

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Monika Kiškevičiūtė

**Antros eilės paprastosios diferencialinės
lygties tikrinių reikšmių uždavinio
sprendimas**

Bakalauro darbas

Darbo vadovas:
Prof. dr. Donatas Jurgaitis

Šiauliai, 2011

Turiny

Įvadas	3
1 Uždavinio formulavimas	5
2 Nepriklausomo kintamo keitimas	6
3 Sprendinių išraiškos laipsninėmis eilutėmis	8
4 Kraštinio uždavinio sprendimas	11
5 Diferencialinės lygties suvedimas į integralinę lygtį	12
Literatūra	17
Summary	18

Įvadas

Įvairūs realieji procesai, vykstantys gamtoje, technikoje dažnai modeliuojami diferencialinėmis lygtimis. Dažniausiai sudarinėjamų matematinių modelių pritaikymai yra fizikoje, nagrinėjant energijos tvermės dėsnius, masės tvermės dėsnius, impulso tvermės dėsnius ir kitus. Sudarinėjant kokio nors uždavinio matematinį modelį pirmiausia reikia stebėti jį aprašančius dydžius. Dydžiai gali būti įvairiausi, tokie kaip temperatūra, slėgis, greitis ir visi kiti.[1] Pasirenkant stebėti kokius nors dydžius pradedama atlikinėti bandymus ir remiantis atliktais bandymais atrenkami reikalingiausi faktoriai. Tinkantys dydžiai turi tenkinti sudarytas diferencialines lygtis. Po to suradę tų lygčių sprendinius išskiriame tuos, kurie tenkina papildomas sąlygas. Tos sąlygos vadinamos kraštinėmis sąlygomis. Fizikinius procesus aprašanti diferencialinių lygčių sistema, tenkinanti kraštines sąlygas pasirinktos srities kraštinuose taškuose, vadinama kraštiniu uždaviniu.

Paprastoji diferencialinė lygtis yra tokia lygybė, kuri sieja nepriklausomus kintamuosius, nežinomą funkciją bei tos funkcijos išvestines. Lygybę vadinsime paprastąja diferencialine lygtimi, jeigu diferencialinėje lygtyje ieškoma funkcija yra vieno nepriklausomo kintamojo funkcija. Paprastųjų diferencialinių lygčių išraiška yra tokia:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

(1) lygtyje x - nepriklausomas kintamasis, y - ieškomoji funkcija priklausanti nuo x , o $y', \dots, y^{(n)}$ - ieškomosios funkcijos išvestinės. Išraiška gali būti ir kitokia, jei (1) lygtyje galime išreikšti $y^{(n)}$, tai tada ji pasikeis į tokia išraišką:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

Paprastosios diferencialinės lygties (2) eilė sutampa su aukščiausios į jos išraišką įeinančios nežinomos funkcijos išvestinės eile.

Taigi antrosios eilės paprastosios diferencialinės lygties išraiška yra tokia:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (3)$$

Paprastosios diferencialinės lygties pažymėtos (3) numeriu sprendiniai nusakomi tokia funkcija

$$y(x) = \varphi(x, C_1, C_2) \quad (4)$$

priklausančią nuo laisvųjų konstantų C_1 ir C_2 . Ši funkcija iš (4) lygties vadinama paprastosios diferencialinės lygties bendruoju sprendiniu. Geometriškai bendrasis sprendinys reiškia kreivių šeimą.

Sprendinys, kuris yra gaunamas iš bendrojo sprendinio (4) laisvosioms konstantoms parinkus konkrečias reikšmes, vadinamas atskiruoju sprendiniu. Arba kitaip pasakius, tai konkreti šeimos kreivė, einanti per pasirinktą tašką. Atskirasis sprendinys gali būti užrašomas taip:

$$y(x) = F(x)$$

Tam, kad pasirinkti laisvasias konstantas C_1 ir C_2 , reikia išspręsti sistemą:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (5)$$

(5)sistema yra vadinama Koši uždaviniu arba pradiniu. Kartu su Koši uždaviniu yra formuluojami ir kraštiniai uždaviniai, tai būna tada, kai sprendiniui keliami reikalavimai, ne tik pasirinktos srities viduje, bet ir jos kraštuose, tada sąlygos tampa kraštinėmis sąlygomis, o uždavinys kraštiniu uždaviniu.

Paprastosios diferencialinės lygties sprendinys $y = \psi(x)$, kurio negalime gauti iš bendrojo sprendinio nė su viena laisvųjų konstantų reikšme yra vadinamas ypatinguoju lygties sprendiniu.

Paprastosios diferencialinės lygtys, kurių koeficientai tam tikruose taškuose prie aukščiausios išvestinės virsta nuliu arba prie kitų ieškomosios funkcijos išvestinių turi kitų ypatingumą, vadinamos išsigimstančiomis.

Analizinė išsigimstančiųjų paprastųjų diferencialinių lygčių teorija susideda iš dviejų dalių:

- Reguliariai išsigimstančiųjų paprastųjų diferencialinių lygčių teorija.
- Įreguliariai išsigimstančiųjų paprastųjų diferencialinių lygčių teorija.

