepsilon}) \quad (i=1,2)$$

Так как $\beta_g(\varepsilon, E) \leq 1/2$, $\beta_g(\varepsilon, E)$ - неубывающая ε -функция, то для завершения исследования в области $1/4 \leq \varepsilon \leq 1$ достаточно доказать, что $\beta_g(1/4, E) = 1/2$. Однако это равенство, как и оценка снизу

$$\beta_g(\varepsilon, E) \geq \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1-4\varepsilon})$$

при $\varepsilon \in [0, 1/4]$, следует из простого примера, приведенного в заметке [19] (см. также раздел I.3 диссертации).

Теорема доказана.

В следующей теореме приводится аналитическое выражение меры устойчивости β_L единичного распределения в пространстве R^1 .

Т е о р е м а 2.1. Для $\varepsilon \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\beta_L(\varepsilon, E) = \begin{cases} 2\varepsilon & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq 1/4, \\ 1/2 & \text{при } 1/4 \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено в [19], $\beta_L(\varepsilon, E) \leq 2\varepsilon$. Действительно, если $L(F_1 * F_2, E) \leq \varepsilon$, медиана закона F_1 равна нулю, то

$$\varepsilon \geq (1 - F_1(0))(1 - F_2(\varepsilon + 0)) \geq \frac{1}{2}(1 - F_2(\varepsilon + 0)),$$

$$\varepsilon \geq F_1(0+) F_2(-\varepsilon) \geq \frac{1}{2} F_2(-\varepsilon).$$

т.е. $1 - F_2(\varepsilon + 0) \leq 2\varepsilon$, $F_2(-\varepsilon) \leq 2\varepsilon$. Отсюда заключаем, что $L(F_2, E) \leq 2\varepsilon$. Аналогично доказывается, что

$L(F_1, E) \leq 2\varepsilon$ при $0 \leq \varepsilon \leq 1/4$. Следовательно, $\beta_L(\varepsilon, E) \leq 2\varepsilon$.
Заметим, что если θ - медиана закона $F' \in K_F$, то

$$L(F'(x), E(x+\theta)) \leq 1/2$$

и, следовательно, $\beta_L(\varepsilon, E) \leq 1/2$ при $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Так как $\beta_L(\cdot, E)$ - неубывающая функция, $\beta_L(\varepsilon, E) \leq 2\varepsilon$,
то нам достаточно доказать, что

$$\beta_L(\varepsilon, E) \geq 2\varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1/4. \quad (2.5)$$

Рассмотрим независимые случайные величины X_1 и X_2
(при $\varepsilon \in [0, 1/4]$):

$$P(X_1 = -2\varepsilon) = P(X_1 = 2\varepsilon) = 2\varepsilon, \quad P(X_1 = 0) = 1 - 4\varepsilon,$$

$$P(X_2 = -\varepsilon) = P(X_2 = \varepsilon) = 1/2.$$

Если G_1 и G_2 - ф.р. случайных величин X_1 и X_2 , то
нетрудно убедиться, что

$$\inf \{ L(G_1, E') : E' \in K_E \} = 2\varepsilon,$$

$$\inf \{ L(G_2, E') : E' \in K_E \} = \varepsilon,$$

т.е. справедливо соотношение (2.5), причем $L(G_1 * G_2, E) = \varepsilon$.

Теорема доказана.

Займемся рассмотрением меры устойчивости разложений единичного распределения E в пространстве R^n . А именно, докажем, что имеет место следующая

Т е о р е м а 2.2. При $0 \leq \varepsilon \leq 1/4$

$$\beta_g(\varepsilon, E, n) = (1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}) / 2. \quad (2.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. I^0 . Случай $n = 2$.

Из неравенства $g(F_1 * F_2, E) \leq \varepsilon$ следует, что

$$P(X^j < 0) \leq \varepsilon, \quad P(X^j \leq 0) \geq 1 - \varepsilon, \quad j = 1, 2. \quad (2.7)$$

(Здесь (X^1, X^2) имеет ф.р. $F_1 * F_2$). Если F_i - ф.р. случайного вектора (X_i^1, X_i^2) , $i = 1, 2$, медиана X_i^j при $j = 1, 2$ равна нулю, то из условия (2.7), пользуясь соотношением (2.1), заключаем, что

$$P(X_k^j < 0) \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}), \quad P(X_k^j > 0) \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}), \quad (2.8)$$

где $j = 1, 2$; $k = 1, 2$. Очевидно, неравенство $g(F_1 * F_2, E) \leq x$ эквивалентно системе неравенств:

$$P(X^k < 0) \leq x, \quad k = 1, 2; \quad P((X^1 > 0) \cup (X^2 > 0)) \leq x. \quad (2.9)$$

Далее полезны следующие обозначения:

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}) \quad \text{при } \varepsilon \in [0, 1/4],$$

$$P((X_1^1 < 0) \setminus (X_1^2 < 0)) = k_1(\varepsilon) \gamma(\varepsilon),$$

$$P((X_2^2 < 0) \setminus (X_2^1 < 0)) = k_2(\varepsilon) \gamma(\varepsilon).$$

Пусть для некоторого $\varepsilon \in [0, 1/4]$ справедливо $k_2(\varepsilon) \leq k_1(\varepsilon)$.

Тогда обозначим

$$P((X_1^1 > 0) \setminus (X_1^2 > 0)) = f_1(\varepsilon) \gamma(\varepsilon), \quad P(X_1^2 > 0) = f_2(\varepsilon) \gamma(\varepsilon).$$

Случай $k_2(\varepsilon) \geq k_1(\varepsilon)$ рассматривается аналогично. Так как

$$P((X_1^1 < 0) \vee (X_2^2 < 0)) \leq \gamma(\varepsilon) + k_2(\varepsilon) \gamma(\varepsilon),$$

то из второго соотношения в системе (2.9) имеем, что

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq P((X_1^1 > 0) \vee (X_1^2 > 0)) P(X_2^1 \geq 0, X_2^2 \geq 0) + \\ &+ f_1(\varepsilon) \gamma(\varepsilon) k_2(\varepsilon) \gamma(\varepsilon) + k_1(\varepsilon) \gamma(\varepsilon) f_2(\varepsilon) \gamma(\varepsilon) \geq \\ &\geq \gamma(f_1 + f_2)(1 - \gamma - k_2 \gamma) + \gamma^2(f_1 k_2 + f_2 k_1) \geq \\ &\geq \gamma(1 - \gamma)(f_1 + f_2) = \varepsilon(f_1 + f_2). \end{aligned}$$

Следовательно, $f_1(\varepsilon) + f_2(\varepsilon) \leq 1$, т.е. при $0 \leq \varepsilon \leq 1/4$

$$\varrho(F_1, E) \leq \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}).$$

Таким же образом строится оценка сверху для $\varrho(F_2, E)$.

Заметим, что любую случайную величину X_1 можно рассматривать как двумерный случайный вектор $(X_1, 0)$. Поэтому

$$\beta_\varrho(\varepsilon, E, 2) \geq \beta_\varrho(\varepsilon, E) \geq \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}).$$

Аналогичное замечание справедливо и для $\beta_\varrho(\varepsilon, E, n)$ при любом натуральном n .

Следовательно, соотношение (2.6) для $n=2$ доказано.

2°. Случай $n \geq 3$.

Использованный выше метод, дающий наглядное геометрическое представление о сущности явления и вскрывающий возникающие в многомерном пространстве затруднения, недостаточно эффективен при построении оценок меры устойчивости $\beta_\varrho(\varepsilon, E, n)$ для $n \geq 3$. Действительно, его применение позволяет утверждать, что

$$\gamma(\varepsilon) \leq \beta_g(\varepsilon, E, n) \leq \frac{1 - \gamma(\varepsilon)}{1 - (n-1)\gamma(\varepsilon)} \gamma(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \in [0, \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})]$. На ХУП-ой конференции Литовского математического общества (июнь 1976 г.) Ю.Ю. Мачис сделал замечание к докладу автора, которое и в случае $n \geq 3$ доказывает справедливость соотношения (2.6) при $\varepsilon \in [0, 1/4]$. В самом деле, достаточно отметить, что*

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq 1 - F(+\vec{0}) \geq \int_A (1 - F_j(+\vec{0} - \vec{y})) dF_i(\vec{y}) \geq \\ &\geq (1 - \sup_{\vec{y} \in A} F_j(+\vec{0} + \vec{y})) (1 - F_i(+\vec{0})), \end{aligned}$$

где $i \neq j$; $i, j = 1, 2$; $A = \{(u_1, \dots, u_n) \in R^n : \exists i, u_i > 0\}$.

Учитывая оценку

$$\sup_{\vec{y} \in -A} F_j(+\vec{0} + \vec{y}) \leq \max \{P(X_j^1 < 0), \dots, P(X_j^n < 0)\}$$

(как и в части I^0 , $(X_j^1, \dots, X_j^n)$ имеет ф.р. F_j , $j = 1, 2$) и оценки, аналогичные неравенствам (2.8), легко заметить, что

$$\sup_{\vec{y} \in -A} F_j(+\vec{0} + \vec{y}) \leq \gamma(\varepsilon), \quad j = 1, 2,$$

и, таким образом, $1 - F_i(+\vec{0}) \leq \gamma$. Очевидные обобщения соотношений (2.9) позволяют заключить, что (2.6) выполняется и для $n \geq 3$ при $0 \leq \varepsilon \leq 1/4$.

Теорема доказана.

*)

$$F = F_1 * F_2, \quad F(+\vec{0}) = P(X^1 \leq 0, \dots, X^n \leq 0).$$

2.2. Оценка β_g для n -мерного распределения Пуассона

Определение n -мерного нормального закона хорошо известно и используется в работах многих авторов. Напомним менее употребительное понятие n -мерного закона Пуассона. Одним из первых этот закон изучал Г. Тейчер в статье [41], которая также содержит ссылки на работы авторов, ранее изучавших этот вопрос.

Г. Тейчер [41], И.В. Островский [18], Р. Куппенс [33] употребляют следующее определение:

Пусть $e_1, \dots, e_{n-1}, e_n$ — линейно независимые векторы в R^n . Обозначим через Λ множество всех вершин параллелепипеда, образованного этими векторами, т.е. множество, состоящее из 2^n векторов вида $\varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} e_{n-1} + \varepsilon_n e_n$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1.

О п р е д е л е н и е 1. Закон P называется n -мерным законом Пуассона, если его характеристическая функция (х.ф.) Ψ имеет вид

$$\Psi(\vec{t}) = \exp \left\{ i(\vec{\beta}, \vec{t}) + \sum_{\vec{z} \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda(\vec{z}) \left\{ e^{i(\vec{t}, \vec{z})} - 1 \right\} \right\}, \quad (2.10)$$

где $\vec{t} \in R^n$, $\vec{\beta} \in R^n$, а числа $\lambda(\vec{z})$ неотрицательны.

П. Леви в заметке [35] предлагает использовать другое определение закона Пуассона, а именно

О п р е д е л е н и е 2. Закон P называется n -мерным законом Пуассона, если его х.ф. Ψ имеет вид

$$\Psi(\vec{t}) = \exp \left\{ i(\vec{\beta}, \vec{t}) + \lambda(e^{i(\vec{t}, \vec{e})} - 1) \right\}, \quad (2.11)$$

- 50 -

где $\vec{t} \in R^n$, $\vec{\beta} \in R^n$, $\vec{c} \in R^n$, $\lambda > 0$.

Мы не будем рассматривать вопроса о естественности и целесообразности этих определений - некоторые стороны этой проблемы рассматриваются, например, в статье Е. Лукача и С. Беер [38]. Отметим лишь, что закон с х.ф. (2.10) является композицией законов с х.ф. (2.11) и что одно из основных преимуществ второго определения это то, что логарифм х.ф. (2.11) состоит лишь из двух слагаемых. По этим причинам мы сочли более целесообразным рассмотрение устойчивости разложений n -мерного закона Пуассона по определению П. Леви [35].

В 1937 году Д.А. Райков доказал, что все компоненты закона Пуассона $\Pi(x)$ с х.ф. $\Pi(t)$

$$\Pi(t) = \exp\{i\beta t + \lambda(e^{it} - 1)\},$$

где $\lambda \geq 0$, $\text{Im} \beta = 0$, являются законами Пуассона (см. [18], теорема 5.1.2). Устойчивость этой теоремы исследовали О.В. Шалаевский, Ю.Ю. Мачис (см. [18], теорема 8.5.1) и Г.П. Чистяков [25]. При этом Г.П. Чистякову удалось установить истинный порядок меры устойчивости $\beta_\mu(\varepsilon, \Pi)$ для случаев равномерной метрики и метрики Леви. А именно, справедлива

Т е о р е м а (Г.П. Чистяков [25]). Существуют такие положительные постоянные $C_j(\lambda)$, $j=1, 2$, зависящие лишь от λ , что

$$C_1(\lambda) \frac{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \beta_\mu(\varepsilon, \Pi) \leq C_2(\lambda) \frac{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

где μ - равномерная метрика либо метрика Леви.

Г. Тейчер в 1954 году доказал n -мерный аналог теоремы Д.А. Райкова.

Т е о р е м а (Г. Тейчер [41]). Все разложения n -мерного закона Пуассона с х.ф. (2.10) являются n -мерными законами Пуассона.

Эта теорема, очевидно, справедлива и для n -мерного закона Пуассона по определению 2. Мы, как уже упоминалось, исследуем устойчивость второго утверждения. С этой целью обозначим

$$F^{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) = P(Z_j > x_j, j = i_1, \dots, i_k; Z_\ell < x_\ell, \ell \neq i_1, \dots, i_k)$$

если F - ф.р. n -мерного вектора $(Z_1, \dots, Z_n)$.

Т е о р е м а 2.3. Пусть случайные векторы $\vec{X}_1 = (X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^n)$ и $\vec{X}_2 = (X_2^1, X_2^2, \dots, X_2^n)$ независимы, F_1 и F_2 - соответствующие их ф.р., а $F = F_1 * F_2$. Если $\Pi(\vec{x}, \vec{\beta}, \lambda, \vec{c})$ - n -мерный закон Пуассона с характеристической функцией (2.11), причем $\tau_i < 0$, $\tau_{i_2} < 0, \dots, \tau_{i_k} < 0$ и при $\varepsilon \in (0, e^{-2\lambda}/2^{3n+1}]$

$$\rho(F^{i_1, \dots, i_k}, \Pi^{i_1, \dots, i_k}(\vec{x}; \vec{\sigma}, \lambda, \vec{c})) \leq \varepsilon, \quad (2.12)$$

то существует такая постоянная $C(\lambda)$, зависящая лишь от параметра λ , что

$$\rho(F_1^{i_1, \dots, i_k}, \Pi^{i_1, \dots, i_k}(\vec{x} - \vec{a}; \vec{a}, \lambda_1, \vec{c})) \leq C(\lambda) \frac{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 1/\varepsilon}, \quad (2.13)$$

$$\rho(F_2^{i_1, \dots, i_k}, \Pi^{i_1, \dots, i_k}(\vec{x} + \vec{a}; -\vec{a}, \lambda_2, \vec{c})) \leq C(\lambda) \frac{\ln \ln 1/\varepsilon}{\ln 1/\varepsilon}, \quad (2.14)$$

где $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$; $a_p = \sup \{y: P(X_1^p < y) \leq \sqrt{\varepsilon}, p \neq i_1, \dots, i_k$

$$a_q = \inf \{y: P(X_1^q > y) \leq \sqrt{\varepsilon}\}, q = i_1, \dots, i_k,$$

$$\lambda_1 = \int_0^{[N/2]+1} x dF_{i_1, \dots, i_k}(\vec{z}x + \vec{a}), \lambda_2 = \int_0^{[N/2]+1} x dF_{i_1, \dots, i_k}(\vec{z}x - a)$$

а N - целое число, определяемое неравенствами

$$(N-1) \ln(N-1) < \ln 1/\varepsilon \leq N \ln N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не нарушая общности рассуждений, будем считать $\vec{a} = \vec{0}$. Случай $\vec{z} = \vec{0}$, т.е. случай вырожденного пуассоновского распределения рассмотрен в разделе

2.1. Далее предположим, что ни одна координата вектора $\vec{z} =$

$= (z_1, \dots, z_n)$ не равна нулю, так как в противном случае можно было бы с самого начала ограничиться рассмотрением того наибольшего подпространства пространства R^n , в котором это предположение уже справедливо. Справедливость оценок (2.13) и

(2.14) достаточно доказать при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Для упрощения индексации предположим, что $i_1 = m+1, \dots, i_k = n$;

$m+k = n$. Если случайный вектор $(X^1, \dots, X^p)$ имеет

ф.р. F , то из условия (2.12) следует, что

$$|P(X^p < x) - P(z_p \{z_\lambda\} < x)| \leq \varepsilon, 1 \leq p \leq m, \quad (2.15)$$

$$|P(X^p > x) - P(z_p \{z_\lambda\} > x)| \leq \varepsilon, m+1 \leq p \leq n, \quad (2.16)$$

где $\sum_{\vec{a}=\vec{0}}^{\infty} \lambda$ - стандартный закон Пуассона с параметром λ . Так как $\vec{a}=\vec{0}$, то

$$P(X_1^p < 0) \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad P(X_1^p \leq 0) > \sqrt{\varepsilon}, \quad 1 \leq p \leq m,$$

$$P(X_1^p > 0) \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad P(X_1^p \geq 0) > \sqrt{\varepsilon}, \quad m+1 \leq p \leq n.$$

Поэтому из (2.15) и (2.16) следует цепочка неравенств

$$\sqrt{\varepsilon} P(X_2^p < 0) \leq P(X_1^p \leq 0) P(X_2^p < 0) \leq P(X_1^p < 0) \leq \varepsilon$$

т.е. $P(X_2^p < 0) \leq \sqrt{\varepsilon}$, $p=1, 2, \dots, m$. Аналогично,

$$P(X_2^p > 0) \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad p=m+1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} - \varepsilon &\leq F^{i_1, \dots, i_k}(\vec{0}) \leq P(\vec{X}_j = \vec{0}) + \sum_{k=1}^m \{P(X_1^k < 0) + \\ &+ P(X_2^k < 0)\} + \sum_{k=m+1}^n \{P(X_1^k > 0) + P(X_2^k > 0)\} \leq \\ &\leq 2n\sqrt{\varepsilon} + P(\vec{X}_j = \vec{0}), \quad j=1, 2. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение $\varepsilon \leq e^{-2\lambda}/2^{3n+1}$, получаем, что

$$P(\vec{X}_j = \vec{0}) \geq e^{-\lambda}/2, \quad j=1, 2. \quad (2.17)$$

Множество $\{\omega: Z_1 < q_1, \dots, Z_m < q_m, Z_{m+1} > q_{m+1}, \dots, Z_n > q_n\}$ кратко обозначим $\{\vec{Z} \vee \vec{q}\}$, если $\vec{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$.

Пусть $m \geq 1$, $\vec{X}^* = \vec{X}_1^* + \vec{X}_2^*$, где $\vec{X}_j^*$, $j=1, 2$

определяются формулами:

$$\vec{X}_j^* = \begin{cases} s\vec{e} & , \text{ если } s\tau_1 \leq X_j^1 < (s+1)\tau_1, 0 \leq s \leq [N/2]-1 \\ [N/2]\vec{e} & , \text{ если } X_j^1 = [N/2]\tau_1, \\ 0 & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Если $0 \leq s \leq 2[N/2]$, то

$$|P(\vec{X} = s\vec{e}) - P(\{\vec{X} \vee (s+1)\vec{e}\} \setminus \{\vec{X} \vee s\vec{e}\})| \leq \\ \leq 2P(\vec{X}_1 \neq \vec{X}_1^*) + 2P(\vec{X}_2 \neq \vec{X}_2^*). \quad (2.18)$$

Обозначим $\Delta_s = \{(u_1, \dots, u_n) \in R^n : \tau_1 s \leq u_1 < \tau_1(s+1)\} \setminus \{\vec{e}s\}$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \{\omega : X^1 \leq \tau_1 s, \dots, X^{n-1} \leq \tau_{n-1} s, X^n = \tau_n s\} &= \{\omega : X^1 \leq \tau_1 s, \\ &\dots, X^n \leq \tau_n s\} \setminus \{\omega : X^1 \leq \tau_1 s, \dots, X^{n-1} \leq \tau_{n-1} s, X^n < \tau_n s\}, \\ \{\omega : X^1 \leq \tau_1 s, \dots, X^{n-2} \leq \tau_{n-2} s, X^{n-1} = \tau_{n-1} s, X^n = \tau_n s\} &= \\ = \{\omega : X^1 \leq \tau_1 s, \dots, X^{n-1} \leq \tau_{n-1} s, X^n = \tau_n s\} \setminus \\ \setminus \{\omega : X^1 \leq \tau_1 s, \dots, X^{n-2} \leq \tau_{n-2} s, X^{n-1} < \tau_{n-1} s, X^n = \tau_n s\} \end{aligned}$$

и т.д. Поэтому

$$P(\vec{X} = \vec{e}s) \geq e^{-\lambda} \frac{\lambda^s}{s!} - 2^n \varepsilon.$$

Следовательно,

$$P(\vec{X} \in \Delta_s) = P(r_1 s \leq X^1 < r_1(s+1)) - P(\vec{X} = \vec{e}s) \leq \\ \leq 2(1 + 2^{n-1})\varepsilon.$$

Отсюда, вспомнив (2.17), заключаем, что

$$P(\vec{X}_j \in \Delta_s) \leq 4e^\lambda (1 + 2^{n-1})\varepsilon.$$

Поэтому, учитывая соотношение

$$P(\vec{X}_i \neq \vec{X}_i^*) \leq P(X_i^1 < 0) + \sum_{s=0}^{[N/2]} P(\vec{X}_i \in \Delta_s) + P(X_i > [N/2])$$

получаем следующую оценку ($i=1, 2$) :

$$P(\vec{X}_i \neq \vec{X}_i^*) \leq 2e^\lambda \varepsilon + 4e^\lambda (1 + 2^{n-1}) ([N/2] + 1) \varepsilon + \\ + 2e^\lambda \varepsilon + 2e^\lambda \lambda^{[N/2]} / [N/2]! \quad (2.19)$$

Неравенства (2.18) и (2.19) позволяют утверждать, что

$$|P(\vec{X}^* = s\vec{e}) - P(\{\vec{X} \vee (s+1)\vec{e}\} \setminus \{\vec{X} \vee s\vec{e}\})| \leq \\ \leq CN2^n \varepsilon + 8e^\lambda \lambda^{[N/2]} / [N/2]!, \quad (2.20)$$

где C — некоторая постоянная, зависящая лишь от λ . Так как

$$|P(\{\vec{X} \vee (s+1)\vec{e}\} \setminus \{\vec{X} \vee s\vec{e}\}) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^s}{s!}| \leq 2\varepsilon,$$

то из оценки (2.20) вытекает, что при $0 \leq s \leq 2 \lfloor N/2 \rfloor$

$$|P(\vec{X}^* = s\vec{e}) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^s}{s!}| \leq (N2^n \varepsilon + 8e^\lambda \lambda^{\lfloor N/2 \rfloor}) / \lfloor N/2 \rfloor! \quad (2.21)$$

Для натуральных k из интервала $(\lfloor N/2 \rfloor + 1, 2\lfloor N/2 \rfloor)$ неравенство (2.21) нас не устраивает. С целью получения лучшей оценки отметим, что

$$\begin{aligned} P(\vec{X}^* = k\vec{e}) &= \sum_{k - \lfloor N/2 \rfloor \leq q \leq \lfloor N/2 \rfloor} P(\vec{X}_1^* = q\vec{e}) P(\vec{X}_2^* = (k-q)\vec{e}) = \\ &= \sum_{k - \lfloor N/2 \rfloor < q < \lfloor N/2 \rfloor} P(qr_1 \leq X_1^1 < (q+1)r_1) P((k-q)r_1 \leq X_2^1 < \\ &< (k-q+1)r_1) + P(X_1^1 = \lfloor N/2 \rfloor r_1) P((k - \lfloor N/2 \rfloor)r_1 \leq X_2^1 < \\ &< (k - \lfloor N/2 \rfloor + 1)r_1) + P((k - \lfloor N/2 \rfloor)r_1 \leq X_1^1 < \\ &< k - \lfloor N/2 \rfloor + 1)r_1) P(X_2^1 = \lfloor N/2 \rfloor r_1) \leq \\ &\leq P(kr_1 \leq X^1 < (k+2)r_1) \leq \\ &\leq 2\varepsilon + e^{-\lambda} \lambda^k / k! + e^{-\lambda} \lambda^{k+1} / (k+1)! \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду соотношение

$$\begin{aligned} P(\vec{X}^* = 2\lfloor N/2 \rfloor \vec{e}) &= P(X_1^1 = \lfloor N/2 \rfloor r_1) P(X_2^1 = \lfloor N/2 \rfloor r_1) \leq \\ &\leq P(X^1 = 2\lfloor N/2 \rfloor r_1) \leq 2\varepsilon + \lambda^{2\lfloor N/2 \rfloor} / (2\lfloor N/2 \rfloor)!, \end{aligned}$$

получаем, что при $[N/2] + 1 \leq s \leq 2[N/2]$ справедливая оценка

$$|P(\vec{X}^* = s\vec{e}) - e^{-\lambda} \lambda^s / s!| \leq 2\varepsilon + e^{-\lambda} \lambda^s / s! \quad (2.22)$$