Analizinės funkcijos išsigimimo taškų aplinkoje reguliariai išsigimstančiųjų paprastųjų diferencialinių lygčių sprendiniai yra tolydūs. Kai išsigimimas yra laipsninis, tai išsigimstančiųjų paprastųjų diferencialinių lygčių struktūra priklauso nuo laipsninės funkcijos rodiklio.[2]

Darbe nagrinėsime kraštinių uždavinį išsigimstančiai antros eilės paprastajai diferencialinei lygčiai. Pereikime prie uždavinio formulavimo.

1 Uždavinio formulavimas

Darbe nagrinėsime tokią antros eilės paprastąją diferencialinę lygtį [3]:

$$R''(r) + \frac{2R'(r)}{r} - \left(E + \frac{l(l+1)}{r^2} + CV(r)\right)R(r) = 0 \quad (6)$$

Šioje lygtyje, kuri pažymėta (6) numeriu, $R(r)$ - ieškomoji funkcija, r - nepriklausomas radijinis kintamasis, $V(r)$ - potencinė energija, C - fizikinė konstanta, E - parametras, o $l \in Q$.

Ieškosime (6) diferencialinės lygties sprendimo tenkinančio kraštines sąlygas:

$$\begin{cases} R(0) = 0, \\ R(\infty) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Duota antros eilės paprastoji diferencialinė lygtis, pažymėta (6), yra vadinama kraštiniu uždaviniu, o suformuluotos sąlygos, pažymėtos (7), yra vadinamos kraštinėmis sąlygomis.

Šias sąlygas užrašykime per ribą ir jos atrodys taip:

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} R(r) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0 \end{cases}$$

Jeigu egzistuoja tokios parametro E reikšmės, su kuriomis uždavinys (6) - (7) turi nenulinius sprendinius $R(r)$, tai tas reikšmes vadinsime kraštinio uždavinio (6) - (7) tikrinėmis reikšmėmis, o atitinkamas funkcijas tikrinėmis funkcijomis. Šis tikrinių sprendinių radimo uždavinys aktualus kvantinėje mechanikoje.

2 Nepriklausomo kintamo keitimas

Tam, kad išspręsti kraštinį uždavinį (6) - (7) reikia (6) lygtyje pakeisti nepriklausomą kintamąjį r pagal tokią formulę.

Pažymėkime naują kintamąjį

$$x = c(\exp^{\frac{r}{a}} - 1),$$

čia $c = \exp(\frac{-R}{a})$.

Ir pakeiskime ieškomąją funkciją $R(r)$ nauja ieškomąją funkcija $v(x)$ tokiu būdu:

$$R(r) = v(x) \tag{8}$$

Iš pažymėto naujo kintamojo išreiškiame

$$\exp^{\frac{r}{a}} = \frac{x}{c} + 1$$

ir tada turėsime, kad kintamasis r yra lygus:

$$r = a \ln\left(\frac{x}{c} + 1\right). \tag{9}$$

Toliau rasime funkcijos $R(r)$ pirmos ir antros eilės išvestines R'_r , R''_r . Ir jas išreiškime naujos ieškomosios funkcijos $v(x)$ išvestinėmis pagal kintamąjį x .

Taigi skaičiuojame $R'(r)$ išvestinę ir gauname, kad jos išraiška yra tokia:

$$R'_r = v'_x x'_r = v' c \left(\exp^{\frac{r}{a}} \frac{1}{a}\right) = \frac{c}{a} \left(\frac{x}{c} + 1\right) v' \tag{10}$$

Skaičiuodami antros eilės išvestinę $R''(r)$ gauname tokią išraišką:

$$\begin{aligned} R''_r &= \frac{c}{a} (v'_x \exp^{\frac{r}{a}})'_r = \frac{c}{a} (v''_{xx} x'_r \exp^{\frac{r}{a}} + v'_x \exp^{\frac{r}{a}} \frac{1}{a}) = \frac{c}{a} (v'' \frac{c}{a} \exp^{\frac{r}{a}} \exp^{\frac{r}{a}} + \\ &+ v' \exp^{\frac{r}{a}} \frac{1}{a}) = \frac{c}{a} \left(\frac{c}{a} v'' \exp^{\frac{2r}{a}} + \frac{1}{a} v' \exp^{\frac{r}{a}}\right) = \frac{c^2}{a^2} v'' \left(\frac{x}{c} + 1\right)^2 + \frac{c}{a^2} v' \left(\frac{x}{c} + 1\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Toliau gautąsias pirmos ir antros eilės išvestinių išraiškas, kurios pažymėtos (10) ir (11) numeriais, surašome į (6) diferencialinę lygtį. Taip pat pakeičiame ir kintamąjį r . Po ilgu ir nesudėtingų skaičiavimų iš (6) lygties gauname diferencialinę lygtį naujos ieškomosios funkcijos $v(x)$ radimui. Ta diferencialinė lygtis yra tokia:

$$\frac{c^2}{a^2} v'' \left(\frac{x}{c} + 1\right)^2 + \frac{c}{a^2} v' \left(\frac{x}{c} + 1\right) + \frac{2\left(\frac{c}{a} \left(\frac{x}{c} + 1\right) v'\right)}{a \ln\left(\frac{x}{c} + 1\right)} - \left(E + \frac{l(l+1)}{a^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)} + CV(r)\right) v = 0 \tag{12}$$