Рассмотрим функции

$$f^*(z) = \sum_{k=0}^{2[N/2]} z^k P(\vec{X}^* = k\vec{e}), \quad f_j^*(z) = \sum_{k=0}^{[N/2]} z^k P(\vec{X}_j^* = \vec{e} k),$$

где $j=1, 2$, а z - комплексная переменная. Пусть $C_1(\lambda)$ - некоторая постоянная,

$$|z| \leq T = N / C_1(\lambda). \quad (2.23)$$

Оценки (2.21) и (2.22) в круге (2.23) дают возможность записать

$$\begin{aligned} |f^*(z) - \exp(\lambda z - \lambda)| &\leq C\varepsilon N 2^n \sum_{k=0}^{[N/2]} T^k + \\ &+ 8e^\lambda \frac{\lambda^{[N/2]}}{[N/2]!} \sum_{k=0}^{[N/2]} T^k + 2\varepsilon \sum_{k=[N/2]+1}^{2[N/2]} T^k + \quad (2.24) \\ &+ e^{-\lambda} \sum_{k=[N/2]+1}^{2[N/2]} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} T^k + e^{-\lambda} \sum_{k \geq 2[N/2]+1} \frac{(\lambda T)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Вспомнив формулу Стирлинга для аппроксимации факториалов

$$m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m} < m! < m^m \sqrt{2\pi m} e^{-m+1/12m}$$

и умножив обе части соотношения (2.24) на $\exp(\lambda T + \lambda)$, кон-

станту $C_1(\lambda)$ в (2.23) нетрудно подобрать таким образом, чтобы

$$|f^*(z) - \exp(\lambda z - \lambda)| \exp(\lambda T + \lambda)$$

было бесконечно мало вместе с ε . Так как в круге (2.23)

$$|\exp(\lambda z - \lambda)| \gg \exp(-\lambda T - \lambda),$$

то при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2} |\exp(\lambda z - \lambda)| < |f^*(z)| < \frac{3}{2} |\exp(\lambda z - \lambda)|$$

и функции $f_j^*(z)$, связанные с $f^*(z)$ равенством

$$f^*(z) = f_1^*(z) f_2^*(z),$$

не имеют нулей в области (2.23).

Стметим, что для любых n -мерных случайных векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ и вектора $\vec{q} \in R^n$ справедлива оценка

$$|P(\vec{X} \vee \vec{q}) - P(\vec{Y} \vee \vec{q})| \leq P(\vec{X} \neq \vec{Y}). \quad (2.25)$$

Имея в виду (2.19) и (2.25), получаем

$$\rho(F_j^{m+1, \dots, n}, F_j^{*m+1, \dots, n}) \leq P(\vec{X}_j^* \neq \vec{X}_j) \leq C \varepsilon^{d_1}, \quad (2.26)$$

где d_1 - некоторая положительная постоянная, а F_j^* ($j=1, 2$) - ф.р. случайной величины X_j^* .

Заметим, что

$$f_j^{*'}(1) = \int_0^{[N/2]+1} x dF_j^{*m+1, \dots, n}(\vec{x}),$$

и поэтому

$$\begin{aligned} |f_j^{*'}(1) - \lambda_j| &\leq ([N/2]+1) |F_j^{*m+1, \dots, n}(\vec{e}([N/2]+1)) - \\ &- F_j^{*m+1, \dots, n}(\vec{e}([N/2]+1))| + ([N/2]+1) \rho(F_j^{*m+1, \dots, n}, \\ &F_j^{*m+1, \dots, n}) \leq 2([N/2]+1) \rho(F_j^{*m+1, \dots, n}, F_j^{*m+1, \dots, n}). \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (2.26) следует, что

$$|f_j^{*'}(1) - \lambda_j| \leq C \varepsilon^{d_2}, \quad j=1,2,$$

где d_2 - положительная постоянная.

Воспользовавшись соотношением (2.26) и повторив рассуждения ([18], стр.363-364), имеем:

$$\rho(F_j^{*m+1, \dots, n}(\vec{x}), \Pi^{*m+1, \dots, n}(\vec{x}; \vec{0}, \lambda_j, \vec{e})) \leq C/T, \quad j=1,2.$$

Эта оценка и завершает доказательство теоремы.

Из работы Г.П. Чистякова [25] следует, что оценки (2.13) и (2.14) неулучшаемы.

З а м е ч а н и е. В процессе доказательства теоремы мы пользовались n -мерными аналогами соотношений (8.5.8)-(8.5.12)

из монографии [18] без специальных оговорок, так как n -мерные обобщения этих соотношений не представляют каких-либо затруднений.

Г Л А В А III

УСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА ОДИНАКОВОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ЛИНЕЙНЫХ СТАТИСТИК

Проблемы характеристики вероятностных распределений, как уже отмечалось, привлекают внимание многих авторов. Одной из первых подверглась изучению задача характеристики нормального закона одинаковой распределенностью монома X_1 и линейной статистики $L = \sum_{i=1}^m a_i X_i$ от независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \dots, X_m$.

Этот эффект первоначально был исследован в работе Г. Поля [4С] (см. стр. 12). Дальнейший прогресс обязан, главным образом, работам Ю.В. Линника [16] и А.А. Зингера [6], [7]. Основные результаты этих исследований хорошо отражены во второй главе монографии [15]. Доказаны, в частности, следующие теоремы.

Т е о р е м а (Ю.В. Линник). Пусть две линейные статистики $L_1 = \sum_{i=1}^m a_i X_i$ и $L_2 = \sum_{i=1}^m b_i X_i$ одинаково распределены и выполнено условие

$$\max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_m|) \neq \max(|b_1|, \dots, |b_m|)$$

Пусть γ - максимальный вещественный корень определяющей функции $\zeta(z)$,

$$\zeta(z) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ a_j \neq 0, b_j \neq 0}} \{ |a_j|^z - |b_j|^z \}.$$

Если $F(x) = P(X_1 < x)$ имеет конечный момент порядка $2n$,

где $n = [\chi/2 + 1]$, то $F(x)$ - нормальный закон.

Т е о р е м а [15], стр. 619). Пусть $X_1, \dots, X_m$, $m \geq 2$ - невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины. Если статистики X_1 и $a_1 X_1 + \dots + a_m X_m$ равнораспределены, $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$, $|a_i| < 1$, то X_1 подчиняется нормальному закону.

Имеются интересные применения этих теорем. Мы напомним лишь приложения к статистической физике. Здесь примером может служить простой и изящный вывод известного закона Максвелла о распределении скоростей движения молекул (в условиях "ньютоновского хаоса") из более слабых гипотез, чем те, которые ранее применялись в классической статистической физике.

Однако в действительности строгое соблюдение тех условий, при которых справедливы утверждения характеристизационных теорем, практически неосуществимо. В связи с этим, как уже отмечалось во Введении, и возникает потребность в изучении устойчивости подобных эффектов.

В настоящей главе с целью упрощения обозначений метрики рассматриваются на пространствах случайных величин (см. стр. 5-6), а не на пространствах вероятностных распределений, что, однако, было удобно в первых двух главах.

Пусть $\mathcal{F}$ - множество измеримых функций $\Psi(x)$ действительного переменного, удовлетворяющих условию: $|\Psi'''(x)| \leq 1$.

Обозначим

$$\Sigma(X', X'') = \sup \{ |E(f(X')) - f(X'')| : f \in \mathcal{F} \}.$$

В этой метрике исследуем устойчивость приведенной выше теоремы о характеристизации нормального закона одинаково распределенностью монома и линейной статистики.

Т е о р е м а (В.М. Золотарев^{*}). Пусть $X_1, \dots, X_m, m \geq 2$ - невырожденные независимые одинаково распределенные случайные величины, $EX_1 = 0, EX_1^2 = \sigma^2 < \infty, E|X_1|^3 \leq M < \infty$. Если $Z(X_1, a_1 X_1 + \dots + a_m X_m) = \varepsilon$, причем $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1, 1 > a_i > 0$ то

$$\frac{\varepsilon}{1+q} \leq Z(X_1, N_{0,\sigma}) \leq \frac{\varepsilon}{1-q},$$

где $q = \sum_{i=1}^m a_i^3$, а $N_{0,\sigma}$ - нормальная случайная величина с параметрами 0 и σ .

Действительно, из ограничений на моменты случайной величины X_1 имеем, что $Z(X_1, N_{0,\sigma}) < \infty$ (см. [12], лемма 2). Кроме того, для произвольных независимых $X_1, \dots, X_m$ и $Y_1, \dots, Y_m$ справедлива оценка

$$Z\left(\sum_{i=1}^m c_i X_i, \sum_{i=1}^m c_i Y_i\right) \leq \sum_{i=1}^m |c_i|^3 Z(X_i, Y_i)$$

(см. [12], теорема 2). Поэтому, обозначив $\delta = Z(X_1, N_{0,\sigma})$, имеем

$$\delta = Z(X_1, N_{0,\sigma}) = Z\left(X_1, \sum_{i=1}^m a_i N_{0,\sigma}\right) \leq$$

^{*}) Сообщено автору во время частной беседы.

$$\begin{aligned} &\leq Z(X_1, \sum_{i=1}^m a_i X_i) + Z(\sum_{i=1}^m a_i X_i, \sum_{i=1}^m a_i N_{0,5}) \leq \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^m a_i^3 Z(X_i, N_{0,5}) = \varepsilon + \delta q, \end{aligned}$$

т.е. $\delta \leq \varepsilon / (1 - q)$. Аналогично,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Z(X_1, \sum_{i=1}^m a_i X_i) \leq Z(X_1, N_{0,5}) + \\ &+ Z(N_{0,5}, \sum_{i=1}^m a_i X_i) \leq \delta + \sum_{i=1}^m a_i^3 Z(N_{0,5}, X_i) = \\ &= \delta (1 + q), \end{aligned}$$

т.е. $\delta \geq \varepsilon / (1 + q)$.

Однако при построении оценок уже в простейших задачах характеристики нормального закона одинаковой распределенностью линейных статистик в метриках, отличных от метрик типа Z , сталкиваемся с существенными трудностями. Возникают трудности определенного характера и при рассмотрении устойчивости теоремы Ю.В.Линника в этой метрике.

В настоящей главе, используя метрику $\mathcal{J}_S$ и равномерную метрику $\mathcal{S}$ (их определения напоминаются во Введении), рассматриваются вопросы построения оценки устойчивости в теореме Г.Поля, приводятся обобщенные теоремы Л.Д. Мешалкина, строятся оценки устойчивости характеристики вырожденного нормального распределения.

В первом разделе настоящей главы рассматриваются некоторые вопросы качественной устойчивости.

3.1. Качественная сторона устойчивости

Во Введении приведено понятие устойчивости чистой задачи характеристики в его общей форме. Для формулировки критерия этой устойчивости нам потребуются следующие два определения (см. [10], стр. 41-42, [11], стр. 444).

О п р е д е л е н и е. Отображение $F: X \rightarrow Y$ называется (ν, μ) -непрерывным в точке $X_0 \in X$, если $\nu(FX_n, FX_0) \rightarrow 0$ для любой последовательности $X_n \in X$ такой, что $\mu(X_n, X_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

О п р е д е л е н и е. Множество $X' \subseteq X$ называется μ -компактным, если из любой бесконечной последовательности $X_n \in X'$ всегда можно выделить подпоследовательность $X_{n'}$ и указать случайную величину $X_0 \in X$ такую, что $\mu(X_{n'}, X_0) \rightarrow 0$, $n' \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а (В.М. Золотарев [10]). Предположим, что чистая задача характеристики в пространствах (X, μ) , (Y, ν) задается элементами (F, A, B) . Эта задача будет (μ, ν) -устойчивой в пределах множества $X' \subseteq X$, если выполнены условия:

1°. Множество A является μ -замкнутым.

2°. Множество B является ν -замкнутым.

3°. Отображение F (ν, μ) -непрерывно в каждой точке множества A .

4°. Множество X' является μ -компактным.

Далее целесообразно подчеркнуть функциональную зависимость случайной величины X от ε путем обозначения X_ε . Используя доказательство теоремы Золотарева, лемму 7 из работы [10], нетрудно рассмотреть*) количественную устойчивость характеристики нор-

*) См. также пример в работе В.М. Золотарева [11].

мального закона одинаковой распределенностью монома и линейной статистики (см. теорему на стр. 62):

Л е м м а 3.1. Пусть $\mathcal{W}$ - множество невырожденных случайных величин, удовлетворяющее условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \{ P(|X| > N) : X \in \mathcal{W} \} = 0.$$

Если случайные величины $X_{1,\varepsilon}, X_{2,\varepsilon}, \dots, X_{m,\varepsilon}$ из множества $\mathcal{W}$ - независимы и одинаково распределены, а $L(X_{1,\varepsilon}, \sum_{i=1}^m a_i X_{i,\varepsilon}) \leq \varepsilon$, причем $|a_i| < 1$ при $1 \leq i \leq m$, $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$, то любая последовательность $\{X_{1,\varepsilon'}\}$ содержит подпоследовательность $\{X'_{1,\varepsilon'}\}$ такую, что при $\varepsilon' \rightarrow 0$

$$L(X'_{1,\varepsilon'}, N_{a',\sigma'}) \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

для некоторой нормальной случайной величины $N_{a',\sigma'}$ с параметрами a', σ' .

Другими словами, если выполнены условия леммы 3.1, то любая последовательность $X_{\varepsilon'_1}, X_{\varepsilon'_2}, \dots$ (где $\varepsilon'_n \rightarrow 0$) имеет хотя бы одну предельную точку (в смысле слабой сходимости) и каждая предельная точка этой последовательности принадлежит классу нормальных случайных величин.

Но если даже соотношение (3.1) выполняется для самой последовательности $\{X_{1,\varepsilon}\}$, т.е. если

$$L(X_{1,\varepsilon}, N_{a,\sigma}) \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, то вопрос определения параметров a и σ остается открытым. Поясним сказанное на примере. Пусть каждый элемент последовательности $\{X_{1,\varepsilon}\}$ имеет S -тый абсолютный момент, совпадающий с S -тым абсолютным моментом нормального закона, т.е.

пусть

$$E |X_{1,\varepsilon}|^S = E |N_{a,\varepsilon}|^S, \quad (3.3)$$

где S - некоторое положительное фиксированное число. Оказывается, что этого естественного требования недостаточно для определения дисперсии предельного нормального закона (предельного в смысле соотношения (3.2)). Действительно, пусть ф.р. F_ε симметрической случайной величины $X_{1,\varepsilon}$ определяется следующим образом (здесь $\Phi_{a,\sigma}$ - нормальный закон с параметрами a и σ):

$$F_\varepsilon(x) = \begin{cases} \Phi_{a,\varepsilon/2}(x), & \text{если } a \leq x \leq a + 1/2\varepsilon, \\ 1 - q_{1/\varepsilon}, & \text{если } a + 1/2\varepsilon < x \leq a + 1/\varepsilon, \\ 1, & \text{если } x > a + 1/\varepsilon, \end{cases}$$

где число $q_{1/\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$ определяется с помощью соотношения (3.3). В таком случае при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$L(X_{1,\varepsilon}, N_{a,\varepsilon/2}) \rightarrow 0.$$

Оказывается, что этого неприятного эффекта можно избежать, если, кроме ограничения (3.3), потребовать, чтобы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]} E |X_{1,\varepsilon}|^S I(|X_{1,\varepsilon}| > T) = 0,$$

где $I(A)$ - индикатор множества A , а ε_0 - положительная постоянная. Строгое изложение сказанного приводится в теореме 3.1.

Перед нами, таким образом, возникли следующие вопросы:

1. Найти условия, при которых выполняется соотношение (3.2).
2. Если сходимость последовательности $\{X_{1,\varepsilon}\}$ установлена, то найти условия, однозначно определяющие параметры a и σ предельного нормального закона.

Эти проблемы решаются в теореме 3.1, для формулировки которой полезно следующее обозначение. Пусть $\mathcal{U}$ - множество невырожденных случайных величин X , удовлетворяющих условиям:

$$EX = a, E|X|^\delta = E|N_{a, \sigma}|^\delta, \quad (3.4)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup \{ EX I(|X| > T) : X \in \mathcal{U} \} = 0, \quad (3.5)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup \{ E|X|^\delta I(|X| > T) : X \in \mathcal{U} \} = 0, \quad (3.6)$$

где $a, \sigma > 0, \delta > 0$ - некоторые фиксированные постоянные.

Т е о р е м а 3.1. Если случайные величины $X_{1, \varepsilon}, \dots, X_{m, \varepsilon}$ из множества $\mathcal{U}$ - независимы и одинаково распределены, а

$$L(X_{1, \varepsilon}, \sum_{i=1}^m a_i X_{i, \varepsilon}) \leq \varepsilon,$$

причем $|a_i| < 1$ при $1 \leq i \leq m$, $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$L(X_{1, \varepsilon}, N_{a, \sigma}) \rightarrow 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$. Поэтому, пользуясь леммой 3.1, заключаем, что любая последовательность $\{X_{1, \varepsilon'}\}$ содержит подпоследовательность $\{X'_{1, \varepsilon'}\}$ такую, что при $\varepsilon' \rightarrow 0$ выполняется соотношение (3.1). Доказательство теоремы будет завершено, если нам удастся показать, что

$$a' = a, \quad \sigma' = \sigma. \quad (3.7)$$

Действительно, соотношения (3.1) и (3.7) означают, что любая подпоследовательность последовательности $\{X_{1,\varepsilon}\}$ (напомним, что каждый элемент этой последовательности принадлежит множеству $\mathcal{U}$) имеет хотя бы одну предельную точку и что каждая предельная точка совпадает с $N_{a,\bar{b}}$, где a и $\bar{b}$ - фиксированные условиями теоремы 3.1 числа. А это и означает, что выполняется соотношение (3.2).

С целью доказательства (3.7) для любого $T > 0$ функцию $g_T(x)$ определим следующим образом:

$$g_T(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leq T, \\ T + T(T-x)/\lambda & \text{при } T \leq x < T + \lambda, \\ -T - T(T+x)/\lambda & \text{при } -T - \lambda \leq x < -T, \\ 0 & \text{при } |x| \geq T + \lambda, \end{cases}$$

где λ - произвольное положительное действительное число. Функция $g_T(x)$, очевидно, непрерывна и ограничена на множестве $(-\infty, \infty)$ при любом фиксированном $T > 0$. Воспользовавшись теоремой об эквивалентности определений слабой сходимости (см. [1], гл. I, теорема 2.1) и условием (3.1) заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E g_T(X_{1,\varepsilon}) = E g_T(N_{a',\bar{b}'})$$

(для упрощения обозначений вместо подпоследовательности $\{X'_{1,\varepsilon'}\}$ будем рассматривать саму последовательность $\{X_{1,\varepsilon}\}$) Отсюда, перейдя к пределу при $T \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E g_T(X_{1,\varepsilon}) = E N_{a',\bar{b}'} = a'. \quad (3.8)$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E X_{1,\varepsilon} = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E g_T(X_{1,\varepsilon}). \quad (3.9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E X_{1,\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E X_{1,\varepsilon} I(|X_{1,\varepsilon}| \leq T) + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E X_{1,\varepsilon} I(|X_{1,\varepsilon}| > T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E X_{1,\varepsilon} I(|X_{1,\varepsilon}| \leq T) &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\lambda \downarrow 0} E X_{1,\varepsilon} g_T(X_{1,\varepsilon}) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E X_{1,\varepsilon} g_T(X_{1,\varepsilon}), \end{aligned}$$

и, воспользовавшись условием (3.5), получаем (3.9). Из (3.8) и (3.9) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E X_{1,\varepsilon} = a'.$$

Так как $X_{1,\varepsilon} \in \mathcal{U}$, то из (3.4) заключаем, что $a = a'$. Первое из соотношений (3.7), таким образом, доказано.

Истинность второго равенства из соотношений (3.7) доказывается аналогично. В самом деле, для любого $T > 0$ функцию $f_T(x)$ определим следующим образом:

$$f_T(x) = \begin{cases} |x|^\delta & \text{при } |x| \leq T, \\ T^\delta + T^\delta(T - |x|)/\lambda & \text{при } T \leq |x| \leq T + \lambda, \\ 0 & \text{при } |x| \geq T + \lambda, \end{cases}$$

где λ , как и ранее, произвольное положительное число. Из условия (3.1) и тождества $a=a'$ получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E f_T(X_{1,\varepsilon}) = E f_T(N_{a,\varepsilon'}).$$

Перейдя к пределу при $T \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E f_T(X_{1,\varepsilon}) = E |N_{a,\varepsilon'}|^\delta. \quad (3.10)$$

Воспользовавшись условием (3.6), нетрудно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E |X_{1,\varepsilon}|^\delta = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E f_T(X_{1,\varepsilon}). \quad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) заключаем:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E |X_{1,\varepsilon}|^\delta = E |N_{a,\varepsilon'}|^\delta.$$

В силу (3.4) $E |X_{1,\varepsilon}|^\delta = E |N_{a,\varepsilon}|^\delta$ и, следовательно,

$$E |N_{a,\varepsilon'}|^\delta = E |N_{a,\varepsilon}|^\delta,$$

а поэтому $\varepsilon = \varepsilon'$.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $\mathcal{U}_1$ — множество невырожденных случайных величин, удовлетворяющих условиям (3.4) и

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup \{ E |X| I(|X| > T) : X \in \mathcal{U}_1 \} = 0,$$

где $a, \varepsilon > 0, 0 < \delta \leq 1$ — некоторые фиксированные постоянные. Если случайные величины $X_{1,\varepsilon}, \dots, X_{m,\varepsilon}$ из множества $\mathcal{U}_1$ удовлет-

воряют условиям теоремы 3.4, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$L(X_{1,\varepsilon}, N_{a,\varepsilon}) \rightarrow 0.$$

Доказательство очевидно.

3.2. Оценки устойчивости в теореме Г. Поля

Настоящий раздел посвящен проблеме построения количественной оценки устойчивости в задаче характеристики нормальных распределений, связанной с теоремой Г. Поля (см. стр. 12). Соблюдая обозначения, принятые во Введении при рассмотрении общей модели задачи характеристики, отметим, что в случае теоремы Г. Поля X — это пространство двумерных случайных векторов, а чистая задача задается множеством $\mathcal{A}$ случайных векторов $\vec{X} = (X_1, X_2)^T$ с независимыми одинаково распределенными компонентами, имеющими конечную дисперсию, множеством $\mathcal{B}$ случайных векторов $\vec{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ с одинаково распределенными компонентами и преобразованием

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix},$$

где a, b — положительные постоянные. В определенной таким образом чистой задаче характеризуется, как видно из теоремы Г. Поля, множество $\mathcal{C}$ случайных векторов с независимыми одинаково распределенными нормальными компонентами.

Первым шагом при рассмотрении устойчивости этой чистой задачи будет следующее

О п р е д е л е н и е. Случайные величины X и Y называются (μ, ε) -одинаково*) распределенными, если

$$\mu(X, Y) \leq \varepsilon.$$

*) μ — произвольная фиксированная метрика в пространстве случайных величин.

Задача количественной оценки устойчивости теоремы Г. Поиа (случай $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$) впервые была рассмотрена Л.Д. Мешалкиным [39]. При этом использовалась равномерная метрика ρ .

Т е о р е м а (Л.Д. Мешалкин). Если X_1 и X_2 - независимые одинаково распределенные случайные величины и $E X_1 = 0$, $E X_1^2 = 1$, $E |X_1|^3 < M_3 < \infty$, а X_1 и $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ (δ, ε) - одинаково распределены, то существуют постоянные C и ε_0 , зависящие лишь от M_3 такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\rho(X_1, N_{0,1}) \leq C \varepsilon^{1/3},$$

где $N_{0,1}$ - нормальная случайная величина с параметрами 0 и 1.

В связи с этими исследованиями Л.Д. Мешалкина возникает следующая задача: изучить количественную устойчивость теоремы Г.Поиа для произвольных положительных чисел a и b , которые удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 = 1$. Изучение случая отрицательных a, b , как нетрудно заметить из доказательства теоремы 3.2, не представляет затруднений. Мы также рассмотрим зависимость оценки устойчивости теоремы Г. Поиа от порядка конечных моментов исследуемой случайной величины X_1 , т.е. от r , который определяется условием $E |X_1|^r \leq M_r < \infty$.

В теореме 3.3 данного раздела исследуется устойчивость теоремы Г. Поиа (случай $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$) в метрике $\mathcal{V}_5$ (см. стр. 5). Интерес к такого рода исследованиям возник в связи с поиском метрик, отличных от метрик типа $\sum$, в которых возможно построение неулучшаемой оценки устойчивости в изучаемой задаче. Понятно, что при таком подходе, как отмечает В.М. Золотарев [II], может сложиться ситуация, при которой мы можем получать хорошо очерченные ответы в "естественной" для заданной задачи метрике, но при этом хотим иметь аналогичные ответы в терминах метрик, выбор которых диктуется, например, соображениями возможных приложений. Возни-

кает, таким образом, задача сравнения метрик в форме построения оценок одних метрик с помощью других. В данной диссертации мы, однако, не руководствовались целью построения наиболее точных такого рода оценок, считая, следуя В.М. Золотареву [II], решение проблемы сравнения "естественной" метрики и метрики, нас интересующей, самостоятельной задачей. Так, например, мы ограничились приводимыми на стр. 84, 87 оценками метрики $\mathcal{V}_S$ через метрики λ и L (определение этих метрик приводится во Введении).