Taip pat mums yra reikalinga funkcija $V(r)$, ją išskleiskime laipsnine eilute x laipsniais. Išraiška bus tokia:

$$\begin{aligned}
V(r) &= \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} = \frac{V_0}{1 + ce^{\frac{r}{a}}} = \frac{V_0}{1 + c(\frac{x}{c})} = \frac{V_0}{1 + x + c} = \frac{V_0}{1 + c + x} = \\
&= \frac{V_0}{(1+c)(1 + \frac{x}{1+c})} = \frac{V_0}{(1+c)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+c}\right)^k
\end{aligned} \tag{13}$$

Kintamojo r išraišką, kuri yra pažymėta (9) numeriu, užrašykime per kintamąjį x . Tada turėsime naują kintamojo r išraišką laipsnine x laipsnių eilute:

$$a \ln\left(\frac{x}{c} + 1\right) = a\left(\frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{3c^3} - \dots + \frac{x^k}{kc^k}\right) = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{kc^k} \tag{14}$$

Dabar (12) lygtį padauginsime iš $a^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)$ ir ją sutvarkę turėsime tokią diferencialinę lygtį ieškomajai funkcijai $v(x)$ rasti:

$$\begin{aligned}
&x^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v'' + 2xc \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v'' + c^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v'' + x \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v' + \\
&+ c \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v' + 2x \ln\left(\frac{x}{c} + 1\right)v' + 2c \ln\left(\frac{x}{c} + 1\right)v' - (Ea^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v + \\
&+ l(l+1)v + Ca^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)V(r)v) = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Kad patogiau būtų skaičiuoti pradžioje gausime pastarosios (15) lygties koeficientų išraiškas x laipsnių eilutėmis. Tos išraiškos bus tokios:

$$x^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{kc^k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{kc^k} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} A_k, \text{ čia } A_k = \frac{1}{c^k} \sum_{n=0}^k \frac{1}{n(k-n)}$$

$$2xc \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} B_k, \text{ čia } B_k = \frac{1}{c^{k-1}} \sum_{n=0}^k \frac{1}{n(k-n)}$$

$$c^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k C_k, \text{ čia } C_k = \frac{1}{c^{k-2}} \sum_{n=0}^k \frac{1}{n(k-n)}$$

$$x \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} A_k$$

$$c \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k B_k$$

$$Ea^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right) = Ea^2 \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_k$$

$$Ca^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)V(r) = Ca^2 v_0 \sum_{k=0}^{\infty} x^k E_k, \text{ čia } E_k = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_i (-1)^{k-i}}{(1+c)^{k-1-i}}$$

3 Sprendinių išraiškos laipsninėmis eilutėmis

(15) diferencialinės lygties sprendinių ieškojime laipsninės eilutės pavidalu:

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} v_k, \quad (16)$$

t.y. diferencialinės lygties sprendinių ieškojime laipsninės eilutės metodu, kuris yra išdėstytas vadovėlyje.[2] Prie pastarųjų sandaugų prijungsimė v'' , v' ir v , t.y. koeficientus dauginsime iš atitinkamos eilės ieškomosios funkcijos išvestinių išraiškų laipsninėmis eilutėmis ir gauname tokias išraiškas:

$$x^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v'' = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} \sum_{l=0}^k A_{k-l}(l+\rho)(l+\rho-1)v_l$$

$$2xc \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v'' = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho-1} \sum_{l=0}^k B_{k-l}(l+\rho)(l+\rho-1)v_l$$

$$c^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v'' = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho-2} \sum_{l=0}^k C_{k-l}(l+\rho)(l+\rho-1)v_l$$

$$x \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v' = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} \sum_{l=0}^k A_{k-l}(l+\rho)v_l$$

$$c \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v' = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho-1} \sum_{l=0}^k B_{k-l}(l+\rho)v_l$$

$$2x \ln\left(\frac{x}{c} + 1\right)v' = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} \sum_{l=0}^k G_{k-l}v_l \quad \text{čia } G_{k-l} = \frac{(k-l+\rho)}{lc^l}$$

$$2c \ln\left(\frac{x}{c} + 1\right)v' = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho-1} \sum_{l=0}^k D_{k-l}v_l, \quad \text{čia } D_{k-l} = \frac{(k-l+\rho)}{c^{l-1}}$$

$$Ea^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)v = Ea^2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} \sum_{l=0}^k A_{k-l}v_l$$

$$l(l+1)v = l(l+1) \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} v_k$$

$$Ca^2 \ln^2\left(\frac{x}{c} + 1\right)V(r)v = Ca^2 v_0 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} \sum_{l=0}^k E_{k-l}v_l$$