Переходим к формулировкам и доказательствам результатов данного раздела.

Т е о р е м а 3.2. Пусть X_1 и X_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины, а X_1 и $aX_1 + bX_2$ (g, ε)-одинаково распределены, причем a, b — положительны и $a^2 + b^2 = 1$. Пусть, кроме того,

$$p = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right) / \ln \max(a, b).$$

Если r — натуральное число, $r \geq 3p$ и

$$E X_1^s = E N_{0, \sigma}^s, \quad s = 1, 2, \dots, r-1; \quad E |X_1|^r = M_r < \infty,$$

то существуют такие положительные постоянные $C = C(b, M_r)$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(b, M_r, \sigma)$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\rho(X_1, N_{0, \sigma}) \leq C (\sigma^{-2p} + \sigma^{r-2p}) \varepsilon^{1-2p/r}. \quad (3.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко заметить, что $p \geq 1$.

Если

$$f_{X_1}(t) = f(t) = E \exp \{it X_1\},$$

$$R(t) = f(t) - \overset{-75-}{E} \exp \{ it (aX_1 + bX_2) \},$$

то из независимости случайных величин X_1 и X_2 следует, что

$$f(t) = f(at)f(bt) + R(t). \quad (3.13)$$

Пусть $b \geq a$, т.е. $\lambda = \ln a / \ln b \geq 1$. Обозначив

$$h(t) = f(t) - \exp \{ -\sigma^2 t^2 / 2 \},$$

из соотношения (3.13) получаем

$$h(t) = \exp \{ -\sigma^2 b^{2\lambda} t^2 / 2 \} h(bt) + R(t) + \exp \{ -\sigma^2 b^2 t^2 \} h(b^\lambda t) + h(bt)h(b^\lambda t). \quad (3.14)$$

Положим $t_j = b^{-j} \varepsilon^{1/2}$, $t_{-1} = 0$,

$$\theta_j = \max \{ |h(t)| : t_{j-1} \leq t \leq t_j \}.$$

Пользуясь равенством (3.14), имеем

$$\begin{aligned} \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |h(t)| &\leq \exp \{ -\sigma^2 b^{2\lambda} t_{i-1}^2 / 2 \} \max_{bt_{i-1} \leq t \leq bt_i} |h(t)| + \\ &+ \exp \{ -\sigma^2 b^2 t_{i-1}^2 / 2 \} \max_{b^\lambda t_{i-1} \leq t \leq b^\lambda t_i} |h(t)| + \\ &+ \max_{bt_{i-1} \leq t \leq bt_i} |h(t)| \max_{b^\lambda t_{i-1} \leq t \leq b^\lambda t_i} |h(t)| + \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |R(t)|. \end{aligned}$$

Обозначим $a_i = \exp\{-\sigma^2 b^{2\lambda} t_i^2 / 2\}$, $R_i = \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |R(t)|$

Тогда

$$\theta_i \leq a_{i-1} \theta_{i-1} + a_i \max(\theta_{i-[\lambda]}, \theta_{i-[\lambda]-1}) + \\ + \theta_{i-1} \max(\theta_{i-[\lambda]}, \theta_{i-[\lambda]-1}) + R_i.$$

Отметим, что через $[\lambda]$ мы обозначили целую часть числа λ . С целью упрощения выкладок вместо последнего соотношения рассмотрим соотношение

$$\theta_i \leq 2a_{i-1} \theta_{i-1} + \theta_{i-1}^2 + R_i. \quad (3.15)$$

Так как $\lambda \gg 1$, то нетрудно убедиться, что это упрощение не умаляет общности доказательства.

Перейдем к оценкам величин R_i . С этой целью заметим, что

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(F(x) - G(x)),$$

где $F(x)$ - ф.р. случайной величины X_1 , а $G(x)$ - ф.р. случайной величины $aX_1 + bX_2$. Справедливы оценки

$$\left| \int_{-A}^A e^{itx} d(F(x) - G(x)) \right| \leq 2\varepsilon(1 + At),$$

$$\left| \int_{|x| > A} e^{itx} d(F(x) - G(x)) \right| \leq C_1(b, M_r) A^{-r},$$

где $C_1(b, M_r) = E|X_1|^r + E|aX_1 + bX_2|^r \leq E|X_1|^r + \\ + (a+b)^r (a(a+b)^{-1} E|X_1|^r + b(a+b)^{-1} E|X_2|^r) =$

$$= (1 + (a+b)^{\frac{1}{2}})^2 \in |X_1|^2 \leq (1 + 2^{\frac{1}{2}}) M_2.$$

Положив $A = \varepsilon^{-1/2}$, имеем

$$|R(t)| \leq (C_1 + 2)(1 + t \varepsilon^{-1/2}).$$

Так как $t_i = b^{-i} \varepsilon^{1/2}$, то

$$R_i \leq C'_1 (1 + b^{-i}) \varepsilon, \quad (3.16)$$

где через C'_1 мы обозначили $C_1 + 2$.

Соотношение (3.15) с учетом оценки (3.16) перепишем следующим образом:

$$\theta_i \leq (2a_{i-1} + \theta_{i-1}) \theta_{i-1} + C'_1 \varepsilon (1 + b^{-i}),$$

откуда получаем, что при $1 \leq s \leq i$

$$\begin{aligned} \theta_i &\leq (2a_{i-1} + \theta_{i-1}) \{ (2a_{i-2} + \theta_{i-2}) \theta_{i-2} + C'_1 (1 + b^{-(i-1)}) \} \\ &+ C'_1 \varepsilon (1 + b^{-i}) = (2a_{i-1} + \theta_{i-1}) (2a_{i-2} + \theta_{i-2}) \theta_{i-2} + \\ &+ (2a_{i-1} + \theta_{i-1}) (1 + b^{-(i-1)}) C'_1 \varepsilon + (1 + b^{-i}) C'_1 \varepsilon \leq \dots \leq \\ &\leq (2a_{i-1} + \theta_{i-1}) (2a_{i-2} + \theta_{i-2}) \dots (2a_{i-1-s} + \theta_{i-1-s}) \theta_{i-1-s} + \\ &+ \sum_{k=0}^{s-1} (2a_{i-1} + \theta_{i-1}) (2a_{i-2} + \theta_{i-2}) \dots (2a_{i-1-k} + \theta_{i-1-k}) \times \\ &\times (1 + b^{-(i-1-k)}) C'_1 \varepsilon + (1 + b^{-i}) C'_1 \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Обозначим

$$\tau = \max \{j: 2a_j \geq 1/2\}, \quad \delta_m = \max_{0 \leq k \leq m} \theta_k.$$

Так как для любого $j \leq \tau$

$$2a_j + \theta_j \leq 2a_j (1 + 2\theta_j),$$

то из оценки (3.17) при $m \leq \tau-1$ имеем

$$\begin{aligned} \theta_{m+1} &\leq (2a_m + \theta_m)(2a_{m-1} + \theta_{m-1}) \dots (2a_0 + \theta_0)\theta_0 + \\ &+ \sum_{k=0}^m (2a_m + \theta_m)(2a_{m-1} + \theta_{m-1}) \dots (2a_{m-k} + \theta_{m-k})^x \\ &\times (1 + b^{-(m-k)}) C'_1 \varepsilon + (1 + b^{-m-1}) C'_1 \varepsilon \leq \\ &\leq 2^{m+1} (1 + 2\delta_m)^{m+1} a_m a_{m-1} \dots a_0 \theta_0 + \\ &+ C'_1 \varepsilon \sum_{k=0}^m 2^k (1 + 2\delta_m)^k a_m a_{m-1} \dots a_{m-k}^x \\ &\times (1 + b^{-(m-k)}) + C'_1 \varepsilon (1 + b^{-m-1}). \end{aligned}$$

Заметив, что

$$a_m a_{m-1} \dots a_{m-k} \leq a_m = \exp\{-5^2 b^{2\lambda} b^{-2m} t_0^2 / 2\},$$

получаем

$$\theta_{m+1} \leq (1 + 2\delta_m)^{m+1} (C'_1 \varepsilon + \theta_0) a_m \sum_{k=0}^{m+1} 2^k (1 + b^{-(m-k)}) +$$

$$+ C'_1 \varepsilon (1 + b^{-m-1}) \leq 2(1 + 2\delta_m)^{m+1} (C'_1 \varepsilon + \theta_0) \exp\left\{-\sigma^2 b^{2\lambda} b^{-2m} t_0^2 / 2\right\} \sum_{k=0}^{m+1} 2^k b^{-(m-k)} + C'_1 \varepsilon (1 + b^{-m-1}).$$

Так как $b^{-2p} = 2$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} 2^k b^{-(m-k)} &= \sum_{k=0}^{m+1} b^{-2kp} b^{-(m-k)} = \\ &= b^{-m} (b^{(1-2p)(m+2)} - 1) / (b^{1-2p} - 1) \leq \\ &\leq b^{-2pm} b^{-4p+2} / (b^{1-2p} - 1) \leq C_2 b^{-2pm}, \end{aligned}$$

где $C_2 = 4/(\sqrt{2} - 1)$.

Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \theta_{m+1} &\leq 2(1 + 2\delta_m)^{m+1} (C'_1 \varepsilon + \theta_0) C_2 b^{-2pm} \times \\ &\times \exp\left\{-\sigma^2 b^{2\lambda} b^{-2m} t_0^2 / 2\right\} + C'_1 \varepsilon (1 + b^{-m-1}). \end{aligned}$$

Обозначив через $\Gamma(x)$ гамма-функцию, имеем при $\gamma > 0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b^{-2pm} \exp\left\{-\gamma b^{-2m}\right\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} b^{-2px} x$$

$$\times \exp\{-\gamma b^2 b^{-2x}\} dx \leq -\frac{1}{2 \ln b} \int_0^\infty y^{p-1} \exp\{-\gamma b^2 y\} dy \\ = -\frac{b^{-2p}}{2 \ln b} \Gamma(p) \gamma^{-p} \leq \gamma^{-p} \Gamma(p) 2^{p-1} / \ln 2.$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^T \theta_m \leq 2(1+2\delta_T)^{T+1} C_2 \sigma^{-2p} t_0^{-2p} 2^{\lambda+2p} \Gamma(p) \times \\ \times (2 \ln 2)^{-1} (C'_1 \varepsilon + \theta_0) + 2b^{-(T+1)} (1-b)^{-1} C'_1 \varepsilon. \quad (3.18)$$

Условие для моментов случайной величины X_1 позволяет заключить, что для малых значений $|t|$

$$|h(t)| \leq C_3 |t|^r,$$

где $C_3 = E |X_1 - N_{0,\sigma}|^r / r! \leq (M_r + \frac{\sigma^r}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma(\frac{r+1}{2}) 2^{r-1} / r!)$

Отсюда получаем оценку

$$\theta_0 \leq C_3 t_0^r = C_3 \varepsilon. \quad (3.19)$$

Так как

$$b^{-T} \leq 2 \sqrt{\ln 2} \sigma^{-1} b^{-\lambda} \varepsilon^{-1/r},$$

то из соотношений (3.18) и (3.19) при малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{m=1}^T \theta_m \leq 2(1+2\delta_T)^{T+1} (2 \ln 2)^{-1} 2^{\lambda+2p} C_2 \sigma^{-2p} \times \\ \times \Gamma(p) \varepsilon^{-2p/r} (C'_1 + C_3) \varepsilon + \frac{2\sqrt{2}}{1-b} C'_1 2\sqrt{\ln 2} \sigma^{-1} 2^{\lambda/2} \varepsilon^{1-1/r}. \quad (3.20)$$

Будем рассматривать лишь те $\varepsilon > 0$, для которых

$$\frac{2\sqrt{2}}{1-b} C'_1 2^{\lambda/2} b^{-1} \leq \varepsilon^{-1/\tau} \quad (3.21)$$

Из оценок (3.20) и (3.21), в частности, следует, что

$$\theta_m \leq (1 + 2\delta_{m-1})^m C_4 \varepsilon^{1-2p/\tau}, \quad (3.22)$$

где $C_4 = 2^{\lambda+2p} (\ln 2)^{-1} \Gamma(p) (C'_1 + C_3) C_2 b^{-2p} + 1$.

Предположим, что для всех $k, k \leq m$ ($m \leq \tau-1$) справедлива оценка

$$\theta_k \leq C_5 \varepsilon^{1/4}, \quad (3.23)$$

где $C_5 = 2C_4 + 1 + 2\sqrt{2}C_1/(1-b)$. Докажем, что она справедлива и для $k = m+1$. Действительно, справедливость (3.23) для $k=0$ при малых $\varepsilon > 0$ следует из (3.19). Далее будем рассматривать лишь те $\varepsilon > 0$, для которых

$$(1 + C_5 \varepsilon^{1/4})^\tau \leq 2. \quad (3.24)$$

Из (3.22) в таком случае следует, что (3.23) справедлива для любого $k, k \leq \tau$

Предположим теперь, что (3.23) справедлива для всех $\tau + l$, $\tau + l < L$, где

$$L = \left[(-1 + (2p-1)/\tau) \ln \varepsilon / \ln b^{-1} \right],$$

и докажем, что она справедлива для $\tau + l + 1$. В самом деле,

из определения числа τ , оценок (3.22) и (3.23) имеем

$$\begin{aligned} \theta_{\tau+l+1} &\leq \frac{1}{2} \theta_{\tau+l} + \theta_{\tau+l}^2 + C'_1 \varepsilon (1+b^{-(\tau+l+1)}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \theta_{\tau} + \sum_{k=0}^l (\theta_{\tau+k}^2 + C'_1 \varepsilon (1+b^{-(\tau+k+1)})) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (1+2\delta_{\tau-1})^{\tau} C_4 \varepsilon^{1-2p/r} + \sum_{k=0}^l (C_5^2 \varepsilon^{1/2} + \\ &+ C'_1 \varepsilon (1+b^{-(\tau+k+1)})) \leq C_4 \varepsilon^{1-2p/r} + C_5^2 L \varepsilon^{1/2} + \\ &+ \frac{2\sqrt{2}}{1-b} C'_1 b^{-L} \varepsilon \leq (C_4 + 1 + \frac{2\sqrt{2}}{1-b} C_1) \varepsilon^{1-2p/r}. \end{aligned}$$

Следовательно, (3.23) справедлива для любого $k, k \leq L$.

Так как

$$\sum_{i=\tau+1}^L \theta_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=\tau}^{L-1} \theta_i + \sum_{i=\tau}^{L-1} \theta_i^2 + C'_1 \varepsilon \sum_{i=\tau+1}^L (1+b^{-i}),$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=\tau+1}^L \theta_i &\leq \frac{1}{2} \theta_{\tau} + \sum_{k=\tau}^{L-1} (\theta_k^2 + C'_1 \varepsilon (1+b^{-(k+1)})) \leq \\ &\leq (C_4 + 1 + \frac{2\sqrt{2}}{1-b} C'_1) \varepsilon^{1-2p/r}. \end{aligned}$$

Мы, таким образом, доказали, что

$$\sum_{i=\tau+1}^L \theta_i \leq 2 \left(C_4 + 1 + \frac{2\sqrt{2}}{1-b} C'_1 \right) \varepsilon^{1-2p/r} \quad (3.25)$$

Из оценок (3.20), (3.21), (3.23)-(3.25) заключаем, что

$$\sum_{i=1}^L \theta_i \leq 2 \left(2C_4 + 1 + \frac{2\sqrt{2}}{1-b} C'_1 \right) \varepsilon^{1-2p/r} \quad (3.26)$$

Согласно известной лемме Эссена (см. [15], лемма I.I.II), для доказательства утверждения нашей теоремы достаточно показать существование такого $T_0 \gg b\varepsilon^{-1+2p/r}$, что

$$\int_{-T_0}^{T_0} |h(t)/t| dt \leq C \varepsilon^{1-2p/r},$$

где C - некоторая постоянная. Положим $T_0 = b\varepsilon^{-1+2p/r}$.

Так как для $j \geq 1$

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} |h(t)/t| dt \leq \theta_j \frac{t_j - t_{j-1}}{t_{j-1}} = \theta_j \frac{1-b}{b},$$

и, кроме того,

$$\int_0^{t_0} |h(t)/t| dt \leq C_3 \int_0^{t_0} t^{r-1} dt = C_3 \varepsilon / r,$$

то из (3.26) заключаем

$$\int_0^{T_0} |h(t)/t| dt \leq C_3 \varepsilon + 2 \left(2C_4 + 1 + 4C'_1 \right) \varepsilon^{1-2p/r}.$$

Отсюда и из очевидного замечания $|h(t)| = |h(-t)|$ следует, что

$$\rho(X_1, N_{0,5}) \leq \frac{1}{\pi} \left(8C_4 + 5 + 16C'_1 + \frac{24}{5\sqrt{\pi}} \right) \varepsilon^{1-2p/\varepsilon}.$$

Справедливость соотношения (3.12) доказана.

Теорема 3.2 формулировалась для ℓ из множества натуральных чисел. Заметим, что ее легко переформулировать для произвольных ℓ , удовлетворяющих условию $\ell \geq 3p$.

Переходим к построению оценок метрики ϑ_s через метрики λ и L .

Пусть случайные величины X и Y удовлетворяют следующим условиям:

$$E(X - Y) = 0, \quad E(X^2 - Y^2) = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta} |d(F_X(x) - F_Y(x))| = M_{2+\delta} < \infty,$$

причем $\delta > s \geq 0$. Докажем, что

$$2\lambda(X, Y) \leq \vartheta_s(X, Y) \leq \max(2, 6^{-\delta} M_{2+\delta}) \lambda^{\frac{\delta-s}{2+\delta}}(X, Y).$$

Действительно, легко убедиться в существовании таких точек $T_0 > 0$ и $T_* > 0$, что

$$\vartheta_s(X, Y) = \max_{|t| \leq T_0} \frac{|f_X(t) - f_Y(t)|}{\min(1, |t|^{2+s})} = \frac{1}{T_0},$$

$$\lambda(X, Y) = \frac{1}{2} \max_{|t| \leq T_*} |f_X(t) - f_Y(t)| = \frac{1}{T_*}.$$

Так как

$$\begin{aligned} |f_X(t) - f_Y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2 x^2}{2} \right) d(F_X(x) - F_Y(x)) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \min \left(t^2 x^2, \frac{|t|^3 |x|^3}{6} \right) |dF_X(x) - dF_Y(x)| \leq \\ &\leq |t|^{2+\delta} 6^{-\delta} M_{2+\delta}, \end{aligned}$$

то при $0 < |t| \leq \lambda^h(X, Y)$ (число h определяется ниже)

$$\frac{|f_X(t) - f_Y(t)|}{|t|^{2+\delta}} \leq 6^{-\delta} M_{2+\delta} t^{\delta-s} \leq 6^{-\delta} M_{2+\delta} \lambda^{h(\delta-s)}$$

Заметим, что $\lambda \leq 1$, т.е. $T_* \geq 1$, и поэтому при $0 \leq t \leq 1$ справедлива оценка

$$|f_X(t) - f_Y(t)| \leq 2\lambda.$$

Отсюда следует, что при $\lambda^h \leq |t| \leq 1$

$$|f_X(t) - f_Y(t)| |t|^{-2-s} \leq 2\lambda |t|^{-2-s} \leq 2\lambda^{1-h(2+s)}$$

В итоге при $0 < |t| \leq 1$ имеем:

$$|f_X(t) - f_Y(t)| |t|^{-2-s} \leq \max \left\{ 2\lambda^{1-h(2+s)}, 6^{-\delta} M_{2+\delta} \lambda^{h(\delta-s)} \right\}$$

Если, таким образом, $T_0 \leq 1$, то

$$\mathcal{I}_s(X, Y) \leq \max \left\{ 2\lambda^{1-h(2+s)}, 6^{-\delta} M_{2+\delta} \lambda^{h(\delta-s)} \right\}$$

Если же $T_0 \geq 1$, то

$$\max_{1 \leq |t| \leq T_0} \frac{|f_X(t) - f_Y(t)|}{\min(1, |t|^{2+s})} = \max_{1 \leq |t| \leq T_0} |f_X(t) - f_Y(t)| \leq$$

$$\leq \max_{0 < |t| \leq T_X} |f_X(t) - f_Y(t)| = 2\lambda(X, Y),$$

и поэтому

$$\mathcal{I}_s(X, Y) \leq \max \left\{ 2\lambda, 2\lambda^{1-h(2+s)}, 6^{-\delta} M_{2+\delta} \lambda^{h(\delta-s)} \right\}$$

Выбрав $h = 1/(2+\delta)$, получаем, что

$$\mathcal{I}_s(X, Y) \leq \max(2, 6^{-\delta} M_{2+\delta}) (\lambda(X, Y))^{\frac{\delta-s}{2+\delta}}.$$

Используя неравенство $T_0 \leq T_X$, заключаем о справедливости оценки

$$2\lambda(X, Y) \leq \mathcal{I}_s(X, Y).$$

Отметим также, что оценку снизу метрики $\mathcal{V}_S$ через метрику Леви L легко получить, воспользовавшись следствием из теоремы 2 в работе В.М. Золотарева [14], которое здесь мы приводим в качестве следующей леммы.

Л е м м а (В.М. Золотарев). Пусть Z - случайная величина с функцией распределения, спектр (носитель меры) которой принадлежит интервалу $(-1/2, 1/2)$. Если $\tau > 0$,

$$\Delta = \sup_{t > 0} |f_X(t) - f_Y(t)| t^{-\tau},$$

$$C = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |f_Z(t)| t^{-\tau-1} dt,$$

то справедливо следующее неравенство:

$$L(X, Y) \leq (1 + 1/\tau) (\tau C \Delta)^{1/(1+\tau)}.$$

Пользуясь этой леммой, заключаем, что

$$\mathcal{V}_S(X, Y) \geq L^{3+S}(X, Y) / ((2+S) C (1 + 1/(2+S)))^{3+S}$$

Переходим к построению количественных оценок устойчивости характеристики нормального закона в теореме Г. Поля в метрике $\mathcal{V}_S$.

Т е о р е м а 3.3. Пусть X_1, X_2 - независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$EX_1 = 0, EX_1^2 = 1,$$

а X_1 и $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ $(\mathcal{V}_S, \varepsilon)$ -одинаково распределены.

Если $S > 0$, то существует такая постоянная $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(S) > 0$

что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$\mathcal{V}_5(X_1, N_{0,1}) \leq C_6 \varepsilon, \quad (3.27)$$

где $C_6 = 32(1 + 4\sqrt{e}(1 - 2^{-5/2})^{-1})$.

Если же $s=0$, $M_{2+\delta} = E|X_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, то существует такая постоянная $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(M_{2+\delta}, \delta)$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$

$$\mathcal{V}_0(X_1, N_{0,1}) \leq C_7 \varepsilon \ln 1/\varepsilon, \quad (3.28)$$

где $C_7 = 2^{11} \sqrt{e} / (\delta \ln 2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$|f_{X_1}(t)|^2 \geq 1 - t^2. \quad (3.29)$$

Действительно, пусть $\tilde{F}(x)$ - ф.р. симметризованной величины $\tilde{X} = X_1 - Y$, где X_1 и Y - независимые одинаково распределенные случайные величины. Так как

$$|f_{X_1}(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \, d\tilde{F}(x),$$

то

$$\begin{aligned} 1 - |f_{X_1}(t)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) \, d\tilde{F}(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \sin^2 \frac{tx}{2} \, d\tilde{F}(x) \leq \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, d\tilde{F}(x) = \\ &= \frac{t^2}{2} \cdot 2 E X_1^2 = t^2. \end{aligned}$$

Учитывая оценку (3.29) и условие независимости случайных величин X_1 и X_2 , заключаем, что при $|t| < 1$ выполняется следующее тождество:

$$\ln f_{X_1}(t) = 2 \ln f_{X_1}(t/\sqrt{2}) + R_1(t), \quad (3.30)$$

где $R_1(t) = \ln(1 + (f_{X_1}(t) - f_{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}(t)) / f_{X_1}^2(t/\sqrt{2}))$.