Pasinaudojus pastarosiomis gautomis sandaugų išraiškėmis ir surašius jas į (15) diferencialinę lygtį, gauname tokią lygtį:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} [x^{k\rho} \sum_{l=0}^k A_{k-l}(l+\rho)(l+\rho-1)v_l + 2x^{k+\rho-1} \sum_{l=0}^k B_{k-l}(l+\rho)(l+\rho-1)v_l + \\ & \quad + x^{k+\rho-2} \sum_{l=0}^k C_{k-l}(l+\rho)(l+\rho-1)v_l + \\ & \quad + x^{k+\rho} \sum_{l=0}^k A_{k-l}(l+\rho)v_l + x^{k+\rho-1} \sum_{l=0}^k B_{k-l}(l+\rho)v_l + 2x^{k+\rho} \sum_{l=0}^k G_{k-l}v_l + \\ & \quad + 2x^{k+\rho-1} \sum_{l=0}^k D_{k-l}v_l - Ea^2 x^{k+\rho} \sum_{l=0}^k A_{k-l}v_l - l(l+1)x^{k+\rho}v_k - \\ & \quad - Ca^2 v_0 x^{k+\rho} \sum_{l=0}^k E_{k-l}v_l] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Tam, kad galiotų (17) reikia, kad visi koeficientai prie x laipsnių būtų lygūs nuliui.

Lyginame nuliui koeficientus prie vienodų x laipsnių. Matome, kad mažiausias x laipsnis yra $\rho - 2$. Taigi prilyginę koeficientus prie $x^{\rho-2}$ gauname

$$C_0\rho(\rho - 1)v_0 = 0.$$

Pastebime, kad kai $\rho = 0$ arba $\rho = 1$, tuomet v_0 yra bet koks. Kai $\rho \neq 0$ arba $\rho \neq 1$, tai $v_0 = 0$.

Toliau prilyginę nuliui koeficientus prie $x^{\rho-1}$, turėsime, kad

$$C_0(1 + \rho)\rho v_1 + C_1\rho(\rho - 1)v_0 + 2B_0\rho(\rho - 1)v_0 + B_0\rho v_0 + 2D_0v_0 = 0.$$

Jeigu tarsime, kad $\rho = 1$, tai

$$v_1 = \frac{-C_1\rho(\rho - 1)v_0 - 2B_0\rho(\rho - 1)v_0 - B_0\rho v_0 - 2D_0v_0}{C_0(1 + \rho)\rho}.$$

Tačiau, jei sakysime, kad $\rho = 0$, tai turėsime, kad $2D_0v_0 = 0$, bet $D_0 \neq 0$, todėl gauname, kad $v_0 = 0$, o v_1 yra bet koks. Dabar tarkime priešingai, kad $\rho \neq 0$ ir $\rho \neq 1$. Taigi tuo atveju turime, kad v_1 randamas iš formulės

$$v_1 = \frac{-C_1\rho(\rho - 1)v_0 - 2B_0\rho(\rho - 1)v_0 - B_0\rho v_0 - 2D_0v_0}{C_0(1 + \rho)\rho},$$

o v_0 - bet koks.

Dabar prilyginkime nuliui koeficientus prie x^ρ . Šiuo atveju turėsime, kad

$$\begin{aligned} & C_0(2 + \rho)(1 + \rho)v_2 + C_1(1 + \rho)\rho v_1 + C_2\rho(\rho - 1)v_0 + \\ & + 2B_0(1 + \rho)\rho v_1 + 2B_1\rho(\rho - 1)v_0 + B_0(1 + \rho)v_1 + B_1\rho v_0 + 2D_0v_1 + 2D_1v_0 + \\ & + A_0\rho(\rho - 1)v_0 + A_0\rho v_0 + 2G_0v_0 - Ea^2A_0v_0 - l(l + 1)v_0 - Ca^2v_0E_0v_0 = 0. \end{aligned}$$

Imkime, kad $\rho \neq 0$ arba $\rho \neq 1$, tai tada

$$\begin{aligned} v_2 = & [-C_1(1 + \rho)\rho v_1 - C_2\rho(\rho - 1)v_0 - 2B_0(1 + \rho)\rho v_1 - 2B_1\rho(\rho - 1)v_0 - \\ & - B_0(1 + \rho)v_1 - B_1\rho v_0 - 2D_0v_1 - 2D_1v_0 - A_0\rho(\rho - 1)v_0 - \\ & - A_0\rho v_0 - 2G_0v_0 + Ea^2A_0v_0 + l(l + 1)v_0 + Ca^2v_0E_0v_0]/[C_0(2 + \rho)(1 + \rho)]. \end{aligned}$$

Jei tarsime, kad $\rho = 0$, tai koeficientą v_2 rasime iš tokios lygybės:

$$v_2 = \frac{-B_0v_1 - 2D_0v_0 - 2G_0v_0 + Ea^2A_0v_0 + l(l + 1)v_0 + Ca^2v_0E_0v_0}{2C_0},$$

o v_1 buvo rastas aukščiau, v_0 šiuo atveju bus bet koks. Tardami, kad $\rho = 1$ turėsime, kad

$$v_2 = [-2G_1v_1 - 6B_0v_1 - B_1v_0 - 2D_0v_0 - (1 - Ea^2)A_0v_0 - 2G_0v_0 + l(l + 1)v_0 + Ca^2v_0E_0v_0]/6C_0,$$

v_1 rastas auksčiau, o v_0 yra bet koks.