Обозначив

$$\Psi(t) = \frac{2}{t^2} \ln f_{X_1}(t), \quad R_2(t) = \frac{2R_1(t)}{t^2},$$

из соотношения (3.30) имеем, что

$$\Psi(t) - \Psi(t/\sqrt{2}) = R_2(t).$$

Отсюда заключаем о справедливости следующих равенств:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Psi(t/\sqrt{2}) + R_2(t), \\ \Psi(t/\sqrt{2}) &= \Psi(t/2) + R_2(t/\sqrt{2}), \\ \Psi(t/2) &= \Psi(t/2\sqrt{2}) + R_2(t/2), \\ &\dots \dots \dots \\ \Psi(t/2^{n/2}) &= \Psi(t/2^{(n+1)/2}) + R_2(t/2^{n/2}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Psi(t) = \Psi(t/2^{(n+1)/2}) + \sum_{j=0}^n R_2(t/2^{j/2}). \quad (3.31)$$

Из условий $EX_1=0$, $EX_1^2=1$ следует, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} \Psi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \ln f_{X_1}(z)}{z^2} = -1.$$

Отсюда, пользуясь равенством (3.31), получаем

$$\Psi(t) = -1 + \sum_{j=0}^{\infty} R_2(t/2^{j/2}). \quad (3.32)$$

Так как при $0 < t < 1$ *)

$$|f_{X_1}(t) - f_{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}(t)| \leq \varepsilon t^{2+s},$$

$$|f_{X_1}(t/\sqrt{2})|^2 \geq 1/2,$$

то при $0 \leq \varepsilon \leq 1/8$ имеем

$$|R_1(t)| \leq 4\varepsilon t^{2+s},$$

т.е. при $0 < t < 1$, $0 \leq \varepsilon \leq 1/8$

$$|R_2(t)| \leq 8\varepsilon t^s. \quad (3.33)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} |R_2(t/2^{j/2})| &\leq 8\varepsilon t^s \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-sj/2} = \\ &= 8\varepsilon t^s / (1 - 2^{-s/2}). \end{aligned}$$

*) Мы не рассматриваем отрицательные значения t , так как

$$|f_X(-t) - f_Y(-t)| = |f_X(t) - f_Y(t)|.$$

Пользуясь этим неравенством, соотношением (3.32) и оценкой

$$|e^z - 1| \leq |z| \max(1, e^{\operatorname{Re} z})$$

получаем, что при $0 < t < 1$, $0 \leq \varepsilon \leq 1/8$

$$\begin{aligned} |f_{X_1}(t) - e^{-t^2/2}| &\leq e^{-t^2/2} |1 - e^{\ln f_{X_1}(t) + t^2/2}| \leq \\ &\leq e^{-t^2/2} |\ln f_{X_1}(t) + \frac{t^2}{2}| \max(1, e^{t^2/2 + \ln |f_{X_1}(t)|}) \leq \\ &\leq e^{-t^2/2} \frac{t^2}{2} |\psi(t) + 1| \sqrt{e} \leq \\ &\leq 4\sqrt{e} \varepsilon t^{2+s} / (1 - 2^{-s/2}). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\sup_{|t| < 1} \frac{|f_{X_1}(t) - e^{-t^2/2}|}{|t|^{2+s}} \leq \frac{4\sqrt{e} \varepsilon}{1 - 2^{-s/2}}. \quad (3.34)$$

Далее докажем, что

$$\max_{1 \leq |t| \leq 1/\varepsilon} |f_{X_1}(t) - e^{-t^2/2}| \leq 32 \varepsilon (1 + 4\sqrt{e} / (1 - 2^{-s/2})) \quad (3.35)$$

для всех $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1 = \varepsilon_1(s)$, ε_1 - достаточно малое положительное число.

Определив

$$q = 2 \left[\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] - 1, \quad k = 2 \left[\frac{3}{2} \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

(Напомним, что через $[d]$ мы обозначаем целую часть числа d),
в области

$$1 \leq t \leq 1/\varepsilon$$

фиксируем точки t_j , $t_j = (2^j \varepsilon)^{1/2}$, $q \leq j \leq k$. Следуя обозначениям теоремы 3.2, положим

$$h(t) + |e^{-t^2/2} = f_{X_1}(t)|,$$

$$\theta_j = \max \{ |h(t)| : t_{j-1} \leq t \leq t_j \}, \quad j = q, q+1, \dots, k.$$

Заметим, что

$$\max_{1 \leq t \leq 1/\varepsilon} h(t) \leq \max_{q \leq j \leq k} \theta_j.$$

Для оценки $h(t)$ в области $t \in [1, 1/\varepsilon]$, таким образом, достаточно построить оценку для θ_j , где j - любое натуральное число из интервала $[q, k]$.

Пользуясь соотношением

$$f_{X_1}(t) = f_{X_1}^2(t/\sqrt{2}) + f_{X_1}(t) - f_{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}(t)$$

легко заметить, что

$$h(t\sqrt{2}) = h^2(t) + 2h(t)e^{-t^2/2} + \kappa(t\sqrt{2}),$$

где $\kappa(t) = f_{X_1}(t) - f_{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}(t)$. Отсюда заключаем,

что^{*)}

$$\theta_{i+1} \leq 2 \theta_i e^{-t_{i-1}^2/2} + \theta_i^2 + \varepsilon, \quad q \leq i \leq k-1. \quad (3.36)$$

Докажем, что если для всех $q \leq j \leq i$ ($i \leq k-1$) верна оценка

$$\theta_j^2 \leq \varepsilon, \quad (3.37)$$

то она верна также и для $j = i+1$.

Обозначив $\exp\{-t_{i-1}^2/2\} = a_i$, из соотношений (3.36) и (3.37) получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &\leq 2 a_i \theta_i + 2\varepsilon \leq 2 a_i (2 a_{i-1} \theta_{i-1} + 2\varepsilon) + \\ &+ 2\varepsilon = 2^2 a_i a_{i-1} \theta_{i-1} + 2^2 a_i \varepsilon + 2\varepsilon \leq \\ &\leq 2^3 a_i a_{i-1} a_{i-2} \theta_{i-2} + 2^3 a_i a_{i-1} \varepsilon + 2^2 a_i \varepsilon + \\ &+ 2\varepsilon \leq \dots \leq 2^{i+1-q} a_i \dots a_q \theta_q + \\ &+ \varepsilon \sum_{l=0}^{i-1-q} 2^{l+2} a_i \dots a_{i-l} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как

$$a_i \dots a_{i-l} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{m=0}^l t_{i-m}^2\right\} = \exp\left\{-(1-\right.$$

*) Ср. с соотношением (3.15).

$$\{-2^{l-1}\} t_i^2 \} \leq \exp \{-t_{i-1}^2 / 2\},$$

то отсюда имеем, что

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{i-1-q} 2^{l+2} a_i \dots a_{i-l} &\leq \exp \{-t_{i-1}^2 / 2\} \{2^{i-q+2} - 4\} \\ &= \exp \{-2^{i-2} \varepsilon\} \cdot \{2^{i-q+2} - 4\} \leq 2^5 - 4. \end{aligned}$$

Мы, таким образом, доказали, что

$$\theta_{i+1} \leq 32 (\varepsilon + \theta_q). \quad (3.38)$$

Справедливость (3.37) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ для $j = q$ вытекает из оценки (3.34). Поэтому из соотношения (3.38), полученного на основе (3.37) при $j \leq i$ ($j \geq q$), заключаем, что (3.37) верно и для $j = i+1$. Следовательно, (3.37) имеет место для любого $j \geq q$ при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Это, в свою очередь, означает, что для любого натурального l , $q \leq l \leq k$, справедливо неравенство

$$\theta_l \leq 32 (1 + 4\sqrt{\varepsilon} / (1 - 2^{-5/2})) \varepsilon,$$

т.е. что справедлива оценка (3.35). Из (3.34) и (3.35) получаем (3.27).

Займемся доказательством соотношения (3.28). С этой целью заметим, что

$$\begin{aligned}
 & |f_{X_1}(t) - f_{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}(t)| = \\
 & = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2 x^2}{2} \right) d(F_{X_1}(x) - F_{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}(x)) \right| \leq \\
 & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \min \left(t^2 x^2, \frac{t^3 |x|^3}{6} \right) |d(F_{X_1}(x) - F_{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}(x))| \leq \\
 & \leq \frac{t^{2+\delta}}{6^\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta} |d(F_{X_1}(x) + F_{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}(x))|.
 \end{aligned}$$

Так как

$$E|X_1|^{2+\delta} + E|(X_1+X_2)/\sqrt{2}|^{2+\delta} \leq (1 + 2^{1+\delta/2}) E|X_1|^{2+\delta},$$

то

$$|f_{X_1}(t) - f_{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}(t)| \leq 6^{-\delta} (1 + 2^{1+\delta/2}) M_{2+\delta} t^{2+\delta}.$$

Пусть t_0 - некоторое положительное число, удовлетворяющее соотношению

$$2 \cdot 6^{-\delta} (1 + 2^{1+\delta/2}) t_0^{2+\delta} M_{2+\delta} \leq 1/2.$$

Нетрудно убедиться, что таковым числом является, к примеру,

$$t_0 = M_{2+\delta}^{-1/(2+\delta)} / 3.$$

При $0 < t < t_0$, таким образом, имеем

$$|R_1(t)| \leq 4 \cdot 6^{-\delta} (1 + 2^{1+\delta/2}) M_{2+\delta} t^{2+\delta}.$$

Обозначим $C_8 = 4 \cdot 6^{-\delta} (1 + 2^{1+\delta/2})$. Так как

$$\begin{aligned} |R_2(t/2^{k/2})| &= |R_1(t/2^{k/2})| 2^{k+1} t^{-2} \leq \\ &\leq 2^{k+1} C_8 M_{2+\delta} t^{-2} (t/2^{k/2})^{2+\delta} = \\ &= 2^{1-k\delta/2} C_8 M_{2+\delta} t^{\delta}, \end{aligned}$$

то, пользуясь (3.32) и (3.33), получаем оценку

$$\begin{aligned} |\Psi(t) + 1| &\leq \sum_{k=0}^N |R_2(t/2^{k/2})| + \\ &+ \sum_{k=N+1}^{\infty} |R_2(t/2^{k/2})| \leq 8\varepsilon (N+1) + \\ &+ 2C_8 M_{2+\delta} t^{\delta} 2^{-\delta(N+1)/2} / (1 - 2^{-\delta/2}), \end{aligned}$$

где $\varepsilon \in [0, 1/8]$, $2^{N+1} \geq 3 M_{2+\delta}^{1/(2+\delta)}$, $0 < t < 1$.

Наша дальнейшая задача - найти минимальное натуральное N , удовлетворяющее неравенству

$$8\varepsilon(N+1) \geq 20M_{2+\delta} 2^{-\frac{\delta(N+1)}{2}} / (1 - 2^{-\delta/2}) \quad (3.39)$$

(мы воспользовались оценкой $C_8 < 10$). Обозначив

$$K = 5M_{2+\delta} / (2(1 - 2^{-\delta/2})),$$

потребуем выполнения соотношения

$$N + 1 \geq K. \quad (3.40)$$

Упростив с помощью (3.40) оценку (3.39), убеждаемся, что достаточно рассматривать следующее неравенство:

$$\frac{\delta}{2} (N + 1) \ln 2 \geq \ln 1/\varepsilon,$$

т.е. достаточно положить

$$N = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{2}{\delta \ln 2} \ln 1/\varepsilon \right\rceil.$$

Здесь $\varepsilon \in [0, \varepsilon'_2]$, причем ε'_2 определяется на основе следующих соотношений:

$$0 < \varepsilon'_2 \leq 1/8, \quad 2^{N(\varepsilon'_2)} \geq 3M_{2+\delta}^{1/(2+\delta)},$$

$$N(\varepsilon'_2) + 1 \geq K.$$

При $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'_2$, таким образом, имеем:

$$|\Psi(t) + 1| \leq \frac{64}{\delta \ln 2} \varepsilon \ln 1/\varepsilon.$$

Поэтому при $0 < t < 1$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'_2$

$$\begin{aligned} |f_{X_1}(t) - e^{-t^2/2}| &\leq e^{-t^2/2} |1 - e^{\ln f_{X_1}(t) + t^2/2}| \leq \\ &\leq e^{-t^2/2} \frac{t^2}{2} \sqrt{e} |\psi(t) + 1| \leq \frac{32\sqrt{e}}{8\ln 2} t^2 \varepsilon \ln 1/\varepsilon. \quad (3.41) \end{aligned}$$

Если ε''_2 - положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$32(\varepsilon''_2 + \frac{32\sqrt{e}}{8\ln 2} \varepsilon''_2 \ln 1/\varepsilon''_2) \leq \sqrt{\varepsilon''_2},$$

то при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon''_2$ для любого $j \geq q$ выполняется оценка (3.37).
Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq t \leq 1/\varepsilon} |f_{X_1}(t) - e^{-t^2/2}| &\leq \\ &\leq 32(1 + \frac{32\sqrt{e}}{8\ln 2} \ln 1/\varepsilon) \varepsilon. \quad (3.42) \end{aligned}$$

На основе (3.41) и (3.42) заключаем, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon'_2, \varepsilon''_2\}$, выполняется оценка (3.28).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е I. Нетрудно заметить, что порядок в полученной оценке (3.27) неумлучшаем. Об этом автору было сообщено Л.Б. Клебановым.

З а м е ч а н и е 2. Достаточным условием конечности метрики $\mathcal{V}_S$ являются следующие соотношения:

$$E(X - Y) = 0, \quad E(X^2 - Y^2) = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+s} |d(F_X(x) - F_Y(x))| < \infty.$$

Отметим, однако, что условие $(\mathcal{V}_{s, \varepsilon})$ -одинаковой распределенности случайных величин X_1 и $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ при $s > 0$ в теореме 3.3 не означает, что у случайной величины X_1 существует конечный момент порядка $2+s$.

3.3. Оценки устойчивости характеристики вырожденного нормального распределения

Если $F(x)$ - функция распределения, то понятно, что соотношение $F = F^2$ характеризует вырожденное распределение. Спрашивается, что можно сказать об F , если в некоторой фиксированной метрике μ выполняется условие^{*})

$$\mu(X_F, X_{F^2}) \leq \varepsilon \quad (3.43)$$

(напомним, что через X_F обозначается случайная величина с функцией распределения F).

Устойчивость характеристики вырожденной случайной величины независимость статистик (мономов) впервые рассмотрел Ю.Р. Габович [2], [3].

Т е о р е м а (Ю.Р. Габович). Если $0 \leq \varepsilon < 1/4$, то

$$\sup_{X \in \mathcal{E}_\mu} \inf_{X_E \in \mathcal{C}_0} \rho(X, X_E) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}),$$

^{*}) Множество случайных величин, удовлетворяющих условию (3.43), будем обозначать через $\mathcal{E}_\mu$.

где $\mathcal{N}_0$ - класс вырожденных случайных величин.

В заметке Ю.Р. Габовича и Ю.Ю. Мачиса [5] приводится следующий интересный результат.

Т е о р е м а (Ю.Р. Габович, Ю.Ю. Мачис). Существуют такие постоянные C_1 и C_2 , что

$$C_1 \varepsilon \ln 1/\varepsilon \leq \sup_{X \in \mathcal{E}_L} \inf_{X_E \in \mathcal{N}_0} L(X, X_E) \leq C_2 \varepsilon \ln 1/\varepsilon$$

(здесь L - метрика Леви).

В данном разделе мы займемся оценками устойчивости характеристики вырожденной случайной величины одинаковой распределенности статистик.

Если X и aX одинаково распределены и $|a| \neq 1$, то, очевидно, $X = X_E$. Следующая теорема посвящена изучению оценки устойчивости этого предложения.

Т е о р е м а 3.4. Если X и aX (L, ε) -одинаково распределены, $|a| \neq 0; 1$ и существует такой $r > 0$, что $E|X|^r = M_r < \infty$, то

$$L(X, X_E) \leq ((1+r^{-1})/\ln \hat{a}) \varepsilon \ln 1/\varepsilon + M_r \hat{a}^r \varepsilon,$$

где $\hat{a} = \max(|a|, 1/|a|)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В зависимости от значений случайную величину X_n определяем следующим образом:

$$X_n = -X/|a|^n, \text{ если } a < -1;$$

$$X_n = -|a|^n X, \text{ если } -1 < a < 0;$$

$$X_n = a^n X \quad , \text{ если } 0 < a < 1 ;$$

$$X_n = X / a^n \quad , \text{ если } a > 1 .$$

Очевидно, что для любого натурального k справедлива оценка

$$L(X_k, X_{k+1}) \leq \varepsilon .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L(X, X_E) &\leq L(X, X_1) + L(X_1, X_E) \leq \\ &\leq \varepsilon + L(X_1, X_2) + L(X_2, X_E) \leq \\ &\leq 2\varepsilon + L(X_2, X_3) + L(X_3, X_E) \leq \\ &\leq \dots \leq n\varepsilon + L(X_n, X_E) . \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством Чебышева, замечаем, что при $0 < a < 1$

$$P(|X_n| > \varepsilon) = P(|X| > \varepsilon a^{-n}) \leq M_2 a^{n^2} / \varepsilon^2 .$$

Пусть $n = [(1 + 1/\tau) \log_{1/a} 1/\varepsilon]$. Тогда

$$L(X, X_E) \leq (1 + 1/\tau) \varepsilon \log_{1/a} 1/\varepsilon + M_2 \varepsilon / a^\tau .$$

Пусть теперь $a < -1$. В этом случае имеем

$$P(|X_n| > \varepsilon) = P(|X| > |a|^n \varepsilon) \leq M_2 / \varepsilon^\tau |a|^{n\tau} .$$

Положив $n = [(1 + 1/\tau) \log_{|a|} 1/\varepsilon]$, получаем

$$L(X, X_E) \leq (1 + 1/2) \varepsilon \log_{1/a} 1/\varepsilon + M_2 \varepsilon |a|^2.$$

Случаи $-1 < a < 0$ и $a > 1$ рассматриваются аналогично.

Теорема доказана.

Легко заметить, что если X_1, X_2 - независимые одинаково распределенные случайные величины, а X_1 и $X_1 + X_2$ - одинаково распределены, то $X_1 = X_E$. Рассмотрим оценку устойчивости этого утверждения в метрике λ^E (см. стр. 6).

Т е о р е м а 3.5. Если X_1 и X_2 - независимые одинаково распределенные случайные величины, а X_1^2 и $X_1 + X_2$ (λ, ε) -одинаково распределены, то при $0 \leq \varepsilon \leq 1/8$

$$\lambda(X_1, X_E) \leq (1 - \sqrt{1 - 8\varepsilon}) / 4.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$u(t) = |f_{X_1}(t) - 1|.$$

Если

$$f_{X_1}^2(t) - f_{X_1}(t) = v(t), \quad (3.44)$$

то, пользуясь определением метрики λ , легко заметить, что при $|t| \leq 1/\varepsilon$

$$|v(t)| \leq 2\varepsilon.$$

Уравнение (3.44), очевидно, эквивалентно следующему уравнению:

$$(f_{X_1}(t) - 1)^2 + (f_{X_1}(t) - 1) - \epsilon(t) = 0.$$

Пользуясь этим соотношением и оценкой $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, получаем, что

$$u^2(t) - u(t) - R(t) = 0, \quad (3.45)$$

где $R(t)$ - действительная функция, $|R(t)| \leq |\epsilon(t)| \leq 2\epsilon$ при $|t| \leq 1/\epsilon$. Мы, таким образом, задачу решения уравнения (3.44) для комплекснозначных функций свели к задаче решения уравнения (3.45) для действительных функций.

Решая уравнение (3.45), получаем

$$u_{1,2}(t) = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 + 4R(t)})$$

Так как $u(0) = 0$, $R(0) = 0$, $u(t)$ - непрерывная функция, то единственным решением уравнения (3.45) при $|t| \leq 1/\epsilon$ является

$$u(t) = u_2(t) = (1 - \sqrt{1 + 4R(t)}) / 2.$$

Из оценки $|R(t)| \leq 2\epsilon$ следует, что при $|t| \leq 1/\epsilon$

$$u(t) \leq (1 - \sqrt{1 - 8\epsilon}) / 2.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{1}{2} \max_{|t| \leq 1/\epsilon} |f_{X_1}(t) - 1| \leq (1 - \sqrt{1 - 8\epsilon}) / 4,$$

т.е. что $\lambda(X_1, X_\epsilon) \leq (1 - \sqrt{1 - 8\epsilon}) / 4$.

Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., изд-во "Наука", 1977.
2. Габович Ю.Р. Устойчивость некоторых характеристик нормального распределения независимостью статистик. Канд.дисс.МФТИ, 1974.
3. Габович Ю.Р. Об устойчивости некоторых характеристических свойств нормального распределения. Теория вероятн. и ее примен., 19, 2, 1974, 374-383.
4. Габович Ю.Р. Устойчивость характеристик многомерного нормального распределения в теореме Скитовича-Дармуа. Записки научн. семинаров ЛОМИ, 61, 1976, 5-16.
5. Габович Ю.Р., Мачис Ю.Ю. Об устойчивости одной характеристики вырожденного распределения. Литовский метем.сб., 16, 2, 1976, 212-213.
6. Зингер А.А. Исследования по аналитической статистике и их приложения к предельным теоремам теории вероятностей, Докт. дисс. ЛГУ, 1968.
7. Зингер А.А. О выборках, допускающих одинаково распределенные линейные статистики. Теория вероятн. и ее примен., 20, 3, 1975, 668-672.
8. Золотарев В.М. К вопросу об устойчивости разложения нормального закона на компоненты. Теория вероятн. и ее примен., 13, 4, 1968, 738-742.
9. Золотарев В.М. О непрерывности стохастических последовательностей, порождаемых рекуррентными процедурами. Теория вероятн. и ее примен., 20, 4, 1975, 834-847.
10. Золотарев В.М. Эффект устойчивости характеристики распределений. Записки научных семинаров ЛОМИ, 61, 1976, 38-55.

11. Золотарев В.М. Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений. Матем.сборник, 101(143), 1976, 416-454.
12. Золотарев В.М. Аппроксимация распределений сумм независимых случайных величин со значениями из бесконечномерных пространств. Теория вероятн. и ее примен., 21, 1976, 741-758.
13. Золотарев В.М. Об эффекте устойчивости в задачах восстановления аддитивного и полного типов распределений. Теория вероятн.и ее примен., 23, 2, 1978, 470-472.
14. Золотарев В.М. Оценки различия распределений в метрике Леви. Труды МИ им.В.А. Стеклова, 112, 1971, 224-231.
15. Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. М., изд-во "Наука", 1972.
16. Линник Ю.В. Линейные формы и статистические критерии. Укр. матем.журнал, 5, 2, 1953, 207-243; 5, 3, 1953, 247-290.
17. Линник Ю.В.Разложение вероятностных законов.Изд-во ЛГУ, 1960.
18. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. М., изд-во "Наука", 1972.
19. Мачис Ю.Ю. Об устойчивости разложений единичного закона распределения.Теория вероятн.и ее примен.,14, 4, 1969, 715-718.
20. Мачис Ю.Ю. Об устойчивости разложений двухточечного закона распределения, Литовский матем.об.,13, 4, 1973, 131-138.
21. Сапогов Н.А. О независимых слагаемых суммы случайных величин, распределенной приближенно нормально. Вестник ЛГУ, 19, 1959, 78-105.
22. Сапогов Н.А. Устойчивость решений функциональных уравнений, связанных с задачами характеристики вероятностных распределений. Записки научных семинаров ЛОМН, 55, 1976, 15-25.

23. Сенатов В.В. Об уточнении оценок устойчивости для теоремы Г. Крамера. Записки научных семинаров ЛОМИ, 61, 1976, 125-134.
24. Хоанг Хыу Ны. Об устойчивости некоторых характеристических свойств нормальной совокупности. Теория вероятн. и ее примен., 13, 2, 1968, 308-314.
25. Чистяков Г.П. О точности оценок в теоремах об устойчивости разложений нормального распределения и распределения Пуассона. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 26, 1976, 119-128.
26. Чистяков Г.П. О количественной устойчивости разложений некоторых вероятностных распределений. II Вильнюсская конф. по теории вероятн. и матем. статистике. Тез. докладов, т. 2, 1977, 210-211.
27. Янушкявичюс Р.В. Об устойчивости разложений единичного закона распределения в метрике Леви и n -мерного распределения Пуассона в равномерной метрике. Литовский матем. сб., 17, 3, 1977, 200-202.
28. Янушкявичюс Р.В. Оценки в теореме об устойчивости разложений n -мерного распределения Пуассона. В кн.: Студенческие научн. работы, ч.2, Вильнюс, изд-во ВГУ, 1977, 1-13.
29. Янушкявичюс Р.В. Об устойчивости факторизаций неразложимого закона. В кн.: Математические методы и применение ЦВМ, ч.4, Вильнюс, Институт матем. и киберн. АН Лит. ССР, 1978, 102-103.
30. Янушкявичюс Р.В. Об оценках устойчивости в некоторых задачах характеристики распределений. Теория вероятн. и ее примен., 23, 2, 1978, 469-470.
31. Янушкявичюс Р.В. Об оценках меры устойчивости разложений вероятностных распределений на компоненты. Теория вероятн. и ее примен., 23, 3, 1978, 527-539.

32. Beer S., Lukacs E. Stability theorems for a characterization of the Poisson distribution. Теория вер., и ее примн. 19, 4, 1974, 689-699.
33. Cuppens R. Sur les produits finis de lois de Poisson. C.R. Acad. Sci., 266, 1968, 726-728.
34. Kallenberg O. Factorization stability for polynomials and finitely supported probability measures. Chalmers Inst. Techn. and Univ. of Göteborg, 7, 1971.
35. Lévy P. Observations sur la note precedente. C.R. Acad. Sci., 266, 1968, 728-729.
36. Lukacs E. Stability theorems for characterization by constant regression. Periodica Math. Hungarica, 2, 1972, 111-128.
37. Lukacs E. Stability theorems. Adv. in Appl. Prob., 9, 2, 1977, 336-361.
38. Lukacs E., Beer S. Characterization of the multivariate Poisson distribution. Journal of Multivariate Anal., 7, 1977, 1-12.
39. Meshalkin L.D. On the robustness of some characterizations of the normal distribution. Ann. Math. Stat., 39, 5, 1968, 1747-1750.
40. Polya G. Herleitung des Gausschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung. Math. Zeitschrift., 18, 1923, 96-108.
41. Teicher H., On the multivariate Poisson distribution. Scand. Aktuarietidskr., 37, 1954, 1-9.

VPU biblioteka



009 00354595 2