Gausime bendrą rekurentinę formulę pagal kurią rasime visus laipsninės eilutės (16) koeficientus v_k , $k = 0, 1, 2, \dots$

Prilyginę nuliui koeficientus prie $x^{\rho+k}$, turėsime

$$\begin{aligned} C_0(k + \rho)(k + \rho - 1)v_k + \sum_{l=0}^{k-1} (C_{k-l}(l + \rho)(l + \rho - 1) + 2B_{k-1-l}(l + \rho)(l + \rho - 1) + \\ + B_{k-1-l}(l + \rho) + 2D_{k-1-l})v_l + \sum_{l=0}^{k-2} (A_{k-2-l}(l + \rho)(l + \rho - 1) + \\ + A_{k-2-l}(l + \rho) + 2G_{k-2-l} - Ea^2A_{k-2-l} - l(l + 1) - Ca^2v_0E_{k-2-l})v_l = 0. \end{aligned}$$

Dabar tarkime, kad $\rho = 0$, tai

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho}v_k = v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots$$

Atkreipkime dėmesį, kad čia v_0 yra bet koks. Sakykime, kad $\rho = 1$, tai tada

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho}v_k = x(v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots) = v_0x + v_1x^2 + \dots,$$

bet ir čia v_0 yra bet koks. Gavome tik vieną sprendinį.

4 Kraštinio uždavinio sprendimas

Pradžioje užrašykime ieškomosios funkcijos $R(r)$ išraišką laipsnine eilute, pasinaudoję tarpinės funkcijos $v(x)$ išraiška laipsnine eilute. Prisiminkime, kad buvome įvedę naują kintamąjį $x = c(\exp^{\frac{r}{a}} - 1)$. Taip pat žinome, kad

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} v_k.$$

Tuomet turime:

$$R(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (c \exp^{\frac{r}{a}} - 1)^{k+\rho} v_k$$

Tikrinsime kraštines sąlygas, kurios aprašytos (7) sistemoje. Jau žinome, kad $v(x)$ galime užrašyti taip:

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} v_k = x^{\rho} (v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \dots)$$

Įrašykime kintamojo x reikšmę į pastarąją lygtį ir turėsime:

$$R(r) = c^{\rho} (\exp^{\frac{r}{a}} - 1)^{\rho} (v_0 + v_1 c (\exp^{\frac{r}{a}} - 1) + v_2 c^2 (\exp^{\frac{r}{a}} - 1)^2 + \dots)$$

Tikrinkime pirmąją kraštinę sąlygą, kad $R(0) = 0$. Jeigu tarsime, kad $\rho = 1$, tai sąlyga bus patenkinta $R(0) = 0$. Jei laikysime, kad $\rho = 0$, tai $R(0) = v_0$, o iš to išplaukia, kad $v_0 = 0$. Iš to seka, kad $R(0) = 0$. Taigi radome nulinį sprendinį, kuris niekam iki šiol nebuvo naudingas ar reikalingas. Matome, kad pirmoji kraštinė sąlyga yra tenkinama.

Tikrinkime kitą kraštinę sąlygą, kad $R(\infty) = 0$. Jeigu $r \rightarrow \infty$, o $a > 0$, tada $\exp^{\frac{r}{a}} \rightarrow \infty$, o dėl to $R(r) \rightarrow \infty$. Matome, kad antroji sąlyga nėra tenkinama. Galime padaryti išvadą, kad gautasis nenulinis sprendinys $R(\infty) \neq 0$ nėra kraštinio uždavinio (6) - (7) sprendinys.

Galutinį rezultatą formuluoju kaip teoremą.

1 teorema. *Kraštinio uždavinio (6) - (7) sprendinio, naudojant laipsninių eilučių metodą, rasti negalima.*

5 Diferencialinės lygties suvedimas į integralinę lygtį

Dabar pabandydysime duotą (6) lygtį išspręsti kitaip, t.y. diferencialinę lygtį suvesime į integralinę lygtį. Priminsime, kaip ji atrodo:

$$R''(r) + \frac{2R'(r)}{r} - \left(E + \frac{l(l+1)}{r^2} + CV(r)\right)R(r) = 0$$

Kad vardiklyje neliktų nepriklausomo kintamojo r , kuris artėja į nulį, tai pastarąją lygtį reikia padauginti iš r^2 , tuomet turėsime tokią diferencialinę lygtį:

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - [(E + CV(r))r^2 + l(l+1)]R(r) = 0 \quad (18)$$

Pertvarkykime (18) lygtį ir ją užrašykime tokiu būdu:

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - l(l+1)R(r) = (E + CV(r))r^2 R(r) \quad (19)$$

(19) lygtyje prilyginkime kairę pusę nuliui ir tada gausime Oilerio paprastąją homogeninę diferencialinę lygtį [4]:

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - l(l+1)R(r) = 0 \quad (20)$$

Oilerio lygtyje panaudokime keitinį vietoje nepriklausomo kintamojo r . Įveskime naują nepriklausomą kintamąjį t tokiu būdu: $r = \exp^t$ arba kitaip galime užrašyti kaip $t = \ln r$. Taip pat pažymėkime naują ieškomąją funkciją:

$$R(r) = T(t) \quad (21)$$

Ieškosime (21) lygties pirmos ir antros eilės išvestinių pagal kintamąjį r ir jas išreikšime per naują ieškomąją funkciją pagal kintamąjį t . Pirmos eilės išvestinė yra tokia :

$$R'(r) = T'_t \cdot t'_r = T' \cdot t^{-1} \quad (22)$$

O antros eilės išvestinė atrodys taip:

$$R''(r) = (T' \cdot t^{-1})'_r = (T'' - T') \cdot t^{-2} \quad (23)$$

Šias gautas išraiškas, kurios pažymėtos (22) ir (23), surašome į (20) diferencialinę lygtį ir gauname naują antros eilės paprastąją homogeninę diferencialinę lygtį su pastoviais kintamaisiais, kuri surašius išraiškas ir atlikus elementariausius veiksmus, atrodys taip:

$$T'' + T' - l(l+1) \cdot T = 0 \quad (24)$$

(24) lygties nusakančioji lygtis yra tokia:

$$k^2 + k - l(l + 1) = 0 \quad (25)$$

Šios (25) nusakančiosios lygties šaknys yra tokios:

$$-k_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4 \cdot l(l + 1)}}{2} \quad k_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot l(l + 1)}}{2}$$

Jeigu $l \neq -\frac{1}{2}$, šios šaknys yra realios ir skirtingos. Tada bendrasis (24) lygties sprendinys yra:

$$T(t) = C_1 \cdot \exp^{-k_1 t} + C_2 \cdot \exp^{k_2 t}$$

Jeigu $l = -\frac{1}{2}$, tada šaknys yra vienodos ir lygios taip pat $-\frac{1}{2}$. Tada bendrasis (24) lygties sprendinys yra:

$$T(t) = C_1 \cdot \exp^{-k_1 t} + C_2 \cdot \exp^{k_2 t} = C_1 \cdot \exp^{\frac{1}{2}t} + C_2 \cdot \exp^{-\frac{1}{2}t}$$

Tada Oilerio lygties (20) bendrasis sprendinys abiem atvejais yra:

$$R(r) = C_1 \cdot r^{-k_1} + C_2 \cdot r^{k_2} \quad (26)$$

Dabar (19) lygtį spęsimė konstantų varijavimo metodu, šiuo metodu nehomogeninės lygties bendrojo sprendinio ieškosime tokiu pavidalu kaip homogeninės lygties bendrasis sprendinys, kuris aprašytas (26), tik joje laisvasias konstantas C_1 ir C_2 pakeisime į diferencijuojamas funkcijas, kurios priklausys nuo kintamojo r . Taigi varijuotas lygties sprendinys dabar atrods taip:

$$R(r) = C_1(r) \cdot r^{-k_1} + C_2(r) \cdot r^{k_2} \quad (27)$$

Rasime (27) lygybės pirmos ir antros eilės išvestines. Reikia paminėti, kad mums reikalingos tik funkcijų $C_1(r)$ ir $C_2(r)$ pirmos eilės išvestinės, todėl išdiferencijavę pirmąjį kartą (27) lygybę, sumą, kurioje bus mums reikalingos varijuotų konstantų išvestinės, prilyginsime nuliui. Taigi, diferencijuojame pirmą kartą ir gauname:

$$R' = C_1'(r) \cdot r^{-k_1} + C_2'(r) \cdot r^{k_2} - k_1 \cdot C_1(r) \cdot r^{-k_1-1} + k_2 \cdot C_2(r) \cdot r^{k_2-1} \quad (28)$$

Pirmoji lygtis, kuri įeis į diferencialinių lygčių sistemą, bus:

$$C_1'(r) \cdot r^{-k_1} + C_2'(r) \cdot r^{k_2} = 0 \quad (29)$$

Diferencijuojame antrą kartą, tada turėsime tokią išraišką:

$$\begin{aligned}
R'' &= C_1''(r) \cdot r^{-k_1} - k_1 \cdot C_1'(r) \cdot r^{-k_1-1} + C_2''(r) \cdot r^{k_2} + k_2 \cdot C_2'(r) \cdot r^{k_2-1} + (k_1^2 + k_1) \cdot \\
&\cdot C_1(r) \cdot r^{-k_1-2} - k_1 \cdot C_1'(r) \cdot r^{-k_1-1} + (k_2^2 - k_2) \cdot C_2(r) \cdot r^{k_2-2} + k_2 \cdot C_2'(r) \cdot r^{k_2-1} = \\
&= -2k_1 \cdot C_1'(r) \cdot r^{-k_1-1} + 2k_2 \cdot C_2'(r) \cdot r^{k_2-1} + C_1''(r) \cdot r^{-k_1} + C_2''(r) \cdot r^{k_2} + (k_1^2 + k_1) \cdot \\
&\cdot C_1(r) \cdot r^{-k_1-2} + (k_2^2 - k_2) \cdot C_2(r) \cdot r^{k_2-2} \quad (30)
\end{aligned}$$

Gautas $R'(r)$ ir $R''(r)$ išraiškas, kurias pažymėtos (28) ir (30) numeriais, taip pat ir pažymėtąją (27) lygybę, surašome į (19) nehomogeninę diferencialinę lygtį ir gauname diferencialinę lygtį, kurioje nežinomos yra funkcijos $C_1(r)$ ir $C_2(r)$ su pirmos eilės išvestinėmis. Ši lygtis yra tokia:

$$\begin{aligned}
&r^2[-2k_1 \cdot C_1'(r) \cdot r^{-k_1-1} + 2k_2 \cdot C_2'(r) \cdot r^{k_2-1} + C_1''(r) \cdot r^{-k_1} + \\
&+ C_2''(r) \cdot r^{k_2} + (k_1^2 + k_1) \cdot C_1(r) \cdot r^{-k_1-2} + (k_2^2 - k_2) \cdot C_2(r) \cdot r^{k_2-2}] + \\
&+ 2r[C_1'(r) \cdot r^{-k_1} + C_2'(r) \cdot r^{k_2} - k_1 \cdot C_1(r) \cdot r^{-k_1-1} + \\
&+ k_2 \cdot C_2(r) \cdot r^{k_2-1}] - l(l+1)[C_1(r) \cdot r^{-k_1} + C_2(r) \cdot r^{k_2}] = (E + CV(r))r^2R(r)
\end{aligned}$$

Pastarojoje lygtyje atlikime veiksmus ir sutraukime panašiuosius narius, tada ta lygtis atrodys taip:

$$\begin{aligned}
&C_1'(r)[2r^{-k_1+1} - 2k_1 \cdot r^{-k_1+1}] + C_2'(r)[2k_2 \cdot r^{k_2+1} + 2r^{k_2+1}] + \\
&+ C_1(r)[(k_1^2 + k_1) \cdot r^{-k_1} - 2k_1 \cdot r^{-k_1} - l(l+1) \cdot r^{-k_1}] + C_2(r)[(k_2^2 - k_2) \cdot r^{k_2} + \\
&+ 2k_2 \cdot r^{k_2} - l(l+1) \cdot r^{k_2}] + C_1''(r) \cdot r^{-k_1+2} + C_2''(r) \cdot r^{k_2+2} = (E + CV(r))r^2R(r) \quad (31)
\end{aligned}$$

Iš (29) ir (31) lygčių sudarome diferencialinių lygčių sistemą varijuotoms konstantoms $C_1(r)$ ir $C_2(r)$ rasti. Sistema atrodys taip:

$$\begin{cases} C_1'(r) \cdot r^{-k_1} + C_2'(r) \cdot r^{k_2} = 0 \\ C_1'(r)[2r^{-k_1+1} - 2k_1 \cdot r^{-k_1+1}] + C_2'(r)[2k_2 \cdot r^{k_2+1} + 2r^{k_2+1}] = (E + CV(r))r^2R(r) \end{cases} \quad (32)$$

Iš (32) sistemos pirmos lygties išsireiškę $C_1'(r)$ ir tą išraišką įrašę į antrąją lygtį surandame $C_2'(r)$, po to sugrįžę prie $C_1'(r)$ išraiškos randame ir ją. Funkcijų $C_1'(r)$ ir $C_2'(r)$ išraiškos yra tokios:

$$C_1'(r) = \frac{-(E + CV(r))r^2R(r)}{(2k_1 \cdot r^{k_2+1} + 2k_2 \cdot r^{k_2+1})} \cdot r^{k_2+k_1} \qquad C_2'(r) = \frac{(E + CV(r))r^2R(r)}{(2k_1 \cdot r^{k_2+1} + 2k_2 \cdot r^{k_2+1})}$$

Iš išspręstos lygties turime:

$$C_1(r) = \int_0^r \frac{-(E + CV(r))r^2R(r)}{(2k_1 \cdot r^{k_2+1} + 2k_2 \cdot r^{k_2+1})} \cdot r^{k_2+k_1} dr + C_1,$$

$$C_2(r) = \int_0^r \frac{(E + CV(r))r^2 R(r)}{(2k_1 \cdot r^{k_2+1} + 2k_2 \cdot r^{k_2+1})} dr + C_2.$$

Gautas varijuotų konstantų išraiškas surašome į (27) lygybę ir gauname bendrąjį duotosios lygties sprendinį, kuris atrodo taip:

$$R(r) = C_1 \cdot r^{-k_1} + C_2 \cdot r^{k_2} - \frac{r^{-k_1}}{2(k_1 + k_2)} \int_0^r (E + CV(r))r^{1+k_1} R(r) dr + \frac{r^{-k_2}}{2(k_1 + k_2)} \int_0^\infty (E + CV(r))r^{1-k_2} R(r) dr \quad (33)$$

Pastebime, kad bendrajame sprendinyje (33) ieškomoji funkcija $R(r)$ po integralo ženklu. Taigi diferencialinę lygtį (6) suvedėme į integralinę lygtį.

Gautą (33) integralinę lygtį užrašome su vienu integralu ir turime:

$$R(r) = C_1 \cdot r^{-k_1} + C_2 \cdot r^{k_2} + \int_0^\infty F(r, \xi) d\xi, \quad (34)$$

$$\text{čia } \int_0^\infty F(r, \xi) d\xi = -\frac{1}{2(k_1+k_2)} \int_0^\infty (E + CV(\xi)) \xi R(\xi) [r^{-k_1} \xi^{k_1} - r^{k_2} \xi^{-k_2}] d\xi.$$

2 teorema. *Diferencialinė lygtis (6) yra ekvivalenti integralinei lygčiai (34).*

Pareikalaukime, kad būtų patenkitos (7) numeriu pažymėtos kraštinės sąlygos. Imant pirmąją kraštinę sąlygą, kai $R(0) = 0$. Šiuo atveju turime, kad konstantos yra lygios nuliui: $C_1 = C_2 = 0$. Šias reikšmes įrašę į (33) gausime kraštinio uždavinio sprendinio išraišką:

$$R(r) = -\frac{r^{-k_1}}{2(k_1 + k_2)} \int_0^r (E + CV(r))r^{1+k_1} R(r) dr + \frac{r^{-k_2}}{2(k_1 + k_2)} \int_0^\infty (E + CV(r))r^{1-k_2} R(r) dr$$

Kai tikriname antrąją kraštinę sąlygą, $R(\infty) = 0$, tai gausime tokią pat išraišką kaip pastaroji ir laikysime, kad $C_1 = C_2 = 0$.

Norėdami gauti skaitines kraštinio uždavinio sprendinio reikšmes (34) integralinę lygtį spręsimė nuosekliųjų artėjimų metodu [1]. Tada turime, kad:

$$R_n(r) = -\frac{1}{2(k_1 + k_2)} \int_0^\infty (E + CV(\xi)) \xi R_{n-1}(\xi) [r^{-k_1} \xi^{k_1} - r^{k_2} \xi^{-k_2}] d\xi \quad (35)$$

(35) lygtyje $n = 1, 2, 3, \dots$ Pradėdami iteracijas, laikysime, kad $R_0(r) = 1$, tada pirmoji iteracija bus:

$$\begin{aligned}
R_1(r) &= -\frac{1}{2(k_1 + k_2)} \int_0^\infty (E + CV(\xi)) \xi [r^{-k_1} \xi^{k_1} - r^{k_2} \xi^{-k_2}] d\xi = \\
&= -\frac{1}{2(k_1 + k_2)} \int_0^\infty CV(\xi) \xi [r^{-k_1} \xi^{k_1} - r^{k_2} \xi^{-k_2}] d\xi.
\end{aligned}$$

Antroji iteracija bus:

$$\begin{aligned}
R_2(r) &= -\frac{1}{2(k_1 + k_2)} \int_0^\infty (E + CV(\xi)) \xi [r^{-k_1} \xi^{k_1} - r^{k_2} \xi^{-k_2}] [- \\
&\quad -\frac{1}{2(k_1 + k_2)} \int_0^\infty CV(\xi) \xi [r^{-k_1} \xi^{k_1} - r^{k_2} \xi^{-k_2}] d\xi] d\xi
\end{aligned}$$

Ir taip kartojame n kartų, tada tikrines reikšmes atitinkančios funkcijos yra:

$$R(r) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \quad (36)$$

Rezultatą formuluojame kaip teoremą.

3 teorema. *Kraštinio uždavinio (6) - (7) sprendinys užrašytas integraline lygtimi (34) arba artiniais (36) pavidalu.*

Literatūra

1. **Ambrazevičius A.**, *Matematinis modeliavimas*, Vilniaus Universitetas, 2004.
2. **Blonskytė D.**, *Pusiau reliatyvistinės radialinės Šriodingerio lygties su kuloniniu potencialu sprendinių struktūra*. Magistro darbas, Šiauliai, 2010.
3. **Janavičius A., Jurgaitis D.**, *Apie Saxon-Woods potencialo tikrines reikšmes ir funkcijas*, Šiaulių Universitetas, 2007.
4. **Golokvosčius P.**, *Diferencialinės lygtys*, TEV, Vilnius, 2000.

The second order simple differential equation's proper values exercise's solution

Summary

In this work we explored the second order differential equation. There was solved the proper value exercise. Differential equation's solution was obtained as a power series. The second order differential equation's boundary exercise was reduced to the integral equation. And we founded boundary exercise's proper's functions.